А.А. Сапожников

Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре и началам анализа за 10 класс

к пособию «Дидактические материалы по алгебре и начала анализа для 10 класса» Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И. Шварцбург. М.: Просвещение, 1999.

ВАРИАНТ 1.

С-1

1. $60° = \frac{\pi}{3}$; $144° = \frac{\pi}{180} \cdot 144 = \frac{4\pi}{5}$.

2. $\frac{3\pi}{4} = 135°$; $\frac{5\pi}{18} = \frac{5 \cdot 180^0}{18} = 50^0$.

3.

а) $49° = \frac{\pi}{180} \cdot 49 = \frac{49\pi}{180}$; $\sin 49^0 \approx 0{,}7547$; $\cos 49^0 \approx 0{,}6560$;

б) $76^0{,}7' = \frac{\pi}{180} \cdot \left(76 + \frac{7}{60}\right) = \frac{4567\pi}{10800}$;

$\sin 76^0{,}7' \approx 0{,}9728$ $\cos 76^0{,}7' \approx 0{,}2315$.

4.

а) $0{,}8600 \approx 49^0$; **б)** $1{,}2369 \approx 71^0$.

С-2

1. $\frac{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1 - \sin 2\alpha$;

$$\frac{\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)^2}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

2.

а) $\cos 700^0 tg380^0 = \cos 20^0 tg20^0 = \sin 20^0 > 0$;

б) $\cos(-1)\sin(-2) = -\cos(1)\sin(2) < 0$.

3. $\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $tg\alpha = \frac{1}{2}$

С-3

1.

а) $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = -\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

б) $ctg\left(-600^0\right) = -ctg\left(-120^0\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $1+ctg(\pi+\alpha)tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=1+ctg\alpha\, ctg\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$**.**

3. $\cos(2\alpha+\pi)=\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\alpha+\pi)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$**.**

$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos 2\alpha=\cos(2\alpha+\pi)$; $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\alpha$;

$\cos(\alpha+\pi)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha\cdot\cos\alpha=-\cos^2\alpha$.

С-4

1. $4\sin 37^0 30' \cos 37^0 30' \sin 15^0 = 2\sin 75^0 \sin 15^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

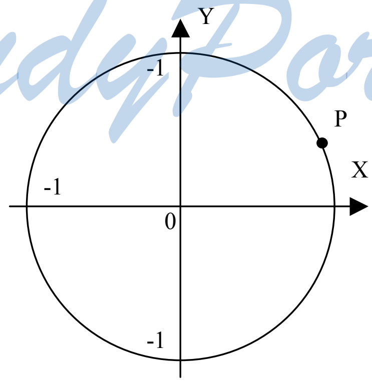
2. $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

$\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\sin 2\alpha=-\frac{336}{625}=\cos 2\alpha\, tg 2\alpha$.

3. $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+4\sin 2\alpha=-\sin 2\alpha+4\sin 2\alpha=3\sin 2\alpha$ **.**

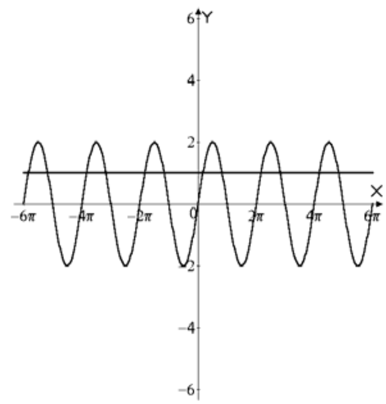
С-5

1. абсцисса : $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ордината : $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.



2. **а) II** ; **б) IV**.

3. $2\sin x = 1$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.



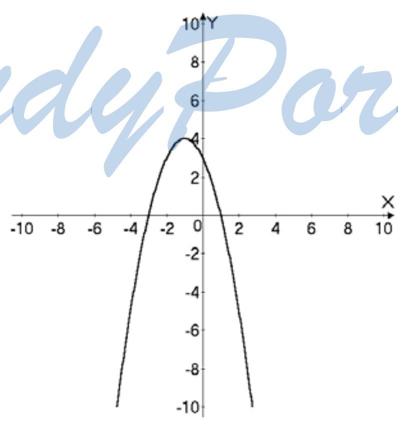
С-6

1. **а)** $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$; ОДЗ $x^2 - 4 \neq 0$, $x \neq \pm 2$;

б) $\sqrt{4x^2 - 1} = f(x)$; ОДЗ $4x^2 - 1 \geq 0$, $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

2. $f(x) = (x-1)^4$; $f(2) = 1$, $f\left(1 + \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^4 = x^2$.

3.



С-7

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - \sin^2 3x$;

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - \sin^2(-3x) = x^4 - 2x^2 - \sin^2 3x = f(x)$.

2. $f(x) = x^3 - 3x + \sin 2x$;

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + \sin(-2x) = -x^3 + 3x - \sin 2x = -f(x)$.

С-8

1. **а)** $\cos 177^0 = -\cos 3^0$; **б)** $\sin 3521^0 = -\sin 79^0 = -\cos 11^0$;

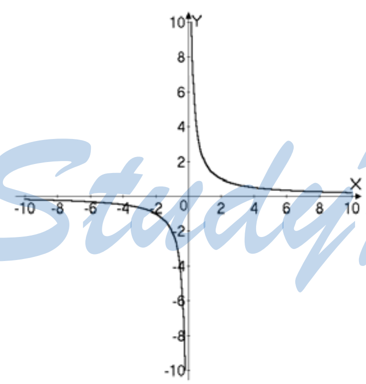
в) $ctg\frac{45\pi}{7} = ctg\frac{3\pi}{7} = tg\frac{\pi}{14}$.

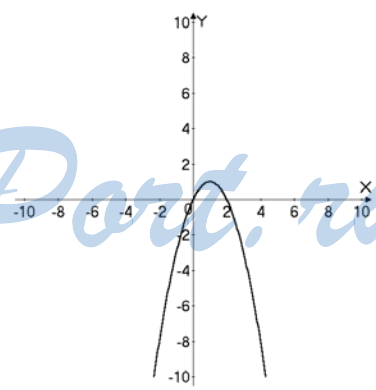
2. $\sin(2x + 4\pi) - 2\sin(x + \pi)\cos(x - \pi) = \sin 2x - 2\sin x \cos x = 0$

3. **а)** $\sin\frac{2x}{3}$, T$=3\pi$; **б)** $\cos 7x$, T$=\frac{2\pi}{7}$ **в)** $tg\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{8}\right)$, T$=3\pi$.

С-9

1. **а)** убывает на обл. опр;





А **Б**

б) возрастает: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; убывает $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

1. $y = \frac{1}{2}\sin x$.

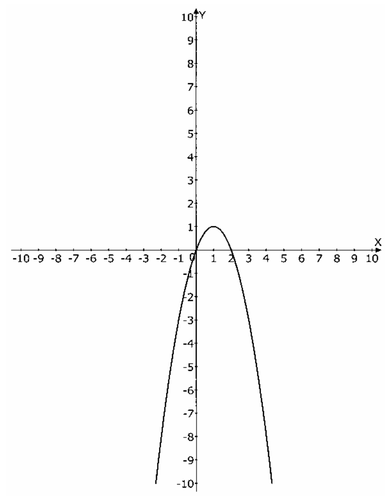
возрастает: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$; убывает: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$.

2. $\cos 1 \vee \cos 3$; $\cos 57^0 > \cos 171^0$.

С-10

1. $y = 2x - x^2$; **а)** (1;1).

б)



в) $2x - x^2 < -3$; $x^2 - 2x - 3 > 0$; $(x-3)(x+1) > 0$;

$x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

2.

$y = \frac{1}{3}\sin x - 1$;

$y' = \frac{1}{3}\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ *– точки максимума*; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ *– точки минимума*;

Экстремумы: $y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\frac{2}{3}$; $y\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1\frac{1}{3}$.

С-11

обл.опр: $x \in [-10;10]$; обл. зн.: $x \in [-3;7]$;

функция возрастает на: $[-10;-6] \cup [-3;6]$;

функция убывает на: $[-6;-3] \cup [6;10]$;

$y > 0$ при $x \in [-10;3) \cup (3;10]$; $y < 0$, $x \in (-3;3)$; $y + 0$ при $x = -3$ и $x = 3$;

$y_{\max} = y(-6) = y(6) = 7$; $y_{\min} = y(0) = -3$.

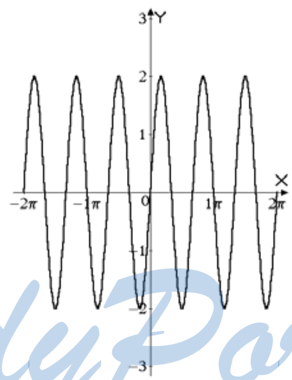
С-12

1.

$f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$; ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$; $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in z$, значит, функция определена всюду на IR, кроме точек $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$.

2.

$y = 2\sin 3x$.



а) $x \in R$; **б)** $y \in [-2;2]$; **в)** $x = \dfrac{\pi n}{3}$; $n \in z$;

г) точка максимума $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi n$; $n \in z$,

значит $y_{\max} = 2\sin\left(3\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi n\right)\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right)$;

точки минимума $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi n$, $n \in z$, значит, $y_{\max} = 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

С-13

1.

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; **б)** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$;

в) $arctg\, 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$; **г)** $\sin\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.

а) $\arcsin(-0{,}9) \approx -1{,}1198$; **б)** $\arccos 0{,}179 \approx 1{,}3908$;

в) $arctg\,\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3082$.

С-14

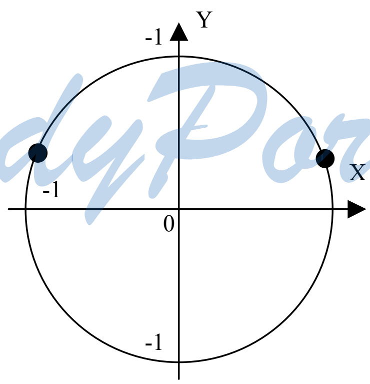
1.

а) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \mp\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; **б)** $\sin 3x = -1$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$;

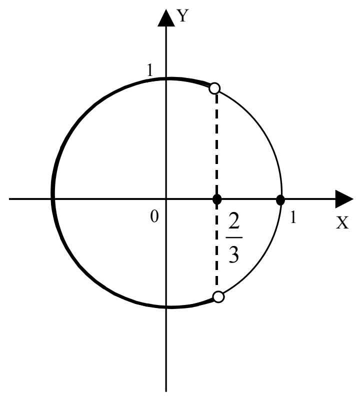
в) $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$, $x = \frac{7\pi}{12} + \pi n$.

С-15

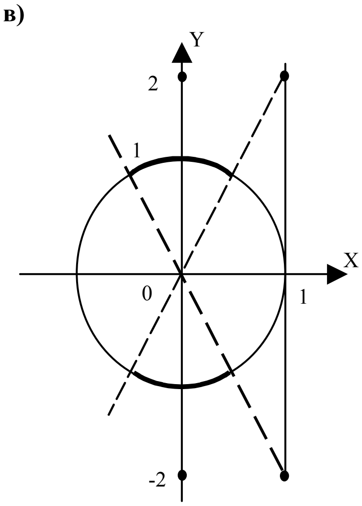
а)



б)



в)



С-16

а) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$;

б) $tg3x > \sqrt{3}$, $x \in \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right)$.

С-17

а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; $Д$=1+8=9, $\cos x = \frac{1+3}{4} = 1$ или

$\cos x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$, $x = 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

б) $2\cos^2 x + 2\sin x = 2{,}5$;

$2\sin^2 x - 2\sin x + 0{,}5 = 0$;

$\frac{Д}{4} = 1 - 1 = 0$;

$\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

С-18

а) $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$; $tgx = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$.

б) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$; $tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$;

$tgx = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $tgx = 3$, $x = arctg\ 3 + \pi n$.

С-19

$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \cos y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} \end{cases}$.

С-20

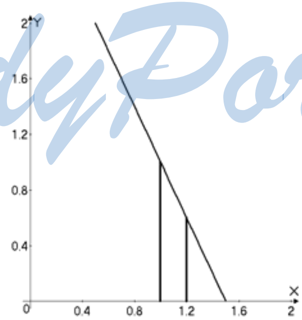
а) $1 - \cos 2x = \sin 2x$; $2\sin^2 x - \sin 2x = 0$; $\sin x(\sin x - \cos x) = 0$;

$\sin x = 0$ или $\sin x = \cos x$; $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

б) $\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = \frac{1}{2}$; $\sin 3x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$.

С-21

1.



$f(x) = 3 - 2x$, $\Delta f(x_0) = 3 - 2x_0 - 2\Delta x + 2x_0 - 3$;

$\Delta f(x_0) = -2\Delta x$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta f(x_0) = -0{,}4$.

2.

$f(x)=x^2-x\,\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x^2+2\Delta x x_0-\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2x_0-1;$

$x_0=0,\ \Delta x=0{,}1,\ \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-0{,}9;$

$\Delta x=0{,}001,\ \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-0{,}999;$

$\Delta x=0{,}00001,\ \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-0{,}99999;$

$x_0=0,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=2x_0-1=-1.$

С-22

1.

$x(t)=t^2+5,\ V=2t,\ V(2)=4$ м/с.

2.

а) $f(x)=4-7x,\ f'(x)=-7$; **б)** $f(x)=\dfrac{3}{x},\ f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}$.

С-23

а) $f(-1)=3$, $g(-1)$-неопред.; **б)** да; **в)** для $f(x)$ не сущ.

$\lim\limits_{x\to -1} g(x)=1.$

С-24

1.

а) $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2} 13f(x)-g(x)=3\lim\limits_{x\to 2} f(x)-\lim\limits_{x\to 2} g(x)=9+1=10;$

б) $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}(3f(x)g^2(x))=3\lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 2} g^2(x)=3\cdot 3\cdot 1=9.$

2)

а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3-x^2+3)=3\lim\limits_{x\to 1} x^3-\lim\limits_{x\to 1} x^2+3=3\cdot 1-1+3=5;$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{x^2+1}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 2} x+1}{\lim\limits_{x\to 2} x^2+1}=\dfrac{3\cdot 2+1}{4+1}=1\dfrac{2}{5}.$

С-25

1.

а) $f(x)=x^5-2\sqrt{x}$, $f'(x)=5x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}$; **б)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$,

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\cdot\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x+2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

2.

$f(x)=3x-4x^3$, $f'(x)=3-12x^2$; $f'(1)=-9$, $f'(5)=-297$;

$f'(x)=3-12x^2$, $f'(x+2)=3-12(x+2)^2$.

3.

$f(x)=6x-3x^2$; $f'(x)=6-6x>0$, $x<1$.

С-26

1.

$f(x)=100x^{10}-10x^{100}$; $f'(x)=1000x^9-1000x^{99}$; $f'(1)=0$

2.

а) $f(x)=x^2-3x+1$; $f'(x)=2x-3$, $f'(x)=0$, при $2x-3=0$;

$x=1\frac{1}{2}$;

$f'(x)>0$ при $x>\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; $f'(x)<0$ при $x<\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$;

б) $f(x)=\frac{x-3}{2x+5}$, $f'(x)=\frac{2x+5-2x+6}{(2x+5)^2}=\frac{11}{(2x+5)^2}$;

$f'(x)=0$ не существует; $f'(x)>0$ всегда, значит, не существует x, при которых $f'(x)<0$.

С-27

1.

$f(x)=\frac{3x+1}{9x^2-1}$; ОДЗ: $9x^2-1\neq 0$; $x\neq\pm\frac{1}{3}$,

значит, $x\in(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};\infty)$.

2.

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x}$; $f(g(x))=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $g(f(x))=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

3.

а) $f(x)=(4-3x)^{100}$, $f'(x)=-300(4-3x)^{99}$;

б) $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, $g'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

С-28

а) $f(x)=\sin 2x-\cos 3x$, $f'(x)=2\cos 2x+3\sin 3x$;

б) $f(x)=tgx-ctg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$;

в) $f(x)=\sin^2 x$, $f'(x)=2\sin x\,\cos x$.

С-29

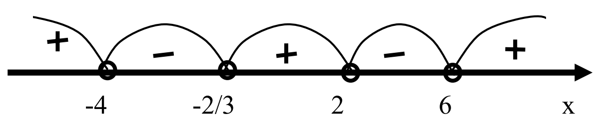
1.

$f(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{x(x-2)}$; функция непрерывна при $x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

2.

а) $2x^2-8>0$, $x^2>4$;
$(x-2)(x+2)>0$;
$x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$;

б) $\dfrac{(x-2)(x+4)(x-6)}{3x+2}\le 0$;

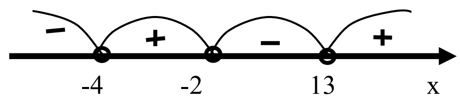


$x\in\left[-4;-\dfrac{2}{3}\right)\cup[2;6]$.

в) $\frac{x^2-11x-26}{x+4}>0$;

$\frac{(x-13)(x+2)}{x+4}>0$;

$x\in(-4;-2)\cup(13;+\infty)$.



С-30

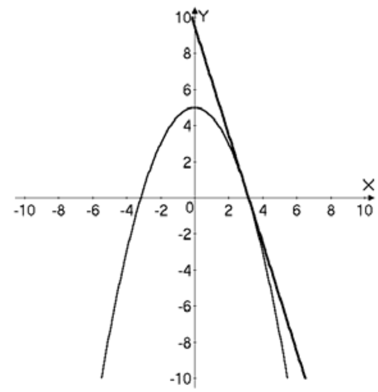
1. $f(x)=x^3+27=0$, $x=-3$; $f'(x)=3x^2$, $f'(-3)=27$ – тангенс угла наклона касательной.

2.

$f(x)=5-\frac{1}{2}x^2$, $f(3)=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$;

$f'(x)=-x$, $f'(3)=-3$;

$y=\frac{1}{2}-3(x-3)=-3x+9{,}5$.



С-31

1. $\sqrt{1+0{,}0008}\approx 1+0{,}0004=1{,}0004$.

2. $1{,}00007^{500}\approx 1{,}035$.

С-32

1. $S(t)=16t-2t^3$, $V(t)=16-6t^2$; $a(t)=-12t$, $V(2)=-8$, $a(2)=-24$.

2. $L(t)=V_0t-\frac{gt^2}{2}$, $L'(t)=V_0-gt$; $L'(t)=60-10t=0$, $t=6$;

$L(t)=6\cdot 60-5\cdot 36=180м.$

С-33

1. $f(x)=x+\frac{9}{x}$, $f'(x)=1-\frac{9}{x^2}>0$; $x\in(-3;3)$, значит функция $f(x)$ возрастает при $x\in(-3;3)$; убывает при $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

2. $y=x^3-6x^2-15x-3$; $y'=3x^2-12x-15$, $y'=0$ при $x^2-4x-5=0$; $x=5$ $x=-1$;

$y-(1)=1-6+15\_3=5$ -max;

$y(5)=125-150-75-3=-103$ -min.

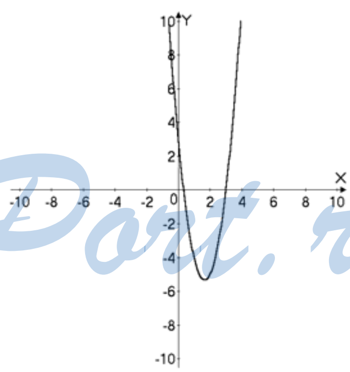
С-34

1. $f(x)=\frac{1}{3}x-x^3$, $f'(x)=\frac{1}{3}-3x^2$; $f'(x)$ при $x=\pm\frac{1}{3}$ – экстремумы;

функция возрастает: $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$; убывает: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

С-35

1.



$y=3x^2-10x+3$;

вершина пораболы

$x_в=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$ – минимум;

$y_в\left(\frac{5}{3}\right)=-5\frac{1}{3}$;

функция убывает при $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right]$;

функция возрастает при $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$.

2.

а) $x^2-17x-18\le 0$; $x\in[-1;18]$;

б) $9x^2-12x+4>0$; $\frac{Д}{4}=36-36=0$, значит, $9x^2-12x+4$ всегда больше нуля.

С-36

$f(x)=\frac{2x-3}{2+x}-1$,

$f'(x)=\frac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$;

возрастает при

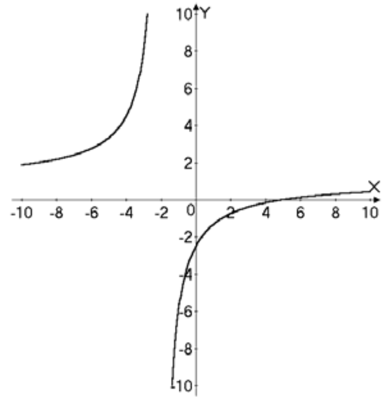
$x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$;

ОДЗ: $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$;

множество значений:

$y\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$;

экстремумов нет.



С-37

1.

$y=\frac{x^4}{4}-8x^2$; $y'=x^3-16x$; $y'=0$ при $x=0$, $x=\pm4$;

$y(0)=0$, $y(-1)=\frac{1}{4}-8=-7\frac{3}{4}$; $y(2)=4-32=-28$;

наибольшее значение $y=y(0)=0$;

наименьшее значение $y=y(2)=-28$.

2.

Введем функцию $f(y)=x^2+y^2$, тогда из условия $x+y=10$ получаем, что $f(y)=(10-y)^2+y^2=2y^2-20y+100$; $f'(y)=4y-20$; Найдем критические точки $f(y)$: $f'(y)=0$ при $4y-20=0$; $y=5$; $f(5)=50-100+100=50$ – минимум, тогда $x=10-y=5$, а искомое разбиение : 10 = 5 + 5.

С-38

1.

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $tg\alpha=-2$;

$tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\alpha-1}{1+tg\alpha}=\frac{-3}{-1}=3$.

2.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta}=\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta}=2tg\alpha\ .$$

3.

$$\cos 75^0+\cos 15^0=2\cos 45^0\cos 30^0=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

С-40

1.

а) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{3}$;

б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$.

2.

а) $\sin\left(x-\frac{3\pi}{5}\right)=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{5}+2\pi n=\frac{\pi}{10}+2\pi n$;

б) $\cos(2x)=\sin x$; $2\sin^2 x+\sin x-1=0$, $Д=1+8=9$;

$\sin x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$ и $\sin x=-1$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ и $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

3.

а) $\cos 2x\le-\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le 2x\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n$; $x\in\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$;

б) $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$, $x\in\left(\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

С-41

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{2}\end{cases};\quad\begin{cases}\sin x=1-\cos y\\ 1-1-\cos^2 y+2\cos y+\sin^2 y=\frac{3}{2}\end{cases};$$

$$\begin{cases}\sin^2 y-\cos^2 y+2\cos y=\frac{3}{2}\\ \sin x=1-\cos y\end{cases};\quad\begin{cases}2\cos^2 y-2\cos y+\frac{1}{2}=0\\ \sin x=1-\cos y\end{cases};$$

$$\begin{cases}\cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2}\end{cases}; \quad \begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\end{cases}.$$

С-42

1.

а) $2x^2 - 3x - 5 \le 0$, $Д$=9+40=49;

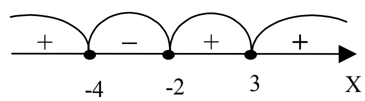
$x = \frac{3 \pm 7}{4}$; $x_1 = \frac{5}{2}$ $x_2 = -1$; $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

б) $x^2 + 4x + 1 > 0$, $Д$/4=4-1=3;

$x = -2 \pm \sqrt{3}$; $x \in \left(-\infty; -2-\sqrt{3}\right) \cup \left(-2+\sqrt{3}; +\infty\right)$.

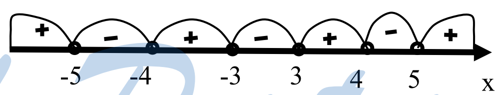
2.

а) $(x+2)^3(x-3)^2(x+4) \le 0$; $x \in [-4; -2] \cup \{3\}$;



б) $\frac{16}{x^2-9} - \frac{9}{x^2-16} < 0$; $\frac{16x^2 - 256 - 9x^2 + 81}{(x^2-9)(x^2-16)} < 0$;

$\frac{7x^2 - 175}{(x^2-9)(x^2-16)} < 0$;



$\frac{x^2 - 25}{(x^2-9)(x^2-16)} < 0$;

$\frac{(x-5)(x+5)}{(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)} < 0$; $x \in (-5; -4) \cup (-3; 3) \cup (4; 5)$.

С-43

а) $y = 2x^6 + 20\sqrt{x}$; $y' = 12x^5 + \frac{10}{\sqrt{x}}$;

б) $y = x\,ctgx$; $y' = ctgx - \frac{x}{\sin^2 x}$;

в) $y = tg\frac{x}{7}$; $y' = \frac{1}{7\cos^2\frac{x}{7}}$;

г) $y = \cos x^2$, $y' = \left(-\sin x^2\right)2x$;

д) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$, $y' = -\frac{9}{x^{10}} + \frac{9}{x^4}$.

С-44

1.

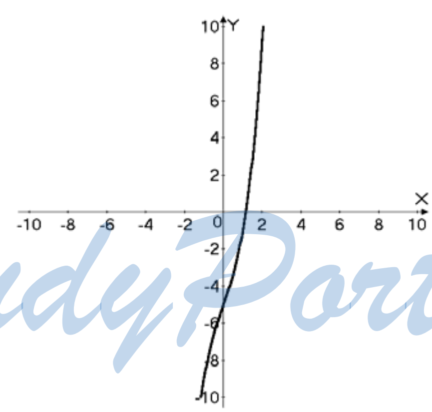
$f(x) = \cos(x+3)$; $f'(x) = -\sin(x+3)$; $f'(-3) = -\sin 0^0 = 0$ – тангенс угла наклона.

2.

а) $1{,}0007^{300} \approx 1{,}23$; **б)** $\sin\frac{\pi}{20} \approx 0{,}157$.

С-45

1.



$f(x) = x^3 + 3x - 5$;

$f'(x) = 3x^2 + 3$;

Экстремумов нет, всегда возрастает.

2.

$y = 4x + \frac{9}{x}$; $y' = 4 - \frac{9}{x^2}$ $\quad y' = 0$ при $x = \pm\frac{3}{2}$;

$y\left(\frac{1}{2}\right)=2+18=20$, $y\left(\frac{3}{2}\right)=6+6=12$;

$y(4)=16+\frac{9}{4}=18{,}25$; наибольшее значение: $y(4)=18{,}25$;

наименьшее значение: $y\left(\frac{3}{2}\right)=12$.

3.

$S(t)=2t^3-2t+3$; $S'(t)=6t^2-2$; $S''(t)=a=12t$;

$F=ma=12\cdot 5\cdot 3=180H$.

ВАРИАНТ 2.

С-1

1. $75^0=\frac{\pi}{180}\cdot 75=\frac{5\pi}{12}$; $168^0=\frac{\pi}{180}\cdot 168=\frac{14\pi}{15}$.

2. $\frac{5\pi}{6}=150^0$; $\frac{17\pi}{36}=85^0$.

3.

$31^0=\frac{31\pi}{180}$; $\sin 31^0\approx 0{,}595$; $\cos 31^0\approx 0{,}857$; $86^0 23'=\frac{5183\pi}{10800}$;

$\sin 86^0 23'\approx 0{,}998$; $\cos 86^0 23'\approx 0{,}017$.

4.

а) $0{,}54\approx 30^0 56'$; **б)** $1{,}4327\approx 82^0 5'$.

С-2

1. $(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=2$;

$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2+1=2$.

2.

а) $\sin 300^0\cos 400^0<0$; **б)** $\sin(-1)\cos(-2)>0$.

3. $\sin\alpha=\frac{1}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

С-3

1. **а)** $\cos\frac{17\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; **б)** $tg600^0=-tg120^0=ctg30^0=\sqrt{3}$.

2. $1+tg(\pi+\alpha)ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

3. $\sin(\pi-a)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$

$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos2\alpha=\cos(\pi-2\alpha)$.

С-4

1. $4\sin7^0 30'\cos7^0 30'\sin75^0=2\sin15^0\cos15^0=\sin30^0=\frac{1}{2}$.

2. $\sin\alpha=\frac{24}{25},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2};\ \cos\alpha=\frac{7}{25},\ \sin2\alpha=\frac{336}{625}$;

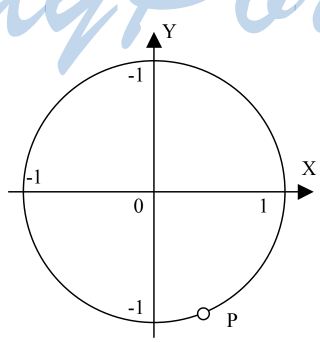
$\cos2\alpha=-\frac{527}{625};\ ctg2\alpha=-\frac{527}{625}\cdot\frac{625}{336}=-\frac{527}{336}$.

3. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+1-\sin2\alpha=1+\sin2\alpha+1-\sin2\alpha=2$.

С-5

1. см.рис.

абсцисса : $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; ордината : $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



2.

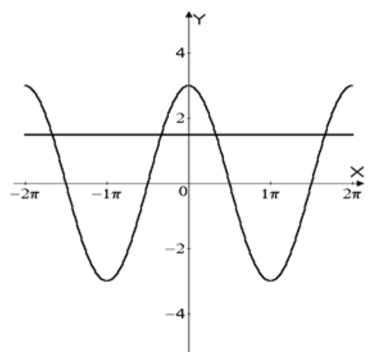
а) II; **б)** III

3.

см.рис;

$3\cos x = 1{,}5$; $\cos x = \frac{1}{2}$;

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.



С-6

1.

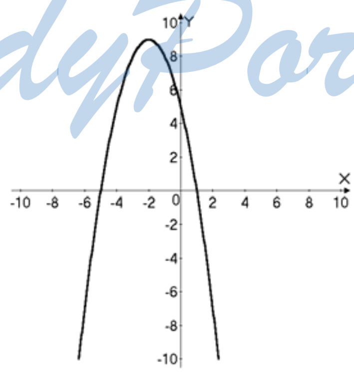
а) $f(x) = \frac{5}{3x^2 - 2x}$; ОДЗ: $3x^2 - 2x \neq 0$; $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$, значит,

$x \in (-\infty;0) \cup \left(0;\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\infty\right)$;

б) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 4}$; ОДЗ: $9x^2 - 4 \geq 0$; $x \in \left(-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$

2. $f(x) = (x+1)^6$; $f(1) = 64$; $f\left(\sqrt{x} - 1\right) = x^3$

3.



С-7

1.

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\ ;\ f(-x)=\sqrt{\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}}=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=f(x).$$

2.

$$g(x)=7x^3+\sin\frac{x}{2};$$

$$g(-x)=7(-x)^3+\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=-\left(7x^3+\sin\frac{x}{2}\right)=-g(x).$$

С-8

1.

а) $tg139^0=-tg41^0$; б) $\cos 2743^0=-\cos 43^0$;

в) $\sin\frac{49\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5}$.

2.

$$\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin(2x-\pi)\cos(2x+\pi)=-\sin 4x+$$

$$+2\cos 2x\sin 2x=0.$$

3.

а) $f(x)=\cos\frac{3x}{2}$, T= $\frac{4\pi}{3}$; **б)** $f(x)=tg5x$, T= $\frac{\pi}{5}$;

в) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$, T= 6π .

С-9

1.

а) см.рис

$f(x)=-\frac{4}{x}$

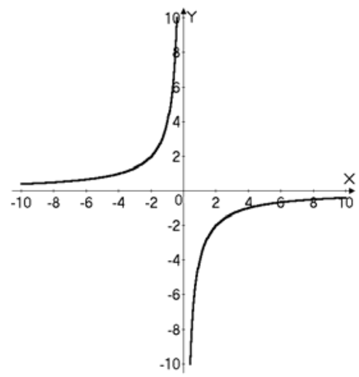
возрастает на обл. опред.

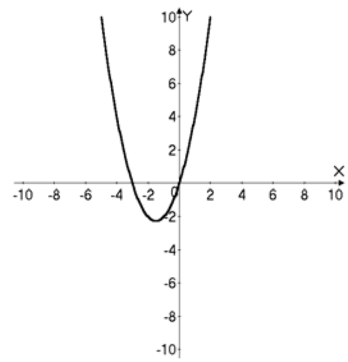
б) см.рис

$f(x)=3x+x^2$

убывает при $x\in(-\infty;-1{,}5]$;

возрастает при $x\in[-1{,}5;+\infty)$.





2. $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$**;**

возрастает: $[-2\pi + 4\pi n; 4\pi n]$; убывает: $[4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$.

3. $\sin 1 \ \vee \ \sin 3$; $\sin 1 > \sin 3$.

С-10

1.

$y = 3x + x^2$;

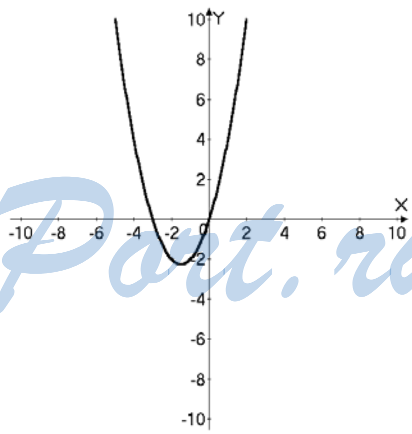
а) $x = -\frac{3}{2}$ – точка минимума;

б) см.рис;

в) $x^2 + 3x > 4$;

$x^2 + 3x - 4 > 0$;

$x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.



2.

$y = \frac{1}{5}\cos x + 1$;

$x = 2\pi n$ – точка максимума;

$x = \pi + 2\pi n$ – точка минимума;

$y(2\pi n) = 1\frac{1}{5}$; $y(\pi + 2\pi n) = \frac{4}{5}$.

С-11

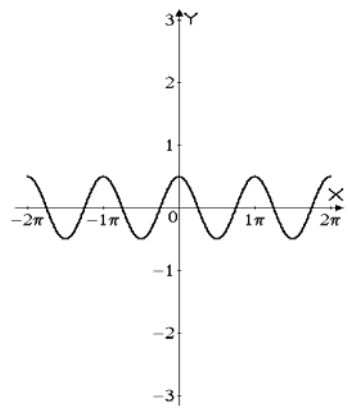
обл.опр $[-6;10]$; обл.зн $[-3;6]$;
возрастает при $x \in [-6;-2] \cup [5;10]$; убывает при $x \in [-2;5]$;
наименьшего значения $y = -3$ функция достигает при $x = 5$;
наимбольшего значения $y = 6$ функция достигает при $x = 10$;
точка максимума $x = -2$; точка минимума $x = 5$;
экстремумы: $y_{\min} = -3$; $y_{\max} = 4$;
функция равна 0 при $x = -6$; $x = 1$; $x = 8$.

С-12

1. $f(x) = \dfrac{1}{2\sin 3x}$; ОДЗ: 2 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$x \neq \dfrac{\pi n}{3}$

2. $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x$



см.рис

а) $x \in R$

б) $y \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$; **в)** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} = x$;

г) $x = \pi n$ – точка максимума;

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ – точка минимума;

экстремумы: $y(\pi n) = \dfrac{1}{2}$; $y\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\dfrac{1}{2}$.

С-13

1.

а) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$; **б)** $\arccos(-1) = \pi$;

в) $arctg(-1) + \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{1}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

2.

а) arcsin 0,8≈0,9273; **б)** arccos(-0,273)≈1,8473; **в)** $arctg\ \pi \approx 1{,}26$.

С-14

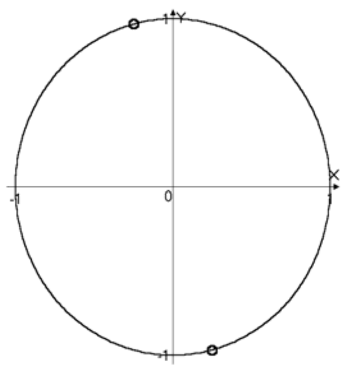
а) $tgx = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$;

б) $\cos^2 2x = 1$; $\cos 2x = \pm 1$; $x = \frac{\pi n}{2}$;

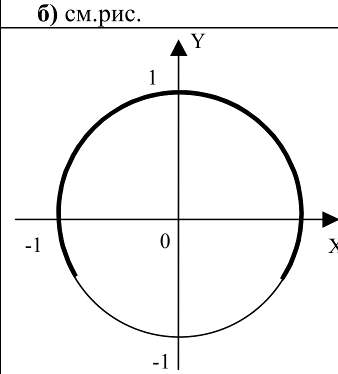
в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$.

С-15

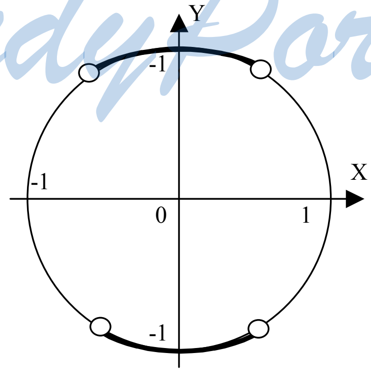
а) см.рис.



б) см.рис.



в) см.рис.



С-16

а) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$;

б) $tg\frac{x}{2} \le -1$; $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$; $x \in \left(\pi + 2\pi n\ ;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$.

С-17

а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; $Д = 1 + 8 = 9$;

$\sin x = -1$; $\quad \sin x = \frac{1}{2}$;

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

б) $2\sin^2 x - 2\cos x = \frac{5}{2}$; $2\cos^2 x + 2\cos x + \frac{1}{2} = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

С-18

а) $\sin 2x = -\cos 2x$; $tg 2x = -1$; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$;

б) $\sin^2 x + 2\sin 2x + 3\cos^2 x = 0$; $\cos x \ne 0$;

$\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0;$

$tg^2 x + 4tgx + 3 = 0$; $tgx = -3$ $\quad tgx = -1$

$x = arctg(-3) + \pi n$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

С-19

$\begin{cases} x - y = \pi \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pi + y \\ \cos(\pi + y) - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \pi + y \\ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \pi \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}$.

С-20

а) $1+\cos 2x=\sin 2x$;

$1+2\cos^2 x-1=2\sin x\cdot\cos x$; $\cos x(\cos x-\sin x)=0$

$\cos x=0$; $tgx=1$;

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$;

объединяя полученные результаты получим: $x=\dfrac{\pi}{8}+(-1)^k\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}$.

б) $\sin 3x\sin x+\cos 3x\cos x=-1$; $\cos 2x=-1$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$

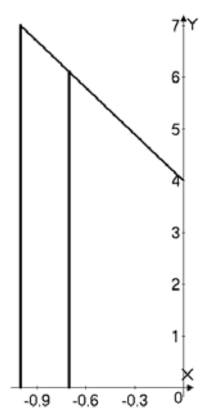
С-21

1.

см.рис.

$f(x)=4-3x$; $\Delta f(x_0)=-3\Delta x$;

$x_0=-1$, $\Delta x=0{,}3$; $\Delta f(x_0)=-0{,}9$.



2.

$f(x)=x^2+x$;

$\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\left(\Delta x^2+2x_0\Delta x+\Delta x\right)/\Delta x=\Delta x+2x+1$

$x_0=0$, $\Delta x=0{,}1$; $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=1{,}1$;

$\Delta x=0{,}001$, $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=1{,}001$;

$\Delta x=0{,}00001$ $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=1{,}00001$;

$\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=2x_0+1=1$, так как $x_0=0$.

С-22

1.

$x(t)=100-t^2$; $V(t)=-2t$; $V(4)=-8$ м/с.

2.

а) $f(x)=5-6x$; $f'(x)=-6$; **б)** $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

С-23

а) $f(1)=1$, $g(1)=2$;
б) для f существ, для g нет;
в) $\lim_{x\to 1} g(x)=2$, для f несущ .

С-24

1. **а)** $\lim\limits_{x\to -3} y = 3\lim\limits_{x\to -3} f(x) - 2\lim\limits_{x\to -3} g(x) = -3\cdot 2 - 2\cdot 5 = -16$;

б) $\lim\limits_{x\to -3} y = 2\lim\limits_{x\to -3} f^2(x)\cdot \lim\limits_{x\to -3} g(x) = 2\cdot 4\cdot 5 = 40.$

2. **а)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-4x-3\right) = -1+4-3=0$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x+1}{x^2-1}=\frac{9}{3}=3.$

С-25

1. **а)** $f(x)=2x^7+4\sqrt{x}$; $f'(x)=14x^6+\frac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-3}$; $f'(x)=\frac{2x^3-6x-2x^3-2x}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{-8x}{\left(x^2-3\right)^2}$.

2.
$f(x)=2x^2+x^3$; $f'(x)=4x+3x^2$; $f(2)=8+12=20$;
$f(4)=16+3\cdot 16=64$; $f(x-3)=(x-3)(-5+3x)$.

3.
$f(x)=4x+2x^2$; $f'(x)=4+4x\le 0$; $x\le -1$.

С-26

1.
$f(x)=50x^5+5x^{50}$; $f'(x)=250x^4+250x^{49}$; $f'(-1)=250-250=0$.

2.
а) $f(x)=x^2+3x-3$; $f'(x)=2x+3$; $f'(x)=0$ при $x=-1{,}5$;
$f'(x)>0$ при $x>-1{,}5$; $f'(x)<0$ при $x<-1{,}5$.

б) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+2}$; $f'(x)=\dfrac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{7}{(x+2)^2}$

$f'(x)=0$ нет решений; $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$;

$f'<0$ ни при каких x.

С-27

1.

$f(x)=\dfrac{4x-1}{1-16x^2}$; ОДЗ: $1-16x^2\neq 0$; $x=\pm\dfrac{1}{4}$, значит,

$x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\infty\right)$.

2.

$f(g(x))=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$; $g(f(x))=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$.

3.

а) $f(x)=(3-2x)^{160}$; $f'(x)=-320(3-2x)^{159}$;

б) $g(x)=\sqrt{1-x^2}$; $g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

С-28

а) $f(x)=\cos 2x-\sin 3x$; $f'(x)=-2\sin 2x-3\cos 3x$;

б) $f(x)=ctgx+tg(x-\pi/4)$; $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2(x-\pi/4)}$;

в) $f(x)=\cos^2 x$; $f'(x)=-2\sin x\cos x$.

С-29

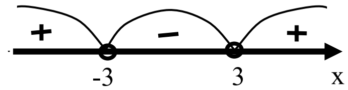
1.

$f(x)=\dfrac{x^4+3x^3}{x(x+2)}$; ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq -2$, значит, промежутки непрерывности: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;\infty)$.

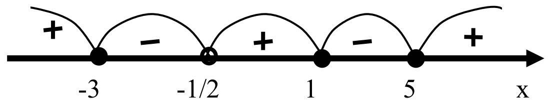
2.

а) $3x^2 - 27 < 0$;

$(x-3)(x+3) < 0$; $x \in (-3;3)$;



б) $\dfrac{(x-1)(x+3)(x-5)}{2x+1} \geq 0$;

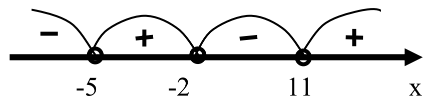


$x \in (-\infty;-3] \cup \left(-\dfrac{1}{2};1\right] \cup [5;+\infty)$;

в) $\dfrac{x^2 - 9x - 22}{x+5} > 0$;

$\dfrac{(x-11)(x+2)}{x+5} > 0$;

$x \in (-5;-2) \cup (11;+\infty)$.



С-30

1. $f(x) = x^3 - 27$; $f(x) = 0$ при x=3, значит, x = 3 – точка пересечения графика с осью абсцисс; $f'(x) = 3x^2$, $f'(3) = 27$ – тангенс угла наклона касательной в этой точке.

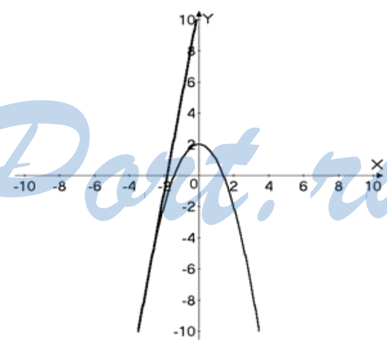
2.

$f(x) = 2 - x^2$; $f(-3) = -7$;

$f'(x) = -2x$, $f'(-3) = 6$;

уравнение касательной

$y = -7 + 6(x+3) = 6x + 11$.



С-31

1. $\sqrt{1 - 0{,}0016} \approx$ 1-0,008=0,992.

2. $0{,}9996^{300} \approx 0{,}88$.

С-32

1. $S(t)=12t-3t^3$, $V(t)=12-9t^2$; $a(t)=-18t$, $V(1)=3$, $a(1)=-18$.

2. $h(t)=40t-5t^2$; $h'(t)=40-10t=0$; $h'(t)=0$ при

$t=4$, $h(4)=160-80=80$ м – наибольшая высота, которой достигнет тело.

С-33

1. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$; $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}>0$; $f'(x)=0$ при $x\in[-\infty;-2]\cup(2;\infty)$, значит, на этих промежутках данная функция возрастает; $f'(x)<0$ при $x\in(-2;2)$, значит, на этих промежутках данная функция убывает.

2. $y=x^3-6x^2-15x+7$; $y'=3x^2-12x-15=0$;

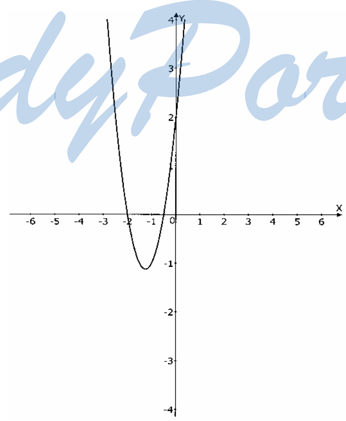
$x^2-4x-5=0$; $x_{\min}=5$ $x_{\max}=-1$.

С-34

$f(x)=48x-x^3$; $f'(x)=48-3x^2$; $f'(x)=0$ при $x=\pm4$ – экстремумы; функция возрастает при $x\in[-4;4]$; убывает при $x\in(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.

С-35

1.



$y = 2x^2 + 5x + 2$; см.рис; *Д*=25-16=9;

$x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; нули: $(-2;0)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;2)$;

убывает: $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]$; возрастает: $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right)$; $x = -\frac{5}{4}$ -min

2.

а) $x^2 + 15x - 16 \ge 0$; $(x+16)(x-1) \ge 0$; $x \in (-\infty;-16] \cup [1;+\infty)$;

б) $4x^2 + 12x + 9 \le 0$; $(2x+3)^2 \le 0$; неравенству удовлетворяет только $x = -\frac{2}{3}$.

С-36

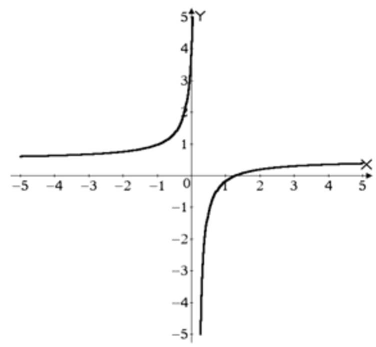
см.рис

$y = \frac{x+3}{1-2x} + 1$

ОДЗ: $x \ne \frac{1}{2}$

возрастает: $x \ne \frac{1}{2}$

экстремумов нет



С-37

1. $y = 2x^4 - 8x$; $x \in [-2;1]$; $y' = 8x^3 - 8$; $y' = 0$ при $y = 1$;

$y(1) = -6$; $y(-2) = 48$; значит, $y = 6$ – наименьшее значение функции;

$y = 48$ – наибольшее значение функции.

2. Введем функцию $f(x) = x^2 y$, тогда из условия $x + y = 18$, где *x* и *y* искомые неотрицательные слагаемые, получаем $f(x) = x^2(18 - x) = 18x^2 - x^3$; $f'(x) = 36x - 3x^2$, найдем критические точки функции $f(x)$: $f'(x) = 0$ при $36x - 3x^2 = 0$; $x = 0$ – посторонний корень, т.к. $x > 0$ по условию, значит, *x* = 12; $f(12) = 864$ – максимум, тогда *y* = 18 – *x* = 18 – 12 = 6, а искомое разбиение: 12 + 6 = 18.

С-38

1.

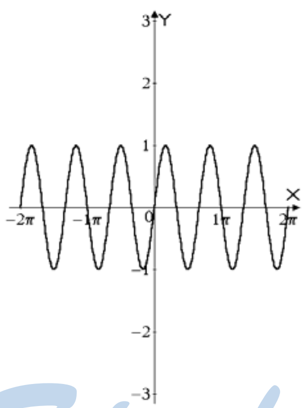
$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$tg\alpha=\frac{1}{2}$; $tg\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\alpha+1}{1-tg\alpha}=\frac{3}{2}\cdot 2=3$.

2. $\frac{\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\cos(\pi-2\alpha)}{\cos 4\alpha}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos 4\alpha}=\frac{1}{4}tg4\alpha$.

3. $\sin 75^0-\sin 15^0=2\sin 30^0\cos 45^0=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

С-39



а)

см.рис;

$y=\sin 3x$, $x\in R$;

нули: $\left(\frac{\pi n}{3};0\right)$;

возрастает: $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right]$;

убывает: $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right]$;

max: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$;

min: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$.

б)

см.рис;

$y=\cos\frac{x}{4}$, $x\in R$, $y\in[-1;1]$;

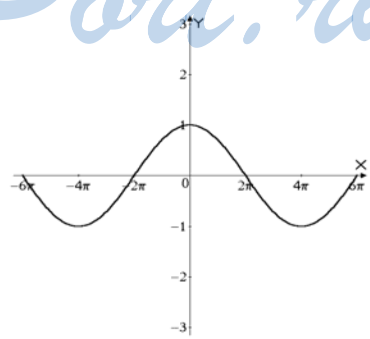
нули: $(2\pi+4\pi n;0)$;$(0;1)$;

возрастает: $[-4\pi+8\pi n;8\pi n]$;

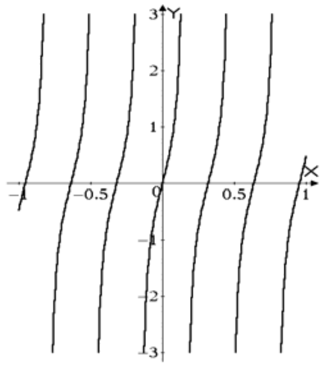
убывает: $[8\pi n;4\pi+8\pi n]$;

min: $x=4\pi+8\pi n$;

max: $x=8\pi n$.



в)



$y = tg\pi x$;

$x \neq \frac{1}{2} + n$, $y \in R$;

возрастает на обл. опр.;
нули: $x = n$;
экстремумов нет.

С-40

1.

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2.

а) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) = -1$; $x = \pi + 2\pi n - \frac{3\pi}{7} = \frac{4\pi}{7} + 2\pi n$;

б) $\cos 2x = \cos x$; $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; $Д$=1+8=9;

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$; $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

3.

а) $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right]$;

б) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$, $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$.

С-41

$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} \sin x = -\cos y \\ 1 - \cos^2 y + \sin^2 y = 1{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} \cos 2y = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\cos y \end{cases}$

$\begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \\ \sin y = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = (-1^k)\frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}$.

С-42

1.

а) $x^2-3x-10\le 0$; $(x+2)(x-5)\le 0$; $x\in[-2;5]$;

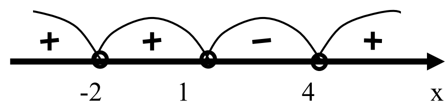
б) $x^2-6x+1>0$; $(x-(3-2\sqrt{2}))$; $x+(3-2\sqrt{2}))>0$;

$x\in\left(-\infty;3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(3+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

2.

а) $(x-1)(x+2)^2(x-4)\le 0$;

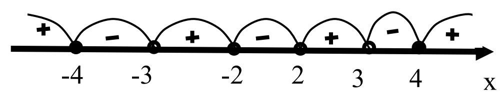
$x\in\{-2\}\cup[1;4]$;



б) $\dfrac{12}{x^2-4}-\dfrac{7}{x^2-9}\ge 0$;

$\dfrac{12x^2-108-7x^2+28}{\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)}\ge 0$;

$\dfrac{x^2-16}{\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)}\ge 0$;



$\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}\ge 0$;

$x\in(-\infty;-4]\cup(-3;-2)\cup(2;3)\cup[4;+\infty)$.

С-43

а) $y=x^7-4\sqrt{x}$, $y'=7x^6-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $y=xtgx$, $y'=tgx+\dfrac{x}{\cos^2 x}$;

в) $y=ctg\dfrac{x}{3}$, $y'=-\dfrac{1}{3\sin^2\dfrac{x}{3}}$;

г) $y=\sin x^3$, $y'=2x\cos x^2$;

д) $y=\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^8}$, $y'=-\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{8}{x^9}$.

С-44

1.

$f(x)=\sin(x-3)$; $f'(x)=\cos(x-3)$; $f'(3)=1$ – тангенс угла наклона касательной.

2.

а) $\sqrt{0{,}9996}=1-\dfrac{0{,}0004}{2}=0{,}9998$;

б) $\sin\dfrac{\pi}{100}\approx\sin 0{,}031416\approx 0{,}031$.

С-45

1.

см.рис;

$y=x^3-3x+5$;

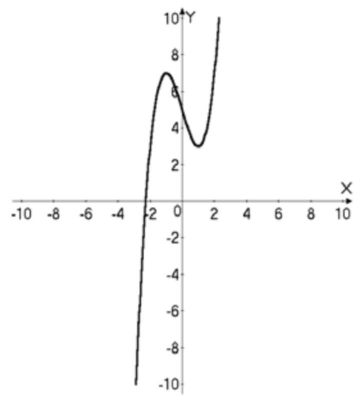
$x\in R$, $y\in R$;

$y'=3x^2-3$, $y'=0$ при $x=\pm1$ – критические точки.

возрастает: $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

убывает: $x\in(-1;1)$;

x=1-min, x=-1=max.



2.

$y=x+\dfrac{4}{x}$; $y'=1-\dfrac{4}{x^2}$; $y'=0$ при $x=\pm2$;

$y(1)=5$, $y(2)=2+2=4$, $y(4)=5$; $y(-2)=-4$;

max: x=1, x=4;

min: x= –2.

3.

$S(t)=3t+2t^3$;

$S'(t)=3+6t^2$;

$S''(t)=12t$;

$F=ma=12\cdot3\cdot4=144$ Н.

ВАРИАНТ 3

С-1

1. $64° = \frac{\pi}{180} \cdot 64 = \frac{16\pi}{45}$; $160° = \frac{\pi}{180} \cdot 160 = \frac{8\pi}{9}$.

2. $\frac{3\pi}{5} = 108°$; $1\frac{3}{4}\pi = 135° + 180° = 315°$.

3. $\alpha = \frac{180 \cdot (10-2)}{10} = 144° = 0{,}8\pi$.

4. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$; $\sin\alpha = \sin 54° \approx 0{,}809$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 1{,}3764$.

С-2

1. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ $180° < \alpha < 270°$; $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$.

2. $16\sin^4\alpha - (\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha)^2 = 24\sin^2\alpha - 9$;
$(4\sin^2\alpha - \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha)(4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha) =$
$= 15\sin^2\alpha - 9\cos^2\alpha = 24\sin^2\alpha - 9$.

3. **а)** $\sin\frac{4\pi}{5}\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} > 0$; **б)** $\sin 3 \cos 4 < 0$.

С-3

1. **а)** $\operatorname{tg}(-390°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; **б)** $\cos\frac{11\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin(180° - \alpha) - \frac{\cos^2(180° + \alpha)}{\cos(\alpha - 270°)} = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} =$

$= \sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

3. $\sin 105° \cos 15° + \sin 15° \sin 165° + \operatorname{tg} 225° =$
$= \cos^2 15° + \sin^2 15° + \operatorname{tg} 45° = 2$.

С-4

1. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $90° < \alpha < 180°$; $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$

а) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{24}{25}$;

б) $\sin(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{10} - \frac{4}{10} = -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$;

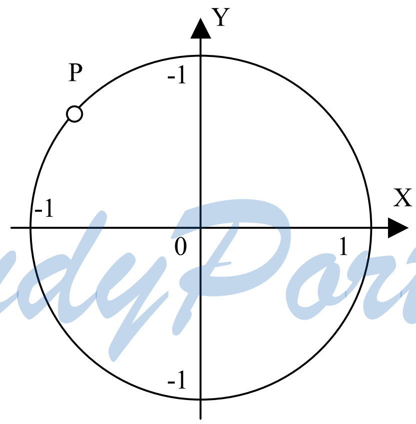
в) $\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7} = -\frac{1}{7}$.

2. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x-x\right) = \frac{1}{2}$.

С-5

1.

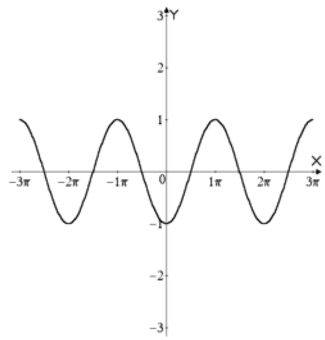
абсцисса : $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ордината : $\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



2. **а)** **II** **;** **б)** **IV.**

3.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$



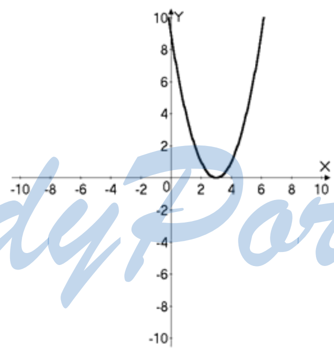
С-6

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2-5}$; ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 2x^2-5\ne 0\end{cases}$; $x\in\left[0;\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};+\infty\right)$.

2. $f(x) = 2\sin 3x + 1$;

а) $f(0) = 1$; **б)** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3$; **в)** $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$.

3.



С-7

а) $f(x)=\dfrac{3x^2}{4\cos x}$; $f(-x)=\dfrac{3(-x)^2}{4\cos(-x)}=\dfrac{3x^2}{4\cos x}=f(x)$. Четная

б) $\varphi(x) = 2x^5 + 3\operatorname{ctg}x$; $\varphi(-x) = 2(-x)^5 + 3\operatorname{ctg}(-x) = -2x^5 - 3\operatorname{ctg} x = \varphi(x)$.
Нечетная.

С-8

1. **а)** $\sin(-1470°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos(-690°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\mathrm{tg}(-1320°) = -\mathrm{ctg}\, 30° = -\sqrt{3}$.

2.

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha}{\cos(\pi+\alpha)\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha} =$$

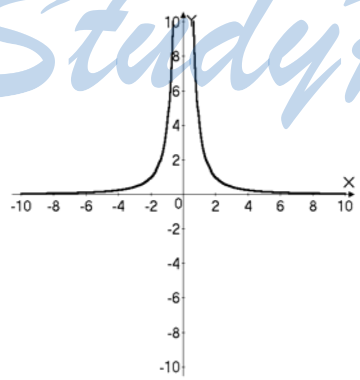
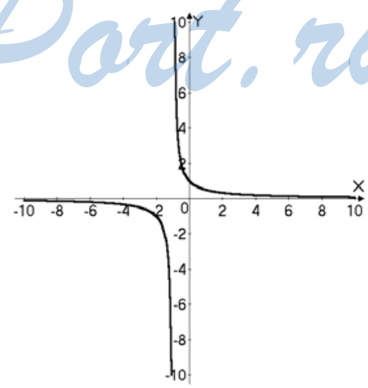
$$\frac{\sin 2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \mathrm{tg}\, 2\alpha/$$

3.

а) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$; $T = 6\pi$; **б)** $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$; $T = 1{,}5\pi$

С-9

1.

а)	**б)**
возрастает при $x \in (-\infty; 0)$; убывает при $x \in (0; +\infty)$;	убывает на всей области определения.
	

2.

$x \in [-\pi; 0]$; $x \in [\pi; 2\pi]$; $x \in [3\pi; 4\pi]$.

3.

$\cos 3 \vee \cos 6$, $\cos 3 < 0$, $\cos 6 > 0$, значит, $\cos 6 > \cos 3$.

С-10

1.

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$

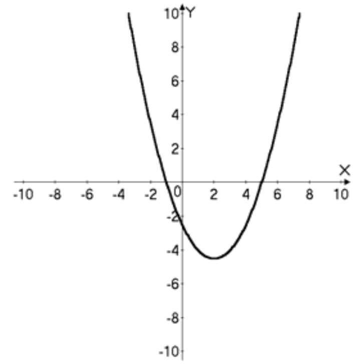
а) $x = 2$ – точка минимума;

$y = -\frac{9}{2}$ – экстремум;

б) см. рис.

в) $x^2 - 4x - 5 \leq -5$;

$x(x - 4) \leq 0$; $x \in [0; 4]$.

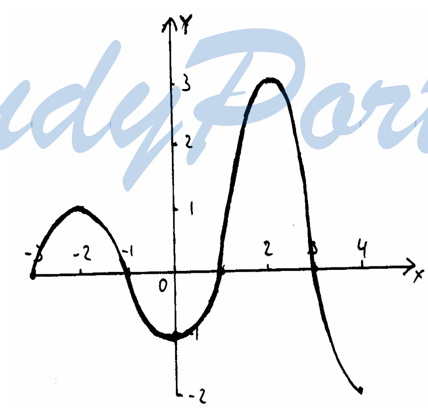


2.

$y = 3\sin x + 2$; $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; экстремумы: $y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 5$; $y\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$.

С-11



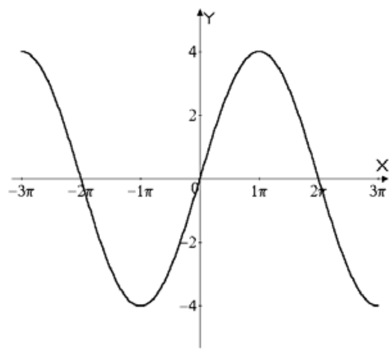
С-12

1.

$f(x) = 1{,}5\text{tg}\ 1{,}5x$; ОДЗ: $\cos 1{,}5x \neq 0$; $\frac{3}{2}x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$.

2.

$f(x) = 4\sin \frac{1}{2}x$;



а) $x \in R$; **б)** $y \in [-4; 4]$; **в)** $x = 2\pi n$;
г) $x_{max} = \pi + 4\pi n$; $x_{min} = -\pi + 4\pi n$; $y(\pi + 4\pi n) = 4$; $y(-\pi + 4\pi n) = -4$.

С-13

1.

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; **б)** $\text{arctg}\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;

в) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\text{tg}\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\text{tg}\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$.

2.

а) $\arcsin(-0{,}7825) \approx -0{,}8987$; **б)** $\arccos(0{,}1524) \approx 1{,}4178$;

в) $\text{arctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx -1{,}0039$.

С-14

а) $\sin x = -1 \quad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;$

б) $\cos x = 1; \quad x = 2\pi n;$

в) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}; \quad x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2};$

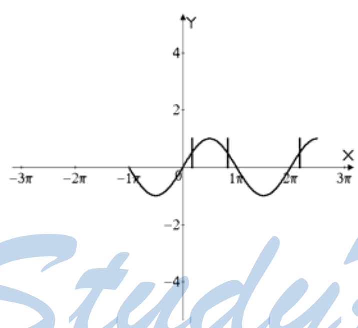
г) $\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x = \dfrac{1}{2}; \quad \sin 4x = \dfrac{1}{2}; \quad x = (-1)^k \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{4}.$

д) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin x \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

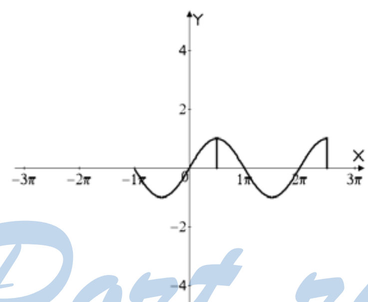
$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \quad x = \pm\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n.$

С-15

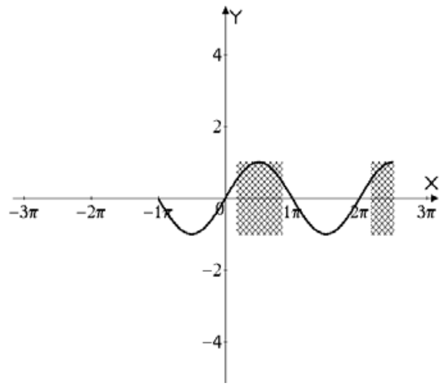
а) $\sin x = \dfrac{1}{2}; \; x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;$



б) $\sin x = 1; \; x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;$



в) $\sin x > \dfrac{1}{2} \qquad x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).$



С-16

а) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right].$$

б) $\cos 2x < -\frac{1}{2}$;

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{2\pi}{3} + \pi n\right).$$

в) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$;

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

С-17

а) $4\sin^2 x - 1 = 0$; $\sin x = \pm\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$;

б) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$.

в) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$;
$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$;

$\cos x = 3$ решений нет; $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

С-18

а) $\sin 2x + \cos 2x = 0$; $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$.

б) $1 - 2\sin 2x = 6\cos^2 x$;
$\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$; $\cos x \neq 0$;
$\mathrm{tg}^2\, x - 4\mathrm{tg}\, x - 5 = 0$;
$\mathrm{tg}\, x = 5$; $x = \mathrm{arctg}\, 5 + \pi n$;
$\mathrm{tg}\, x = -1$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

С-19

$\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x+\sin y=\sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\pi-y \\ \sin(\pi-y)+\sin y=\sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\pi-y \\ \sin y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} y=(-1)^k\,\frac{\pi}{3}+\pi k \\ x=\pi-(-1)^k\,\frac{\pi}{3}-\pi k \end{cases}$.

С-20

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi k$.

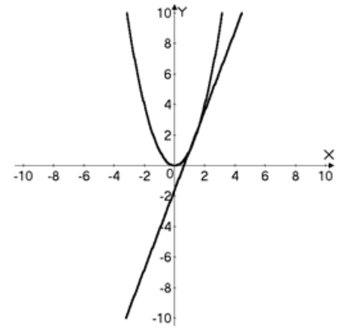
б) $(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$;
$\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x=1-2\sin^2 x$; $\sin x(\cos x+\sin x)=0$;
$\sin x = 0$; $x = \pi n$;
$\cos x + \sin x = 0$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

С-21

1.
$f(x) = 3x + 2$; $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{3(x+\Delta x)+2-3x-2}{\Delta x}=3$.

2.

$f(1) = 1$; $f(x_0 + \Delta x) = 2{,}56$;



$$\begin{cases} 1 = k + b \\ 2{,}56 = 1{,}6k + b \end{cases};$$

$0{,}6k = 1{,}56$;

$k = 2{,}6$ – угловой коэффициент;

$b = -1{,}6$;

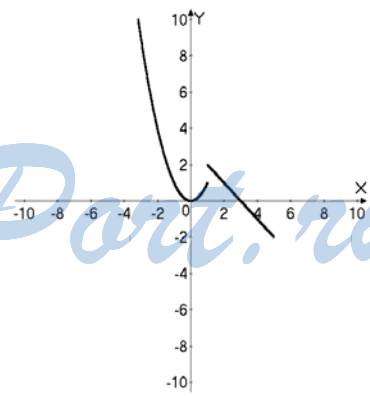
$y = 2{,}6x - 1{,}6$ – уравнение секущей.

С-22

1. $x(t) = 2t^2 + 3$; $v(t) = x'(t) = 4t$; $v(2) = 8$ м/с.

2. $f(x) = \frac{2}{x}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$.

С-23



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ -x + 3, & x \geq 1 \end{cases};$$

а) возрастает при $x \in (0;\ 1)$;
убывает $x \in$ при $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$

б) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$;

в) нет, не существует, т.к. в этой точке не существует производной.

С-24

1. $f(x) = 2x$;

а) (1,95; 2,05); **б)** (1,995; 2,005).

2.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}f(x)-2g(x)\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}f(x)-2\lim\limits_{x\to 2}g(x)=4+1=5$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}(3f(x)\,g(x))=3\lim\limits_{x\to 2}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3\cdot 8\cdot(-0{,}5)=-12$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+2}{4g(x)+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}f(x)+2}{4\lim\limits_{x\to 2}g(x)+3}=\frac{8+2}{4\cdot(-0{,}5)+3}=10.$

С-25

1. $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-1$; $f'(x)=3x^2+3x$; $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=-1$.

2. $f(x)=(3+2x)(2x-3)=4x^2-9$; $f'(x)=8x$; $f'\left(\frac{1}{4}\right)=2$.

3. $\varphi(x)=\frac{2x}{1-x}$;

а) $\varphi'(x)=\frac{2-2x+2x}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$;

б) $\varphi'(x)>0$, при $x\neq 1$.

С-26

1. $f(x)=10x^9-9x^{10}$; $f'(x)=90(x^8-x^9)$; $f'(-1)=180$.

2. $y(x)=x^3+4x^2-3x$; $y'(x)=3x^2+8x-3\le 0$;

$(x+3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\le 0$;

$x\in\left[-3;\frac{1}{3}\right]$.

3. $g(x)=(x-1)\sqrt{x+2}$; $g'(x)=\sqrt{x+2}+\frac{x-1}{2\sqrt{x+2}}$;

$g'(-1)=1+\frac{-2}{2}=0.$

С-27

1. $y = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 2}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} 16 - x^2 \ge 0 \\ x \ne 2 \end{array}\right.$; $x \in [-4; 2) \cup (2; 4]$.

2. $\varphi(x) = (5 + 6x)^{10}$; $\varphi'(x) = 60(5 + 6x)^9$; $\varphi'(-1) = 60(5 - 6)^9 = -60$.

3. $f(x) = x + 4$; $g(x) = x - 4$.

С-28

1.

а) $f(x) = 3\cos 2x$; $f'(x) = -6\sin 2x$; $f'\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$.

б) $\varphi(x) = 4\text{tg}\, 3x$; $\varphi'(x) = \dfrac{12}{\cos^2 3x}$; $\varphi'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 12$.

2. $g(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$; $g'(x) = \cos x + \cos 2x$; $g'(x) = 0$ при

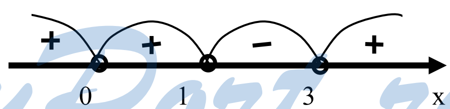
$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$; $\cos x = \dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$.

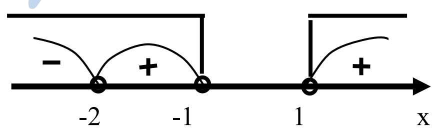
С-29

а) $\dfrac{x^2(x-3)}{x-1} < 0$

$x \in (1; 3)$



б) $(x + 2)\sqrt{x^2 - 1} > 0$;



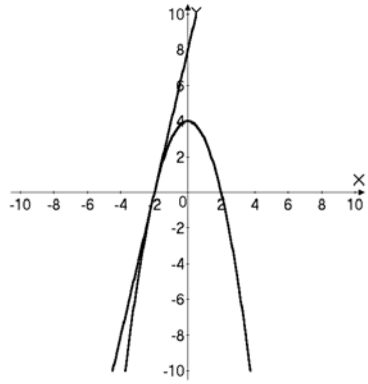
$x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$;

С-30

$f(x) = 4 - x^2$;

а) $f(-2) = 0$; $f'(x) = -2x$; $f'(-2) = 4$; $y = 4x + 8$ – уравнение касательной.

б)



в) $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$, так как касательная пересекает ось абсцисс в точке –2, ось ординат в точке 8.

С-31

а) $\sqrt{16{,}96} \approx 4{,}1183$; **б)** $\frac{2}{1{,}001^{10}} \approx \frac{2}{1 + 0{,}001 \cdot 10} = \frac{2}{1{,}01} \approx 1{,}98$.

С-32

1. $x(t) = 3t^3 + 9t^2 + 7$; $v(t) = x'(t) = 9t^2 + 18t$; $v(2) = 36 + 36 = 72$ м/с.

2. $s(t) = (2 + 5t)(2 + 6t)$; $v(t) = S'(t) = 10 + 30t + 12 + 30t = 22 + 60t$;
$v(3) = 22 + 180 = 202$ см/с.

С-33

а) $f(x) = x^2 + 3x + 6$; $f'(x) = 2x + 3$; $f'(x) > 0$ при $x > -\frac{3}{2}$;

$f'(x) < 0$ при $x < -\frac{3}{2}$, значит,

возрастает при $x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$

б) $\varphi(x) = x^3 + 2x - 1$; $\varphi'(x) = 3x^2 + 2$; $\varphi'(x) > 0$ при любых x, значит $\varphi(x)$ возрастает всюду на R.

в) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; $g'(x) = 3x^2 - 6x$ $g'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$;

$g'(x) < 0$ при $x \in (0;2)$, значит, возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ убывает при $(0; 2)$.

С-34

а) $f(x) = x^4 - 8x^2$; $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 2$;
$x_{max} = 0$; $x_{min} = \pm 2$; $y(0) = 0$; $y(\pm 2) = -16$; $x_{max} = 4$; $x_{min} = -4$;

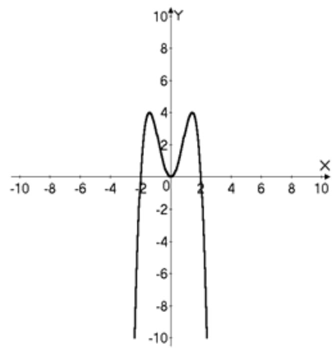
б) $\varphi(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$; $\varphi'(x) = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2}$; $\varphi'(x) = 0$ при $x = \pm 4$;
$\varphi_{max}(4) = 2$; $\varphi_{min}(-4) = -2$.

С-35

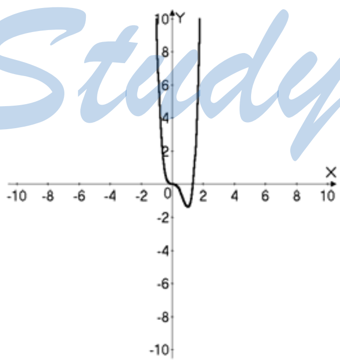
$f(x) = -x^2(x^2 - 4) = 4x^2 - x^4$

$f'(x) = 8x - 4x^3$; $f''(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2}$

возрастает при $(-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [0; \sqrt{2}\,]$;
убывает при $[-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$;
min: $y(0) = 0$ max: $y(\pm\sqrt{2}) = 4$;
нули: $x = 0$, $x = \pm 2$;
$y > 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$;
$y < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.



С-36.



$f(x) = 4x^4 - \frac{16}{3}x^3$;

$f'(x) = 16x^3 - 16x^2$; $f''(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$;

min $y(1) = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$

возрастает при $x \geq 1$, убывает при $x \leq 1$.

С-37

1.

$f(x) = -\cos x - x,\ \ x \in \left[-\frac{3}{2}\pi;\ \frac{5}{2}\pi\right];$

$f'(x) = \sin x - 1;\ f'(x) = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n;$

max: $y\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi$;   min: $y\left(\frac{5}{2}\pi\right) = -\frac{5}{2}\pi$.

2.

$\begin{cases} a + b = 15 \\ y = a^2 b \end{cases};\ \begin{cases} b = 15 - a \\ y = 15a^2 - a^3 \end{cases};$

$y' = 30a - 3a^2$; $y'(x) = 0$ при $a = 0$ и $a = 10$; $a = 0$ не подходит, так как по условию $a > 0$, значит, искомая сумма. $10 + 5 = 15$.

С-38

1.

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}\alpha.$$

2.

$$\frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{tg 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha;$$

$$\frac{\sin 2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{tg 2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{tg 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}\cdot\cos 2\alpha = \cos 2\alpha.$$

3.

$$1 - \sin^4 22{,}5° + \cos^4 22{,}5° = 1 + \cos 45° = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

С-39

1.

$y = 2\sin\frac{x}{2}$

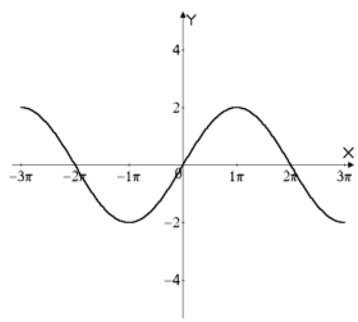
нули функции:

$2\sin\frac{x}{2} = 0$ при $x = 2\pi n$

max: $x = \pi + 2\pi n$; $y(\pi + 2\pi n) = 2$;

min: $x = -\pi + 2\pi n$;

$y(-\pi + 2\pi n) = -2$.



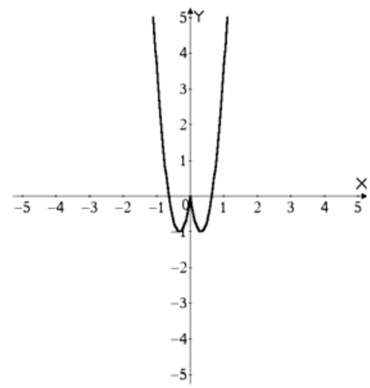
2.

$f(x) = x^2 - 2|x|$

$f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| =$

$= x^2 - 2|x| = f(x)$, значит,

$f(x)$ четная.



С-40

1. $\sin x \operatorname{tg} x + \sqrt{3}\sin x + \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$; $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})(\sin x + 1) = 0$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$; $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

2. $2\sin 2x + 1 \le 0$ $\sin 2x \le -\frac{1}{2}$; $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + \pi n;\ -\frac{\pi}{12} + \pi n\right]$.

3. $f(x) = 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x$; $f'(x) = 2 - \cos 2x + \cos x$; $f'(x) = 0$ при

$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;

$\cos x = \frac{3}{2}$ – не имеет решения; $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$.

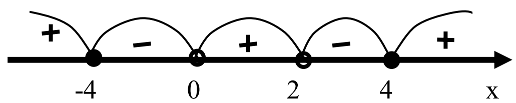
С-41

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2x - \sin 2y = \sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2x + \sin(\pi - 2x) = \sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = (-1)^k \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2} \\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2} - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

С-42

а) $(2x^2 + x + 3)(x^2 - 3x) > 0$;, поскольку $2x^2 + x + 3 > 0$ при любом x, имеем: $x(x - 3) > 0$; $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$;

б) $\dfrac{x^4(x^2 - 16)}{x^2 - 2x} \geq 0$; $\quad \dfrac{x^4(x-4)(x+4)}{x(x-2)} \geq 0$;



$x \in (-\infty; -4] \cup (0; 2) \cup [4; +\infty)$.

в) $(x - 5)\sqrt{x^2 - 4} \leq 0$; $\qquad x \in (-\infty; -2] \cup [2; 5]$.

С-43

1.

а) $y = \text{tg } 3x$; $\qquad y' = \dfrac{3}{\cos^2 3x}$;

б) $y = \sqrt{x} \cos x$; $\qquad y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}} - (\sin x)\sqrt{x}$;

в) $y = \sin^2 x$; $\qquad y' = 2\sin x \cos x$;

г) $y = (\cos 3x + 6)^3$ $\qquad y' = -9\sin 3x(\cos 3x + 6)^2$.

2. $\qquad f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{2x - 1} + 6\cos \pi x$

$$f'(x) = \frac{6x(2x-1) - 6x^2 - 8}{(2x-1)^2} - 6\pi \sin \pi x = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(2x-1)^2} - 6\pi \sin \pi x;$$

$$f'(1) = \frac{6 - 6 - 8}{(2-1)^2} - 6\pi \sin \pi = -8.$$

С-44

1. $y = x^2 - 3x + 2$; $y' = 2x - 3$; $y_1 = x_0^2 - 3x_0 + 2 + (2x_0 - 3)(x - x_0)$ – уравнение касательной. $2x_0 - 3 = -1$; $x_0 = 1$; $y_1 = 1 - x$.

2. $x(t) = 3\sin 7t$; $v(t) = 21\cos 7t$; $a(t) = -147\sin 7t$.

С-45

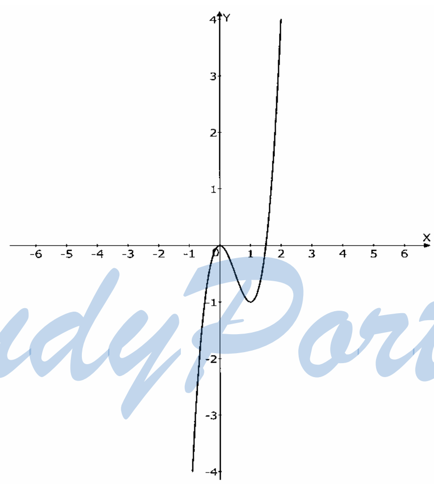
1.

$$\begin{cases} a+b=8 \\ y=a^2b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=b-8 \\ b^4-16b^3+64b^2=y \end{cases}; \quad y' = 4b^3 - 48b^2 + 128b = 0;$$

$b(b^2 - 12b + 32) = 0$

$$\begin{cases} b=0 \\ a=8 \\ y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b=8 \\ a=0 \\ y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b=4 \\ a=4 \\ y=256 \end{cases}$$, значит, $4 + 4 = 8$ – искомое разбиение.

2.



$f(x) = x^2(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2$;
$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0$; $x = 0$ и $x = 1$;
$f(0) = \max = 0$; $f(1) = \min = -1$;
нули: $x = 0$ и $x = \frac{3}{2}$;
$f'(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; убывает при $x \in [0; 1]$.

ВАРИАНТ 4

С-1

1. $56° = \frac{\pi}{180} \cdot 56 = \frac{14}{45}\pi$, $170° = \frac{\pi}{180} \cdot 170 = \frac{17}{18}\pi$.

2. $\frac{5\pi}{6} = 150°$; $2\frac{1}{6}\pi = 390°$.

3. $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$.

4. $\pi - \frac{3\pi}{5} = \alpha$; $\alpha = \frac{2\pi}{5} = 72°$; $\cos\alpha \approx 0{,}3090$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 3{,}0777$.

С-2

1. $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $90° < \alpha < 180°$; $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$.

2. $(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + ctg\alpha\right) = \sin^2\alpha$;

$$\frac{1}{\cos\alpha}(\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 - \cos\alpha = \sin^2\alpha.$$

3.

а) $\cos\frac{3\pi}{5}\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} < 0$; **б)** $\sin 4 \cos 5 < 0$.

С-3

1.

а) $\operatorname{ctg}(-420°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; **б)** $\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin(90° + \alpha) - \frac{\cos^2(\alpha - 90°)}{\sin(\alpha + 270°)} = \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

3. $\sin 32° \sin 148° - \cos 32° \sin 302° + \operatorname{ctg} 225° = 1 + \operatorname{ctg} 45° = 2$.

С-4

1.

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $180° < \alpha < 270°$; $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

а) $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$;

б) $\sin(30° + \alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = -\frac{4}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$;

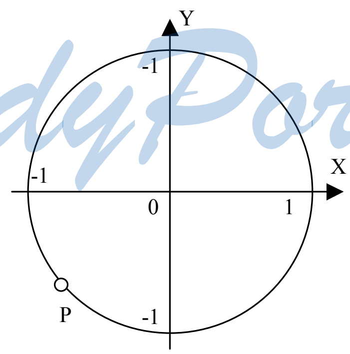
в) $\operatorname{tg}(45° - \alpha) = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1}{7}$.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin x = \frac{1}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

С-5

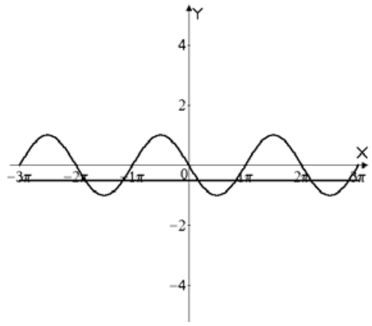
1. $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – ордината точки $P\frac{5\pi}{4}$;

$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – абсцисса точки $P\frac{5\pi}{4}$.



2. **а) III;** **б) I.**

3.



$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{2}$; $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+2\pi k.$

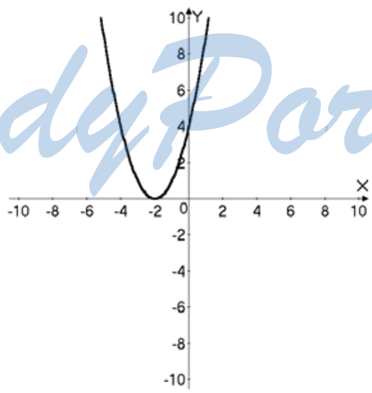
С-6

1. $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{3x^2-6}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x^2-3\ne 0 \end{array}\right.$; $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};0]$.

2. $f(x)=3\cos 2x-1$;

а) $f(\pi)=2$; **б)** $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$; **в)** $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5}{2}$.

3.



С-7

а) $f(x) = 2x^3 + \text{tg}\, x$; $f(-x) = 2(-x)^3 + \text{tg}\,(-x) = -2x^3 - \text{tg}\, x = -f(x)$, значит, $f(x)$ нечетная;

б) $\varphi(x) = \dfrac{2x^4}{\cos x}$; $\varphi(-x) = \dfrac{2(-x)^4}{\cos(-x)} = \dfrac{2x^4}{\cos x} = \varphi(x)$, значит, $\varphi(x)$ четная.

С-8

1. **а)** $\sin(-1860°) = -\sin 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos(-420°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$; **в)** $\text{ctg}\,(-930°) = -\text{ctg}\, 30° = \sqrt{3}$.

2. $$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin^3(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{2\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=$$

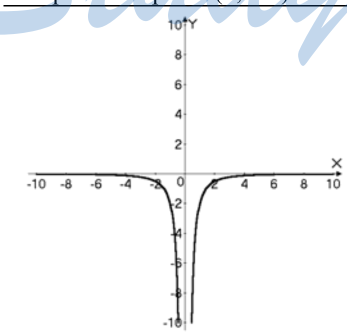
$$=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin 2\alpha} = -\text{ctg}\, 2\alpha.$$

3. **а)** $f(x) = \sin\left(\dfrac{3x}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $T = \dfrac{8\pi}{3}$; **б)** $\varphi(x) = \text{tg}\left(\dfrac{3x}{5}-\dfrac{\pi}{6}\right)$; $T = \dfrac{5\pi}{3}$.

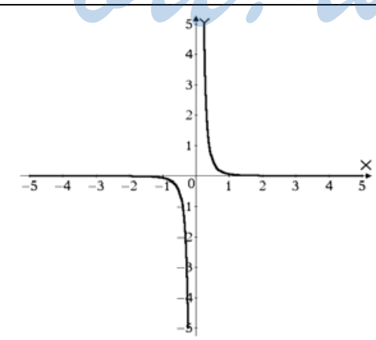
С-9

1.

а) убывает при $x \in (-\infty; 0)$
возрастает при $x \in (0; +\infty)$



б) убывает на области определения.



2. $y = 2\sin x - 1$; убывает при

$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right)$.

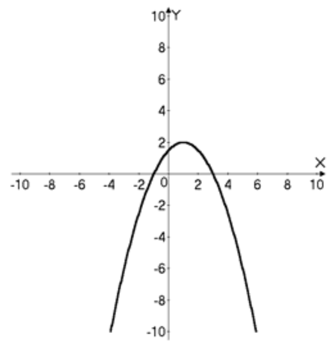
3. $\sin 2 > 0$, $\sin 4 < 0$, значит, $\sin 2 > \sin 4$.

С-10

1. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ а) $x = 1$ – точка максимума;

$y(1) = 2$ – экстремум функции;

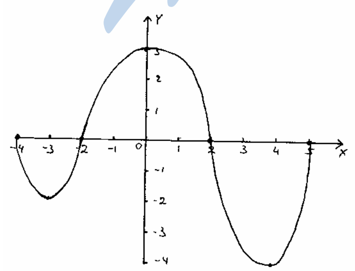
б)



в) $-x^2 + 2x + 3 \geq 3$; $x(x-2) \leq 0$ $x \in [0; 2]$

2. $y = 3\cos x - 2$ $x_{max} = 2\pi n$; $x_{min} = \pi + 2\pi n$;
$y(2\pi n) = 1$; $y(\pi + 2\pi n) = -5$.

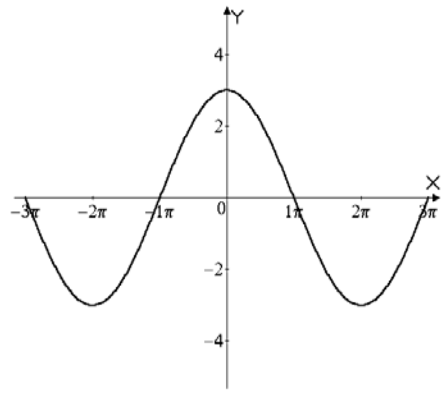
С-11



С-12

1. $f(x) = 2 - \text{ctg}\,\frac{x}{2}$; ОДЗ: $\sin\frac{x}{2} \neq 0$; $x \neq 2\pi n$

2. $f(x) = 3\cos\frac{x}{2}$;



а) $x \in R$; **б)** $y \in [-3; 3]$; **в)** $\cos\frac{x}{2} = 0$ при $x = \pi + 2\pi n$;

г) $x_{\max} = 4\pi n$; $x_{\min} = 2\pi + 4\pi n$; $y(4\pi n) = 3$; $y(2\pi + 4\pi n) = -3$.

С-13

1.

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; **б)** $\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$;

в) $\text{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3}$;

г) $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$.

2.

а) $\arcsin(-0{,}9317) = -1{,}1991$;
б) $\arccos(0{,}3745) = 1{,}1869$;
в) $\text{arctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1{,}3617$.

С-14

а) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$; **б)** $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

в) $\operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$;

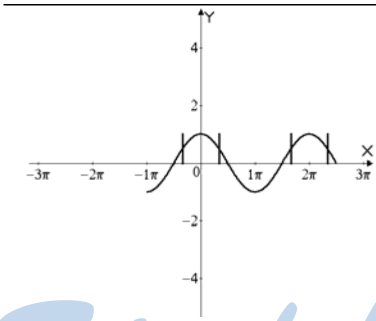
г) $\cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x = \frac{1}{2}$; $\cos 3x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$;

д) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

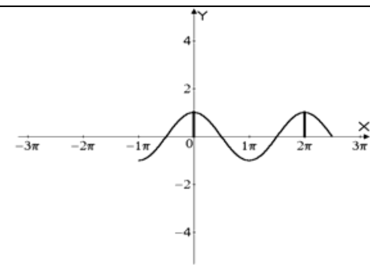
$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k.$

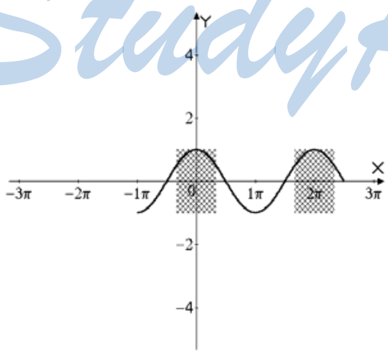
С-15

а) $\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$;



б) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$;





в) $\cos x > \frac{1}{2}$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$.

С-16

а) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$;

б) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$; $\quad x \in \left(-\frac{5\pi}{12} + \pi n;\ -\frac{\pi}{12} + \pi n\right)$;

в) $\operatorname{tg} x > -1$; $\quad x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

С-17

а) $4\cos^2 x - 1 = 0$; $\quad \cos x = \pm\frac{1}{2}$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

б) $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$; $\quad \sin x = -\frac{1}{2}$; $\quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$;

в) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$; $\quad 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$;

$\cos x = \frac{-5-7}{4} = -3$ нет решений;

$\cos x = \frac{1}{2}$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

С-18

а) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$; $\quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $\quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$;

б) $1 + 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$;

$\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$; $\quad \cos x \neq 0$; $\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$;

$\operatorname{tg} x = -3$; $\quad x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n$; $\operatorname{tg} x = -1$; $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

С-19

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \sin y + \cos y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \frac{3\pi}{4} + (-1)^{k+2}\frac{\pi}{4} - \pi k \end{cases}.$$

С-20

а) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2;$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1;$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$

б) $(\cos x - \sin x)^2 = \cos 2x;$

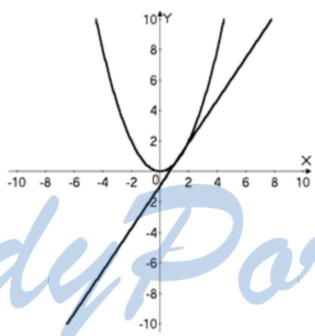
$(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - \cos x - \sin x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \sin x \\ \sin x = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \pi n \end{array}\right..$$

С-21

1. $f(x) = 2x + 3;$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2(x+\Delta x) + 3 - 2x - 3}{\Delta x} = 2.$$



2. $f(x_0) = \frac{1}{2};$ $f(x_0 + \Delta x) = 1{,}62;$

$$\begin{cases} 1{,}62 = k\cdot 1{,}8 + b \\ \frac{1}{2} = k + b \end{cases}; \quad \begin{cases} 1{,}12 = 0{,}8k \\ 0{,}5 = k + b \end{cases}; \quad \begin{cases} k = 1{,}4 \\ b = -0{,}9 \end{cases}.$$

Ответ: $k = 1{,}4$ – угловой коэффициент;

$y = 1{,}4x - 0{,}9$ – уравнение касательной.

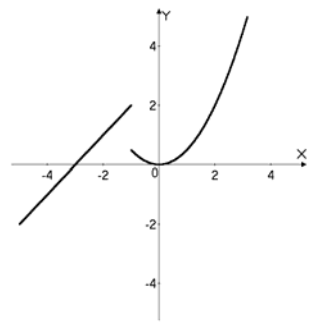
С-22

1. $x(t) = 3t^2 + 2;$ $v(t) = 6t;$ $v(3) = 18$ м/с.

2. $f(x) = 2\sqrt{x}\,;$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

С-23

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, & x \ge -1 \\ x + 3, & x < -1 \end{cases};$$



а) возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
убывает при $(-1; 0)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$;

в) нет, т.к. в точке $x = -1$ не существует производной.

С-24

1. **а)** $\dfrac{59}{30} < x < \dfrac{61}{30}$;

б) $1\dfrac{299}{300} < x < 2\dfrac{1}{300}$.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right) = 6$; **б)** $\lim\limits_{x\to 3}(2f(x)\,g(x)) = -18$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x) - 2}{2g(x) + 5} = \dfrac{4}{5 - 3} = 2.$

С-25

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1;$ $f'(x) = 6(x^2 - x);$ $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$.

2. $f(x) = (1 + 2x)(2x - 1) = 4x^2 - 1;$ $f'(x) = 8x;$ $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4.$

3.

$\varphi(x) = \dfrac{6x}{x+1}$;

а) $\varphi'(x) = \dfrac{6x+6-6x}{(x+1)^2} = \dfrac{6}{(x+1)^2}$; **б)** $\varphi'(x) > 0$, при $x \neq -1$.

С-26

1. $f(x) = 8x^9 - 9x^8$; $f'(x) = 72(x^8 - x^7)$; $f'(-1) = 144$.

2. $y(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$; $y'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \geq 0$;
$x^2 - 3x + 2 \geq 0$; $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

3. $g(x) = \sqrt{x-3}\,(x+2)$; $g'(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{x+2}{2\sqrt{x-3}}$; $g'(4) = 1 + \dfrac{3}{1} = 4$.

С-27

1. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+7}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 25 \geq 0 \\ x \neq -7 \end{array}\right.$;

$x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -5] \cup [5; +\infty)$.

2. $\varphi(x) = (2x+3)^{12}$; $\varphi'(x) = 24(2x+3)^{11}$; $\varphi'(-2) = -24$.

3. $f(x) = x - 7$; $f(g(x)) = x$, значит, $g(x) = x + 7$.

С-28

1. **а)** $f(x) = 2\sin 5x$; $f'(x) = 10\cos 5x$; $f'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 5$;

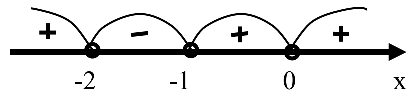
б) $\varphi(x) = 3\operatorname{ctg} 2x$; $\varphi'(x) = -\dfrac{6}{\sin^2 2x}$; $\varphi'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -6$.

2. $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{4}\cos 2x$; $f'(x) = -\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ $f'(x) = 0$ при

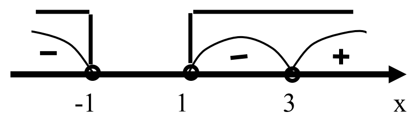
$\sin x(\cos x - 1) = 0$; $x = \pi n$.

С-29

а) $\frac{x^2(x+2)}{x+1} < 0$; $x \in (-2; -1)$;



б) $(x-3)\sqrt{x^2-1} < 0$;



$x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3)$.

С-30

$f(x) = x^2 - 4$; $f'(x) = 2x$;

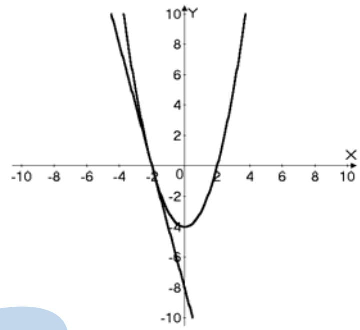
а) $f(-2) = 0$; $f'(-2) = -4$;

$y = -4(x+2) = -4x - 8$ –

уравнение касательной;

б) см. рис;

в) $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$.



С-31

а) $\sqrt{9{,}72} \approx 3{,}1177$; **б)** $\frac{3}{1{,}002^{-20}} \approx 3 \cdot (1 + 0{,}002 \cdot 20) = 3{,}12$.

С-32

1. $x(t) = 4t^3 + 5t^2 + 4$; $v(t) = 12t^2 + 10t$; $v(3) = 138$ м/с.

2. $R = 4 + 2t^2$; $S(t) = \pi\,(16 + 4t^4 + 16t^2)$;
$S'(t) = 16\pi t^3 + 32\pi t$; $S'(2) = 192\pi$ см/с.

С-33

а) $f(x) = -x^2 + 4x - 3;$

возрастает при $x \in (-\infty; 2)$

убывает при $x \in (2; +\infty)$

б) $\varphi(x) = x^3 + 4x - 7$

$\varphi'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ при любых x, значит, $\varphi(x)$ возрастает на R;

в) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1;$

$g'(x) = 6(x^2 - x);$

возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty);$

убывает при $x \in (0; 1).$

С-34

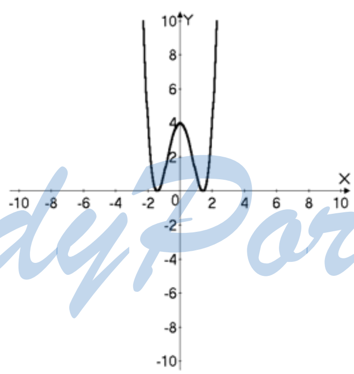
а) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1;$ $f'(x) = 8(x^3 - x);$ $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 1;$

$x_{max} = 0;$ $x_{min} = \pm 1;$ $y(0) = 1;$ $y(\pm 1) = -1;$

б) $\varphi(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{x};$ $\varphi'(x) = \frac{1}{4} - \frac{9}{x^2};$ $\varphi'(x) = 0$ при $x = \pm 6;$ $x_{max} = 6;$ $x_{min} = -6;$

$\varphi(6) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3;$ $\varphi(-6) = -3.$

С-35



$f(x) = (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4;$ $f'(x) = 4(x^3 - 2x);$ $f'(x) = 0$ при

$x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2};$ $x_{max} = 0;$ $x_{min} = \pm\sqrt{2};$

$f(0) = 4;$ $f(\pm\sqrt{2}) = 0;$

убывает при $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$

возрастает при $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

С-36

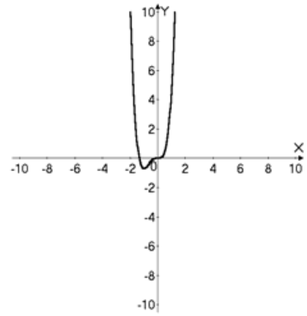
$f(x) = 2x^4 + \frac{8}{3}x^3;$

$f'(x) = 8x^3 + 8x^2 = 8x^2(x+1)$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = -1$; $x_{min} = -1$;

$f(-1) = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$;

возрастает при $x \in (-1; +\infty)$;

убывает при $x \in (-\infty; -1)$.



С-37

1.

$f(x) = \sin x + x$; $x \in [-\pi; \pi]$; $f'(x) = \cos x + 1$; $f'(x) = 0$ при $x = \pi + 2\pi n$;

наибольшее значение $f(\pi) = \pi$; наименьшее значение $f(-\pi) = -\pi$.

2.

$\begin{cases} a + b = 20 \\ y = a^3 b \end{cases}$; $\begin{cases} b = 20 - a \\ y = 20a^3 - a^4 \end{cases}$; $y' = 60a^2 - 4a^3$; $y' = 0$ при

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} a = 15 \\ b = 5 \\ y = 16875 \end{cases}$; Ответ: 15 + 5 = 20.

С-38

1. $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2\sin^2 \alpha} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha.$

2. $\frac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \alpha;$

$\frac{\sin 2\alpha(1 + \cos 2\alpha)}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(1 + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha \cos\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \alpha.$

3. $1 - \sin^4 15^0 - \cos^4 15^0 =$

$= 1 - (\sin^2 15^0 + \cos^2 15^0)^2 + 2\sin^2 15^0 \cos^2 15^0 = \frac{1}{2}\sin^2 30^0 = \frac{1}{8}.$

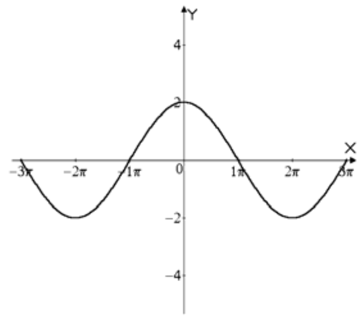
С-39

1. $y = 2\cos\frac{x}{2}$; $y = 0$ при

$x = \pi + 2\pi n$

$x_{max} = 4\pi n$; $x_{min} = 2\pi + 4\pi n$;

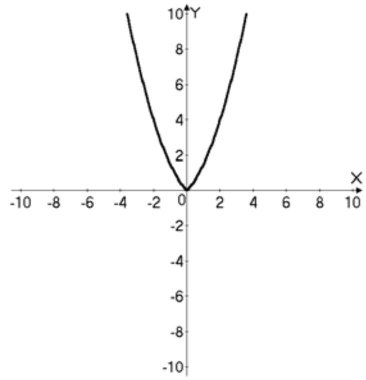
$y(4\pi n) = 2$; $y(2\pi + 4\pi n) = -2$.



2. $f(x) = 0{,}5x^2 + |x|$;

$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 + |-x| =$

$= \frac{1}{2}x^2 + |x| = f(x)$, значит, $f(x)$ четная



С-40

1. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x\sin x - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + \sin x - 1 = 0$;

$(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 1)(\sin x - 1) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = 1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right.$.

2. $2\cos 3x + 1 \le 0$; $\cos 3x \le -\frac{1}{2}$; $x \in \left[\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right]$.

3. $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x + 2x$; $f'(x) = \cos 2x + \sin x + 2$; $f'(x) = 0$ при

$2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$; $\sin x = \frac{3}{2}$ – не имеет решений; $\sin x = -1$,

значит, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

С-41

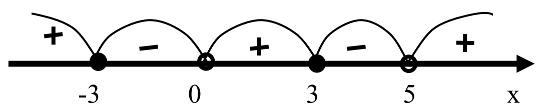
$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x-\cos 2y=-\sqrt{3} \end{cases};\quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}-y \\ \cos(\pi-2y)-\cos 2y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}-y \end{cases};\quad \begin{cases} y=\pm\dfrac{\pi}{12}+\pi n \\ x=\dfrac{\pi}{2}\mp\dfrac{\pi}{12}-\pi n \end{cases}.$$

С-42

а) $(3x^2+2x+5)(x^2+4x)<0$; так как $3x^2+2x+5>0$ прилюбом x, то $(x^2+4x)<0$; $x\in(-4;0)$;

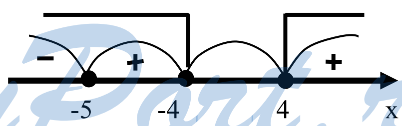
б) $\dfrac{x^4(x^2-9)}{x^2-5x}\le 0$; ОДЗ: $x\ne 0, x\ne 5$;



$$\frac{x^4(x-3)(x+3)}{x(x-5)}\le 0;$$

$x\in[-3;0)\cup[3;5)$.

в) $(x+5)\sqrt{x^2-16}\ge 0$;



$x\in[-5;-4]\cup[4;+\infty)$.

С-43

1.

а) $y=\operatorname{ctg} 2x$, $y'=\dfrac{-2}{\sin^2 2x}$; **б)** $y=\sqrt{x}\sin x$, $y'=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+(\cos x)\sqrt{x}$;

в) $y=\cos^2 x$; $y'=-2\cos x\sin x$;

г) $y=(\sin 2x-5)^3$;

$y'=3\cdot 2\cos 2x(\sin 2x-5)^2=6\cos 2x(\sin 2x-5)^2$.

2.

$f(x)=\dfrac{2x^2-3}{4x+3}+8\sin\dfrac{\pi x}{2}$; $\qquad f'(x)=\dfrac{16x^2+12x-8x^2+12}{(4x+3)^2}+4\pi\cos\dfrac{\pi x}{2}$;

$f'(-1)=\dfrac{16-8-12+12}{1}=8$.

С-44

1. $y=-x^2+3x-2$, $y'=-2x+3$; $-2x_0+3=1$, $x_0=1$, $y_0(1)=0$, значит в точке (1,0) касательная параллельна прямой $y=x$.

2. $x(t)=2\cos 4t$; $v(t)=-8\sin 4t$; $a(t)=-32\cos 4t>0$ при

$\cos 4t<0$; $\quad t\in\left[-\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\ -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}\right]$.

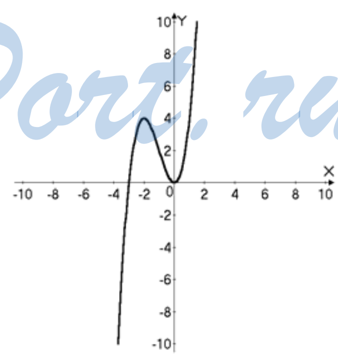
С-45

1. $\begin{cases}a+b=12\\ y=a^3\cdot 3\cdot b\end{cases}$; $\begin{cases}b=12-a\\ y=36a^3-3a^4\end{cases}$; $y'=108a^2-12a^3$; $y'=0$ при

$\begin{cases}a=0\\ b=12\\ y=0\end{cases}$ и $\begin{cases}a=9\\ b=3\\ y=6561\end{cases}$.

Ответ: 9 + 3.

2. $f(x)=x^2(x+3)=x^3+3x^2$;
$f'(x)=3x^2+6x=0$; $f'(x)=0$ при
$x=0$ и $x=-2$; $x_{min}=0$; $x_{max}=-2$;
$f(0)=0$; $f(-2)=-8+12=4$;
возрастает при $x\in(-\infty;2)\cup(0;+\infty)$
убывает при$x\in(-2;0)$
нули: $x=0$ и $x=-3$.



ВАРИАНТ 5

С-1

1. $72° = \frac{\pi}{180} \cdot 72 = \frac{2\pi}{5}$; $140° = \frac{\pi}{18} \cdot 14 = \frac{7\pi}{9}$.

2. $\frac{11\pi}{12} = 165°$; $\frac{23\pi}{8} = 517{,}5°$.

3. $79° = \frac{\pi}{180} \cdot 79 \approx 1{,}3781$; $\sin 79° \approx 0{,}9816$, $\cos 79° \approx 0{,}1908$;

$38°22' \approx 0{,}6696$; $\sin 38°22' \approx 0{,}6187$, $\cos 38°22' \approx 0{,}7856$.

4. **а)** $0{,}7575 \approx 43°24'$; **б)** $2{,}0365 \approx 116°41'$.

С-2

1. $1 + \frac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

2. **а)** $\frac{\cos 200° \,\mathrm{tg} 300°}{\sin 400°} > 0$; **б)** $\cos 2 \,\mathrm{tg}\, 4 < 0$.

3. $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\alpha \in$ III четверти; $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$.

С-3

1. **а)** $\sin 1050° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$; **б)** $\cos\frac{23\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\mathrm{tg}\, 2130° = -\mathrm{tg}\, 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{tg^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) - ctg^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha} = \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

3. $$\frac{\cos(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1.$$

С-4

1. $\dfrac{1-\sin^2 22^\circ 30'}{2\cos^2 15^\circ - 1} = \dfrac{\cos^2 22^\circ 30'}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2}$ (1 + cos 45°) $= \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$.

2. $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$; $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5}$;

$\cos 2\alpha = -\dfrac{119}{169}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{24}{5} : \left(1 - \dfrac{144}{25}\right) =$

$= -\dfrac{25}{119} \cdot \dfrac{24}{5} = -\dfrac{120}{119}$.

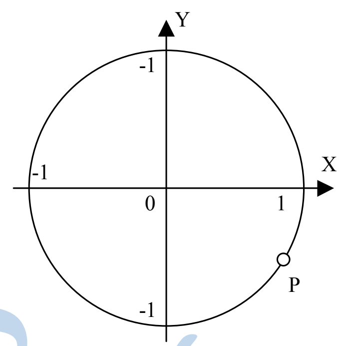
3. $\operatorname{ctg}^2\alpha\,(1-\cos 2\alpha)^2 - \cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha\,\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2 2\alpha =$
$= \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha = -\cos 4\alpha$.

С-5

1. см. рис;

абсцисса: $\cos\dfrac{23\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

ордината: $\sin\dfrac{23\pi}{6} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.



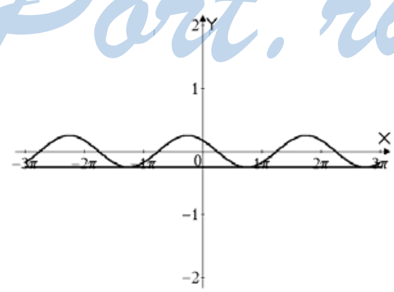
2. **а) I ; б) IV.**

3.

$\dfrac{1}{4}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}$;

$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$;

$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$.



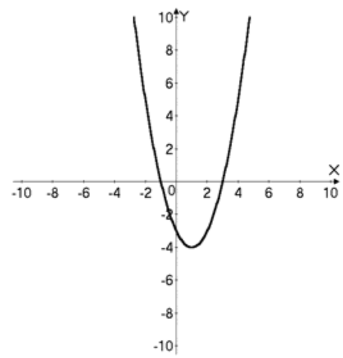
С-6

1. **а)** $f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2-7x+6}$; ОДЗ: $x^2-7x+6\neq0$; $x\neq6$ и $x\neq1$;

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}$; ОДЗ: $x^2-4>0$; $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

2. $f(x)=x^3+3x-1$ $f(-2)=-8-6-1=-15$;
$f(x+1)=(x+1)(x^2+2x+1+3)-1=x^3+3x^2+6x+3$.

3.



С-7

1. $f(x)=\dfrac{x^3\sin x}{\mathrm{tg}^2x}$; $f(-x)=\dfrac{(-x)^3\sin(-x)}{\mathrm{tg}^2(-x)}=\dfrac{x^3\sin x}{\mathrm{tg}^2x}=f(x)$, значит, $f(x)$ четная.

2. $g(x)=|x|\cos2x\sin^3 3x$; $g(-x)=|-x|\cos(-2x)\sin^3(-3x)=$
$=-|x|\cos2x\sin3x=-f(x)$, значит, $g(x)$ нечетная.

С-8

1. **а)** cos 235°17′ = –sin 34°43′; б) sin 5040° = sin 0° = 0;

в) $\mathrm{tg}\dfrac{29\pi}{7}=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{7}$.

2. $\sin(-60^\circ)+\cos690^\circ+\mathrm{tg}(-600^\circ)=-\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{\sqrt3}{2}-\sqrt3=-\sqrt3$.

3. **а)** $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$, $T=2\pi$; **б)** $y=\cos^2 2x-\sin 4x$;

$$y_1=\cos^2 2x; \quad T_1=\frac{\pi}{2}$$
$$y_2=\sin 4x; \quad T_2=\frac{\pi}{2}$$
, значит, $T=\frac{\pi}{2}$.

С-9

1.

а) $f(x)=\sqrt{x+1}$ возрастает на области определения, то есть при $x\in(-1;\infty)$;

б) $f(x)=-\frac{x-2}{x-1}=-1+\frac{1}{x-1}$ убывает на области определения, то есть при $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

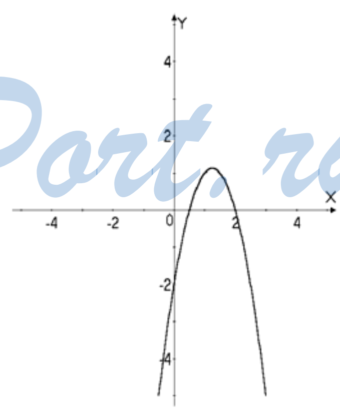
2. $f(x)=\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; ОДЗ: $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$; $x\neq=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$;

возрастает на области определения.

3. sin 40°, cos 40°, sin 70°, cos 70°.

Ответ: sin 70°, cos 40°, sin 40°, cos 70°.

С-10



1. $y=5x-2x^2-2$; $x_{max}=\frac{5}{4}$;

$y\in(-\infty;\ \frac{9}{8}]$.

2. $f(x)=3\cos\left(x-\frac{2\pi}{7}\right)$;

$f'(x)=-3\sin\left(x-\frac{2\pi}{7}\right)$;

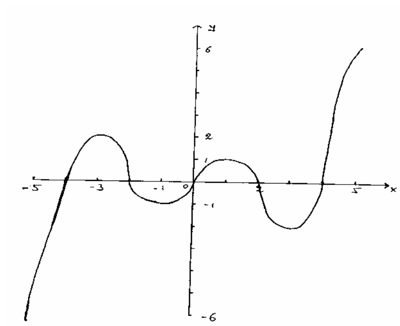
$f'(x)=0$ при $x=\frac{2\pi}{7}+2\pi n$ и

$x=\frac{9\pi}{7}+2\pi n$;

$x_{\max} = \frac{2\pi}{7} + 2\pi n$; $x_{\min} = \frac{9\pi}{7} + 2\pi n$;

экстремумы: $f\left(\frac{2\pi}{7} + 2\pi n\right) = 3$; $f\left(\frac{9\pi}{7} + 2\pi n\right) = -3$.

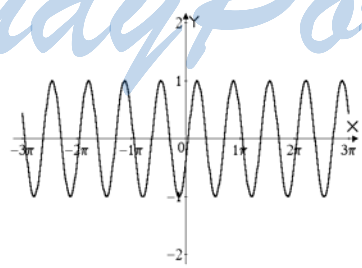
С-11



С-12

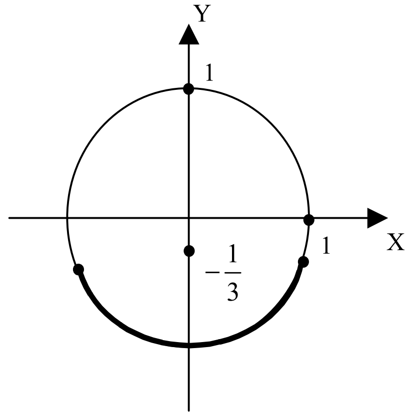
1. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n \end{array}\right.$.

2. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{7}\right)$;



$x_{\max} = \frac{3\pi}{14} + \frac{2\pi n}{3}$; $x_{\min} = -\frac{5\pi}{42} + \frac{2\pi n}{3}$.

3.



$\sin t \le -\frac{1}{3}$; $t \in [-\pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n;\ -\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n]$.

С-13

1.

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$; **б)** $\sin(\arcsin 0{,}1) = 0{,}1$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

г) $\cos(3\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

2.
а) $\arcsin(0{,}897) \approx 1{,}113$; **б)** $\arccos(-0{,}773) \approx 2{,}4544$;
в) $\operatorname{arctg}(-4) \approx -1{,}3258$.

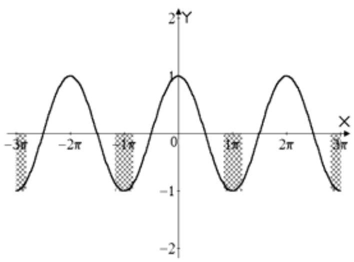
С-14

а) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; **б)** $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$;

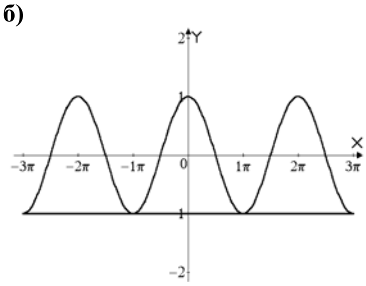
в) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $3x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{3}$.

С-15

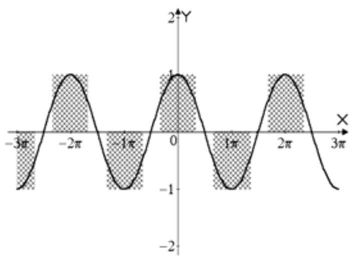
а)



б)



в)



$\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$.

С-16

а) $\cos 3x < \frac{1}{2}$; $\quad x \in \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3};\ \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right)$.

б) $\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \ge -\sqrt{3}$; $\quad 2x \in \left[\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{4\pi}{3} + \pi n\right)$

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right).$$

С-17

а) $\mathrm{ctg}\, x = -4 - 3\mathrm{tg}\, x$, $\quad \mathrm{tg}\, x \ne 0$;

$\mathrm{ctg}^2 x + 4\mathrm{ctg}\, x + 3 = 0$; $\quad \mathrm{ctg}\, x = -3 \quad x = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$

$\mathrm{ctg}\, x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$

б) $4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0$;

$\sin^2 x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ и

$x = (-1)^{z+1} \frac{\pi}{6} + \pi z$.

C-18

а) $\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$;

$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; $x = \pi n$;

б) $2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 1$; $\cos x \neq 0$;
$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$;
$\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2}$; $x = \operatorname{arctg}(\pm\sqrt{2}) + \pi n$.

C-19

$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{1}{2} \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) = \frac{3}{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} x + y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x - y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$; $\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \pi n \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n \end{cases}$.

C-20

а) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x + \sin 7x$; $\sin 3x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x = 0$;

$\cos 2x = 0$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ или $\sin x \cos 4x = 0$;

$\sin x = 0$; $x = \pi n$; $\cos 4x = 0$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$.

б) $\sin x \sin 2x \cos 3x + \sin x \cos 2x \sin 3x = 0$;
$\sin x(\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x) = 0$;

$\sin x = 0$; $\sin 5x = 0$; $5x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{5}$. Ответ: $\frac{\pi n}{5}$.

$x = \pi n$;

С-21

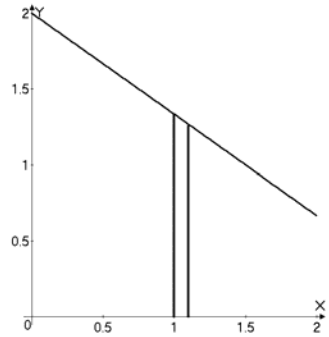
1.

$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2; \quad f(1) = \frac{4}{3};$

$f(1,1) = \frac{-11}{15} + \frac{30}{15} = \frac{19}{15};$

$-f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) = -\frac{1}{15};$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -\frac{2}{3}\Delta x.$



2.

$f(x) = 1 - 3x - 2x^2;$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1 - 3x_0 - 3\Delta x - 2\Delta x^2 - 2x_0^2 - 4\Delta x x_0 - 1 - 3x_0 - 2x_0}{\Delta x} =$$

$= -3 - 4x_0 - 2\Delta x; \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0,1; \quad \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -7,2;$

$x_0 = 1, \quad \Delta x = 0,002 \quad \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -7,004;$

$x_0 = 1, \quad \Delta x = 0,00001 \quad \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -7,00002;$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -7$ (при $x_0 = 1$).

С-22

1. $x(t) = t^2 + 4$; $v(t) = 2t$. Импульс при $t = 4$, m = 2 равен $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

2. **а)** $f(x) = 6\sqrt{x}; \quad f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$; **б)** $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(x) = -2x.$

С-23

1. **а)** $f(-2) = -1; \quad f(4) = 1$; **б)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -1; \quad \lim\limits_{x \to -4} f(x) = -2$

2. $f(x) = \frac{9 - x^2}{x - 3} = -x - 3$, при $x \neq 3$ $(3 - x) < 0,001$; $\delta = 0,001$.

С-24

1. а) $y = f(x) - 2g^2(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} y = \lim\limits_{x\to 3} f(x) - 2\lim\limits_{x\to 3} g^2(x) = 5 - 8 = -3$;

б) $y = \dfrac{f(x) - g(x)}{2f(x) - 5g(x)}$, предела не существует, т.к. знаменатель стремиться к 0.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to -2} (1 - 3x^3 + 4x^4) = 1 + 24 + 64 = 89$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+9}{x^2 - x - 1} = \dfrac{15}{5} = 3$.

С-25

1.

а) $f(x) = x^9 - 3x^5 - \dfrac{3}{x^4} + 2$; $f'(x) = 9x^8 - 15x^4 + \dfrac{12}{x^5}$;

б) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3 + 2x}$; $f'(x) = \dfrac{-6x - 4x^2 - 8 + 2x^2}{(3+2x)^2} = \dfrac{-2x^2 - 6x - 8}{(3+2x)^2}$.

2. $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$ $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$;

$f'(2) = \sqrt{2} + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ $f'(4) = 2 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{13}{4}$;

$f'(x-2) = \sqrt{x-2} + \dfrac{x-1}{2\sqrt{x-2}}$.

3. $f(x) = 3x - x^3$; $f'(x) = 3 - 3x^2 \geq 0$ при $x \in [-1; 1]$.

С-26

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$; $f'(x) = 2(\sqrt{x} + 1)^{-2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$;

$f'(t^2) = \dfrac{1}{t(t+1)^2}$.

2. а) $f(x) = 9x^3 + x$; $f'(x) = 27x^2 + 1 > 0$ всегда, значит, $f'(x) = 0$ и $f'(x) < 0$ не имеют решений;

б) $f(x)=\dfrac{x^2+15}{x+1}$; $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x-x^2-15}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-15}{(x+1)^2}=0$; $f'(x)=0$

при $\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+1)^2}=0$ $x=-5$ и $x=3$;

$f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;5)\cup(3;+\infty)$; $f'(x)<0$ при $x\in(-5;-1)\cup(-1;3)$.

С-27

1. **а)** $f(x)=\sqrt{3\sqrt{x}-1}$; ОДЗ: $3\sqrt{x}-1\geq 0$; $x\geq\dfrac{1}{9}$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$; ОДЗ: $x^2-6x+9\neq 0$; $x\neq 3$.

2. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$; $g(x)=\sqrt{x}$; $f(g(x))=\dfrac{2+3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $g(f(x))=\sqrt{\dfrac{2+3x}{1-x}}$.

3. **а)** $f(x)=(x^7-3x^4)^{120}$ $f'(x)=120(7x^6-12x^3)(x^7-3x^4)^{119}$;

б) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$; $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

С-28

а) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}+10\right)$; $f'(x)=\dfrac{1}{3\cos^2\left(\dfrac{x}{3}+10\right)}$;

б) $f(x)=\cos(3-2x)$; $f'(x)=2\sin(3-2x)$;

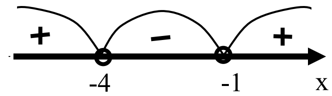
в) $f(x)=\operatorname{tg}x\sin(2x+5)$; $f'(x)=\dfrac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}+2\cos(2x+5)\operatorname{tg}x$.

С-29

1. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x-1)(x^2-3x-4)}$;

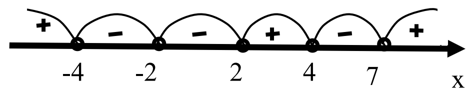
ОДЗ $(x-1)(x^2-3x-4)\neq 0$; $x\neq\pm 1$ и $x\neq 4$, значит, промежутки непрерывности: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;4)\cup(4;\infty)$.

2. **а)** $x^2 + 5x + 4 < 0$; $(x + 1)(x + 4) < 0$;



$x \in (-4; -1)$;

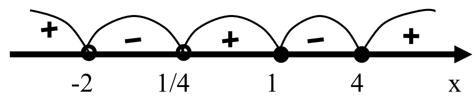
б) $\dfrac{(x-2)(x+2)^2(x-7)}{x^2-16} < 0$;



$x \in (-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (4;7)$;

в) $\dfrac{x-2}{x+2} \geq \dfrac{2x-3}{4x-1}$; $\dfrac{4x^2-9x+2-2x^2-x+6}{(x+2)(4x-1)} \geq 0$;

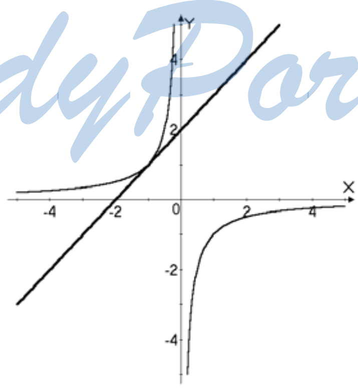
$\dfrac{2x^2-10x+8}{(x+2)(4x-1)} \geq 0$; $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(4x-1)} \geq 0$;



$x \in (-\infty; -2) \cup (\dfrac{1}{4}; 1] \cup [4; +\infty)$.

С-30

1. $y(x) = -\dfrac{1}{x}$; $y(-1) = 1$; $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $y'(-1) = 1$;



$Y_{кас} = 1 + x + 1 = x + 2$ – уравнение касательной.

2. $y = \cos\frac{x}{3}$; $y(\pi) = \frac{1}{2}$; $y' = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$; $y'(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$;

$y_{кас} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(x - \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ – уравнение касательной.

С-31

1. $\sqrt{35{,}91} \approx 6(1 - 0{,}0025 \cdot \frac{1}{2}) = 5{,}9925$.

2. $1{,}00008^{1000} - 0{,}99996^{200} \approx 1 + 0{,}00008 \cdot 1000 - 1 + 0{,}00004 \cdot 200 =$
$= 1{,}08 - 0{,}992 = 0{,}088$.

С-32

1. $s(t) = 17t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3$; $v(t) = 17 - 4t + t^2$;

$a(t) = -4 + 2t$; $a(3) = 2$; $F = ma = 3 \cdot 3 = 6$ н.

2. $h(t) = h_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2} = 2 + 4t - 5t^2$; $v(t) = 4 - 10t$;

$4 - 10t = \frac{4}{3}$; $\frac{8}{3} = 10t$; $t = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$;

$h\left(\frac{4}{15}\right) = 2 + \frac{16}{15} - 5 \cdot \frac{16}{225} = 2 + \frac{48-16}{45} = 2\frac{32}{45}$ м.

С-33

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; $f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$; $f'(x) = 0$ при
$x = 2$ и $x = -1$;

$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; убывает при $x \in (-1; 2)$.

2. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$; $f'(x) = 0$ при $x = 1$; $x = 1$ – точка max.

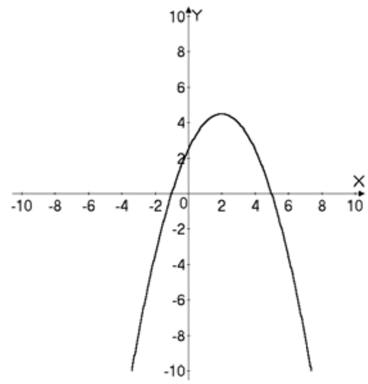
С-34

$f(x) = x^2(x - 6)^2 = x^4 - 12x^3 + 36x^2$; $f'(x) = 4(x^3 - 9x^2 + 18x)$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$,
$x = 3$ и $x = 6$; $x_{min} = 0$; $x_{min} = 6$; $x_{max} = 3$;
$f(0) = 0$; $f(3) = 81$; $f(6) = 0$;
$f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 6]$; возрастает при $x \in (0; 3) \cup (6; +\infty)$.

С-35

1.

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$;



$x_в = 2$; $y_в = 4{,}5$;

возрастает при $x \in (-\infty;2)$;

убывает при $x \in (2;\infty)$;

$x \in R$;

$y \in (-\infty; 4{,}5]$;

$\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$;

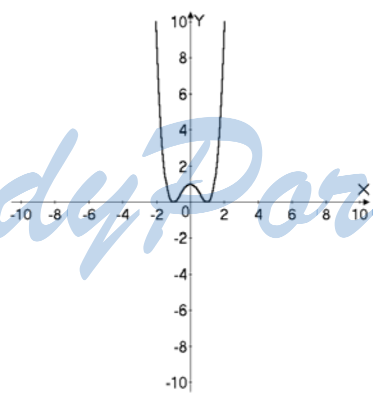
нули: $x = 5$, $x = -1$.

2. **а)** $3x^2 - 2x + 1 > 0$ $\frac{D}{4} = 1 - 3 < 0$, значит, $x \in R$;

б) $9x^2 - 18x + 4 \le 5x^2 - 6x + 11$; $4x^2 - 12x - 7 \le 0$;

$x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

С-36



$y = x^4 - 2x^2 + 1$ $y' = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 1$

убывает при $x \in (-\infty; -1) \cup [0; 1]$; возрастает при $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$;

min: $(\pm 1; 0)$; max: $(0; 1)$.

С-37

1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$; $x \in [-2; 2]$;

$f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$; $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 1$;

$f(0) = 1$; $f(1) = -1$; $f(-1) = 1$; $f(-2) = -55$; $f(2) = 57$;

наименьшее значение функции –55; наибольшее значение функции 57.

2.

$$\begin{cases} a+b=6 \\ y=a^2b \end{cases}; \quad \begin{cases} b=6-a \\ y=6a^2-a^3 \end{cases}; \qquad y' = 12a - 3a^2;\ y' = 0 \text{ при}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=6 \\ y=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ y=32 \end{cases}.$$

Ответ: 4 + 2.

С-38

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

$\cos\beta = -\frac{4}{5}$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin\beta = -\frac{3}{5}$;

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0.$

2. $$\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos^2(\pi-\alpha)} + \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2\alpha} + 4\cos^2\alpha = 4.$$

3. $\sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\sin 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

$\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

$\operatorname{tg} 22°30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

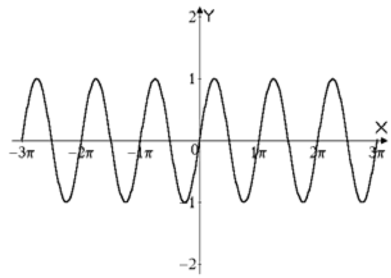
С-39

а) $y = \sin 2x$; $y = 0$ при $x = \dfrac{\pi n}{2}$ – нули; $x \in R$; $y \in [-1; 1]$

возрастает при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$;

убывает при $x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{3\pi}{4} + \pi n\right)$

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ – min; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ – max.

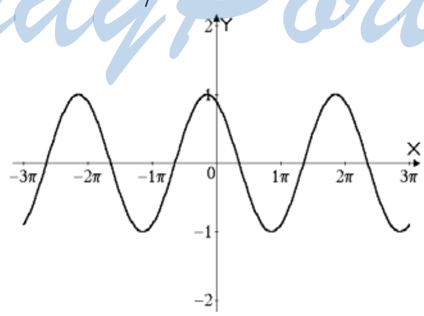


б) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{7}\right)$; $y = 0$ при $x = \dfrac{5\pi}{14} + \pi n$ – нули;

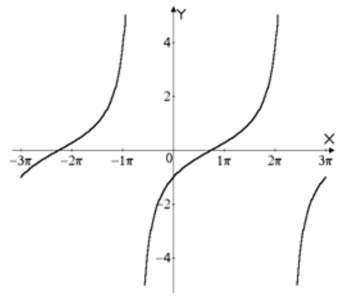
возрастает при $x \in \left[-\dfrac{8\pi}{7} + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{7} + 2\pi n\right]$;

убывает при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{7} + 2\pi n; \dfrac{6\pi}{7} + 2\pi n\right]$;

$x = -\dfrac{\pi}{7} + 2\pi n$ – max; $x = \dfrac{6\pi}{7} + 2\pi n$ – min; $x \in R$; $y \in [-1; 1]$.



в) $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$;



нули: $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ при $x = \frac{\pi}{12} + 3\pi n$;

$y \in R$; $x \neq \frac{9\pi}{4} + 3\pi n$; возрастает на области определения.

С-40

1.

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; **б)** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; **в)** $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

2.

а) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \pi n$;

б) $\cos^2 x - \sin 2x = -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\cos 2x - \sin 2x = -1$;

$\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1$; $\sin(2x - \varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\pi k}{2}$.

3.

а) $\mathrm{tg}\, 2x < -1$; $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$.

б) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$; $x \in \left(\frac{5\pi}{12} + 2\pi n; \frac{13\pi}{12} + 2\pi n\right)$.

С-41

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}-y \\ 1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2y\right)+1-\cos 2y=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2y\right)=\frac{1}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}-y \end{cases}; \begin{cases} y=\frac{\pi}{6}+\pi n \\ x=\frac{\pi}{6}-\pi n \end{cases}.$$

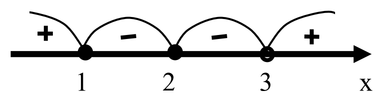
С-42

1.

а) $x^2-4x+3\le 0$; $x\in[1;3]$; **б)** $x^2-6x+9>0$; $(x-3)^2>0$; $x\ne 3$.

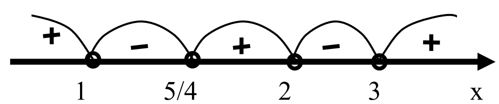
2.

а) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}\le 0$; $x\in[1;3)$.



б) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}>4$; $\frac{2x-4+3x-3-4x^2+12x-8}{(x-1)(x-2)}>0$;

$\frac{4x^2-17x+15}{(x-1)(x-2)}<0$;



$x_1=\frac{17-7}{8}=\frac{5}{4}$, $x_2=3$; $x\in\left(1;\frac{5}{4}\right)\cup(2;3)$.

С-43

а) $y=x^6-3x^4+2x^3-3$; $y'=6x^5-12x^3+6x^2$;

б) $y=(3-2x)\sqrt{x}$; $y'=\frac{3-2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}=\frac{3-2x-4x}{2\sqrt{x}}=\frac{3-6x}{2\sqrt{x}}$;

в) $y=\sin 2x$; $y'=2\cos 2x$;

г) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x-1\right)$; $y'=\frac{1}{3\cos^2\left(\frac{1}{3}x-1\right)}$;

д) $y=(2x-1)^{17}$; $y'=34(2x-1)^{16}$.

С-44

1.

$f(x) = 3x - x^2$; $f(1) = 2$; $f'(x) = 3 - 2x$; $f'(1) = 1$; $y = 2 + x - 1 = x + 1$ – уравнение касательной.

2. **а)** $\sqrt{0,998} \approx 1 - 0,002 \cdot \frac{1}{2} = 0,999$;

б) $(1,0003)^{50} \approx 1 + 0,0003 \cdot 50 = 1,015$.

3.

$x(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$; $v(t) = 3t^2 - 4t + 3$;

$v(2) = 12 - 8 + 3 = 7$; $a(t) = 6t - 4$; $a(2) = 8$.

С-45

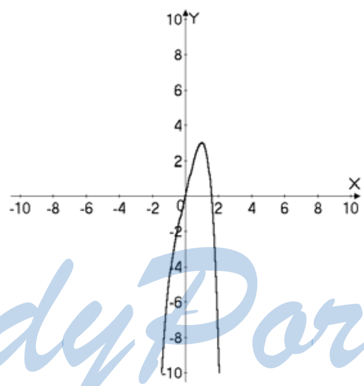
1.

$y = 4x - x^4$; $y' = 4 - 4x^3$; $y' = 0$ при $x = 1$

y возрастает при $x \in (-\infty; 1)$; убывает при $x \in (1; +\infty)$;

$x = 1$ – max; $y(1) = 3$;

нули: $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{4}$.



2.

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $x \in [-1; \frac{1}{2}]$; $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$;

$f(0) = 1$; $f(-1) = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$;

наибольшее значение функции $f(0) = 1$

наименьшее значение функции $f(-1) = \frac{1}{2}$.

ВАРИАНТ 6

С-1

1. $42° = \frac{\pi}{180} \cdot 42 = \frac{7\pi}{30}$; $130° = \frac{\pi}{18} \cdot 13$.

2. $\frac{7\pi}{12} = 105°$; $\frac{21\pi}{4} = 945°$.

3. **а)** $57° = \frac{\pi 57}{180}$; $\sin 57° \approx 0{,}8387$; $\cos 57° \approx 0{,}5446$;

б) $88°55' \approx 1{,}5519$; $\sin 88°55' \approx 0{,}9998$; $\cos 88°55' \approx 0{,}0192$.

4. **а)** $0{,}8796 \approx 50°24'$;

б) $2{,}3422 \approx 134°12'$.

С-2

1. $1 + \frac{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. **а)** $\frac{\sin 110^\circ \cos 220^\circ}{\text{ctg} 330^\circ} > 0$; **б)** $\sin 2\ \text{ctg}\ 4 > 0$.

3. $\text{tg}\ \alpha = 3$; $\alpha \in$ I четверти;

$\text{ctg}\ \alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 3$, $\sin^2\alpha = 9 - 9\sin^2\alpha$; $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

С-3

1. **а)** $\sin 2280° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\cos\frac{43\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\text{tg}\ 1590° = \text{tg}\ 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{ctg(270^\circ-\alpha)}{1-tg^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{ctg^2(360^\circ-\alpha)-1}{ctg(180^\circ+\alpha)}=\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\dfrac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}=$
$= tg\ 2\alpha\ ctg\ 2\alpha = 1.$

3. $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right);\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=tg\ \alpha\ ctg\ \alpha=1.$

С-4

1. $\dfrac{1-\sin^2 15^\circ}{2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1}=\dfrac{\cos^2 15^\circ}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\cos 30^\circ}{\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$

2. $\sin\alpha=\dfrac{4}{5};\qquad \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$

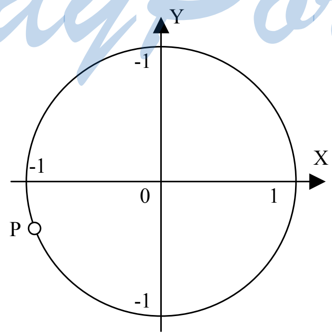
$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5};\ \cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25};\ \sin 2\alpha=-\dfrac{24}{25};\quad ctg\ 2\alpha=\dfrac{7}{24}.$

3. $\cos^2 2\alpha+(1+\cos 2\alpha)^2\ tg^2\ \alpha=\cos^2 2\alpha+4\cos^4\alpha\ tg^2\ \alpha=$
$=\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha=1.$

С-5

1. абсцисса: $\cos\dfrac{43\pi}{6}=\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

ордината: $\sin\dfrac{43\pi}{6}=-\sin\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}.$



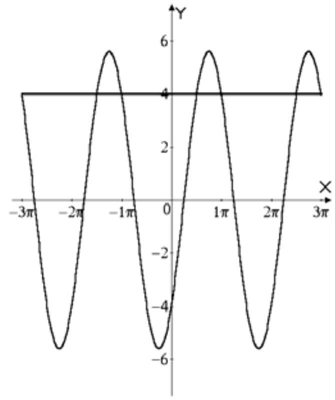
2. **а)** III; **б)** I.

3.

$$4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=4;$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k.$$



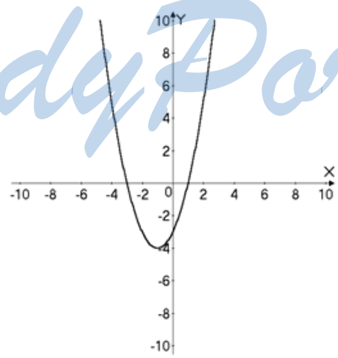
С-6

1. **а)** $f(x)=\dfrac{1-8x}{x^2-5x+6}$; ОДЗ: $x^2-5x+6\neq 0$; $x\neq 2$ и $x\neq 3$;

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{16-x^2}}$; ОДЗ: $16-x^2>0$; $x\in(-4;4)$.

2. $f(x)=2x^3-x+5$; $f(-1)=4$;
$f(x-1)=(x-1)(2x^2-4x+2-1)+5=2x^3-6x^2+5x+4.$

3.



С-7

1. $f(x)=\dfrac{\sin x\cos^2 x\text{tg}x}{x^2}$

$f(-x)=\dfrac{\sin(-x)\cos^2(-x)\text{tg}(-x)}{(-x)^2}=\dfrac{\sin x\cos^2 x\text{tg}x}{x^2}=f(x)$, значит, $f(x)$ четная.

2. $g(x) = x\,|x|\sin 5x\ \text{tg}\ 3x$; $g(-x) = |-x|\,(-x)\sin(-5x)\ \text{tg}\,(-3x) =$
$= -x\,|x|\sin 5x\ \text{tg}\ 3x = -g(x)$, значит, $g(x)$ нечетная.

С-8

1. **а)** $\sin 312°19' = -\cos 42°19'$; **б)** $\cos 5042° = \cos 2°$;
в) $\text{ctg}\dfrac{33\pi}{8}=\text{ctg}\dfrac{\pi}{8}$.

2. $\cos(-30°) + \sin 660° + \text{ctg}(-510°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

3. **а)** $y = \text{tg}\,(1 - 3x)$; $T=\dfrac{\pi}{3}$;
б) $y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$; $T=\dfrac{\pi}{2}$.

С-9

1. а) $f(x)=\sqrt{1-2x}$; убывает на области определения, т.е. при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$;

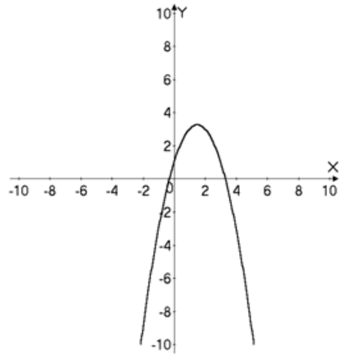
б) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}=1+\dfrac{1}{x+1}$; убывает на области определения, т.е. при $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

2. $f(x)=\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)$; ОДЗ: $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0$; $x\neq\dfrac{5\pi}{3}+2\pi n$;
убывает на области определения.

3. $\cos 10°$, $\cos 70°$, $\cos(-20°) = \cos 20°$, $\sin 15°$.
Ответ: $\sin 15°$, $\cos 70°$, $\cos 20°$, $\cos 10°$.

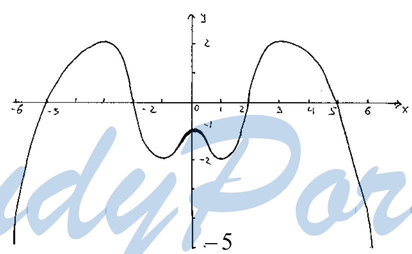
С-10

1. $y = 3x - x^2 + 1$; $x_в = \frac{3}{2}$; $y_в = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{11}{4}$; $y \in (-\infty;\ \frac{13}{4}]$.



2. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$; min: $\left(-\frac{9\pi}{28} + \pi n; -1\right)$; max: $\left(\frac{5\pi}{28} + \pi n; 1\right)$.

С-11



С-12

1. $f(x) = \frac{1}{\text{tg}3x}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}\sin 3x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x \neq \frac{\pi n}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\end{array}\right.$.

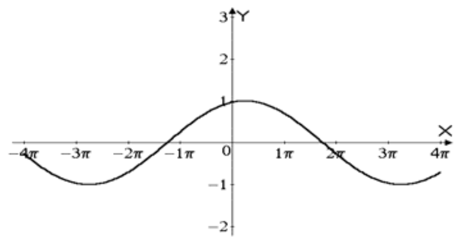
2. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$

возрастает при

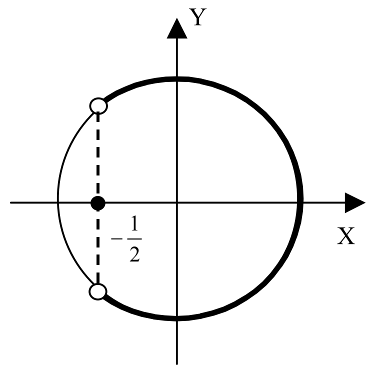
$x \in \left[-\frac{11\pi}{4} + 6\pi n; \frac{\pi}{4} + 6\pi n\right]$;

убывает при

$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 6\pi n; \frac{13\pi}{4} + 6\pi n\right]$.



3. $\cos t > -\frac{1}{2}$; $t \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$



С-13

1.

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; **б)** $\cos(\arccos(-0{,}3)) = -0{,}3$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$.

г) $\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin\pi = 0$.

2.

а) $\arcsin(-0{,}736) \approx -0{,}8271$; **б)** $\arccos(-0{,}997) \approx 3{,}0641$;

в) $\operatorname{arctg}(3{,}7) \approx 1{,}3068$.

С-14

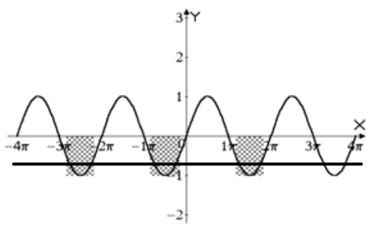
а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k.$

б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$

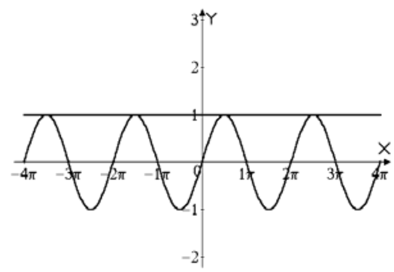
в) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; $\quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}.$

С-15

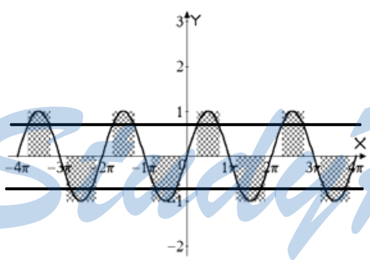
а)



б)



в)



$\sin x \le -\frac{1}{2}$; $\quad x \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right].$

С-16

а) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{3\pi}{8} + \pi n\right);$

б) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{3}}$; $3x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n\right)$;

$$x\in\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right).$$

С-17

а) $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=4$; $\operatorname{ctg}x\neq 0$;

$\operatorname{tg}^2x-4\operatorname{tg}x+3=0$; $\operatorname{tg}x=3$; $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$;

$\operatorname{tg}x=1$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$;

б) $2\cos^4x-3\cos^2x+1=0$;

$\cos^2x=1$; $x=\pi n$; $\cos^2x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

С-18

а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0$;

$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$; $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi n$.

б) $\sin^2x-\frac{5}{2}\sin 2x+2=0$; $5\sin 2x+\cos 2x=5$;

$\sin(2x+\varphi)=\frac{5}{\sqrt{26}}$;

$\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$;

$x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}+\frac{\pi k}{2}$.

С-19

$\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{1}{2}\\ \sin x\sin y=-\frac{1}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}\cos(x+y)+\cos(x-y)=1\\ \cos(x+y)-\cos(x-y)=-1\end{cases}$;

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ x - y = 2\pi k \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} + \pi k \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} - \pi k \end{cases}.$$

C-20

а) $\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x;$
$\cos 3x \cos 2x - \cos 5x \cos 2x = 0;$ $\cos 2x\,(\cos 3x - \cos 5x) = 0;$
$\cos 2x \sin 4x \sin x = 0;$

$\cos 2x = 0;\quad x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\quad \sin 4x \sin x = 0;$ $\sin 4x = 0;\quad x = \dfrac{\pi n}{4};$

б) $\cos x \cos 2x \cos 5x - \cos x \sin 2x \sin 5x + \sin x \sin 7x = 0$

$\cos x \cos 7x + \sin x \sin 7x = 0;$ $\cos 6x = 0;\quad x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}.$

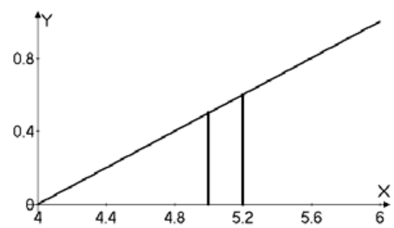
C-21

1.

$f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2;$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{2}\Delta x;$

$x_0 = 5 \qquad \Delta x = 0{,}2 \qquad \Delta f(x_0) = 0{,}1.$



2.

$f(x) = 2 + 3x - \dfrac{x^2}{2};$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2 + 3x_0 + 3\Delta x - \dfrac{x_0^2 + \Delta x^2 + 2x_0\Delta x}{2} - 2 - 3x_0 + \dfrac{x_0^2}{2}}{\Delta x} = 3 - \frac{\Delta x}{2} - x_0;$$

$x_0 = -1,\quad \Delta x = 0{,}1;\quad \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 3{,}95;$

$x_0 = -1,\ \Delta x = 0{,}002;\quad \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 3{,}999;$

$x_0 = -1,\ \Delta x = 0{,}00001;\quad \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 3{,}999995;$

$x_0 = -1;\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 4.$

С-22

1. $x(t) = 2t^2 - 1$; $v(t) = 4t$;
Импульс при $t = 2$ и $m = 3$ равен $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ кг · м/с.

2. **а)** $f(x) = 4\sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; **б)** $f(x) = x^2 + 3$; $f'(x) = 2x$.

С-23

1. **а)** $f(-3) = 1$; $f(2) = 2$; **б)** $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -1$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = x + 2,\ x \neq 2$; $|x - 3| < 0{,}001$; $\delta = 0{,}001$.

С-24

1. **а)** $\lim\limits_{x\to-1} y = \lim\limits_{x\to-1} f^2(x) - 3\lim\limits_{x\to-1} g(x) = 4 - 9 = -5$;

б) $\lim\limits_{x\to-1} y = \dfrac{\lim\limits_{x\to-1} f(x) - \lim\limits_{x\to-1} g(x)}{\lim\limits_{x\to-1} f(x) + \lim\limits_{x\to-1} g(x)} = \dfrac{2-3}{2+3} = -\dfrac{1}{5}$.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to2} (1 - 3x^2 + 4x^4) = 1 - 12 + 64 = 53$;

б) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{3x-5}{x^2+x+1} = \dfrac{-14}{7} = -2$.

С-25

1. **а)** $f(x) = x^7 + 2x^5 + \dfrac{4}{x^2} - 1$;

$f'(x) = 7x^6 + 10x^4 - \dfrac{8}{x^3}$;

б) $f(x) = \dfrac{3-x^2}{4+2x}$;

$f'(x) = \dfrac{-8x-4x^2-6+2x^2}{(4+2x)^2} = \dfrac{-2x^2-8x-6}{(4+2x)^2}$.

2. $f(x) = x\sqrt{x+1}$; $f'(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$;

$f'(0) = 1$; $f(3) = 2 + \dfrac{3}{2\cdot 2} = 2\dfrac{3}{4}$; $f(x-1) = \sqrt{x} + \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}$.

3. $f(x) = x - 3x^3$; $f'(x) = 1 - 9x^2$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

С-26

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$;

$f'(t^4) = \dfrac{1}{t^2(t^2-1)^2}$.

2. **а)** $f(x) = 3x^3 - x$; $f'(x) = 9x^2 - 1$; $f'(x) = 0$ при $x = \pm\dfrac{1}{3}$;

$f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; \infty\right)$; $f'(x) < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

б) $f(x) = \dfrac{x^2-8}{x+1}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+8}{(x+1)^2}$;

$f'(x) > 0$ всегда, кроме $x = -1$.

С-27

1. **а)** $f(x) = \sqrt{4 - 2\sqrt{x}}$; ОДЗ: $\begin{cases} 4 - 2\sqrt{x} \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$; $x \in [0; 4]$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; ОДЗ: $x^2 - 3x + 2 > 0$; $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-2x}$; $g(x) = \sqrt{x}$;

$f(g(x)) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$; $g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-2x}}$.

3. **а)** $f(x) = (x^5 - 2x^2)^{191}$; $f'(x) = 191(5x^4 - 4x)(x^5 - 2x^2)^{190}$;

б) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$; $g'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

С-28

а) $f(x) = \cos(3-4x)$; $f'(x) = 4\sin(3-4x)$;

б) $f(x) = \mathrm{tg}(2x-7)$; $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2(2x-7)}$;

в) $f(x) = \sin x \cos(2x-3)$; $f'(x) = \cos x \cos(2x-3) - 2\sin x \sin(2x-3)$.

С-29

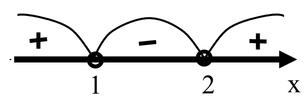
1.

$f(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x+1)(x^2-4x+3)}$; ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \neq 0 & x \neq \pm 1 \\ x^2-4x+3 \neq 0 & x \neq 3 \end{cases}$; и $x \neq 3$,

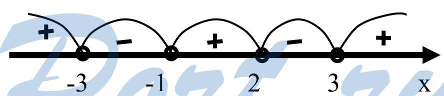
значит, $f(x)$ непрерывна при $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;3) \cup (3;\infty)$.

2.

а) $x^2 - 3x + 2 > 0$ $(x-2)(x-1) > 0$;
$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.



б) $\dfrac{(x-3)(x+1)^2(x-2)^3}{x^2-9} < 0$;

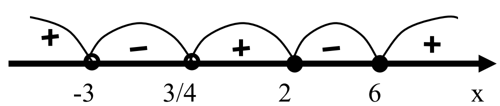


$\dfrac{(x-3)(x+1)^2(x-2)^3}{(x-3)(x-3)} < 0$;
$x \in (-3; -1) \cup (-1; 2)$.

в) $\dfrac{x-3}{x+3} \leq \dfrac{2x-5}{4x-3}$ $\dfrac{4x^2-15x+9-2x^2-x+15}{(x+3)(4x-3)} \leq 0$

$\dfrac{2x^2-16x+24}{(x+3)(4x-3)} \leq 0$; $\dfrac{(x-6)(x-2)}{(x+3)(4x-3)} \leq 0$;

$x \in (-3; \dfrac{3}{4}) \cup [2; 6]$.



С-30

1. $y = \sin 2x$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y' = 2\cos 2x$; $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$;

$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + x - \frac{\pi}{6}$ – уравнение касательной.

2. $y = \frac{2}{x}$; $y(-2) = -1$; $y' = -\frac{2}{x^2}$; $y'(-2) = -\frac{1}{2}$;

$y = -1 - \frac{1}{2}(x + 2) = -\frac{1}{2}x - 2$ – уравнение касательной.

С-31

1. $\sqrt{49{,}07} \approx 7(1 + 0{,}0014 \cdot \frac{1}{2}) = 7{,}0049$;

2. $1{,}00006^{3000} - 0{,}99998^{6000} \approx 1 + 0{,}00006 \cdot 3000 - 1 +$

$+ 0{,}00002 \cdot 6000 = 1{,}18 - 0{,}88 = 0{,}3$.

С-32

1. $s(t) = 4t + t^2 - \frac{1}{6}t^3$; $v(t) = 4 + 2t - \frac{1}{2}t^2$;

$a(t) = 2 - t$; $F = (2 - 2)\,4 = 0$ Н.

2. $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 4 + 3t - 5t^2$;

$v(t) = 3 - 10t = \frac{3}{2}$; $t = \frac{3}{20}$; $h(\frac{3}{20}) = 4 + \frac{9}{20} - \frac{9}{80} = \frac{27}{80} + 4 = \frac{347}{80}$ м.

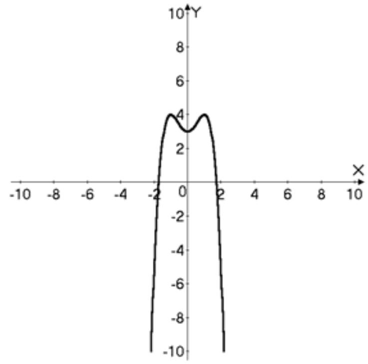
С-33

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; $f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$; $f'(x) = 0$ при $x = -2$ и $x = 1$, значит, $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; убывает при $x \in (-2; 1)$.

2. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$; $f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{16}$ – точка min.

С-34

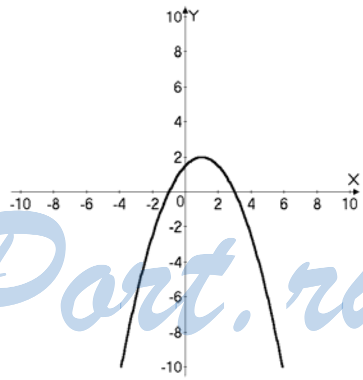
$f(x) = 2x^2 - x^4 + 3$; $f'(x) = 4(x - x^3)$; $f'(x) = 0$ при $x_{min} = 0$ и $x_{max} = \pm 1$;
$y(\pm 1) = 4$; $y(0) = 3$;
y возрастает при
$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$;
убывает при
$x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.



С-35

1.

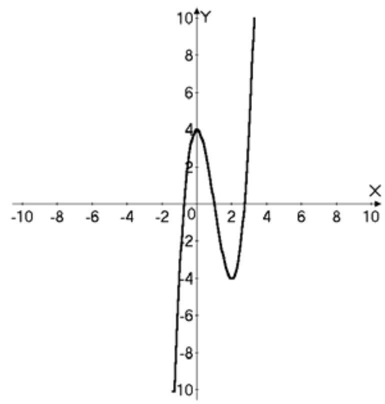
$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}$; $x_в = 1$; $y_в = 2$;
y возрастает при $x \in (-\infty; 1)$;
убывает при $x \in (1; \infty)$;
нули $x^2 - 2x - 3 = 0$;
$x = 3$, $x = -1$.



2.
а) $2x^2 - x + 1 < 0$ $D = 1 - 8 < 0$, значит, решений нет;
б) $16x^2 + 6x + 3 \geq 7x^2 - 6x - 1$;
$9x^2 + 12x + 4 \geq 0$; $(3x + 2)^2 \geq 0$, значит, $x \in R$.

С-36

$y = 2x^3 - 6x^2 + 4$;
$y' = 6(x^2 - 2x) = 0$; $y' = 0$ при
$x = 0$, $x = 2$
y возрастает при
$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;
убывает при $x \in (0; 2)$
$x_{max} = 0$; $y(0) = 4$;
$x_{min} = 2$; $y(2) = -4$.



С-37

1. $f(x) = x^5 + 20x^2 + 3$; $x \in [-1; 1]$; $f'(x) = 5(x^4 + 8x)$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = -2$; $f(-1) = 22$; $f_{min}(0) = 3$; $f_{max}(1) = 24$, значит, наибольшее значение $f(1) = 24$; наименьшее значение $f(0) = 3$.

2. $\begin{cases} a + b = 8 \\ y = a^2 + b^3 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 8 - b \\ y = b^3 + b^2 - 16b + 64 \end{cases}$;

$y' = 3b^2 + 2b - 16$; $y' = 0$ при $b = -\frac{8}{3}$ не подходит; $\begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases}$, значит,

$8 = 2 + 6$ – искомое разбиение.

С-38

1. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\cos\beta = -\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

$\sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin\beta = \frac{3}{5}$;

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -\frac{12}{25} - \frac{12}{25} = -\frac{24}{25}$.

2. $\left(2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\right)^2 \sin^2(\pi - 2\alpha) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right) =$

$= 4\cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha - \cos^2 4\alpha = -\cos 8\alpha.$

3. $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$;

$\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

С-39

а)

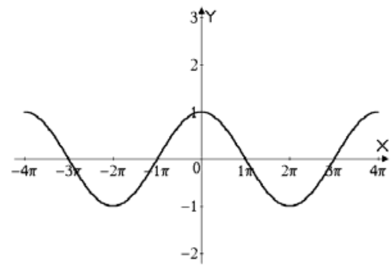
$y = \cos\frac{x}{2}$; $x \in R$; $y \in [-1; 1]$;

нули: $x = \pi + 2\pi n$;

$x_{max} = 4\pi n$;

$x_{min} = 2\pi + 4\pi n$;

$y(4\pi n) = 1$; $y(2\pi + 4\pi n) = -1$;



y возрастает при $[-2\pi + 4\pi n; 4\pi n]$;

убывает при $[4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$;

б) $y = \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)$;

$x \in R$; $y \in [-1; 1]$;

$x_{max} = \frac{9\pi}{10} + 2\pi n$; $x_{min} = -\frac{\pi}{10} + 2\pi n$; нули: $x = \frac{2\pi}{5} + \pi n$;

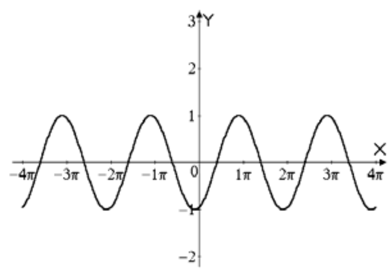
$y\left(\frac{9\pi}{10} + 2\pi n\right) = 1$; $y\left(-\frac{\pi}{10} + 2\pi n\right) = -1$;

y возрастает при

$\left(-\frac{\pi}{10} + 2\pi n; \frac{19\pi}{10} + 2\pi n\right)$;

убывает при

$\left(\frac{9\pi}{10} + 2\pi n; \frac{19\pi}{10} + 2\pi n\right)$.



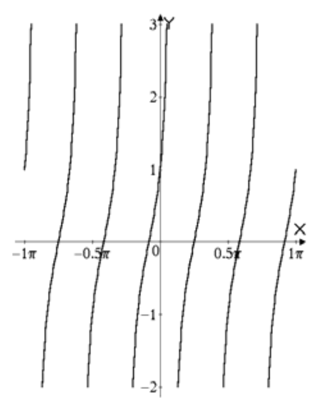
в)

$y = \mathrm{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; ОДЗ $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$;

$x \neq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$;

$y \in R$; нули: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$;

возрастает на области определения.



С-40

1. **а)** $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$; **б)** $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$; в) $\mathrm{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

2. **а)** $2\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$; $\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;$

$x = -\dfrac{2\pi}{3} + (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$;

б) $\cos^2 x + \sin 2x = \dfrac{3}{2}$; $\cos 2x + 2\sin 2x = 2$;

$\sin(2x + \varphi) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\varphi = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

$x = -\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{1}{2}(-1)^k \arcsin \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi k}{2}$.

3.

а) $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} > 1$; $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right)$;

б) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left(-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n;\ \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi n\right)$.

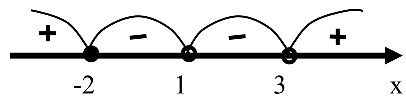
С-41

$$\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + y \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}.$$

С-42

1. **а)** $x^2 - 6x + 8 > 0$; $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$;
б) $x^2 - 12x + 36 \le 0$; $D = 0$ $(x - 6)^2 \le 0$; $x = 6$.

2. **а)** $\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{x-3} \ge 0$;

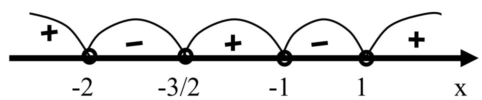


$x \in (-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$;

б) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} < 2$; $\frac{2x+4+3x+3-2x^2-6x-4}{(x+1)(x+2)} < 0$;

$\frac{2x^2+x-3}{(x+1)(x+2)} > 0$;

$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)}{(x+1)(x+2)} > 0$;



$x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; -1) \cup (1; +\infty)$.

С-43

а) $y = x^7 - 2x^5 + 3x - 3$; $y' = 7x^6 - 10x^4 + 3$;

б) $y = (1 + 3x)\sqrt{x}$; $y' = \frac{1+3x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}$;

в) $y = \cos 5x$; $y' = -5\sin 5x$;

г) $y = \mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}x + 5\right)$; $y' = \frac{-1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2} + 5\right)}$;

д) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{24}$; $y' = 8\left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{23}$.

С-44

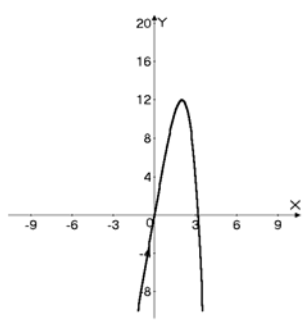
1. $f(x) = 3x + 2x^2$; $f(1) = 5$; $f'(x) = 3 + 4x$; $f'(1) = 7$;
$y = 5 + 7(x - 1) = 7x - 2$ – уравнение касательной.

2. **а)** $\sqrt{1{,}002} \approx 1 + 0{,}001 = 1{,}001$;
б) $0{,}99997^{60} \approx 1 - 0{,}00003 \cdot 60 = 0{,}9982$.

3. $x(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 7t$; $v(t) = 3t^2 + t - 7$;
$v(3) = 23$; $a(t) = 6t + 1$; $a(3) = 19$.

С-45

1.



$y = 8x - \frac{x^4}{4}$; $x \in R$; $y \in (-\infty; 12]$;
$y' = 8 - x^3$; $y' = 0$ при $x = 2$, значит, $x_{max} = 2$; $y(2) = 12$;
y возрастает при $x \in (-\infty; 2)$; убывает при $x \in (2; \infty)$;
нули: $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{32}$.

2. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in [-2; 0{,}5]$;

$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$; $f(x) = 0$ при

$x = \pm 1$; $f(-2) = \frac{-4}{5}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$; $f(-1) = \frac{-2}{2} = -1$, значит, наибольшее

значение функции $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$, наименьшее значение функции $f(-1) = -1$.

ВАРИАНТ 7

С-1

1. $66° = \frac{\pi}{180} \cdot 66 = \frac{11\pi}{30}$; $156° = \frac{\pi}{180} \cdot 156 = \frac{13\pi}{15}$.

2. $\frac{5\pi}{18} = 50°$; $\frac{29\pi}{3} = 1740°$.

3. **а)** $71°4' \approx 1,2462$; $\sin 71°4' \approx 0,9494$;
$\cos 71°4' \approx 0,314$;
б) $29°7' \approx 0,5111$; $\cos 29°17' \approx 0,8718$;
$\sin 29°17' \approx 0,4898$.

4. **а)** $0,0367 \approx 2°6'$; **б)** $2,0033 \approx 114°47'$.

С-2

1. $\cos\alpha(1 + \cos^{-1}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(1 - \cos^{-1}\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = 2\sin\alpha$;
$$\frac{(\cos\alpha + 1 + \sin\alpha)(\cos\alpha - 1 + \sin\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha.$$

2. **а)** $\frac{\sin 100^\circ \cos 100^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ \operatorname{ctg} 300^\circ} > 0$; **б)** $\sin 1 \cos 3 \operatorname{tg} 5 > 0$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = -2$ $\cos\alpha > 0$, значит, $\alpha \in$ IV четверти;
$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = -2;\ \sin^2\alpha = 4 - 4\sin^2\alpha;\ \sin\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

С-3

1. **а)** $\cos 1755° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\sin 2160° = \sin 0° = 0$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{39\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

2. $(\sin 160° + \sin 40°)(\sin 140° + \sin 20°) + (\sin 50° - \sin 70°) \cdot$
$\cdot (\sin 130° - \sin 110°) = 1 + 2\sin 20° \sin 40° + 1 - 2\sin 50° \sin 70° =$
$= 2 - 2\cos 60° = 1$.

3. $$\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-1}=\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\text{tg}\,\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+1}=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha}{(\cos\alpha)(\sin\alpha+1)}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

С-4

1. $$\frac{1-\sin^2 67^\circ 30'}{2\cos^2 75^\circ-1}=\frac{1+\cos 135^\circ}{2\cos 150^\circ}=-\frac{2-\sqrt{2}}{4:\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{3}}.$$

2. $\sin\alpha=\frac{1}{3}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}$; $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$;

$\cos 2\alpha=\frac{7}{9}$; $\sin 4\alpha=-\frac{8\sqrt{2}\cdot 7}{81}=-\frac{56\sqrt{2}}{81}$; $\text{tg}\,2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$;

$$\text{tg}\,4\alpha=\frac{2\text{tg}2\alpha}{1-\text{tg}^2 2\alpha}=-\frac{8\sqrt{2}}{7}:\left(1-\frac{32}{49}\right)=\frac{-8\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{49}{17}=\frac{-56\sqrt{2}}{17}.$$

3. $$\frac{1+\text{ctg}2\alpha\text{ctg}\alpha}{\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha}=\left(1+\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{2\text{tg}\alpha}\cdot\text{ctg}\alpha\right)\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\text{ctg}^2\alpha-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}\text{ctg}\alpha.$$

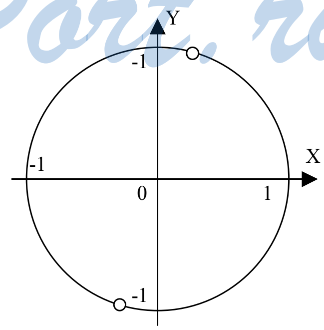
С-5

1.

$\text{tg}\,\alpha=3$; $\alpha=\text{arctg}\,3+\pi n$;

$\sin^2\alpha=9-9\sin^2\alpha$; $\sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$;

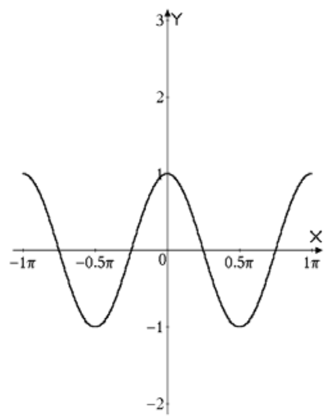
$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\cos 2\alpha=-\frac{8}{10}=\frac{-4}{5}$.



2. **а)** $\cos\alpha - \sin\alpha = -\frac{6}{5}$; $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{6}{5\sqrt{2}}$; $\alpha \in IV$;

б) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 3$; $\alpha = 2\text{arctg}\,3 + 2\pi n$; $\alpha \in II$.

3. $y = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$ **.**



С-6

1. **а)** $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2 - x - 2}$;

ОДЗ: $\begin{cases} 3x - 2 \ge 0 \\ x^2 - x - 2 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ne 2 \quad x \ne -1 \\ x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$, значит, $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$;

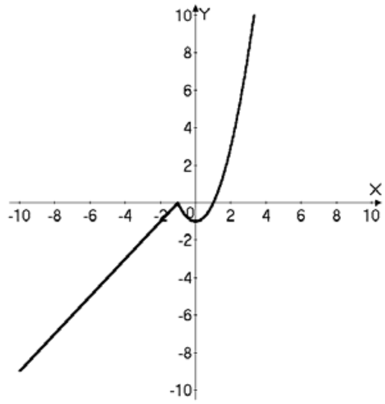
б) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{5-2x}}$;

ОДЗ: $\frac{(x-2)}{5-2x} \ge 0$; $x \in [2; \frac{5}{2})$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \ge -1 \\ x + 1 & x < -1 \end{cases}$;

а) $f(0) = -1$; $f(2) = 3$; $f(-1) = 0$; $f(-2) = -1$;

б)



С-7

а) $y = 2\sin x \cos 2x \operatorname{tg} 3x$; $\quad y(-x) = 2\sin(-x)\cos(-2x)\operatorname{tg}(-2x) =$
$= 2\sin x \cos 2x \operatorname{tg} 2x = y(x) \Rightarrow$ четная;
б) $y = x^2 \cos x \operatorname{ctg} 3x$; $\quad y(-x) = (-x)^2 \cos(-x)\operatorname{ctg}(-3x) =$
$= -x^2 \cos x \operatorname{ctg} 3x = -y(x) \Rightarrow$ нечетная;
в) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x$ $\quad y(-x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin(-x)$, значит, y
ни четная, ни нечетная;
г) $y = 3x^2 + 2\sin 5x \cos x$; $\quad y(-x) = 3(-x)^2 + 2\sin(-5x)\cos(-x) =$
$= 3x^2 - \sin 5x \cos x$, значит, y ни четная, ни нечетная.

С-8

1. **а)** $\sin 311°17' = -\cos 41°43'$; **б)** $\sin 4160° = -\cos 20°$;
в) $\operatorname{tg}\frac{33\pi}{5} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$.

2. $\sin(-30°) + \cos(660°) + \operatorname{tg}(-510°) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. **а)** $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$; $\quad T = \frac{\pi}{2}$;
б) $f(x) = \sin^2 x + \operatorname{tg} x$; $\quad T = \pi$; так как $f_1(x) = \sin^2 x \quad T = \pi$;
$f_2(x) = \operatorname{tg} x \quad T = \pi$.

С-9

1. **а)** $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$f(x)$ возрастает при $x \in (-2; 0)$; убывает при $x \in (0; 2)$;

б) $f(x)=\left|1-\dfrac{1}{x+1}\right|$;

$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; убывает при $x \in (-1; 0)$.

2. $f(x) = x^5 + x$; $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ всегда.

3. sin 1, sin 2, sin 3, sin 4. Ответ: sin 4, sin 3, sin 1, sin 2.

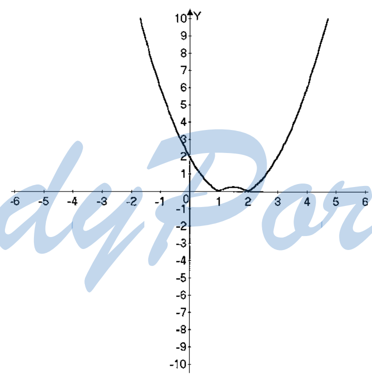
С-10

1. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$;

$x^2 - 3x + 2 = 0$; $x = 2$ и $x = 1$; $x_в = \dfrac{3}{2}$; $y_в = \left|\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}+2\right| = \left|-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$;

$x_{max} = \dfrac{3}{2}$; $x_{min} = 2$; $x_{min} = 1$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$; $f(2)=0$; $f(1)=0$;

$|x^2 - 3x + 2| \ge 1$; $\left[\begin{array}{l} x^2-3x+1\ge 0 \\ x^2-3x+3\le 0 \end{array}\right.$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{3-2\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3+2\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

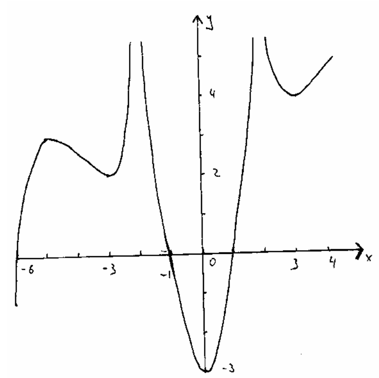


2.

$f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 1 = 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) - 1$

$f(x) \in [-3; 1]$ $x_{max} = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$ $x_{min} = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$

С-11



С-12

1. $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}$; ОДЗ: $\begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + \pi n \\ x \neq \pi + 2\pi n \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \end{cases}$.

2. $y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$;

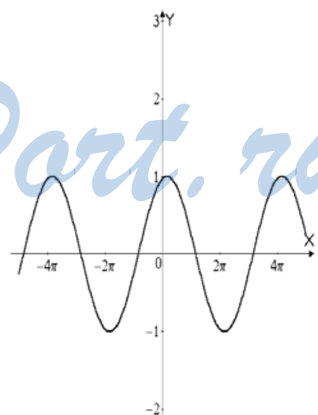
$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 1$; $x_{max} = \frac{\pi}{6} + 4\pi n$;

$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -1$; $x_{min} = \frac{13\pi}{6} + 4\pi n$;

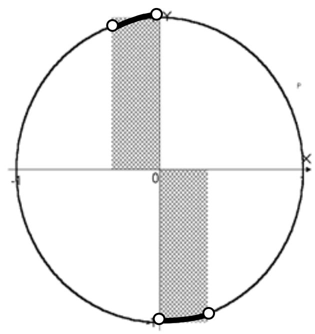
y возрастает при

$x \in \left(-\frac{11\pi}{12} + 4\pi n; \frac{\pi}{6} + 4\pi n\right)$

убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi n; \frac{13\pi}{6} + 4\pi n;\right)$.



3.



С-13

1. **а)** $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$;

б) arcsin (sin 110°) = arcsin (sin 70°) = 70°;

в) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$.

2. arcsin (–1) < arctg (–1).

3. **а)** arcsin (–0,3217) ≈ –0,3275;
б) arccos (–0,7991) ≈ –2,4966;
в) arctg (3,257) ≈ 1,2729.

С-14

а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi n;$

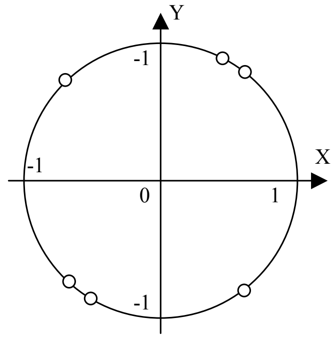
б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = -\frac{\pi}{5} + (-1)^k\,\frac{\pi}{4} + \pi k;$

в) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$;

$3x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2\pi n$; $\quad x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$.

С-15



$\cos 2t(\sin t - \sqrt{3}\cos t) = 0;$

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $t = \frac{\pi}{3} + \pi k;$

$\cos 2t(\sin t - \sqrt{3}\cos t) > 0;$

$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right).$

С-16

а) $\sin\frac{x}{2} \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad x \in \left[-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; -\frac{\pi}{2} + 4\pi n\right].$

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} - 1\right) \le -1$; $\qquad \frac{x}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2} + 1 + \pi n; -\frac{\pi}{4} + 1 + \pi n\right]$;

$x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 3 + 3\pi n; -\frac{3\pi}{4} + 3 + 3\pi n\right].$

С-17

а) $\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0;$ $\quad \sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0;$

$\sin x = -2$ – решений нет; $\quad \sin x = -1;$ $\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x;$ $\quad \sin x = 0;$ $\quad x = \pi n;$

$\cos x = \sqrt{3}\sin x$; $\mathrm{ctg}\, x = \sqrt{3}$;

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n.$

С-18

а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\alpha}$;

$$\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\cos\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{1-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\alpha};$$

б) $\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha}=\text{ctg}^2\dfrac{\alpha}{4}$; $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}}=\text{ctg}^2\dfrac{\alpha}{4}$.

С-19

$$\begin{cases}\cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}\\ \sin x+\sin\alpha=\sqrt{3}\end{cases};\quad \begin{cases}x+y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\\ \sin x+\sin y=\sqrt{3}\end{cases};$$

1. $$\begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{3}-y+2\pi n\\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-y\right)+\sin y=\sqrt{3}\end{cases};\quad \sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{3}-2\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k+2\pi n\end{cases};$$

2.

$$\begin{cases}x=-\dfrac{2\pi}{3}-y+2\pi n\\ \sin y-\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+y\right)=\sqrt{3}\end{cases};\quad \begin{matrix}-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+y\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+y\right)=-1\end{matrix};$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\\ x=-2\pi k+2\pi n\end{cases}.$$

С-20

а) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$; $\frac{\sin 3x\cos x - \sin x\cos 3x}{\cos x\cos 3x} = 0$; ОДЗ: $x \ne \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$;

$\sin 2x = 0$ $x = \frac{\pi n}{2}$, но $x \ne \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, значит, $x = \pi n$;

б) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1$; ОДЗ: $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = 1$; $\frac{1}{\cos x} = 1$;

$\cos x = 1$; $x = 2\pi n$;

в) $\sin 3x = \cos x$; $\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$;

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

С-21

1. $f(x) = x^2 - 3x$; $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$

$= x_0^2 + \Delta x^2 + 2x_0\Delta x - 3x_0 - 3\Delta x - x_0^2 + 3x_0 = (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - 3\Delta x$;

а) $x_0 = 3$; $\Delta x = -\frac{1}{2}$; $\Delta f = \frac{1}{4} - 3 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$;

б) $x_0 = -2$; $\Delta x = 1$; $\Delta f = 1 - 2 \cdot 2 - 3 = -6$.

2. $f(x) = x^3 - 5x$ $\Delta f = (x_0 + \Delta x)(x_0^2 + (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - 5) -$

$- x_0^3 + 5x_0 = x_0(\Delta x)^2 + 2x_0^2\Delta x + \Delta x x_0^2 + (\Delta x)^3 + 2x_0(\Delta x)^2 - 5\Delta x =$

$= \Delta x^3 + 3x_0(\Delta x)^2 + 3x_0^2\Delta x - 5\Delta x$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + 3x_0\Delta x + 3x_0^2 - 5$.

С-22

1. $x(t) = 3 - 2t + t^2$; $v(t) = -2 + 2t$;

$v(4) = 6$; $E = \frac{3 \cdot 36}{2} = 54$ Дж.

2. **а)** $f(x) = 7 - 5x$; $f'(x) = -5$;

б) $f(x) = x^2 - 4x - 7$; $f'(x) = 2x - 4$.

С-23

1. **а)** $f(-1)=-\frac{1}{2}$; $f(1)=-\frac{1}{2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1{,}5$.

2. $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{2(x-5)}=\frac{x-1}{2}$, $x\neq 5$; $\left|\frac{x-1}{2}-2\right|<0{,}001$;

$|x-5|<0{,}002$; $\delta=0{,}002$.

С-24

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\frac{1}{3}$;

а) $\lim\limits_{x\to 3} y=\frac{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}{\lim\limits_{x\to 3} g(x)}-\lim\limits_{x\to 3} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{3}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} y=\frac{3\lim\limits_{x\to 3} f(x)-\lim\limits_{x\to 3} g^2(x)}{2\lim\limits_{x\to 3} f(x)}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{9}}{1}=\frac{25}{18}$.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)=1-3+\frac{9}{2}-9=-11+\frac{9}{2}=-\frac{13}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x+8}{2x^2+x-1}=0$.

С-25

1. **а)** $f(x)=x^7-3x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}-2$; $f'(x)=7x^6-15x^4-\frac{1}{2x^{3/2}}$;

б) $f(x)=(x+5)\sqrt{x}$; $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x+5}{2\sqrt{x}}$.

2. $f(x)=\frac{3-2x}{x+5}$; $f'(x)=\frac{-2x-10-3+2x}{(x+5)^2}=-\frac{13}{(x+5)^2}$;

$f'(-4)=-13$; $f'(8)=-\frac{1}{13}$; $f'(x^2-5)=-\frac{13}{x^4}$.

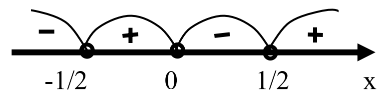
3. $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\geq 0$ при $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

С-26

1. $f(x) = 100\left(\sqrt{x}\right)^{10} - 10\left(\sqrt{x}\right)^{100} = 100x^5 - 10x^{50}$;

$f'(x) = 500(x^4 - x^{49})$; $f'(1) = 0$.

2. а) $f(x) = 2x^4 - x^2$; $f'(x) = 2x(4x^2 - 1)$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\frac{1}{2}$;



$f'(x) > 0$ при $x \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$;

$f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \frac{1}{2})$;

б) $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x - 2}$; $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 12}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 12}{(x-2)^2}$

$f'(x) > 0$ всегда, кроме $x = 2$.

С-27

1. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3} - 1}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 3 \\ \sqrt{x-3} \ne 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \ne 4 \end{array}\right.$, значит, $x \in [3; 4) \cup (4; \infty)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ 2 - \sqrt{x} > 0 \end{array}\right.$; $x \in [0; 4)$.

2. $f(x) = x^3 + 2x$; $g(x) = \sin x$; $f(g(x)) = \sin^3 x + 2\sin x$; $g(f(x)) = \sin(x^3 + 2x)$.

3. а) $f(x) = (5x^4 - 4x^5)^{101}$; $f'(x) = 101(20x^3 - 20x^4)(5x^4 - 4x^5)^{100}$;

б) $g(x) = \sqrt{3x^2 - 6x}$; $g'(x) = \frac{3x - 3}{\sqrt{3x^2 - 6x}}$.

С-28

а) $f(x) = \cos\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$; $f'(x) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$;

б) $f(x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin 3x$; $f'(x) = 3\cos 3x$;

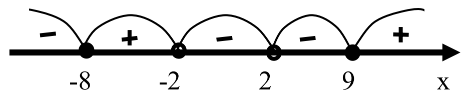
в) $f(x) = \cos x \cos 2x - \mathrm{tg}\, 3x$;

$f'(x) = -\sin x \cos 2x - 2\sin 2x \cos x - \frac{3}{\cos^2 3x}$.

С-29

1. $f(x)=\dfrac{3x-8}{x^3-7x^2+6x}$; ОДЗ: $\begin{matrix} x(x^2-7x+6)\neq 0 \\ x\neq 0 \quad x\neq 6 \quad x\neq 1 \end{matrix}$, значит, $f(x)$ непрерывна на $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;6)\cup(6;\infty)$

2. а) $\dfrac{(x-2)(x+8)(x-9)}{x^2-4}\geq 0$;



$\dfrac{(x-2)(x+8)(x-9)}{(x-2)(x+2)}\geq 0$;

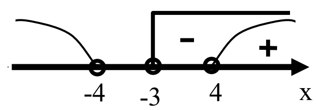
$x\in[-8;-2)\cup[9;+\infty)$;

б) $(x^2-16)\sqrt{x+3}<0$;

$(x-4)(x+4)\sqrt{x+3}<0$;

ОДЗ $x\geq -3$;

$x\in(-3;4)$.



С-30

1. $y=\sin\dfrac{x}{2}$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$y'=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

$y_{кас}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}\pi}{8}$ – уравнение касательной.

2. $y=x^2-2x$; $x_0=2$; $y(2)=0$; $y'=2x-2$; $y'(2)=2$; $y_{кас}=2x-4$ – уравнение касательной.

С-31.

1. $\sqrt{16{,}08}\approx 4(1+0{,}005\cdot\dfrac{1}{2})=4{,}01$.

2. $1{,}00004^{100}+0{,}99996^{100}\approx 1+0{,}00004\cdot 100+1-0{,}00004\cdot 100=$
$=1{,}004+0{,}996=2$.

С-32

1. $s(t)=2t+\sqrt{t}$; $v(t)=2+\frac{1}{2\sqrt{t}}$; $a(t)=-\frac{1}{4t^{3/2}}$; $F=-\frac{1}{4\cdot 8}\cdot 5=-\frac{5}{32}$ Н.

2. $\varphi = 3t - 0{,}01t^2$; $\varphi'(t) = 3 - 0{,}02t$;
а) $\varphi'(7) = 2{,}86$; **б)** $3 - 0{,}02t = 0$; $t = 150$.

С-33

1. $y = 3x^3 - x^2 - 7x$; $y' = 9x^2 - 2x - 7$; $y' = 0$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{7}{9}$, значит,

y возрастает при $x \in (-\infty; -\frac{7}{9}) \cup (1; +\infty)$; убывает при $x \in (-\frac{7}{9}; 1)$.

2. $f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{4}{x^2}$;

$f'(x)=\frac{2x}{9}-\frac{8}{x^3}$; $f'(x)=0$ при

$2x^4 = 72$; $x^4 = 36$; $x=\pm\sqrt{6}$;

$x=\pm\sqrt{6}$ – точки минимума.

С-34

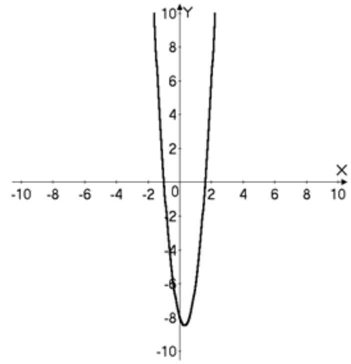
$f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$; $f'(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$ >0 при $x > 1$; $f'(x) < 0$ при $x < 1$,

значит, $f(x)$ возрастает при $x \in (1;\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 1)$;
экстремумов нет.

С-35

1. $f(x) = 5x^2 - 3x - 8$; $x_в = x_{min} = 0{,}3$;
$f_в = f_{min} = 0{,}45 - 0{,}9 - 8 = -8{,}45$,
$x \in R$, $f(x) \in [-8{,}45; \infty)$;

$f(x)$ возрастает при $x \in (0{,}3;\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 0{,}3)$.
$5x^2 - 3x - 8 = 0$;
нули: $x = -1$ и $x = 1{,}6$.



2. **а)** $2x^2 + 5x + 2 < 0$; $x \in (-2; -\frac{1}{2})$;

б) $x^2 - 12x + 36 \le 0$; $(x - 6)^2 \le 0$, значит, $x = 6$.

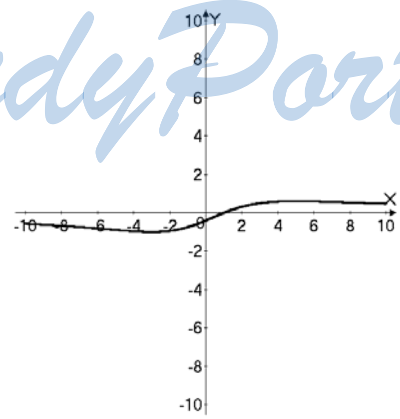
С-36

$= \frac{6(x-1)}{x^2+15}$; $f'(x) = \frac{6x^2+90-12x^2+12x}{(x^2+15)^2} = \frac{-6(x^2-2x-15)}{(x^2+15)^2}$;

$f'(x) = 0$ при $x_{max} = 5$ и $x_{min} = -3$ $f(5) = \frac{24}{40}$;

$f(-3) = \frac{-24}{24} = -1$; $f'(x)$ возрастает при $x \in (-3; 5)$;

убывает при $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$; нули: $x = 1$.



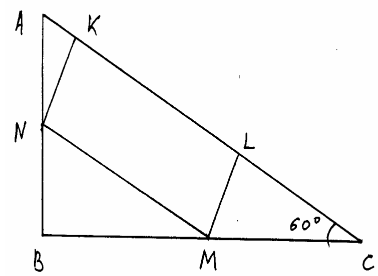
С-37

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$; $x \in [-4; 2]$;

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 8$; $3x^2 - 4x + 8 = 0$; Д $= 16 - 96 = -80 < 0$, значит, экстремумов нет;

наибольшее значение – $f(2) = 14$; наименьшее значение – $f(-4) = -130$.

2.



$BC = 8$ см;

$AB = \sqrt{256 - 64} = 8\sqrt{3}$ см;

Пусть $KL = x$, тогда $NM = x$

$BM = \frac{x}{2}$; $CM = 8 - \frac{x}{2}$;

$LC = 4 - \frac{x}{4}$;

$\sin 60° = \frac{LM}{MC}$;

$LM = 4\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{4}$; $S = 4\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$; $S' = 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$; $S' = 0$ при $x = 8$, $LM = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ см; $KL = 8$ см.

С-38

1. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\sin\beta = \frac{12}{13}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

$\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\beta = -\frac{5}{13}$; $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -1$.

2.

$8\sin^2(\pi - \alpha)\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 1 = 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = 2\sin^2 2\alpha - 1 = -\cos 4\alpha$.

3. $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ $0 < \alpha < \pi$ $\Rightarrow$ $\alpha \in$ II четверти; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$;

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + 1/3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \sqrt{2}$.

С-39

а) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

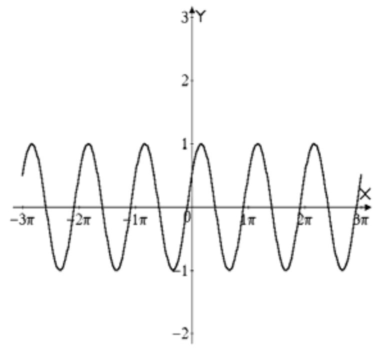
$x \in R \quad y \in [-1; 1]$;

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

нули: $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$;

$x_{\max}\ \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x_{\min}\ \frac{2\pi}{3} + \pi n$;

$f\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right) = 1$; $f\left(\frac{2\pi}{3} + \pi n\right) = -1$;



$f(x)$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$;

убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right)$.

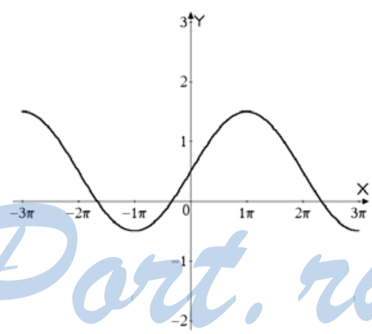
б)

$y = \frac{1}{2} + \sin\frac{x}{2}$;

$x \in R; \quad y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$;

нули: $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi k;$



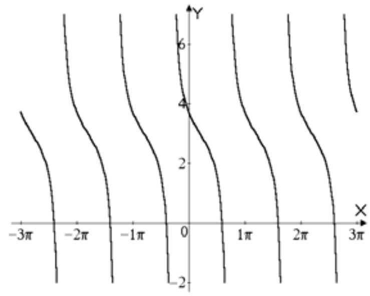
возрастает:
$[-\pi + 4\pi n; \ \pi + 4\pi n]$;
убывает: $[\pi + 4\pi n; \ 3\pi + 4\pi n]$

max: $(\pi + 4\pi n; \frac{3}{2})$ min: $(-\pi + 4\pi n; -\frac{1}{2})$

в) $3 - \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = f(x)$ ОДЗ: $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \neq 0 \quad x \neq \frac{7\pi}{10} + \pi n$

$y \in R \quad x \neq \frac{7\pi}{10} + \pi n$ нули: $\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 3$

$x = \frac{\pi}{5} + \mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$ возрастает на всей области определения.



С-40

1. **а)** $\arccos(-1) = \pi$; **б)** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; **в)** $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

2. **а)** $\sin^2\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{x}{3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}$;

б) $8\cos^2 x - 2\sin x = 5$; $8\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$;

$\sin x = -\frac{3}{4}$; $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{3}{4} + \pi k$;

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

3. **а)** $\mathrm{tg}\, 2x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$;

б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$; $2x \in \left(-\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$;

$x \in \left(-\frac{23\pi}{24} + \pi n; -\frac{7\pi}{24} + \pi n\right)$.

С-41

$\begin{cases} \cos x \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin 2x + \sin 2y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \sin(x+y)\cos(x-y) = 0 \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} \sin(x+y)\cos(x-y) = 0 \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) = 1 \end{cases}$;

1. $\begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ \sin(x-y)=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=\pi n \\ x-y=-\frac{\pi}{2}+\pi k \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi n}{2} \\ y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi k}{2} \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \cos(x-y)=0 \\ \sin(x+y)=0 \end{cases}$ то же самое.

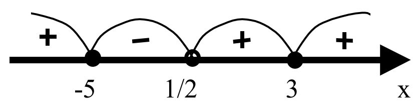
С-42

1. **а)** $x^2-3x-11>0$; $\left(x-\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)>0$;

$x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$

б) $x^2+7x+12\le 0$; $x_1=-4$, $x_2=-3$; $(x+4)(x+3)\le 0$;
$x\in[-4;-3]$.

2. **а)** $\frac{(x-3)^4(x+5)^5}{2x-1}\le 0$; $x\in[-5;\ \frac{1}{2})\cup\{3\}$.

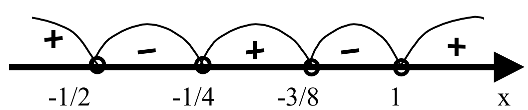


б) $\frac{3}{2x+1}+\frac{5}{4x+1}<2$ $\frac{12x+3+10x+5-16x^2-12x-2}{(2x+1)(4x+1)}<0$;

$\frac{-16x^2+10x+6}{(2x+1)(4x+1)}>0$ $\frac{8x^2-5x-3}{(2x+1)(4x+1)}>0$;

$\frac{(x-1)\left(x+\frac{3}{8}\right)}{(2x+1)(4x+1)}>0$;

$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{8}\right)\cup(1;+\infty)$.



С-43

а) $y = x^8 - 3x^6 + 2x^3 - 7;$ $y' = 8x^7 - 18x^5 + 6x^2;$

б) $y = x\sqrt{3+x}\,;$ $y' = \sqrt{3+x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+3}}\,;$

в) $y = \sin\dfrac{x}{5}\,;$ $y' = \dfrac{1}{5}\cos\dfrac{x}{5}\,;$

г) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right);$ $y' = \dfrac{2}{\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}\,;$

д) $y = \left(\dfrac{1}{7} - 3x^2\right)^{35};$ $y' = -210x\left(\dfrac{1}{7} - 3x^2\right)^{34}.$

С-44

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3;\ f(0) = 3;\ f'(x) = 2x - 2;\ f'(0) = -2;\ y = 3 - 2x$

2. **а)** $\sqrt{\sqrt{1{,}00004}} \approx (1 + 0{,}00002)^{1/2} \approx 1{,}00001;$

б) $1{,}00003^{500} \approx 1 + 0{,}00003 \cdot 500 = 1{,}015.$

3. $x(t) = \dfrac{1+t}{2+t} = 1 - \dfrac{1}{t+2}\,;$ $v(t) = \dfrac{1}{(t+2)^2}\,;$

$a(t) = -\dfrac{2}{(t+2)^3}\,;$ $v(2) = \dfrac{1}{16}\,;$ $a(2) = -\dfrac{1}{32}\,.$

С-45

1.

$f(x) = x^4 - 8x^2$

$f'(x) = 4x(x^2 - 4);$

нули: $x = 0$ $x = \pm\sqrt{8}$

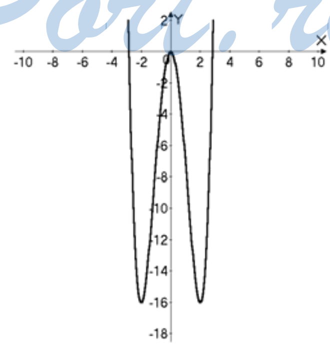
$f'(x) = 0$ $x = 0$ $x = \pm 2;$

max: (0; 0) min: (±2; –16)

$x \in R$ $y \geq -16$

убывает: $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 2];$

возрастает: $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty]$



2. $f(x) = \sin^2 x \cos x \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad f'(x) = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0$

$2\sin x - 3\sin^3 x = 0 \quad \sin x = 0 \quad x = \pi n$

$\sin^2 x = \frac{2}{3}$; $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; (т.к. $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$); $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(x_{\max}) = f\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad f(x_{\min}) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ВАРИАНТ 8

С-1

1. $48° = \frac{\pi}{180} \cdot 48 = \frac{4\pi}{15}$; $\qquad 188° = \frac{\pi}{180} \cdot 188 = \frac{47\pi}{45}$.

2. $\frac{3\pi}{16} = 33°45'$; $\qquad \frac{22\pi}{9} = 440°$.

3. **а)** $23°6' \approx 0{,}4119$; $\sin 23°6' \approx 0{,}4003$; $\cos 23°6' \approx 0{,}9164$;
б) $83°53' \approx 1{,}4640$; $\sin 83°53' \approx 0{,}9943$; $\cos 83°53' \approx 0{,}1063$.

4. **а)** $0{,}0995 = 5°42'$; $\qquad$ **б)** $3{,}1012 = 177°41'$.

С-2

1. $\sin^2 \alpha(1 + \sin^{-1} \alpha + \mathrm{ctg}\, \alpha)(1 - \sin^{-1} \alpha + \mathrm{ctg}\, \alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha$;
$(\sin \alpha + 1 + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha - 1 + \cos \alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = 2\sin \alpha \cos \alpha$.

2. **а)** $\frac{\sin 200° \cos 20°}{\mathrm{tg} 300° \mathrm{ctg} 100°} < 0$; **б)** $\cos 1 \sin 3 \,\mathrm{tg}\, 5 < 0$.

3. $\mathrm{tg}\, \alpha = 3 \quad \alpha \in$ III четверти $\quad \sin^2 \alpha = 9 - 9\sin^2 \alpha$;

$\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\qquad \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

С-3

1. **а)** $\sin 1935° = \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\mathrm{tg}\, 1395° = \mathrm{tg}\, 45° = 1$;

в) $\cos\frac{71\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.

$(\cos 70° + \cos 50°)(\cos 310° + \cos 290°) + (\cos 40° + \cos 160°) \cdot$
$\cdot (\cos 320° - \cos 380°) = 1 + 2\cos 70° \cos 50° + 1 - 2\cos 40° \cos 20° =$
$= 2 + 2(\sin 20° \sin 40° - \cos 40° \cos 20°) = 2 - 2\cos 60° = 1.$

3.

$$\text{tg}\,(\pi - \alpha)\left(1 + \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) = \text{tg}\,(2\pi - \alpha) - \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right);$$

$- \text{tg}\,\alpha(1 + \text{ctg}\,\alpha\ \text{tg}\,2\alpha) = -\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,2\alpha.$

С-4

1. $$\frac{1 - 2\cos^2\frac{5\pi}{8}}{\sin^2 75^\circ - 1} = \frac{-\cos\frac{5\pi}{4}}{-\cos^2 75^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{1 + \cos 150^\circ} = -\frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}}.$$

2. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\alpha < 0$, значит, $\alpha \in$ IV четверти;

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$;

$\sin 2\alpha = -\frac{2\sqrt{8}}{9}$; $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$;

$\sin 4\alpha = \frac{56\sqrt{2}}{81}$;

$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\sqrt{8}}{7}$;

$\text{ctg}\,4\alpha = \frac{1 - \text{tg}^2 2\alpha}{2\text{tg}2\alpha} = \frac{49 - 32}{49}\cdot\frac{7}{4\sqrt{8}} = \frac{17}{56\sqrt{2}}.$

3. $$\frac{1 - ctg2\alpha tg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha} = \frac{1 - \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}tg\alpha.$$

С-5

1.

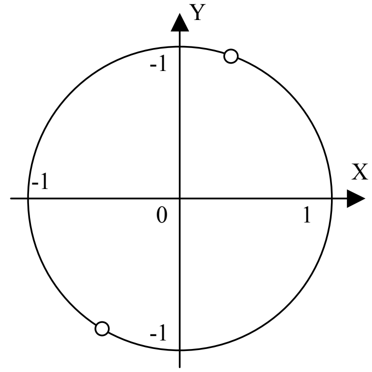
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$;

$\cos^2\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\alpha$;

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$.



2.

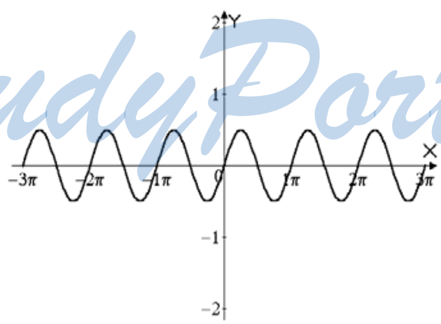
а) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}3$;

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{13}{10\sqrt{2}}$; IV четверть;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$;

$\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n$; I четверть.

3.



$y = \sin^3 x\cos x + \sin x\cos^3 x = \sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$

$= \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

С-6

1.

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x+4}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+5x+4 \neq 0 \end{cases}$ $x \geq -2, x \neq -1$, значит,

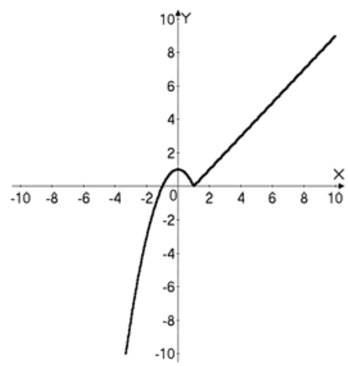
$x \in [-2;-1) \cup (-1;\infty)$;

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-7}{x+2}}$; ОДЗ: $\dfrac{3x-7}{x+2} \geq 0$; $x \in (-\infty;-2) \cup [\dfrac{7}{3};+\infty]$.

2. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x<1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$;

а) $f(0)=1$; $f(1)=0$; $f(-1)=0$; $f(2)=1$;

б)



С-7

а) $y=2\sin x\cos 3x \operatorname{tg} 5x$; $y(-x)=2\sin(-x)\cos(-3x)\operatorname{tg}(-5x)=$
$=2\sin x\cos 3x \operatorname{tg} 5x = y(x) \Rightarrow$ четная;

б) $y=x^3\sin(x+|x|)$; $y(-x)=(-x)^3\sin(-x+|-x|)=$
$=-x^3\sin(|x|-x)$, значит, y ни четная, ни нечетная;

в) $y=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $y(-x)=\operatorname{tg}\left(-x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, значит, y ни четная,

ни нечетная;

г) $y=\operatorname{ctg} x+x\cos^2 x$ $y(-x)=\operatorname{ctg}(-x)+(-x)\cos^2(-x)=$
$=-\operatorname{ctg} x-x\cos^2 x=-y(x)$, значит, y нечетная.

С-8

1. **а)** $\cos 393°17' = \cos 33°17'$; **б)** $\mathrm{tg}\, 4020° = \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$;

в) $\cos\frac{63\pi}{11} = \cos\frac{3\pi}{11}$.

2. $\cos(-60°) + \sin(690°) + \mathrm{tg}(-600°) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

3. **а)** $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{9}\right)$; $T = 6\pi$;

б) $f(x) = \cos^2 x - \mathrm{ctg}\, x$; $\begin{matrix} f_1(x) = \cos^2 x & T = \pi \\ f_2(x) = \mathrm{ctg} x & T = \pi \end{matrix} \Rightarrow T = \pi$.

С-9

1.

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; возрастает: $x \geq 1$ убывает: $x \leq -1$;

б) $f(x) = \left|1 + \frac{1}{x-1}\right|$ убывает: $(-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$;

возрастает: $[0; 1)$.

2. $f(x) = 3 - 3x - 2x^3$ $f'(x) = -3 - 6x^2 < 0$ всегда.

3. $\sin\frac{1}{2}$, $\sin\frac{3}{2}$, $\sin 3$, $\sin 4{,}5$;

Ответ: $\sin\frac{3}{2}$, $\sin\frac{1}{2}$, $\sin 3$, $\sin 4{,}5$.

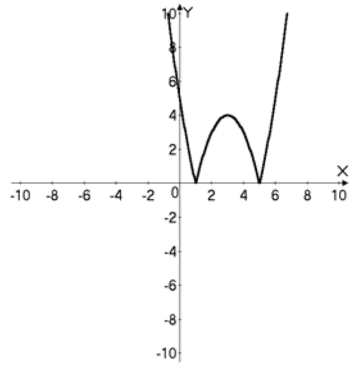
С-10

1.

$y = |x^2 - 6x + 5| = 0$; $y = 0$ при $x = 5$ и $x = 1$; $x_в = 3$; значит, $x_{max} = 3$;

$x_{min} = 5$; $x_{min} = 1$.

$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leq 3 \\ x^2 - 6x + 5 \geq -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 6x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (3 - \sqrt{7}; 3 + \sqrt{7}) \\ x \leq 2, x \geq 4 \end{cases}$.



Итого: $x \in (3-\sqrt{7};\ 2] \cup [4;\ 3+\sqrt{7})$.

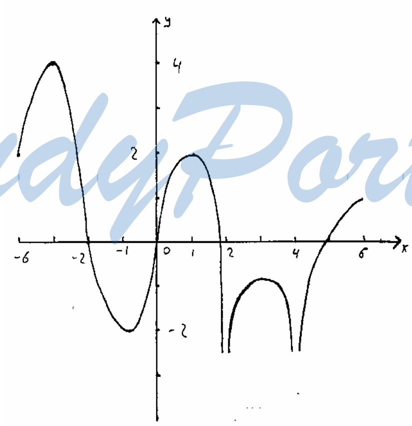
2.

$f(x)=\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x+5=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+5;$

$y\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)=7;\ \ y\left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)=3;\ \ y\in[3;\ 7]$

$x_{\max}=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3} \qquad x_{\min}=-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$

С-11

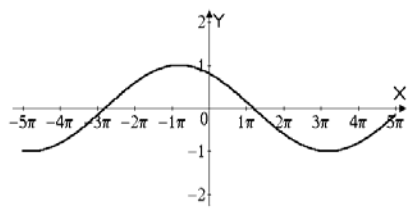


С-12

1. $f(x) = \text{ctg}\, 2x + \dfrac{1}{\text{ctg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)}$;

ОДЗ: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi n}{2} \\ x \neq \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n \\ x \neq \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$.

2. $y = \cos\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{5}\right)$;



y возрастает при

$x \in \left[-\dfrac{24\pi}{5} + 8\pi n; -\dfrac{4\pi}{5} + 8\pi n\right]$;

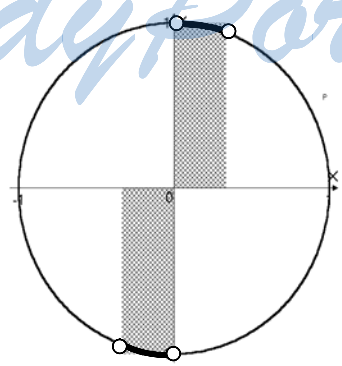
убывает при

$x \in \left[-\dfrac{4\pi}{5} + 8\pi n; \dfrac{16\pi}{5} + 8\pi n\right]$;

$x_{max} = -\dfrac{4\pi}{5} + 8\pi n$ $x_{min} = -\dfrac{24\pi}{5} + 8\pi n$ $y\left(-\dfrac{4\pi}{5} + 8\pi n\right) = 1$

$y\left(-\dfrac{24\pi}{5} + 8\pi n; -1\right) = -1$

3.



С-13

1. **а)** $\text{arcctg}\ 1 - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$

б) arccos (cos (–12°)) = arccos (cos (12°)) = 12°;

в) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) = 1 - 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{7}{8}.$

2. $\arccos 1 = 0 < \frac{\pi}{4} = arctg\,1.$

3. **а)** arcsin (0,9898) ≈ 1,4279; **б)** arccos (–0,3737) ≈ 1,9538;
в) arctg (–5,72) ≈ –1,3977.

С-14

а) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n;$

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1;$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$

в) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{5} + (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k;$ $x = -\frac{2\pi}{5} + (-1)^k\frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

С-15

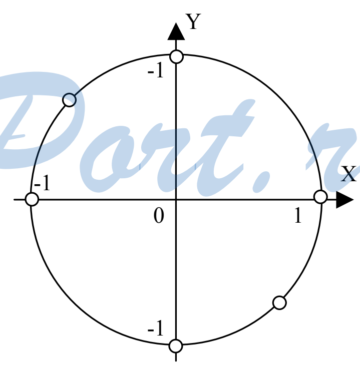
$\sin 2t(\sqrt{3}\sin t + \cos t) = 0;$

$\sin 2t = 0;$ $t = \frac{\pi n}{2};$

$\sqrt{3}\sin t + \cos t = 0;$

$\text{ctg}\,t = -\sqrt{3};$ $t = \frac{5\pi}{6} + \pi n;$

$\sin 2t(\sqrt{3}\sin t + \cos t) \le 0;$



$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right].$$

С-16

а) $\operatorname{tg} 3x < 1$; $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}\right)$;

б) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x \in \left[-\frac{7\pi}{12} + 2\pi n; \frac{11\pi}{12} + 2\pi n\right]$;

$x \in \left[-\frac{7\pi}{24} + \pi n; \frac{11\pi}{24} + \pi n\right]$.

С-17

а) $\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$; $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$;
$\cos x = -2$; решений нет; $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n$;
б) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$; $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 1$;

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{\pi}{12} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

С-18

а) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$;

$$\frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)\cos\alpha}{(\cos\alpha - \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha};$$

б) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha} = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; $\frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} = \frac{-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

С-19

$$\begin{cases}\sin(x+y) = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1\end{cases}; \quad \begin{cases}x = \frac{\pi}{2} + \pi n - y \\ \cos y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}; \quad \begin{cases}y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\pi k}{2}\end{cases}.$$

С-20

а) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$; $\frac{\sin 3x\cos 5x - \cos 5x\sin 3x}{\cos 3x\cos 5x} = 0$; $\sin 2x = 0$; $x = \frac{\pi n}{2}$, но $\frac{\pi n}{2} + \pi n$ не проходит через ОДЗ, значит, $x = \pi n$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$; $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \sin 2x = 0$;

$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2 = 0$; $\sin 2x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2x = -1 - \sqrt{3}$ – посторонний корень; $\sin 2x = -1 + \sqrt{3}$

$x = (-1)^k \frac{\arcsin(\sqrt{3} - 1)}{2} + \frac{\pi k}{2}$.

в) $\cos 3x = \sin x$ $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$;

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

С-21

1. $f(x) = x^2 + 2x$; $\Delta f = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x_0 + 2\Delta x - x_0^2 - 2x_0 =$
$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x$;

а) $x_0 = 2$; $\Delta x = -1$; $\Delta f = -5$; **б)** $x_0 = -3$; $\Delta x = \frac{1}{2}$; $\Delta f = -1\frac{3}{4}$

2. $f(x) = x^3 + 4x$;
$\Delta f = (\Delta x + x_0)((\Delta x)^2 + x_0^2 + 2x_0\Delta x + 4) - x_0^3 - 4x_0 =$
$= (\Delta x)^3 + 2x_0(\Delta x)^2 + \Delta x x_0^2 + 4\Delta x + x_0(\Delta x)^2 + 2\Delta x x_0^2 =$
$= (\Delta x)^3 + 3x_0(\Delta x)^2 + 3\Delta x(x_0)^2 + 4\Delta x$; $\frac{\Delta f}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + 3x_0\Delta x + 3x_0^2 + 4$.

С-22

1. $x(t) = 2 - 4t + 3t^2$; $v(t) = -4 + 6t$; $v(1) = 2$; $E = \frac{2 \cdot 2^2}{2} = 4$ Дж.

2. **а)** $f(x) = 2 - 7x$; $f'(x) = -7$; б) $f(x) = x^2 + 3x - 2$; $f'(x) = 2x + 3$.

С-23

1. **а)** $f(-3) = 0$; $f(0)$ – не определено;
б) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

2. $f(x)=\frac{x^2+8x+7}{3(x+1)}=(x+7)\frac{1}{3}$, $x\neq-1$; $\left|\frac{x+7}{3}-2\right|<0{,}002$;

$|x+1|<0{,}006$; $\delta=0{,}006$.

С-24

1. **а)** $y=\frac{f(x)}{g(x)}+2f(x)g(x)=-\frac{1}{6}-3=-3\frac{1}{6}$;

$$\lim_{x\to2}y=\frac{\lim\limits_{x\to2}f(x)}{\lim\limits_{x\to2}g(x)}+2\lim_{x\to2}f(x)\cdot\lim_{x\to2}g(x)=-\frac{1}{6}-3=-3\frac{1}{6};$$

б) $\lim\limits_{x\to2}y=\frac{2\lim\limits_{x\to2}f(x)-\lim\limits_{x\to2}g(x)}{6\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)}$ не существует.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to4}\left(1-x+2x^2-3x^3\right)=1-4+32-192=-163$;

б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{3x-9}{2x^2-x+1}=\frac{-18}{18+3+1}=-\frac{9}{11}$.

С-25

1. **а)** $f(x)=x^8-2x^6-\sqrt{x^5}+9$; $f'(x)=8x^7-12x^5-\frac{5}{2x^{7/2}}$;

б) $g(x)=x\sqrt{x+1}$; $g'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$.

2. $f(x)=\frac{2x+3}{3x+5}$; $f'(x)=\frac{10-9}{(3x+5)^2}=\frac{1}{(3x+5)^2}$;

$f'(-3)=\frac{1}{16}$; $f'(6)=\frac{1}{529}$; $f'(x^2-1)=\frac{1}{(3x^2+2)^2}$.

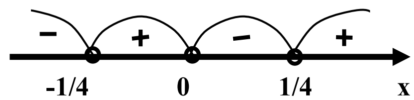
3. $f(x)=2x+\frac{4}{x}$; $f'(x)=2-\frac{4}{x^2}<0$ при

$x^2<2$; $x\in(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$.

С-26

1. $f(x) = 40\left(\sqrt[4]{x}\right)^8 - 8\left(\sqrt[4]{x}\right)^{40}$; $f'(x) = 80x - 80x^9$; $f'(1) = 0$;
$f'\left(\sqrt{x}\right) = 80\sqrt{x} - 80\left(\sqrt{x}\right)^9$.

2. **а)** $f(x) = 8x^4 - x^2$; $f'(x) = 2x(16x^2 - 1)$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\frac{1}{4}$;



$f'(x) > 0$ при $x \in (-\frac{1}{4}; 0) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$;

$f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; \frac{1}{4})$;

б) $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$ $\quad f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 21}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 21}{(x-2)^2}$;

$f'(x) = 0$ при $x = 7$ и $x = -3$
$f'(x) > 0$, $x \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$; $\quad f'(x) < 0$, $x \in (-3; 2) \cup (2; 7)$.

С-27

1. **а)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - 4}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -2 \\ x + 2 \neq 16 \end{cases}$ $\quad x \geq -2, \quad x \neq 14$

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5 - \sqrt{x}}}$; ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 5 - \sqrt{x} > 0 \end{array}\right.$; $\quad x \in [0; 25)$.

2. $f(x) = x^4 - 2x$; $\quad g(x) = \cos x + 1$;
$f(g(x)) = (\cos x + 1)^4 - 2\cos x - 2$; $\quad g(f(x)) = \cos(x^4 - 2x) + 1$.

3. **а)** $f(x) = (7x^3 - 3x^7)^{173}$; $\quad f'(x) = 173(21x^2 - 21x^6)(7x^3 - 3x^7)^{172}$;

б) $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$; $\quad g'(x) = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}$.

С-28

а) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{7} + 1\right)$; $\quad f'(x) = \frac{3}{7}\cos\left(\frac{3x}{7} + 1\right)$;

б) $f(x) = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x = \cos 2x$; $f'(x) = -2\sin 2x$;

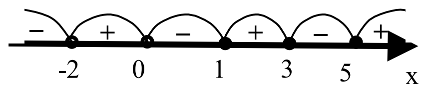
в) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x \sin 2x = \operatorname{tg} x + \sin x \sin 2x$;

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \sin 2x + 2\cos 2x \sin x$.

С-29

1. $f(x) = \frac{2x-3}{x^3 - 5x^2 + 6x}$; ОДЗ: $\begin{matrix} x(x^2-5x+6) \neq 0 \\ x \neq 0 \quad x \neq 2 \quad x \neq 3 \end{matrix}$, значит, $f(x)$ непрерывна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2] \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$.

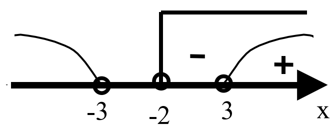
2. а) $\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{x^2 + 2x} \leq 0$;



$x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1] \cup [3; 5]$;

б) $(x^2 - 9)\sqrt{x+2} < 0$; $(x-3)(x+3)\sqrt{x+2} < 0$;

$x \in (-2; 3)$.



С-30

1. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

$y_{кас} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{2} - 2\right)$ – уравнение касательной.

2. $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$; $x_0 = 0$; $y(0) = 2$; $y' = x - 2$; $y'(0) = -2$;
$y_{кас} = 2 - 2x$ – уравнение касательной

С-31

1. $\sqrt{81{,}12} = 9\sqrt{1+\frac{12}{8100}} = 9\left(1+\frac{12}{8100\cdot 2}\right) = 9\frac{1}{150}$.

2. $1{,}000007^{100} - 0{,}999999^{700} \approx 1 + 0{,}000007 \cdot 100 + 1 - 0{,}000001 \cdot 700 =$
$= 1{,}0007 + 0{,}9993 = 2$.

С-32

1. $s(t) = 3t - \frac{1}{t+2}$;

$s'(t) = v(t) = 3 + \frac{1}{(t+2)^2}$;

$a(t) = -\frac{2}{(t+2)^3}$; $F = ma$,

$F(1) = \frac{-2\cdot 4}{(1+2)^3} = -\frac{8}{27}$ (н).

2. **а)** $\varphi = 2t - 0{,}04t^2$; $\omega = 2 - 0{,}08t$; $\omega(2) = 1{,}04$;
б) $2 - 0{,}08t = 0$; $t = 25$ (с).

С-33

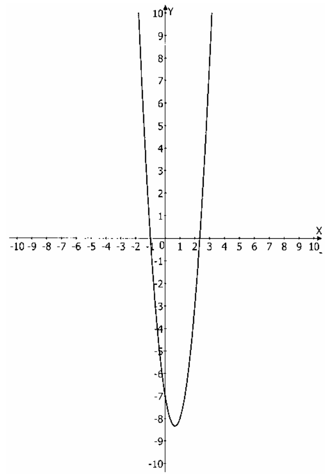
1. $f(x) = x^3 + 3x - 8$; $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ всегда, значит, $f'(x)$ возникает на R.

2. $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$; $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{18}{x^3}$;
$f'(x) = 0$ при
$x^4 = 36$; $x = \pm\sqrt{6}$; $x_{min} = \pm\sqrt{6}$ – точки минимума.

С-34

$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{(x-3)^3} > 0$ при $x \in (-\infty; 3)$, значит, $f(x)$
возрастает при $x \in (-\infty; 3)$;
убывает при $x \in (3; \infty)$ экстремумов нет.

С-35



1. $f(x) = 3x^2 - 4x - 7$;

$x_в = x_{min} = \frac{2}{3}$;

$f(x)_в = 3 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} - 7 = -8\frac{1}{3}$;

$x \in R,\ f(x) \in \left[-8\frac{1}{3}; \infty\right)$;

$f(x)$ возрастает при $x \in (\frac{2}{3}; \infty)$; убывает при $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$;

$3x^2 - 4x - 7 = 0$; $\left.\begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{matrix}\right\}$ – нули функции.

2. **а)** $x^2 - 9x - 22 \le 0$ $D = 81 + 88 = 169$ $x \in [-2; 11]$

б) $x^2 + 8x + 16 > 0$; $D = 64 - 64 = 0$; $x = -4$; $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

С-36

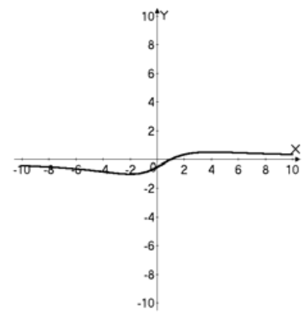
$f(x) = \frac{4(x-1)}{x^2+8}$; $f'(x) = \frac{4x^2 + 32 - 8x^2 + 8x}{(x^2+8)^2} = \frac{-4(x^2 - 2x - 8)}{(x^2+8)^2} = 0$;

$f'(x) = 0$ при $x_{max} = 4$; $x_{min} = -2$

$$f(4) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}; \qquad f(-2) = -\frac{12}{12} = -1;$$

$f(x)$ возрастает при $x \in (-2; 4)$; убывает при $x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$;

$x = 1$ – нуль функции.



С-37

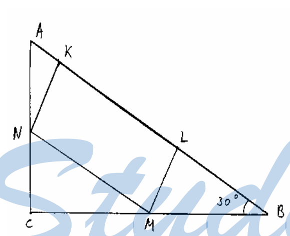
1.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2; \qquad x \in [1; 4];$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 8; \qquad D = 16 - 96 < 0 \Rightarrow$ экстремумов нет;

$f(4) = 62$ – наибольшее значение функции; $f(1) = -5$ – нименьшее.

2.



$AB = 24; \quad CB = 12\sqrt{3};$

Пусть $KL = x$, значит, $NM = x$; $\quad CN = \frac{x}{2}$;

$AN = 12 - \frac{x}{2}; \quad \cos 30° = \frac{KN}{AN};$

$KN = \sqrt{36} - \frac{x}{4}\sqrt{3};$

$S = 6\sqrt{3}\,x - \frac{x^2\sqrt{3}}{4}; \qquad x_в = \frac{6\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} = 12; \quad KN = 3\sqrt{3}$ см; $\quad KL = 12$ см.

С-38

1. $\sin\alpha = \frac{1}{3}; \qquad \sin\beta = \frac{2}{3};$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \qquad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi;$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \qquad \sin\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2\sqrt{10}}{9} = \frac{2+2\sqrt{10}}{9}.$$

2.

$$\sin^2(\pi-\alpha)\cos^2(\pi+\alpha) - \frac{1}{4}\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\cos^2 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha - \frac{1}{4}\cos^2 2\alpha = -\frac{\cos 4\alpha}{4}.$$

3.

$$\cos\alpha = -\frac{2}{5}; \qquad \pi < \alpha < 2\pi;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{10}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - 1} = \sqrt{\frac{10}{3} - 1} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

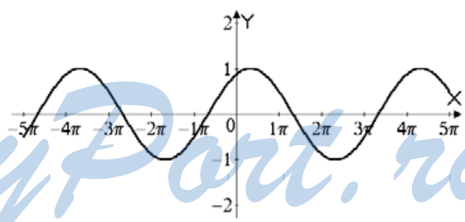
С-39

а) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$;

$x \in R$; $f(x) \in [-1; 1]$;

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 0$ при

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ – нули



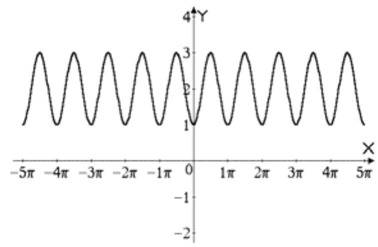
функции;

$x_{max} = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$; $x_{min} = -\frac{5\pi}{3} + 4\pi n$; $f\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi n;\right) = 1$; $f\left(-\frac{5\pi}{3} + 4\pi n\right) = -1$;

$f(x)$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right)$;

убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi n; \frac{7\pi}{3} + 4\pi n\right)$.

б)



$f(x) = 2 - \cos 2x$; $x \in R$; $y \in [1; 3]$; нулей нет;

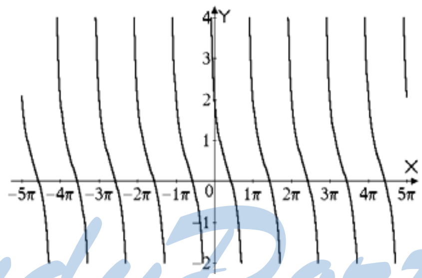
$f(x)$ возрастает при $(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$;

убывает при $(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n)$;

$x_{max} = \frac{\pi}{2}\pi + \pi n; f(\frac{\pi}{2}\pi + \pi n) = 3$;

$x_{min} = \pi n; f(\pi n) = 1$.

в) $f(x) = \frac{1}{3} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$



$y \in R$; $x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi n$; убывает на всей области определения;

экстремумов нет;

нули: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\frac{1}{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$.

С-40

1. **а)** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$; **б)** $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$; в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

2. а) $\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$; $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{18}+\pi n$ и $x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{5\pi}{18}+\pi n$;

б) $4\sin^2 x+4\cos x=5$; $4\cos^2 x-4\cos x+1=0$; $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

3. **а)** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\le-\sqrt{3}$; $x\in\left(-\pi+2\pi n;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$;

б) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x\in\left(\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{12}+2\pi n\right)$;

$x\in\left(\frac{5\pi}{24}+\pi n;\ \frac{11\pi}{24}+\pi n\right)$.

С-41

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2y=1\\ \sqrt{3}\sin 2x-3\cos 2y=0\end{cases};\ \begin{cases}\cos(x+2y)-\cos(x-2y)=\cos(x+y)+\cos(x-2y)\\ \sqrt{3}\sin^2 2x-3\cos 2y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2y=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ \sqrt{3}\sin(4y+\pi+2\pi n)-3\cos 2y=0\end{cases}\quad \begin{matrix}\sqrt{3}\sin 4y+3\cos 2y=0\\ \cos 2y\left(2\sqrt{3}\sin 2y+3\right)=0\end{matrix};$$

$$\begin{cases}\cos 2y=0\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n+2y\end{cases};\ \begin{cases}y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\\ x=\pi n+\pi k\end{cases};$$

$$\begin{cases}\sin 2y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x=2y+\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases};\ \begin{cases}y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k+\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}.$$

С-42

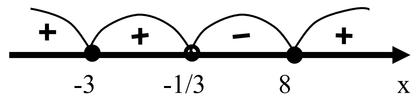
1. **а)** $x^2-5x-7<0$; $\left(x-\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{53}}{2}\right)<0$;

$x\in\left(\frac{5-\sqrt{53}}{2};\ \frac{5+\sqrt{53}}{2}\right)$; **б)** $x^2+6x+9\ge 0$ $(x+3)^2\ge 0$; $x\in R$.

2.

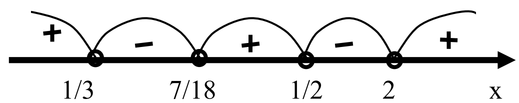
а) $\dfrac{(x-8)^3(x+3)^8}{3x+1} \geq 0$;

$x \in (-\infty; -\dfrac{1}{3}) \cup [8; +\infty)$;



б) $\dfrac{5}{3x-1} + \dfrac{6}{2x-1} < 3$; $\dfrac{10x-5+18x-6-18x^2+15x-3}{(3x-1)(2x-1)} < 0$;

$\dfrac{18x^2-43x+14}{(3x-1)(2x-1)} > 0$; $\dfrac{(x-2)\left(x-\dfrac{7}{18}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)} > 0$;



$x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{7}{18}; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

С-43

а) $y = 3x - 7x^3 + \dfrac{1}{4}x^8 + x^9$; $y' = 3 - 21x^2 + 2x^7 + 9x^8$;

б) $y = x\sqrt{x+5}$; $y' = \sqrt{x+5} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+5}}$;

в) $y = \cos 0{,}3x$; $y' = -0{,}3\sin 0{,}3x$;

г) $y = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{7} - 3x\right)$; $y' = \dfrac{3}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{7} - 3x\right)}$;

д) $y = (5x^2 - 1)^8$; $y' = 8(10x)(5x^2 - 1)^7 = 80x(5x^2 - 1)^7$.

С-44

1. $f(x) = x^2 - 3x - 3$; $f(0) = -3$; $f'(x) = 2x - 3$; $f'(0) = -3$;
$y_{\text{кас}} = -3 - 3x$ – уравнение касательной.

2. **а)** $\sqrt{\sqrt{0{,}999996}} \approx 1 - 0{,}000004 \cdot \dfrac{1}{4} = 0{,}999999$;

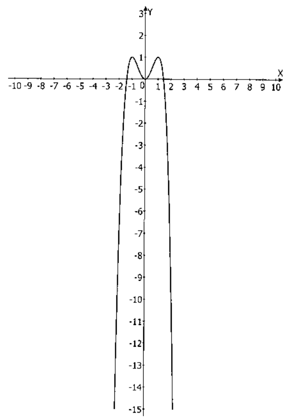
б) $0{,}99997^{350} \approx 1 - 0{,}00003 \cdot 350 = 0{,}9895$.

3. $x(t)=\dfrac{2+t}{4+t}=1-\dfrac{2}{t+4}$; $v(t)=\dfrac{2}{(t+4)^2}$;

$a(t)=\dfrac{-4}{(t+4)^3}$; $v(1)=\dfrac{2}{25}$; $a(1)=-\dfrac{4}{125}$.

С-45

1. $f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$; $x = 0$; $x = \pm$ – нули; $f'(x) = 4x(1 - x^2) = 0$ $x = 0$;
$x = \pm 1$ max $(\pm 1; 1)$ min $(0; 0)$
возрастает: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1]$; убывает: $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$
$x \in R$ $y \le 1$



2. $f(x) = \cos^2\dfrac{\pi x}{4}\ \sin\dfrac{\pi x}{4}$; $x \in [-2; 2]$;

$f'(x) = \left(-2\cos\dfrac{\pi x}{4}\sin^2\dfrac{\pi x}{4}+\cos^3\dfrac{\pi x}{4}\right)\dfrac{\pi}{4}$; $f'(x) = 0$ при

$\cos\dfrac{\pi x}{4} = 0$ $x = 2 + 4\pi$ $\cos^2\dfrac{\pi x}{4} - 2\sin^2\dfrac{\pi x}{4} = 0$

$\sin^2\dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{1}{3}$; $\sin\dfrac{\pi x}{4} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x = 4(-1)^k \arcsin\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\dfrac{1}{\pi} + 4\pi n$

наибольшее значение $f\left(\dfrac{4}{\pi}(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$;

наименьшее значение $f\left(\dfrac{4}{\pi}(-1)^k\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

ВАРИАНТ 9

С-1

1. $180° = 18° + 2\alpha$; $\alpha = 81° = \frac{9\pi}{20}$; $18° = \frac{\pi}{10}$.

2. а) при повороте на 360° = 60 мин. при $x = -72°$ $x = 12$ мин. вперд;
б) $360° - 72° = 228°$; $228° + 360° \cdot 11 = 4248°$.

3. $3x + 7x + 17x + 21x = 360°$; $x = 7{,}5°$;
$3x = 22°30'$; $7x = 52°30'$; $17x = 127°30'$; $21x = 157°30'$.
$22°30' \approx 0{,}3927$.

4. $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = \beta^2 \end{cases}$; $\beta^2 + \beta - 1 = 0$; $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

$$\alpha = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2} = 3 - \sqrt{5};$$

$\alpha = 35°25'$; $\beta = 21°53'$.

С-2

1. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = 2\text{tg}\alpha$**;**

$$\frac{\sqrt{1+\sin^2\alpha+2\sin\alpha} - \sqrt{1+\sin^2\alpha-2\sin\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\text{tg}\alpha.$$

2. **а)** $\frac{\cos 1700^\circ \text{tg} 3400^\circ}{\sin 5000^\circ} < 0$; **б)** $\sin 7 \cos 9 \text{ tg } 11 > 0$.

3. $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\text{tg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} \cdot \text{tg}\alpha = \frac{2\sin^2\alpha}{\text{tg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha} =$

$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = 2\text{ctg }\alpha$;

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha < 0$, значит, $\alpha \in$ II четверти; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $2\text{ctg }\alpha = -1$

С-3

1. tg 31° tg 33° tg 35°... tg 59° = tg 45°; tg 31° ctg 31° ... tg 43°ctg 43° = 1.

2. $$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}=\frac{-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\alpha}=$$

$$=-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}=$$

$=-1.$

3. $\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\cos(3\varphi+\pi)=\sin(2\varphi-\pi)\sin(\pi-3\varphi)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)$

$\cos 2\varphi\cos 3\varphi=-\sin 2\varphi\sin 3\varphi+\cos\varphi$; $\cos(2\varphi-3\varphi)=\cos\varphi$.

С-4

1. $$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cos 80^\circ=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 80^\circ+\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 100^\circ)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 80^\circ\right)=\frac{1}{8}.$$

2.

$$\frac{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}=\left(\mathrm{tg}\alpha=3\quad \mathrm{tg}2\alpha=\frac{6}{1-9}=-\frac{3}{4}\right)=\frac{2\mathrm{tg}2\alpha-3}{4\mathrm{tg}2\alpha+5}=$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}-3}{-3+5}=\frac{-9}{4}=\cos 8\alpha\ .$$

3.

$\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4\alpha=1-8\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha=$
$=1-2\sin^2 4\alpha.$

С-5

1.

$(\cos t - \sin t)(1 + \cos t + \sin t) = 0$

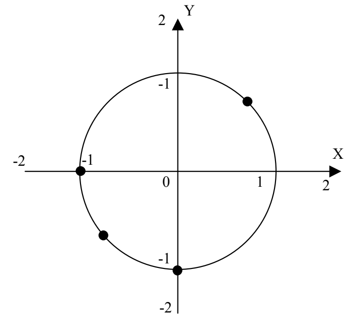
$\cos t - \sin t = 0 \quad t = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$1 + \cos t + \sin t = 0$

$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k$

$t \in [0;\ 2\pi]$: $t = \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}$.



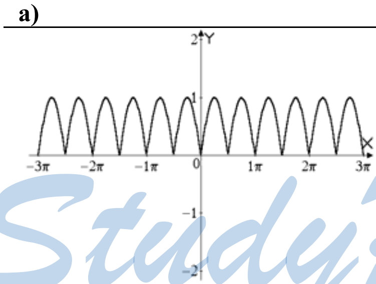
2.

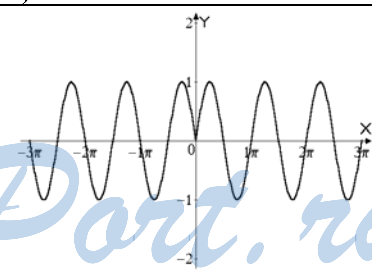
$\cos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) > \sin\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$, т.к. $\cos\frac{\pi}{7} > 0 \ \Rightarrow\ \sin\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) < \cos\frac{\pi}{7}$, а

$\cos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) > \cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7} > \sin\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$ ч.т.д.

3.

а)	**б)**





С-6

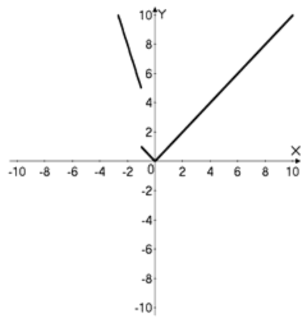
1. а) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5x^3}{x(2 - \sqrt{x+1}}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2 - \sqrt{x+1} \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ $x \geq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 3$,

значит, $x \in [-1;0) \cup (0;3) \cup (3;\infty)$;

б) $f(x)=\sqrt{9-2\sqrt{x}}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 9-2\sqrt{x} \ge 0 \end{cases}$; $x \in \left[0; \frac{81}{4}\right]$.

2. $f(x)=\begin{cases} |x| & x>-1 \\ 2-3x & x \le -1 \end{cases}$

а) $f(-2)=8$; $f(-1)=5$; $f(3)=3$; $f(x^2)=\begin{cases} x^2, \ x>1 \\ 2-3x^2, \ x \le -1 \end{cases}$;



б)

С-7

1. **а)** да; **б)** да.

2. $f_1(x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}$; $f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ пусть существуют 2 представления

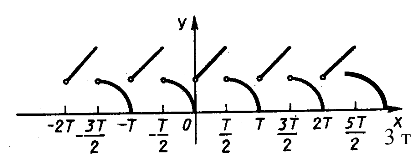
$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=g_1(x)+g_2(x)$, где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ – четные, $g_2(x)$ и $f_2(x)$ – нечетные;

$f_1(x)-g_1(x)=g_2(x)-f_2(x)$ $\Rightarrow$ слева четная функция;

справа нечетная $\Rightarrow$ $f_1(x)=g_1(x)$; $g_2(x)=f_2(x)$.

С-8.

1.



2. **а)** $f(x) = |\sin x| + \text{tg}\, 2x$; $f_1(x) = |\sin x|$ $T_1 = \pi$;

$f_2(x) = \text{tg}2x$; $T_2 = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $T = \pi$;

б) $f(x) = \cos\left(\sqrt{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$; $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

3. **а)** $f(x) = \sin x^2$, пусть T – период $\Rightarrow \sin x^2 = \sin(x + T)^2$,

что неверно;

б) $f(x) = \cos x \cos \sqrt{2}x = \frac{1}{2}(\cos x(1+\sqrt{2}) + \cos x(1-\sqrt{2}))$;

$\begin{matrix} f_1(x) = \cos x(1+\sqrt{2}) \\ f_2(x) = \cos x(1-\sqrt{2}) \end{matrix}$; $\begin{matrix} T_1 = \frac{2\pi}{1+\sqrt{2}} \\ T_2 = \frac{2\pi}{1-\sqrt{2}} \end{matrix}$ $T_1 = nT_2$, значит, $f(x)$ не является переодической.

С-9

1. **а)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \le 0; \\ x^2 - 4x, & x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_в = -1 \\ x_в = 2 \end{cases}$

$f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$; возрастает при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

б) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$ при $x^2 > 1$, значит,

$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; убывает при $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

2. **а)** возрастает; **б)** нет; **в)** возрастает; **г)** убывает;

д) возрастает; **е)** нет.

3. sin 1, cos 1, tg 1, ctg 2.

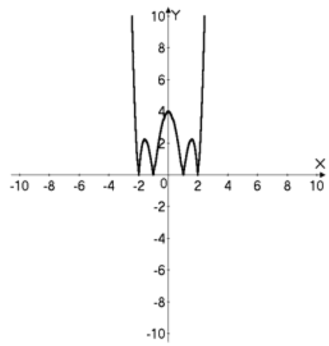
Ответ: ctg 2, cos 1, sin 1, tg 1.

С-10

1. $f(x) = |x^4 - 5x^2 + 4|$; $y = x^4 - 5x^2 + 4$;

$y' = 2x(2x^2 - 5) = 0$ при $x_{max} = 0$ и $x_{min} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$;

$y = 0$ при $x_{min} = \pm 1$; $x_{max} = \pm 2$.



2. **а)** $f(x) = \sin|x + 2|$; $|x + 2| = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in N \cup \{0\}$;

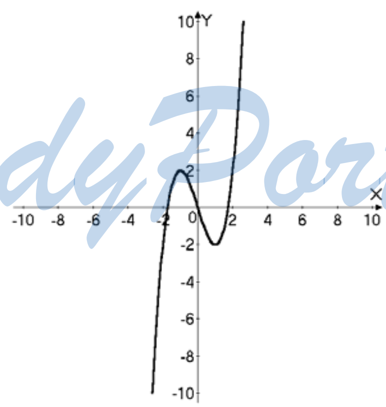
$x_{\max} = -2 \pm \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; $x_{\min} = -2 \pm \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ $k \in N$;

б) $f(x) = \cos 4x + \cos 2x - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =$

$= \cos 4x + \cos 2x - \cos 2x = \cos 4x$;

$x_{\max} = \frac{\pi n}{2}$; $x_{\min} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

С-11



$y = x^3 - 3x$; $x = 0$ $x = \pm\sqrt{3}$ – нули функции;
$y' = 3(x^2 - 1) = 0$ при $x = \pm 1$; y возрастает при $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
убывает при $[-1; 1]$; $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 1$.

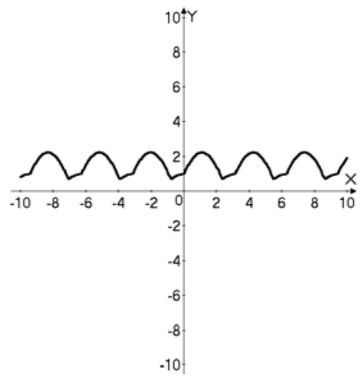
С-12

1. $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x + 3;$

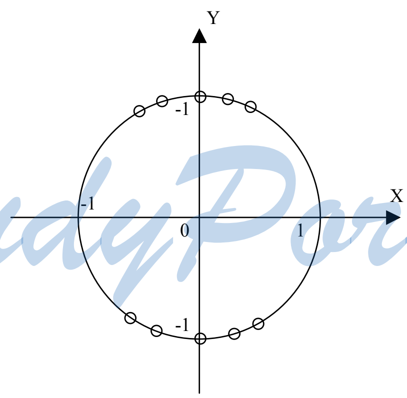
min: $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad f(x) = 2$

max: $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad f(x) = 6$, значит, $f(x) \in [2\ ;\ 6]$.

2.



3.



$\frac{\text{tg}^2 t - 5}{\text{tg}^2 t - 3} \geq 2\,; \qquad \frac{\text{tg}^2 t - 2\text{tg}^2 t + 1}{\text{tg}^2 t - 3} \geq 0\,; \qquad \frac{\text{tg}^2 t - 1}{\text{tg}^2 t - 3} \leq 0\,;$

$t \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right).$

С-13

1. **а)** $\sin(\arccos 0{,}28) = \sqrt{1 - 0{,}0784} = 0{,}96$;

б) $\arcsin \sin 10 = -\arcsin \sin(10 - 3\pi) = 3\pi - 10$.

2. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$;

$x = \sin(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x)$.

3. **а)** $\cos(5\arccos 0{,}7321) \approx -0{,}8223$;

б) $\sin(4\arcsin (0{,}0237) + \arccos 0{,}67) \approx 0{,}8025$.

С-14

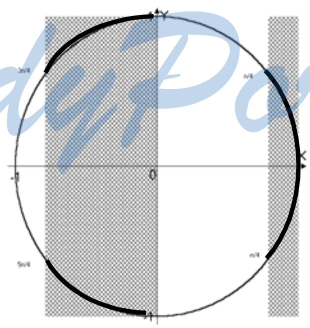
а) $4\sin x \cos x = -1$; $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2}$;

б) $\dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{tg}\, 3x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3}$;

в) $\left|\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{14}\right)\right| = \dfrac{1}{2}$; $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{14}\right) = \pm\dfrac{1}{2}$;

$x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi}{42} + 2\pi n$; $x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{\pi}{42} + 2\pi n$.

С-15



$\cos t\, \mathrm{tg}\, 2t \le 0$;

$x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$.

С-16

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)+\mathrm{tg}2x}{1-\mathrm{tg}2x\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)}\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad \mathrm{tg}\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

$x\in\left(-\dfrac{3\pi}{7}+\dfrac{\pi n}{3};\dfrac{\pi}{26}+\dfrac{\pi n}{3}\right)$, но по ОДЗ $x\ne\dfrac{5\pi}{14}+\pi k$, значит,

$x\in\left(-\dfrac{9\pi}{42}+\pi k;\dfrac{\pi}{126}+\pi k\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{42}+\pi k;\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\dfrac{43}{126}\pi+\pi k\right)\cup\left(\dfrac{19\pi}{42}+\pi k;\dfrac{85\pi}{126}+\pi k\right)$

б) $\sin^2 x\ge\dfrac{1}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l}\sin x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x\le\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$; $\quad x\in\left[\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{3\pi}{4}+\pi n\right]$.

С-17

а) $\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+1=\cos x$; $\quad \sin\dfrac{x}{2}\left(2\sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{2}\right)=0$;

$x=2\pi n$; $\quad x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$;

б) $\sin x\sin 3x=\dfrac{1}{2}$; $\quad \cos(2x)-\cos 4x=1$;

$\cos 2x(1-2\cos 2x)=0$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; $\quad x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$.

С-18

а) $4\cos^2 x+\sin x\cos x+3\sin^2 x=3$; $\cos x(\cos x+\sin x)=0$;

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n \quad x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$;

б) $\sin^5 x-\sin^4 x\cos x=2\sin^3 x\cos^2 x$;

$\sin^3 x(\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x)=0$; $x=\pi n$; $\quad \cos x\ne 0$;

$\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x-2=0$; $\quad \mathrm{tg}\,x=2$; $\quad x=\mathrm{arctg}\,2+\pi k$;

$\mathrm{tg}\,x=-1$; $\quad x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$.

С-19.

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}2y = 1 \\ \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2y \end{cases};\quad \begin{cases} \cos(x-2y) = 0 \\ \sin 2\mathrm{x} = \sqrt{3}\cos 2y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2y + \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \sin(4y+\pi) = \sqrt{3}\cos 2y \end{cases};\quad \begin{matrix} \sqrt{3}\cos 2y + \sin 4y = 0 \\ \cos 2y(\sqrt{3} + 2\sin 2y) = 0 \end{matrix};$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2} \\ x = \pi n + \pi k \end{cases};\quad \begin{cases} y = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2} \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}.$$

С-20

а) $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x - \sin 3x \cos^2 x \sin x -$

$- \cos 3x \cos x \sin^2 x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$\cos 2x - \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \sin 3x \cos 2x \sin x - \cos 3x \cos x \cos 2x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}(\cos 2x \cos 4x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$2\cos^3 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \pi n;$

б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x;$

$2\sin 2x \cos x + \sin 2x - \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

$2\cos x(\sin 2x - \cos x) + \sin 2x - \cos x = 0$;

$(\sin 2x - \cos x)(2\cos x + 1) = 0$;

$\cos x(2\sin x - 1)(2\cos 3x + 1) = 0$;

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$;

$x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k$;

$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi z.$

С-21

1. $f(x) = -\dfrac{16}{x}$; $g(x) = x^2 - 1$; $x_0 = 2$; $\Delta x = 0,1$;

$$\Delta f(x_0) = -\frac{16}{x_0 + \Delta x} + \frac{16}{x_0} = -\frac{16}{2,1} + 8 \approx -0,38;$$

$\Delta g\ (x_0) = -2\Delta x x_0 + \Delta x^2 = 0,01 - 0,4 = -0,39$, значит, $\Delta g(2) < \Delta f(2)$;

$x_0 = 2$ $\quad \Delta x = 0,2$ $\quad \Delta f = -\dfrac{16}{2,2} + 8 \approx 0,73$;

$\Delta g\ (x_0) = 0,04 - 0,8 = -0,76$, значит, $\Delta f(2) > \Delta g(2)$.

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$\Delta f(x_0) = x_0^3 + (\Delta x)^3 + 3x_0(\Delta x)^2 + 3x_0^2\Delta x - 2x_0^2 - 2(\Delta x)^2 - 4x_0\Delta x +$
$+ 4x_0 + 4\Delta x - 3 - x_0^3 + 2x_0^2 - 4x_0 + 3$;

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + 3x_0\Delta x + 3x_0^2 - 2\Delta x - 4x_0 + 4;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 3x_0^2 - 4x_0 + 4.$$

С-22

1. $m = 3 - 2t$; $\quad x(t) = t^2 + 3t + 1$; $\quad m(1) = 1$;
$v(t) = 2t + 3$; $\quad a(t) = 2$; $\quad F = 2$ Н.

2. **а)** $f(x) = 4\sqrt{x} - x^3$; $\quad f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2$;

б) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{x-1}$; $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

С-23

1. **а)** (–2; 1) (3; 3)1); **б)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ не существует; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$;

в) $y \in (-2; 2] \cup \{3\}$.

2. $f(x) = \dfrac{x+1-4}{\sqrt{x+1}-2} = \sqrt{x+1} + 2$, $\quad x \neq 3$;

$\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < 0,1$; $\quad x \in (2,61; 3,41)$, значит, $\delta = 0,39$.

С-24

1. **а)** $\lim\limits_{x\to1} y = \dfrac{\lim\limits_{x\to1} f^2(x) - \lim\limits_{x\to1} g(x)}{3\lim\limits_{x\to1} f(x) + 4\lim\limits_{x\to1} g(x)} = \dfrac{4+1}{6-4} = \dfrac{5}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to1} y = \left(\sqrt{\lim\limits_{x\to1} f(x)} + \lim\limits_{x\to1} g(x)\right)^2 + \left(\sqrt{\lim\limits_{x\to1} f(x)} - \lim\limits_{x\to1} g(x)\right)^2 =$

$= 2\lim\limits_{x\to1} f(x) + 2\lim\limits_{x\to1} g^2(x) = 2(2+1) = 6$.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} x^2 + 2x + 4 = 12$;

б) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-6}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \dfrac{3}{4}$.

С-25

1. **а)** $f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 3x^{18}$; $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 54x^{17}$;

б) $g(x) = (x^2 + 3x)\sqrt{x}$; $g'(x) = (2x + 3)\sqrt{x} + \dfrac{x^2+3x}{2\sqrt{x}}$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} = x|x|$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x\to0} |x| = 0$.

С-26

а) $f(x) = (x-2)^2(x+4)$; $f'(x) = 2(x-2)(x+4) = 0$;
$x = 2$ $x = -4$; $f'(x) > 0$; $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$;
$f'(x) < 0$ $x \in (-4; 2)$;

б) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2x-2-4x+2}{(x-1)^4} = \dfrac{-2x}{(x-1)^4} = 0$ при $x = 0$;

$f'(x) > 0$ $x < 0$;
$f'(x) < 0$ $x > 0,\ x \ne 1$.

С-27

1. **а)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x^2-7}}}$; ОДЗ: $\begin{cases}x^2-7\ge 0\\ 2-\sqrt{x^2-7}>0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2\ge 7\\ x^2<11\end{cases}$;

$x\in(-\sqrt{11};-\sqrt{7}\,]\cup[\,\sqrt{7};\sqrt{11}\,)$;

б) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x-2\sqrt{x}}}$;

ОДЗ $\begin{cases}x\ge 0\\ x-2\sqrt{x}\ge 0\\ x-\sqrt{x-2\sqrt{x}}\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge 0\\ x^2\ge 4x\\ x^2\ge x-2\sqrt{x}\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge 0\\ x(x-4)\ge 0\end{cases}$;

$x\in\{0\}\cup[4;+\infty)$.

2. $f(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$; $f(f(x))=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{x}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}$;

$f(f(f(x)))=-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}-1}=x$; $f(f(f(f(x))))=1-\dfrac{1}{x}$;

$f_n(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $n=3k-2$; $f_n(x)=x$; $n=3k$; $f_n(x)=-\dfrac{1}{x-1}$; $n=3k-1$

ОДЗ: для $f: x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$; для f_a: $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$.

3.

а) $f(x)=\sqrt{3x^3+2x^2-12}=\dfrac{9x^2+4x}{2\sqrt{3x^3+2x^2-12}}$;

б) $f(x)=(x^3-x\sqrt{x}\,)^9$; $f'(x)=9(3x^2-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,)(x^3-x\sqrt{x}\,)^8$.

С-28

а) $f(x)=\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x=\sin 5x$; $f'(x)=5\cos 5x$;

б) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}(x-1)}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x-1)}=\operatorname{tg}1$; $f'(x)=0$;

в) $f(x)=\sin^3 2x+\cos^3 2x$; $f'(x)=6(\sin^2 2x\cos 2x-\sin 2x\cos^2 2x)$.

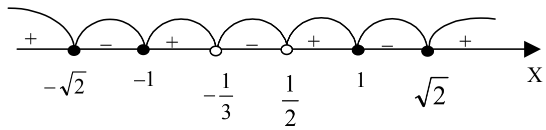
С-29

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)=4\sqrt{a}a\le 32$ **;**

$a^{\frac{3}{2}}\le 8$; $a\le 4$, значит, $0<a\le 4$.

2. а) $\dfrac{x^4-3x^2+2}{6x^2-x-1}\le 0$; $\dfrac{(x^2-2)(x^2-1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\le 0$ **;**

$\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)(x+1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\le 0$; $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

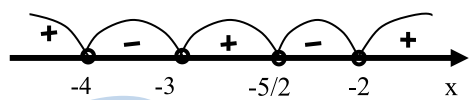


б) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+4}$;

$\dfrac{x^2+7x+12+2x^2+12x+16-3x^2-15x-18}{(x+2)(x+3)(x+4)}<0$;

$\dfrac{4x+10}{(x+2)(x+3)(x+4)}<0$;

$x\in(-4;-3)\cup(-\frac{5}{2};-2)$.



С-30

1. $f(x)=\sqrt{x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\text{tg } 60°=\sqrt{3}$; $x=\dfrac{1}{12}$; $f\left(\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$,

значит искомая точка $\left(\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

2. $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)$; $f(\pi)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$f'(x)=-\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)$; $f'(\pi)=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; $y_{\text{кас}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{6}(x-\pi)$ – ур. кас.

С-31

1. $\left(\sqrt{4{,}0008}-\sqrt{0{,}9998}\right)^{40} \approx (2(1+0{,}0001)-1+0{,}0001)^{40} \approx$
$\approx 1+0{,}0001\cdot 40\cdot 3 \approx 1{,}012.$

2.

$\sin 64° = \sin 60°\cos 4° + \cos 60°\sin 4° \approx 0{,}866 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0698 = 0{,}9009.$

С-32

1. $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 5t;\quad v(t) = -t^2 + 8t + 5;\ \ a(t) = -2t + 8;$

а) $t = 4$; **б)** $v(4) = 21$ м/с.

2. $s(t) = \frac{1}{(t-2)^2};\quad v(t) = \frac{-2}{(t-2)^3};\quad a(t) = \frac{6}{(t-2)^4};\quad F = \frac{6m}{(t-2)^4}.$

С-33.

1. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2;\qquad f'(x) = 9x^2 - 4x + 3;$

$\frac{D}{4} = 4 - 27 < 0 \Rightarrow f(x)$ всегда возрастает.

2. $f(x) = \mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{tg}\, x - 3$; ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$f'(x) = 3\mathrm{tg}^2\, x\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$; $f'(x) = 0$ при $\mathrm{tg}\, x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$;

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n;\ x_{\min} = -\frac{\pi}{6} + \pi n;\ x_{\max} = \frac{\pi}{6} + \pi n.$

С-34

$f(x) = \frac{(x-2)(6+x)}{(x-1)^2};\ f'(x) = \frac{(6+x+x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x-2)(x+6)}{(x-1)^4} =$

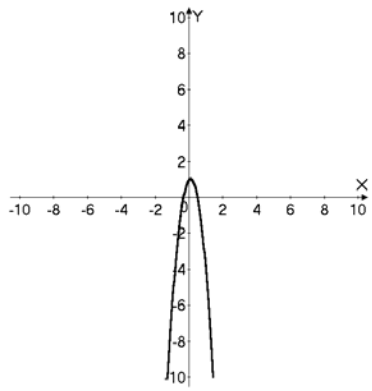
$= \frac{(x-1)(2x^2+2x-4-2x^2-8x+24)}{(x-1)^4} = \frac{20-6x}{(x-1)^3} = 0;$

$x = \frac{10}{3}$ – max $\quad \frac{3x-10}{(x-1)^3} > 0$;

убывает: $(1; \frac{3}{10}]$; возрастает: $(-\infty; 1) \cup [\frac{3}{10}; +\infty)$.

С-35

1.



$h(x) = -6x^2 + x + 1$; $x_в = \frac{1}{12} = x_{max}$;

$h_в = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + 1 = 1\frac{1}{24}$; $\quad x \in R,\ y \le 1\frac{1}{24}$;

возрастает: $x \le \frac{1}{12}$; $\quad$ убывает: $x \ge \frac{1}{12}$;

нули: $x_1 = \frac{-1-5}{-12} = \frac{1}{2}$ и ; $x_2 = -\frac{1}{3}$.

2.

$5x^2 + 8x - 4 \ge 0 \qquad (x+2)\left(x - \frac{2}{5}\right) \ge 0$;

$x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{2}{5}; +\infty)$.

3.

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 > 0$; $(x + 1)(x^2 - x + 1 + 3x) > 0$;
$(x + 1)(x + 1)^2 > 0$; $\quad (x + 1)^3 > 0$.

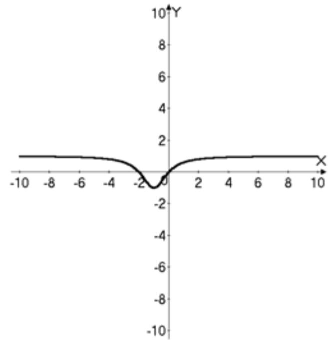
С-36

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}=1-\frac{2}{x^2+2x+2};$$

$$f'(x)=\frac{4x+4}{(x^2+2x+2)^2}=0 \text{ при}$$

$x=-1$; $f(x)$ возрастает при $x>-1$;
убывает при $x<-1$;

$x_{\min}=-1$; $\;-f(-1)=\frac{-1}{1}=-1$.



С-37.

1. $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; $\;f'(x)=\frac{2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^2}=0$ при

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad x_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\;-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3}$ – наибольшее значение;

$x_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\;-f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-2}{3}$ – наименьшее значение.

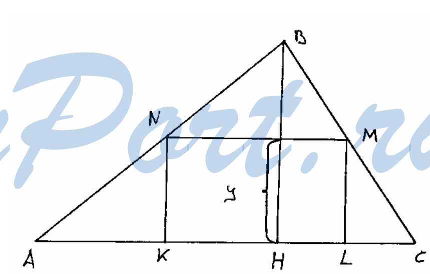
2.

Пусть $LK=x \quad LM=y$;
тогда из подобия:

$\frac{3-y}{3}=\frac{x}{4} \Rightarrow x=4-\frac{4y}{3}$;

$S=xy=4y-\frac{4y^2}{3}$;

$S'=4-\frac{8}{3}y=0$ при $y=\frac{3}{2}$



$X=2$; $S=3$ м².

С-38

1. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, $tg\gamma=\frac{3}{4}$;

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\gamma<\frac{3\pi}{2}$;

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\sin^2\gamma=\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\sin^2\gamma$; $\sin\gamma=-\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$;

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$

$+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$

$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{16}{25}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)+\frac{27}{125}=-\frac{117}{125}$.

2. $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}=tg^4\alpha$;

$\frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}=tg^4\alpha$.

3. **а)** $\frac{tg7^0+tg68^0}{1-tg7^0tg68^0}=tg75^0=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$;

б) $\cos16^0\cos59^0-\sin16^0\sin59^0=\cos75^0=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

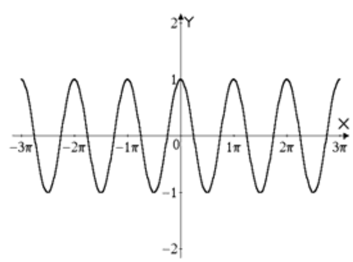
С-39

а) см.рис;

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$ при

$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ -нули;

$x\in R$, $f(x)\in[-1;1]$;



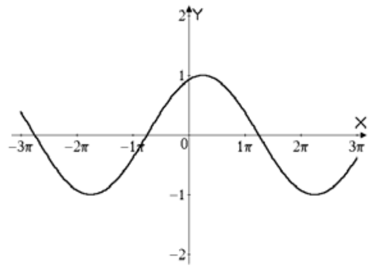
убывает при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$;

$x_{\max} = \pi n$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + \pi n$;

б)

$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$;

см.рис.



$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ -нули;

$x \in R$, $f(x) \in [-1;1]$;

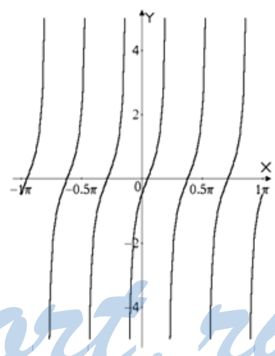
возрастает при

$x \in \left(-\frac{7\pi}{4} + 4\pi n; \frac{\pi}{4} + 4\pi n\right)$;

убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi n; \frac{9\pi}{4} + 4\pi n\right)$

$x_{\max} = \frac{\pi}{4} + 4\pi n$; $x_{\min} = -\frac{7\pi}{4} + 4\pi n$;

в) см.рис;



$f(x) = tg\left(3x - \frac{\pi}{7}\right)$;

$x = \frac{\pi}{21} + \pi n$ -нули;

$x \neq \frac{3\pi}{14} + \frac{\pi n}{3}$, $f(x) \in R$;

возрастает на обл. опр; экстремумов нет.

C-40

1. **а)** $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$;

б) $arctg\sqrt{2} + arctg\frac{1}{\sqrt{2}} = A$, $\frac{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1-1} = tgA \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$.

2. **а)** $\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{8}$;

$\sin x\neq 0$, $x\neq \pi L$;

$\frac{8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x}{\sin x}=1$; $\sin 8x=\sin x$;

$\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{9x}{2}=0$; $x=\frac{2\pi n}{7}$, $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi\kappa}{9}$; $n\neq 7\pi Z$; $k\neq 9p+4$;

б) $\cos^2 2x+\cos^2 4x-\sin^2 6x-\sin^2 8x=0$;

$\cos 4x+\cos 8x+\cos 12x+\cos 16x=0$;

$\cos 10x\cos 6x+\cos 10x\cos 2x=0$; $\cos 10x\cos 4x\cos 2x=0$;

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

3. **а)** $\sin x<\cos x$;

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$; $x\in\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$;

б) $\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\leq 0$; $\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0$ при $x=\pi n$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, значит $x\in\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi n\right]\cup\left[\frac{-2\pi}{3}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right]$.

С-41

$\begin{cases}2\cos x=3tgy\\2\cos y=3tgz\\2\cos z=3tgx\end{cases}$; $\begin{cases}4\cos^2 x=9tg^2 y\\4\cos^2 y=9tg^2 z\\4\cos^2 z=9tg^2 x\end{cases}$;

Пусть $\cos^2 x=a$, $\cos^2 y=b$, $\cos^2 z=c$;

$\begin{cases}4a=9\cdot\frac{1-b}{b}\\4b=9\cdot\frac{1-c}{c}\\4c=9\cdot\frac{1-a}{a}\end{cases}$; $a=\frac{9}{4}\cdot\frac{1-b}{b}$; $c=\frac{9}{4b+9}$; $\frac{4\cdot 9}{4b+9}=9\cdot\frac{1-\frac{9-9b}{4b}}{\frac{9-9b}{4b}}$;

$36(1-b)=52b^2-36b+117b-81$; $52b^2+117b-117=0$;

$b_1 = \frac{3}{4}$; $b_2 = 3$, постор. корень, т.к. $\cos^2 \gamma \le 1$;

$a = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$; $c = \frac{9}{4 \cdot \frac{3}{4} + 9} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$;

$$\begin{cases} \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right);$$

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right);$$

$$\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right);$$

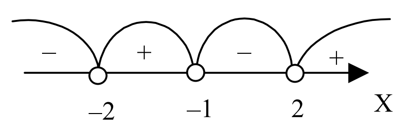
$$\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).$$

С-42

1. **а)** $x^2 - 12|x| + 32 \ge 0$**;** $|x| = y \ge 0$**;** $y^2 - 12y + 32 \ge 0$**;**
$y \in [0;4] \cup [8;+\infty)$; $x \in (-\infty;-8] \cup [-4;4] \cup [8;+\infty)$;

б) $1 + \frac{12}{x^2} - \frac{7}{x} < 0$, ОДЗ: $x \ne 0$; $(x^2 - 7x + 12) < 0$; $x \in (3;4)$.

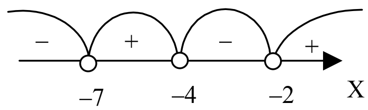
2. **а)** $\frac{4}{x+2} > 3 - x$**;** $\frac{4 + x^2 - x - 6}{x+2} > 0$**;** $\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)} > 0$**;**
$x \in (-2;-1) \cup (2;+\infty)$;



б) $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$;

$\frac{(x-2)(x^2-11x+28)-(x+2)(x^2+11x+28)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0$;

$\frac{-26x^2-112}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0$; $\frac{13x^2+56}{(x+2)(x+4)(x+7)} < 0$;



$x \in (-\infty;-7) \cup (-4;-2)$.

С-43

1. **а)** $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$**;** $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$

б) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \sqrt{1x + \frac{1}{x^2}}$; $y' = \frac{-\frac{2}{x^3}}{2\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

в) $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$;

$y' = (x^2-2)\sin x - 2x\cos x + 2\sin x + 2x\cos x =$

$= (x^2-2)\sin x + 2\sin x = x^2 \sin x$;

г) $y = (x^3-x^2)^{66}$; $y' = 66(3x^2-2x)(x^3-x^2)^{65}$.

2. $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$**;** $f'(x) = 3x^2 + 1$**;** $g(x) = 3x^2 + x - \sqrt{3}$**;**

$g'(x) = 6x + 1$; $f'(x) - g'(x) = 3x^2 - 6x > 0$; $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

С-44

1. $f(x) = -x^2 - 2x$**;** $f'(x) = -2x - 2$**;**

$y_{кас} = -x^2{}_0 - 2x_0 - 2(x_0+1)(x-x_0) = -2(x_0+1)x + x^2{}_0$;

$1 = -2(x_0+1) + x^2{}_0$; $x^2{}_0 - 2x_0 - 3 = 0$; $x_0 = 3$, $x_0 = -1$;

$y_1 = -8x + 9$, $y_2 = 1$ – уравнения касательных.

2. **а)** $\left(\sqrt{4{,}000008}-\sqrt{0{,}999996}\right)^{100} \approx (1{,}000002+0{,}000002)^{100} \approx$
$\approx 1+0{,}0004=1{,}0004$;

б) $\sin 32^0 = \sin 30^0 \cos 2^0 + \cos 30^0 \sin 2^0 \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}9994+0{,}866\cdot 0{,}0349=$
$=0{,}0302+0{,}4997=0{,}5299$.

3. $S(t)=\frac{t}{t^2+4}$ **;** $V(t)=\frac{t^2+4-2t^2}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{4-t^2}{\left(t^2+4\right)^2}=0$ **при**

$t=\pm 2$, но $t\ge 0 \Rightarrow t$=2;

$a(t)=-\frac{2t\left(t^2+4\right)^2+4t\left(t^2+4\right)\left(4-t^2\right)}{\left(t^2+4\right)4}$;

$a(2)=-\frac{4\cdot 64+8\ (8)\ (0)}{8^4}=-\frac{4}{64}=-\frac{1}{16}$;

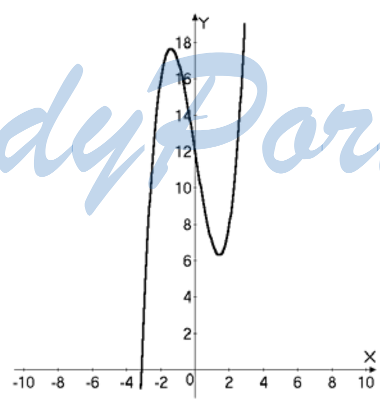
$F=-\frac{3}{16}$ Н.

С-45

1.

$x^3-6x+12=0$; $x^3=6x-12$;

см.рис. 1 корень.



2. Пусть основание a, а сторона – $в$;

$$H=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\,,\ S=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\,;\ a+2b=P\,;$$

$$S^2=\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{a^4}{16}\,;\ b=\sqrt{\frac{4S^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}\,;\ a+2\sqrt{\frac{4S^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}=P\,;$$

$$P'=1+\frac{-S^2 8/a^3+a/2}{\sqrt{4\frac{S^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}}=0\,;\ -\frac{a}{2}+\frac{8S^2}{a^3}=\sqrt{\frac{4S^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}\,;$$

$$\frac{64S^4}{a^6}+\frac{a^2}{4}-\frac{8S^2}{a^2}=\frac{4S^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}\,;\ \frac{64S^4}{a^6}-\frac{2S^2}{a^2}=0\,;$$

$$64S^4-2S^2a^4=0\,;\ a^4=32S^2\,;\ a=2\sqrt{2}\sqrt{S}\,;$$

$$в=\sqrt{\frac{4S^2}{8S}+\frac{8S}{4}}=\sqrt{\frac{S}{2}+2S}=\sqrt{\frac{5S}{2}}.$$

ВАРИАНТ 10

С-1

1. $\alpha=36^0$**,** $360^0-2\alpha=2\beta$**,** $\beta=144^0$**;**

$$36^0=\frac{\pi}{180}\cdot 36=\frac{\pi}{5}\,;\ 144^0=\frac{\pi}{180}\cdot 144=\frac{4\pi}{5}\,.$$

2. 360° - 60 мин.; x° - 24 мин.

а) $x=144^0$; **б)** $x=360^0-144^0=216^0$; $216^0+360\cdot 11=4176$.

3. $8x+13x+23x+28x=360^0$**;** $x=5$**;** $8x=40^0=\frac{\pi}{180}\cdot 40=\frac{2\pi}{9}$**.**

4. $\begin{cases}x+y=4\\ x=y^2\end{cases}$**;** $y^2+y-4=0$; $Д$=17; $y_{12}=\left(-1\pm\sqrt{17}\right)\cdot\frac{1}{2}$, но

$$y>0\Rightarrow\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\,;\ y=89^0 28'\,,\ x=139^0 43'.$$

С-2

1. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2tg\alpha$ **;** $\frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-2tg\alpha$**.**

2. **а)** $\frac{\cos1100^0\sin2200^0}{tg2980^0}<0$ **;**

б) $\sin6\,tg\,8\cos10<0$ **.**

3. $$\frac{\frac{2}{tg\alpha+ctg\alpha}+tg\alpha\,ctg\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}-\sin\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+1}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}-\sin\alpha=$$
$$=1-\sin\alpha$$

$tg\alpha=2$, $\sin\alpha<0$; $sin^2\alpha=4-4sin^2\alpha$; $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt5}$

$1-\sin\alpha=\frac{\sqrt5+2}{\sqrt5}$.

С-3

1.

$ctg13^0\cdot ctg17^0\cdot ctg21^0\ldots ctg77^0=tg13^0\cdot ctg13^0\cdot ctg17^0\cdot tg17^0\ldots ctg45^0=1$**.**

2. $$\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}=$$
$$=\frac{\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha}{4\sin3\alpha\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin3\alpha(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{4\sin3\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos2\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\cos2\alpha.$$

3. $\cos\left(4t+\frac{\pi}{2}\right)\cos(t-\pi)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3t\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4t\right)\sin(t+\pi)$**;**

$\sin4t\cos t-\sin3t=\cos4t\sin t$;

$\frac{1}{2}(\sin5t+\sin3t)-\sin3t=\frac{1}{2}(\sin5t-\sin3t)$;

С-4

1. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$.

2. $tg\alpha=3$, $\sin^2\alpha=9-9\sin^2\alpha$; $\sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$;

$\sin 2\alpha=\frac{6}{10}$, $\cos 2\alpha=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$;

$\frac{3\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=\left(\frac{9}{5}+\frac{4}{5}\right):\left(-4-\frac{3}{5}\right)=-\frac{13}{5}\cdot\frac{5}{23}=-\frac{13}{23}$.

3. $\frac{(1+tg2\alpha)^2-2tg^2 2\alpha}{1+tg^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1=$

$=\frac{(1-tg^2 2\alpha+2tg2\alpha)\cos^2 2\alpha}{1+tg^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1=$

$=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 4\alpha-1=\cos 4\alpha-1$.

С-5

1.

см.рис.

$(\cos t+\sin t)(1+\cos t-\sin t)=0$;

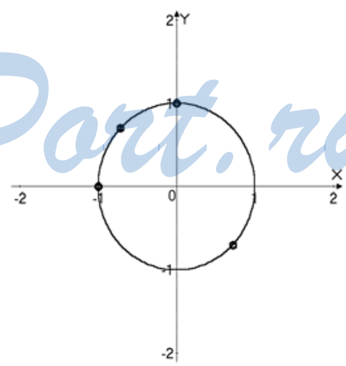
$t=-\frac{\pi}{4}+\pi n$

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$t=-\frac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^k\frac{\pi}{4}$

$t\in[0;2\pi]$, $t=\frac{3\pi}{4}$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$,

$t=\frac{7\pi}{4}$.



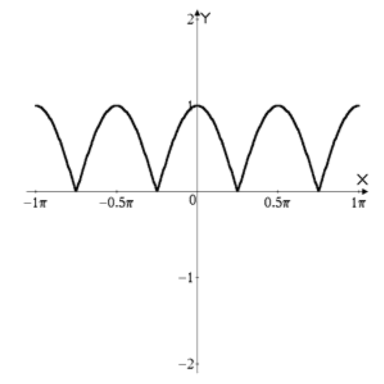
2. $\cos(\sin 1) > \sin(\cos 1)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin(\cos 1) < \cos 1$;

$\sin 1 < 1 \Rightarrow \cos(\sin 1) > \cos 1 > \sin(\cos 1)$.

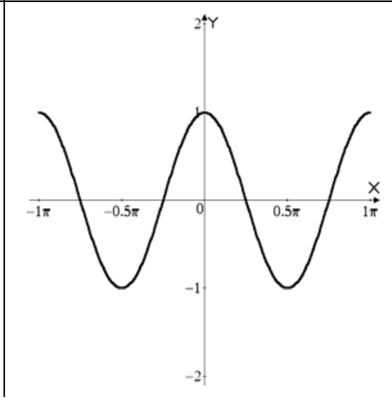
3.

см.рис.

а)



б)



С-6

1. **а)** $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 2x^3}{x\left(4 - \sqrt{x-1}\right)}$;

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 4 \neq \sqrt{x-1} \\ x \geq 1 \end{cases}$; $x \geq 1$, $x \neq 17$, значит, $x \in [1;17) \cup (17;\infty)$;

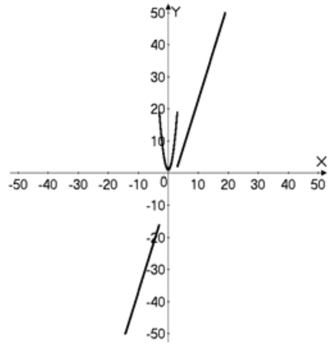
б) $f(x) = \sqrt{3 - 4\sqrt{x}}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3 \geq 4\sqrt{x} \end{cases}$; $x \in \left[0; \frac{9}{16}\right]$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & |x| < 3 \\ 3x - 7, & |x| \geq 3 \end{cases}$;

а) $f(-3) = -16$; $f(2) = 9$, $f(5) = 8$; $f\left(x^2 + 4\right) = 3x^2 + 5$;

б) см.рис.



С-7

1. **а)**да; **б)**нет.

2. $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ – четная; $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ – нечетная;

$\Rightarrow \frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$;

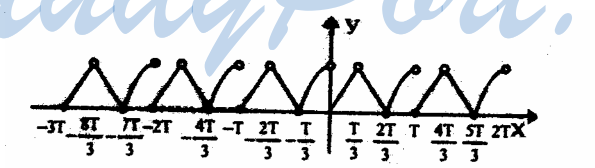
единственность: пусть $f(x)=g_1(x)+\varphi_1(x)=g_2(x)+\varphi_2(x)$;

где $g_i(x)$ - четная, $\varphi_i(x)$ - нечетная $i=1,2 \Rightarrow$;

$g_1(x)-g_2(x)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)$, а это возможно только при $g_1(x)=g_2(x)$ и $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)$.

С-8

1.



2. **а)** $f(x)=|\cos x|+ctg\frac{x}{3}$; $f_1(x)=|\cos x|$, $T_1=\pi$;

$f_2(x)=ctg\frac{x}{3}$, $T_2=3\pi$, значит периуд $f(x):T=3T$.

б) $f(x)\sin\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{9}\right)$; $T=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

3. **а)** $f(x)=\sin\sqrt{|x|}$; Пусть T – период; $\Rightarrow$ $f(x)=f(x+T)$

$\sin\sqrt{|x|}=\sin\sqrt{|x+T|}$, чего очевидно не может быть

(легко видеть при -T<x<0), значит, $f(x)$ не периодична;

б) $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$; $f_1(x)=\cos x$, $T_1=2\pi$

$f_2(x)=\cos\sqrt{2}x$, $T_2=2\sqrt{2}\pi$; не существует $n\in N$ $T_1=2\sqrt{2}\pi n$, значит, $f(x)$ не периодична.

С-9

1. **а)** $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, & x\le 0\\ x^2-2x, & x>0\end{cases}$

$f(x)$ возрастает при $x\in(-2;0)\cup(1;+\infty)$; убывает при $x\in(-\infty;-2]\cup[0;1]$;

б) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; $f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

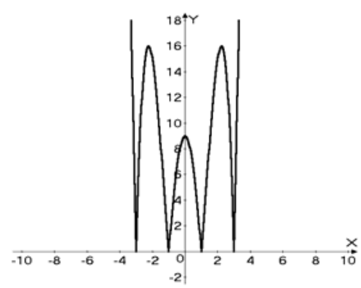
$f(x)$ возрастает при $x\in[-1;1]$; убывает при $x<-1,\ x>1$.

2. **а)** $f(x)=3x$, $g(x)=2x$; **б)** $f(x)=2x$, $g(x)=3x$;
в) $f(x)=4x+|x|$; $g(x)=4x$; **г)** $f(x)=4x+\sin x$; $g(x)=4x$.

3. sin2, cos2, tg2, ctg3; Ответ: sin2, cos2, tg2, ctg3.

С-10

1.
см.рис.
$f(x)=\left|x^4-10x^2+9\right|$;
$x_{min}=\pm 1$
$x_{max}=\pm\sqrt{5}$;
$x_{max}=0$; $x_{min}=\pm 3$.



2. **а)** $f(x)=2\cos|x-1|$; $f(x)=2$ при $|x-1|=2\pi n+2\pi$**;** $x=1\pm 2\pi n$, $n\in N$; $x_{\max}=1\pm 2\pi n$; $x_{\min}=1+\pi+2\pi n$; $x_{\min}=1-\pi+2\pi n$.

б) $f(x)=\sin 3x+\sin 2x-\dfrac{2tgx}{1+tg^2x}=\sin 3x$;

$x_{\max}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$; $x_{\min}=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$.

С-11

см.рис.

$y=x^4-2x^2$;

нули: $x=0,\ x=\pm\sqrt{2}$;

$y'=4x(x^2-1)=0$ при

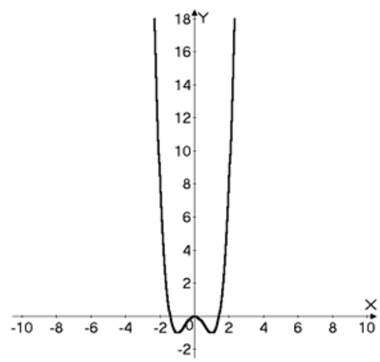
$x_{max}=0$, $x_{min}=\pm 1$

$y(\pm 1)=-1$,

$y(0)=0$

y убывает при $x<-1,\ x\in[0;1]$;

возрастает при $x\in[-1;0]\cup(1;\infty)$



С-12

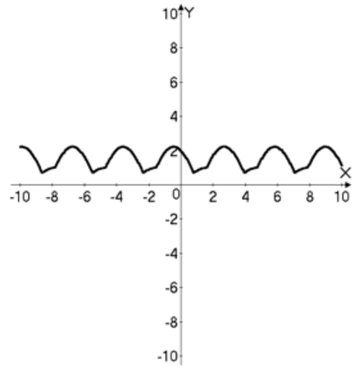
1.

$f(x)=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}+\dfrac{1-tg^2x}{2tgx}=tgx+ctgx=tgx+\dfrac{1}{tgx}$;

ОДЗ: $\begin{cases} tgx\neq\pm 1 \\ tgx\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n \\ x\neq\pi n \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n \end{cases}$, значит, $x\in R$, кроме $\dfrac{\pi}{4}$;

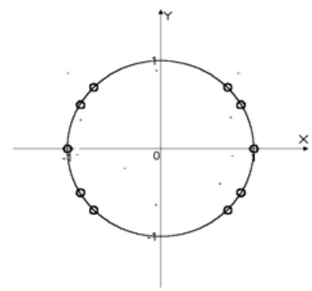
$f(x)\in(-\infty;2]\cup[2;\infty)$.,

2. см.рис



3.

см.рис.



$$\frac{ctg^2 t-5}{ctg^2 t-3}<2$$

ОДЗ: $\begin{cases} ctgt \neq \pm\sqrt{3} \\ \sin t \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} t \neq \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n \\ t \neq \pi n \end{cases}$

$$\frac{-ctg^2 t+1}{ctg^2 t-3}<0;\ \frac{ctg^2 t-1}{ctg^2 t-3}>0;$$

$$t \in \left(-\frac{3\pi}{4}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right).$$

С-13

1) **а)** $\cos(\arcsin(-0{,}96)) = \sqrt{1-0{,}96^2} = 0{,}28$;

б) $\arccos(\cos 10) = 4\pi - 10$.

2) $arctgx + arcctgx = \dfrac{\pi}{2}$; $x = ctg(arcctgx)$.

3) **а)** $\sin(7\arcsin(0{,}1235)) \approx 0{,}7622$;

б) $\cos(4\arccos 0{,}12 + \arcsin 0{,}3375) \approx 0{,}9906$.

С-14

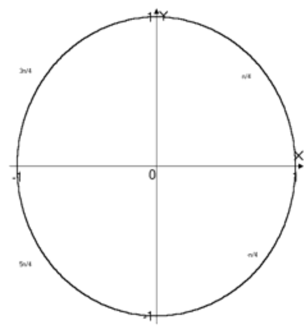
а) $4\sin x\cos x=-\sqrt{3}$; $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$;

б) $\frac{tg5x-tg2x}{1+tg2x\,tg5x}=-1$; $tg3x=-1$; $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$;

в) $\left|\sin\left(9x+\frac{\pi}{7}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $9x=\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi n}{2}$; $x=\frac{3\pi}{252}+\frac{\pi n}{18}$; $x=\frac{\pi}{84}+\frac{\pi n}{18}$.

С-15

см.рис



$tgt\cos 2t\ge 0$;

$t\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$.

С-16

а) $\frac{tg3x-tg\left(x-\frac{2\pi}{7}\right)}{1+tg3x\,tg\left(x-\frac{2\pi}{7}\right)}>\sqrt{3}$; $tg\left(2x+\frac{2\pi}{7}\right)>\sqrt{3}$;

$2x\in\left(\frac{\pi}{21}+\pi n;\frac{3\pi}{14}+\pi n\right)$; $x\in\left(\frac{\pi}{42}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi n}{2}\right)$;

б) $\cos^2 x\le\frac{1}{2}$; $\cos x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $x\in\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$.

С-17

а) $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1=0$;

$2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+1=0$;

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$;

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $\qquad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n-\frac{\pi}{6}$;

б) $\sin 2x-\sin 3x=0$;

$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0$; $x=2\pi n$; $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$.

С-18

а) $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

$\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x$;

$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}\cos x$; $tgx=\frac{3\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$;

$x=arctg\,\frac{3\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\pi n$;

б) $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$

$tg^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3=0 \quad \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

$tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3$; $\quad tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; $x=arctg3-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n$.

С-19

$\begin{cases} \cos x \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = -\sin 2y \end{cases}$; $\begin{cases} \sin(x+y)\cos(x-y) = 0 \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$;

1. $\begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = 1 \\ x + y = \pi n \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + y + \pi k \\ x = \pi n - y \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2} + \dfrac{\pi n}{2} \\ y = \dfrac{\pi n}{2} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi k}{2} \end{cases}$;

2. $\begin{cases} (x-y) = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x + y = \pi n \end{cases}$ тоже самое.

С-20

а) $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}$;

$\sin x \neq 0 \quad x \neq \pi k$; $\sin 8x = \sin x$; $x = \dfrac{2\pi n}{7}$; $n \neq 7L$;

$\sin \dfrac{7x}{2} \cos \dfrac{9x}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi p}{9}$, но $x \neq \pi k$; $p \neq 9z + 4$;

б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$;

$2\sin 3x \cos 2x + 2\sin 3x \cos x + \sin 3x = 0$;

$\sin 3x(2\cos 2x + 2\cos x + 1) = 0$;

$x = \dfrac{\pi n}{3}$; $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$; $x = \pm \arccos\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi n$.

С-21

1) $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $g(x) = \dfrac{2 - x^2}{8}$; $\Delta f(x_0) = \dfrac{2}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{2}{x_0} = -\dfrac{\Delta x}{2 + \Delta x}$;

$\Delta g(x_0) = \dfrac{2 - x^2{}_0 + 2x_0 \Delta x - \Delta x^2}{8} = \dfrac{-2 + 4\Delta x - \Delta x^2}{8}$

$\Delta g(x_0) = \dfrac{2 - (x_0 + \Delta x)^2}{8} - \dfrac{2 - x_0^2}{8} = -\dfrac{4\Delta x + \Delta x^2}{2}$;

$\Delta x = 0{,}1 \quad \Delta f(x_0) \approx -0{,}048$; $\Delta g(x_0) \approx -0{,}051$; $\Delta f(x_0) > \Delta g(x_0)$;
$\Delta x = 0{,}3 \quad \Delta f(x_0) \approx -0{,}13$; $\Delta g(x_0) \approx -0{,}16$; $\Delta f(x_0) > \Delta g(x_0)$.

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$**;**

$\Delta f(x_0) = \Delta x^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + 2\Delta x^2 + 4x_0\Delta x - 5\Delta x$;

$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \Delta x^2 + 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + 2\Delta x + 4x_0 - 5$;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)}{\Delta x} = 3x_0^2 + 4x_0 - 5$.

С-22

1. $m(t) = 2 + t$**;** $x(t) = t^2 - t$**;** $V(t) = 2t - 1$**;** $Vm = 2t^2 + 3t - 2$**;**
$F = 4t + 3$; $F(1) = 7$ Н.

2. **а)** $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$; $f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$**;**

б) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$; $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

С-23

1.

а) (-1;0); (2; $\frac{1}{2}$).

б) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ не существует ; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$; **в)** $y \in (-1;2{,}5)$

2.

$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x+5} - 1} = \sqrt{x+5} + 1$,

$x \neq -4$;

$|f(x) - 2| = \left|\sqrt{x+5} - 1\right| < 0{,}2$;

$x \in (-4{,}36; -3{,}56)$; $\delta = 0{,}36$.

С-24

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-2$ **;**

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+g^2(x)}{4f(x)+3g(x)}=\dfrac{3+4}{12-6}=\dfrac{7}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{-(g(x))}\right)^2+\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{-(g(x))}\right)^2=$

$=\lim\limits_{x\to 2}(2f(x)-2g(x))=6+4=10$.

2. **а)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+4)(x-3)}=\dfrac{1}{7}$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+7}-2}-2x^2\right)=\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{(x+3)(x-3)\left(\sqrt{x+7}+2\right)}{x+3}-2x^2\right)=-42$.

С-25

1. **а)** $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}+x^{101}$; $f'(x)=-\dfrac{3}{4x^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{5}{2x^{\frac{7}{2}}}+101x^{100}$ **;**

б) $g(x)=\left(3x-x^2\right)\sqrt{x^3}$; $g'(x)=(3-2x)\sqrt{x^3}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\left(3x-x^2\right)$.

2. $f(x)=\begin{cases}x^3,\ x\ge 0\\ -x^3,\ x<0\end{cases}=x^2|x|$ **;** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ **.**

С-26

а) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$; $f'(x)=6\left(x^2+x-2\right)=0$;

при $x=-2,\ x=1$;

$f'(x)>0$ при $x<-2,\ x>1$; $f'(x)<0$ при $x\in(-2;1)$;

б) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$ **;** $f'(x)=\dfrac{-2x^2-4x-3+x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$;

$f'(x)=0$ при $x^2+4x+3=0$; $x=-3$, $x=-1$;

$f'(x)>0$ при $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)$;

$f'(x)<0$, $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$.

С-27

1. **а)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2-4}}}$; ОДЗ: $\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ 1-\sqrt{x^2-4}>0\end{cases}$;

$x\in\left(-\sqrt{5};-2\right]\cup\left[2;\sqrt{5}\right)$;

б) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$; ОДЗ: $\begin{cases}x\ge 0\\ x\ge\sqrt{x}\\ x\ge x-\sqrt{x}\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge 0\\ x\le -1,\ x\ge 1\\ x^2\ge x-\sqrt{x}\end{cases}$, значит,

$x\in[1;\infty)\cup\{0\}$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1-x}{-x}=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$;

$f(f(f(x)))=1-1+x=x$; $f(f(f(x)))=\dfrac{1}{1-x}$;

$f_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $n=3p-2$; $f_n(x)=x$, $n=3p$;

$f_n(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $n=3p-1$;

ОДЗ: для $f(x):x\in(-\infty;1)\cup(1;0)$, для $f_n(x):x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$ при $n\ge 2$.

3. **а)** $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+7}$;

$f'(x)=\dfrac{3x^2-3x}{\sqrt{2x^3-3x^2+7}}$;

б) $f(x)=\left(x^2+x\sqrt{7}\right)^7$;

$f'(x)=7\left(2x+\sqrt{7}\right)\left(x^2+x\sqrt{7}\right)^6$.

С-28

а) $f(x)=\cos 3x\cos 2x-\sin 3x\sin 2x=\cos 5x$; $f'(x)=-5\sin 5x$;

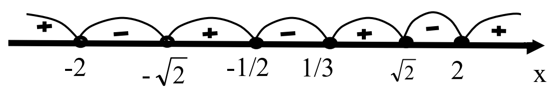
б) $f(x)=\dfrac{1-tg^2(x+1)}{2tg(x+1)}=ctg(2x+2)$; $f'(x)=\dfrac{-2}{\sin^2(2x+2)}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos^4\left(2x^2-3\right)$; $f'(x)=-2\cos^3\left(2x^2-3\right)\sin\left(2x^2-3\right)(4x)$.

С-29

1. $\lim_{x->a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)(x+a)\geq\dfrac{27}{2}$; $a\sqrt{a}\geq\dfrac{27}{8}$; $a\geq\dfrac{9}{4}$.

2. **а)** $\dfrac{6x^2+x-1}{x^4-6x^2+8}\geq 0$; $\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-2)(x+2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}\geq 0$;



$x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt{2};-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3};\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

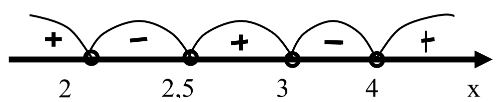
б)

$\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}>\dfrac{3}{x-4}$;

$\dfrac{x^2-7x+12+2x^2-12x+16-3x^2+15x-18}{(x-2)(x-3)(x-4)}>0$;

$\dfrac{-4x+10}{(x-2)(x-3)(x-4)}>0$;

$\dfrac{\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-2)(x-3)(x-4)}<0$;



С-30

1. $y=\sqrt{x}$; $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x=\dfrac{3}{4}$, значит, искомая точка $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ **;** $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **;** $y'=-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ **;**

$y'\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-1$; $y_{kaa}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-x-\dfrac{\pi}{12}$.

С-31

1. $\left(\sqrt{3,99992}-\sqrt{1,00004}\right)^{60}\approx(2-0,00002-1-0,00002)^{60}\approx$

$\approx 1-0,0024=0,9976$.

2. $\cos 33^0\approx 0,8660\cos 3^0-\dfrac{1}{2}\sin 3^0\approx 0,8399.$

С-32

1. $S(t)=-\dfrac{1}{6}t^2+\dfrac{7}{2}t^2-t$ **;** $V(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+7t-1$ **;** $a(t)=-t+7$ **;**

а) $7c$; **б)** $V(7)=-\dfrac{49}{2}+48=\dfrac{47}{2}$ м/с.

2. $S(t)=\dfrac{2}{2t-1}$ **;** $V(t)=\dfrac{-4}{(2t-1)^2}$ **;** $a(t)=\dfrac{16}{(2t-1)^3}$ **;**

$F=\dfrac{16m_0}{(2t-1)^3}=2m_oS^3(t)$.

С-33

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$ при

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$;

$f(x)$ возрастает при $x \in \left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$;

убывает при $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$.

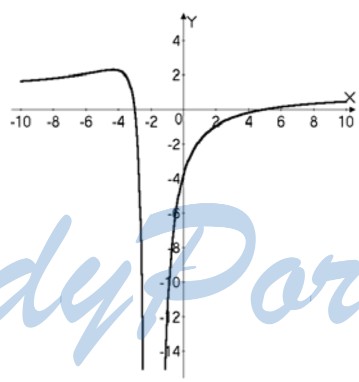
2. $f(x) = 8\sin^2 x + 2\cos 2x + 2 = 6 - 2\cos 2x$;

$f'(x) = 16\sin x - 4\sin 2x$; $f'(x) = 0$

$x_{max} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $x_{min} = \pi n$.

С-34

см.рис.



$f(x) = \dfrac{(x-5)(x+3)}{(x+2)^2}$;

$f'(x) = \dfrac{(x+3)(x+2)^2 + (x-5)(x+2)^2 - 2(x+2)(x+5)(x+3)}{(x+2)^4} =$

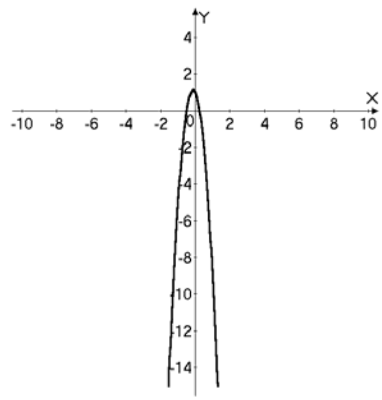
$= \dfrac{x^2 + 5x + 6 + x^2 - 3x - 10 - 2x^2 + 4x + 30}{(x+2)^3} = \dfrac{6x+26}{(x+2)^3}$;

$f(x)$ возрастает при $x < -\frac{13}{3}$, и $x > -2$; убывает при $x \in \left[-\frac{13}{3};-2\right)$

$x_{\max} = -\frac{13}{2}$; $x = -2$ – не принадлежит ОДЗ; $f\left(-\frac{13}{3}\right) = \frac{44}{361}$.

С-35

1.



$h(x) = -8x^2 - 2x + 1$; $x_в = -\frac{1}{8}$;

$h_в = -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + 1 = 1\frac{1}{8}$;

$x \in R$, $h(x) \in \left(-\infty; 1\frac{1}{8}\right]$;

$h(x)$ возрастает при $x \le -\frac{1}{8}$; убывает при $x \ge -\frac{1}{8}$;

Нули: $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$.

2.

$3x^2 - 6x - 1 < 0$;

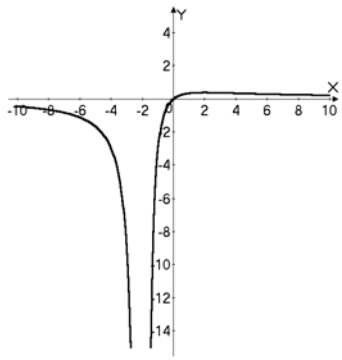
$x \in \left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}; \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3.

$\frac{2}{3}x^2-2x^2+2x-\frac{2}{3}<0$; $x^3-3x^2+3x-1<0$;

$(x-1)(x^2-2x+1)<0$; $(x-1)^3<0$; верно при $x<1$.

С-36



$f(x)=\frac{3x}{x^2+4x+4}=\frac{3x}{(x+2)^2}$;

$f'(x)=\frac{3x^2+12x+12-6x^2-12x}{(x+2)^4}=\frac{-3x^2+12}{(x+2)^4}=\frac{-3(x^2-4)}{(x+2)^3}$;

$f'(x)=0$ при $x_{\max}=2$, $x=-2$ не входит в ОДЗ;

$f(x)$ возрастает при $x\in(-2;2]$; убывает при $x<-2,\ x>2$.

С-37

1.

$f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$; ОДЗ: $x\in[-2;1]$

$f'(x)=\frac{-1-2x}{2\sqrt{2-x-x^2}}$; $x_{\max}=-\frac{1}{2}$;

2.

Пусть больше осн. $=2x$;

$H=\sqrt{400-x^3+20x-100}=\sqrt{300+20x-x^2}$;

$S=(x+10)\sqrt{300+20x-x^2}$;

$S'(x)=\sqrt{300+20x-x^2}+\frac{(x+10)(10-x)}{\sqrt{300+20x-x^2}}=0$;

$300+20x-x^2-x^2+100=0$; $x^2-10x-200=0$;

$x=0$ -не подходит $\Rightarrow$ $x=40$ см.

С-38

1.

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$; $0<\alpha<\pi$, $\alpha\in I$ четверти;

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $0<\gamma<\pi$, $\gamma\in I$ четверти;

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$; $\sin\gamma=\frac{4}{5}$, $\cos\gamma=\frac{3}{5}$;

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-$

$-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{3}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{3}{5}-$

$-\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\frac{4}{5}\frac{4}{5}=-\frac{16}{25}\left(\frac{9}{5}\right)+\frac{27}{125}=-\frac{117}{125}$.

2.

$\frac{\sin^2 4\alpha}{2\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=2\sin\alpha\sin2\alpha$;

$\frac{\sin^2 4\alpha}{2\cos2\alpha(\cos\alpha+\cos3\alpha)}=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2 2\alpha}{4\cos^2 2\alpha\cos\alpha}=2\sin\alpha\sin2\alpha$.

3.

а) $\frac{tg23^0-tg8^0}{1+tg8^0 tg23^0}=tg15^0=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$;

$\sin15^0=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;

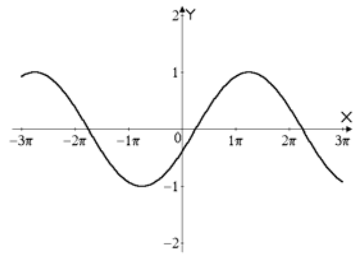
$\cos15^0=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

С-39

а)

см.рис.

$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$, $x\in R$,



$y\in[-1;1]$

$T=4\pi$

возрастает:

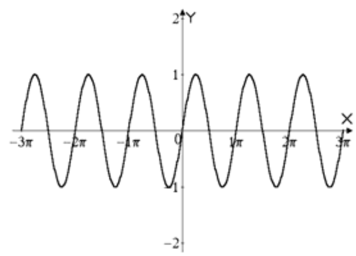
$\left[-\frac{3\pi}{8}+4\pi n;\frac{5\pi}{8}+4\pi n\right]$

убывает: $x\in\left[\frac{5\pi}{8}+4\pi n;\frac{13\pi}{8}+4\pi n\right]$

max $(\pi+4\pi n;1)$; min $(-\pi+4\pi n;1)$

б) $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$, $x\in R$, $y\in[-1;1]$; $T=\frac{1}{\pi}$

см.рис.



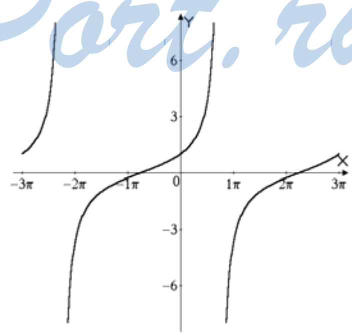
возрастает: $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$,

max : $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;1\right)$

убывает: $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$,

min : $\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n;1\right)$

в) $y=tg\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$;



$\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$; $x\neq\frac{3\pi}{4}+3\pi n$,

$y\in R$

см.рис.

возрастает на R

нули: $x=-\frac{3\pi}{4}+3\pi n$

С-40

1.

а) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right)=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25}$

б) $arctg\sqrt{5}+arctg\frac{1}{\sqrt{5}}=arctg\sqrt{5}+arcctg\sqrt{5}=\frac{\pi}{2}$

2.

а) $\cos x\cos 2x\cos 4x=1$

$\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 4x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\quad x=2\pi n;$ $\qquad\begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 4x=-1\\ \cos 2x=1\end{cases}\quad \varnothing;$

$\begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 4x=1\\ \cos 2x=-1\end{cases}\quad \varnothing;$ $\qquad\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 4x=1\\ \cos 2x=-1\end{cases}\quad \varnothing;$

б) $8\cos^6 x=3\cos 4x+\cos 2x+4;$

$1-\cos^3 2x+3\cos^2 2x-3\cos 2x=6\cos^2 2x+\cos 2x+1;$

$\cos 2x\left(+\cos^2 2x+3\cos 2x+4\right)=0;$

$Д<0;$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$

3.

а) $\cos x<\sin x;\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0;$

$x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\sqrt{\pi}}{4}+\pi n\right)$

б) $\cos x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$

$x\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$

С-42

1.

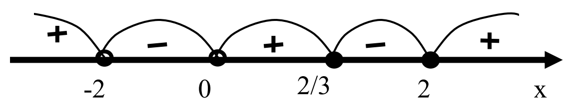
а) $x^2 - 8|x| + 12 \le 0$; $|x| \in [2;6]$; $x \in [-6;-2] \cup [2;6]$

б) $1 + \frac{15}{x^2} > \frac{8}{x}$ ОДЗ: $x \ne 0$; $x^2 - 8x + 15 > 0$; $x \in (-\infty;3) \cup (5;+\infty)$

2.

а) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} \le \frac{2}{x+2}$; $\frac{x^2 + 2x + x^2 - 4 - 2x^2 + 4x}{x(x-2)(x+2)} \le 0$

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{x(x-2)(x+2)} \le 0$$



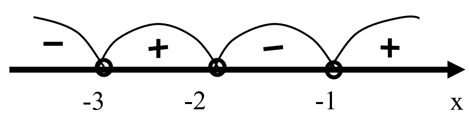
$x \in (-2;0) \cup \left[\frac{2}{3};2\right]$

б) $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} < 1$;

$$\frac{(x^2 - 3x + 2)(x-3) - (x^2 + 3x + 2)(x+3)}{(x^2 + 3x + 2)(x+3)} < 0;$$

$$\frac{-6x^2 - 6x^2 - 6}{(x+1)(x+2)(x+1)} < 0;$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0;$$



$x \in (-3;-2) \cup (-1;+\infty)$

С-43

1. **а)** $y=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$; $y'=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}$

б) $y=\frac{2\sqrt{x}}{1-x^2}$; $y'=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)-x+4x\sqrt{x}}{\left(1-x^2\right)^4}$

в) $y=\left(-2+x^2\right)\sin x+2x\cos x$

$y'=2x\sin x+\left(x^2-2\right)\cos x+2\cos x-2x\sin x=x^2\cos x$

г) $y=\left(x^4-x^3\right)^{42}$; $y'=42\left(4x^3-3x^2\right)\left(x^4-x^3\right)^{41}$

2. $f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=x-x^3$; $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$; $g'(x)=1-3x^2$

$f'(x)-g'(x)=-\frac{2}{x^2}-1+3x^2\le 0$

ОДЗ: $x\ne 0$; $3x^4-x^2-2\le 0$; $Д$=1+24=25; $x^2\in(0;1]$

$x\in[-1;0)\cup(0;1]$

С-44

1. $f(x)=x^2-2x+2$; $f'(x)=2x-2$

$y_{час}=x_0^2-2x_0+2+(2x_0-2)(x-x_0)$

$1=x_0-2x_0+2-2(x_0-1)(x_0+1)$

$1=-x_0^2-2x_0+4$; $x_0^2+2x_0-3=0$

$Д/4=4$

$x_0=-3$, $x_0=1$; $y=1$, $y=-8x-7$

2.

а) $\left(\sqrt{16{,}000032}-\sqrt{8{,}999982}\right)^{200}\approx(4+0{,}000004-3+0{,}000003)^{200}\approx$

$\approx 1+0{,}000007\cdot 200=1{,}0014$

б) $tg48^0=\frac{1+tg3^0}{1-tg3^0}\approx 1{,}1047$

3.

$$S(t)=\frac{2t}{t^2+1};\ V(t)=\frac{2t^2+2-4t^2}{(t^2+1)^2}=\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2};\ V_0=2$$

$$V(t)=\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}=1;\ 2-2t^2=(t^2+1)^2;\ t^2+4t-1=0$$

$$Д/4=5$$

$$t^2=-2+\sqrt{5};\ t=\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$a(t)=\frac{-4t(t^2+1)^2+4(t^2+1)(t^2-1)}{(t^2+1)^4}=$$

$$=\frac{4t^2-4-4t^3-4t}{(t^2+1)^3}=\frac{-4(t^3-t^2+t+1)}{(t^3+1)^3}$$

$$F=\frac{8\left((\sqrt{5}-2)\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}-1\right)+\sqrt{\sqrt{5}-2}+1\right)}{-(\sqrt{5}-1)^3}$$

С-45

1) 3 корня

2) Пусть *а*- бок.стор, *в*- осн. $H=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$

$$\begin{cases}2a+b=2p\\ S=\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}\end{cases};\ S=\frac{1}{2}b\sqrt{p^2+\frac{b^2}{4}-pb-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}b\sqrt{p^2-pb}$$

$$S'(b)=\frac{1}{2}\sqrt{p^2-pb}+\frac{-bp}{4\sqrt{p^2-pb}}=0;\ 2p^2-2pb=bp$$

$b=\frac{2p}{3}$; $a=p-\frac{p}{3}=\frac{2p}{3}\Rightarrow$ треугольник правильный

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА № 1 В1

1. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha$ – ордината угла α на единичной окр.

$\cos\alpha$ – абсцисса угла α на единичной окр.

$\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$; $\sin\left(-630^0\right) = \sin 90^0 = 1$; $\cos\left(-630^0\right) = 0$

2. $L = 2\pi r = 10\pi$; $\qquad \overset{\smile}{AB} = \frac{10\pi}{22} = \frac{5\pi}{11}$

3. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 2 = 2 - 2 = 0$

5. $1 - \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha}$; $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

6. $\cos 350^0 \sin\frac{5\pi}{4} < 0$

7. $y = x^3$; $y = \sin x$; $y = tgx$

8. $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{3}{4}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

9. $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, $\sin 2\alpha = 0$

10. $\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

В-2

1. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $ctg\alpha = \frac{4}{3}$

$tg\alpha$ – отношение ординаты точки к ее абсциссе

$ctg\alpha$ – отношение абсциссы точки к ее ординате

$ctg\frac{\pi}{4} = tg\frac{\pi}{4} = 1$; $ctg\left(-450^0\right) = 0$; $tg540^0 = 0$

2. $S = \pi r^2 = 7\pi$; $S = \frac{7\pi}{2\pi}\cdot 0{,}7 = 2{,}45$

3. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $tg\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + \sin\alpha\cos\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{5}{2}\sin 2\alpha$

5. $\frac{1}{1 + ctg^2\alpha} + \cos 2\alpha = \left(1 + tg^2\alpha\right)\cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin\alpha = 1$

6. $\sin\frac{7\pi}{3}ctg250^0 > 0$

7. $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = ctgx$

8. $ctg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\alpha = 2{,}7$

9.

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in IV ч.$; $\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - 4/5}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

10. $(\cos 2\beta + \cos 2\alpha) = 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}$

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА № 2 В-1

1. $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in R$

ф-ция – зависимость y от x, где каждому x ставится в соответствие единственное значение y.

обл. опр. ф-ции – мн-во значений которое может принимать x.

обл. зн. ф-ции – мн-во значений которое может принимать y.

2. $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

возрастает $x \geq 1$, убывает $x \leq 1$

функция наз. возраст. на мн-ве P, если для $\forall$ x, $x_2 \in P$, $x_1 > x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$

3. **а)** $f(x) = \cos 2x$; $f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$

б) $f(x) = \sin^2 x$; $f(-x) = \sin^2(-x) = \sin^2 x = f(x)$

в) $f(x) = 2x^4 - 3x^2$; $f(-x) = 2(-x^4) - 3(-x^4) = 2x^4 - 3x^2 = f(x)$

4.

$f(x) = x^3 + x$

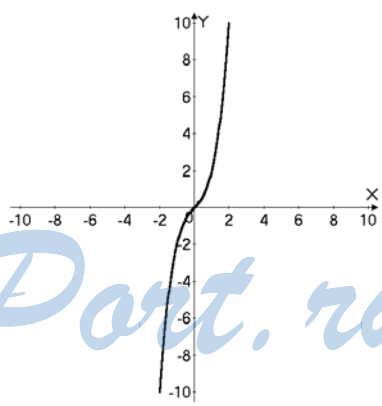
см.рис.

$f(x) = 0$, $x = 0$ – нули

$x \in R$, $y \in R$, из рис. видно, что ф-ция возрастает на R.

Схема:

1) Обл. опр., обл. зн
2) Нули
3) Промежуток возрастания (убывания)
4) Экстремумы (из них выбрать max и min ф-ции)



5. $\sin 2$, $\sin 4$, $\sin 6$

Ответ: $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 2$

6. **а)** $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{7}\right)$; $T = \frac{2\pi}{3}$

б) $f(x) = tg^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = ctg^2 x$; $T = \pi$

7. **а)** $tg\sqrt{2} + tg\left(-\sqrt{2}\right) = 0$

б) $tg\,\frac{22\pi}{7}\,ctg\,\frac{36\pi}{7} = tg\,\frac{22\pi}{7}\,ctg\,\frac{36\pi}{7} = 1$

$tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$; $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha$; $tg(\alpha + 2\pi) = tg\alpha$

8. $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

арккосинусом числа a наз. такое число $\in [0;\pi]$ cos, которого равен a

$arccos\,a$, определен при $a \in [-1;1]$

9. **а)** $tg\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$; $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$

б) $2\cos\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 1$; $\frac{x}{2} + 1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} - 2 + 4\pi n$

$\sin x = a$, $|a| \le 1$; $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$

10. **а)** $tg2x > 1$; $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$

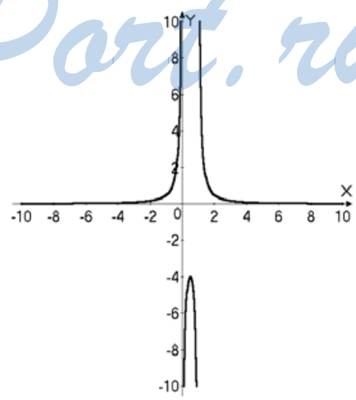
б) $\sin x \le -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

11. $\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \sin(x-y) = 1 \end{cases}$ **;** $\begin{cases} x + y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ **;** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n + \pi k \\ y = \pm\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n - \pi k \end{cases}$

В-2

1) см.рис.

График ф-ции – мн-во точек на п-ти удовлетворяющих какому-либо ур-ю



2) допустим, что $f(x) = a$ имеет 2 корня., тогда $f(x_1) = f(x_2) = a$,что не подходит под опр. возрастающей (убывающей) ф-ции.

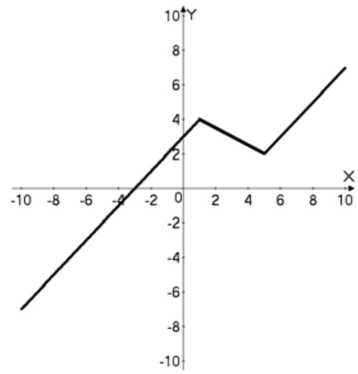
3. **а)** $f(x)=\sin\frac{x}{3}$; $f(-x)=\sin\frac{-x}{3}=-\sin\frac{x}{3}=-f(x)$

б) $f(x)=x^2 tgx$; $f(-x)=(-x)^2 tg(-x)=-x^2 tgx=-f(x)$

в) $f(x)=x^7-5x^3$; $f(-x)=(-x)^7-5(-x)^3=5x^3-x^7=-f(x)$

4.

См.рис.



Ф-ия ни четная ни нечетная, т.к. промежуток убывания не делится прямой x=0 пополам и экстремум ф-ции не находится на этой прямой.

5. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$; max $:\left(-\frac{\pi}{10}+\pi n;1\right)$; min $:\left(\frac{4\pi}{10}+\pi n;-1\right)$

$y=cos\,\alpha$, возрастает: $[-\pi+2\pi n;2\pi n]$; убывает: $[2\pi n;2\pi n+\pi]$

$x_1=2\pi n-\max$, $f(x_1)=1$; $x_2=\pi+2\pi n-\min$, $f(x_2)=-1$

6. **а)** $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, $T=4\pi$; **б)** $f(x)=\sin^2 x+tgx$

$f_1(x)=\sin^2 x$, $T_1=\pi$; $f_2(x)=tgx$, $T_2=\pi\Rightarrow T=\pi$

ф-ция наз. периодической] $f(x)=f(x+T)$,

где T -период, для $\forall x$.

7. $arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$; $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

$arctga$, определен при $\forall$ a, $arctga\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

8. **а)** да ; **б)** нет, т.к. $\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

arcsin a - такое число $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *sin* которого равен *а*, $|a| \le 1$

9. **а)** $4\sin\left(\frac{x}{2} - 2\right) = 2$ **;** $\frac{x}{2} - 2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ **;** $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k + 4$

б) $tg^3 3x = 3$; $tg3x = \pm\sqrt{3}$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$; $\cos x = a$, $|a| \le 1$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n$

10. **а)** $\cos x > \frac{1}{2}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$

б) $tg2x \le 1$; $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right]$

11. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2} \end{cases}$ **;** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \sin y + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$ **;** $\begin{cases} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} - y \end{cases}$

$y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n$

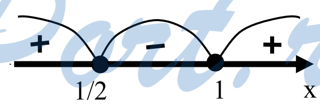
ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА № 3 В-1

1.

а) $2x^2 - 3x + 1 \ge 0$

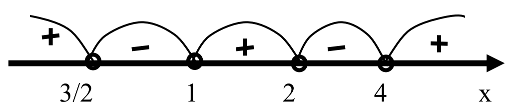
Д=9-8=1

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$



б) $\frac{(x-1)(2x+3)}{(x^2 - 6x + 8)} < 0$; $\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-2)(x-4)} < 0$

$x \in \left(-\frac{3}{2}; 1\right) \cup (2; 4)$



2. $y=\frac{1}{x}$; $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$; $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y'\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$

$y_k=-2-4\left(x+\frac{1}{2}\right)=-4x-4$

3. $y=3x^3-4{,}5x^2$; $y'=9x^2-9x$; $y=\cos\frac{x}{2}-\sin 2x$

$y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-2\cos 2x$

4)

скорость в точке x_0

$x(t)=3x^4-2t^3+1$

а) $V(t)=12t^3-6t^2$; $a(t)=36t^2-12t$

б) $V(2)=72$; $a(2)=120$

5.

$g(x)=x\sqrt{x+1}$; $g'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

$g'(3)=2+\frac{3}{4}=2{,}75$; $(g(x)f(x))'=g'(x)f(x)+g(x)f'(x)$

6.

$\sqrt{\sqrt{17}}\approx\left(2\left(1+0{,}0625\cdot\frac{1}{4}\right)\right)\approx 2{,}03$

7.

$f(x)=x-2\sqrt{x}$; $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

$x=1$

убывает: $x\in[0;1]$; возрастает: $x\geq 1$

8.

$y=x^3-\frac{x}{3}$; $y'=3x^2-\frac{1}{3}=0$; $x=\pm\frac{1}{3}$;

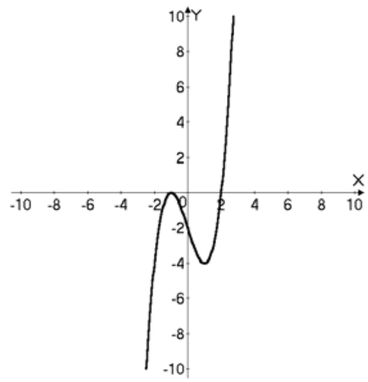
$y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{1}{9}=-\frac{2}{27}$; $y\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}$;

$\max: x=-\frac{1}{3}$; $\min: x=\frac{1}{3}$.

9.

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

см.рис.



$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 0$; $x = \pm 1$

возрастает: $x \le 1$, $x \ge 1$; убывает: $x \in [-1;1]$

$x = -1$: max; $f(-1) = 0$; $f(1) = \min = -4$

10.

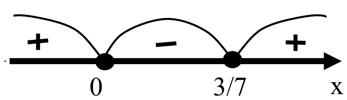
$f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x \in [1;3]$; $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0$, $x = \pm 2$

$f(2) = 2 + 2 = 4$; $f(1) = 5$, $f(3) = 4\frac{1}{3}$

max: $f(1) = 5$; min: $f(2) = 4$

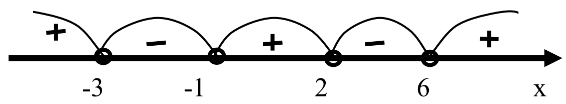
В-2

1. **а)** $3x - 7x^2 \le 0$; $x(7x - 3) \ge 0$



$x \in (-\infty;0] \cup \left[\frac{3}{7};+\infty\right)$

б) $\frac{x^2-5x-6}{(x-2)(x+3)}>0$; $\frac{(x-6)(x+1)}{(x-2)(x+3)}>0$



$x\in(-\infty;-3)\cup(-1;2)\cup(6;+\infty)$

2.

$y=2x^2-1$; $y(3)=17$; $y'=4x$; $y'(3)=12$

$y_k=17+12(x-3)=12x-19$

3.

$y=2{,}5x^2-x^5$; $y'=5x-5x^4$; $y=tg2x-2ctg\frac{x}{2}$;

$y'=\frac{2}{\cos^2 2x}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$;

геометрич. смысл производной в т. x_0 -*tg* угла наклона касательной.

4.

$\omega(t)=2t^4-t$; а) $\omega'(t)=8t^3-1$; б) $\omega'(2)=63$

$\omega(t)=0$, при $t=\frac{1}{2}$

5.

$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

а) $f'(x)=\frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{x^2}=\frac{-x+2}{2x^2\sqrt{x-1}}$; б) $f'(2)=0$

6.

$f(x)=(2x^3-1)^{100}$; $f'(x)=600x^2(2x^3-1)^{99}$

$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

7.

$y=x^3+x$; $y'=3x^2+1>0\Rightarrow$ возрастает на R

8.

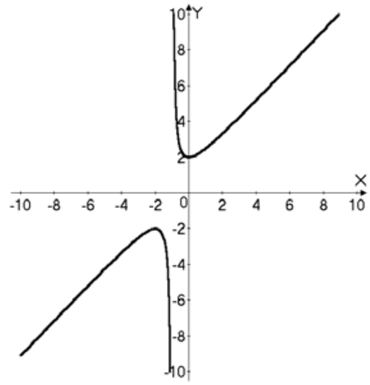
$g(x)=\sqrt{x}-x$; $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1=0$

$x=\dfrac{1}{4}$; $x=\dfrac{1}{4}$ -max $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

9.

$y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$;

см.рис.



$y=x+1+\dfrac{1}{x+1}$; $y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$; $x=0$ $x=-2$;

возрастает: $x\le -2$, $x\ge 0$; убывает: $x\in[-2;0]$, $x\ne -1$;

$x_{\max}=-2$, $x_{\min}=0$.

10.

$\begin{cases}12=a+b\\ y=a^2+b^2\end{cases}$; $\begin{cases}a=12-b\\ y=2b^2-24b+144\end{cases}$; $y'(x)=4b-24=0$;

$в=6$

$a=6 \Rightarrow$ сумма квадратов *max*

$в=0$

$a=12 \Rightarrow$ сумма квадратов *min*

Примерные контрольные работы

КР № 1. В 1.

1. **а)** $\sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$; б). $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

   в) $ctg(-\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}.$

2. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

   а) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$;

   б) $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = -\frac{4}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{10} = -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}.$

3. $\frac{2\sin^2\alpha \cdot ctg\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = tg2\alpha.$; $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg2\alpha.$

4. $\sin x + \cos x = m$; $\sqrt{2}(\sin(x + \frac{\pi}{4})) = m$;

   $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$ $x = (-1)^k \arcsin\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi k.$

   $2x = (-1)^k 2\arcsin\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

   $\sin 2x = \sin(2\arcsin\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}) = -\cos(2\arcsin\frac{m}{\sqrt{2}}) =$

   $= 2\cdot\frac{m^2}{2} - 1 = m^2 - 1.$

КР № 1. В 2.

1. **а)** $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$; **б)** $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

   в) $tg(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}.$

2. $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

а). $\sin\alpha = \frac{8}{17}$;

б). $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = -\frac{15\sqrt{3}}{34} + \frac{8}{34} = \frac{8-15\sqrt{3}}{34}$.

3. $\frac{2\cos^2\alpha \cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = -tg2\alpha$; $\frac{\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha} = -tg2\alpha$.

4. $\sin x - \cos x = n$; $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{n}{\sqrt{2}}$; $n \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;

$1 - 2\sin x \cdot \cos x = n^2$; $\sin 2x = 1 - n^2$.

КР № 1. В 3.

1. **а)** $tg300° = -tg60° = -\sqrt{3}$;

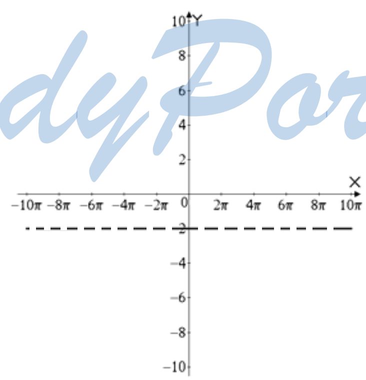
б) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **в)** $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

а) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $tg\alpha = -\frac{4}{3}$; **б)** $tg(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} = -\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{1} = -7$.

3. $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} = tg\alpha$; $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha} = tg\alpha$.

4. $x \neq \frac{\pi n}{2}$.



КР № 1. В 4.

1. **а)** $ctg300° = -ctg60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; **б)** $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

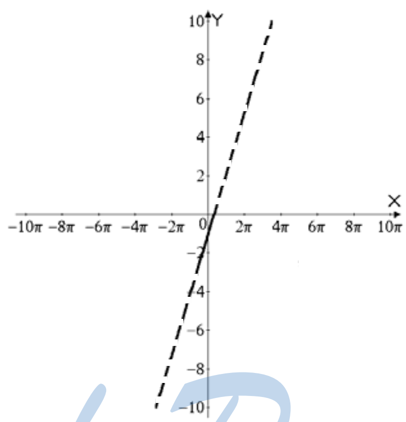
в) $\sin(-\frac{7\pi}{6}) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

а) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $tg\alpha = \frac{4}{3}$. **б)** $tg(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} = -\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{1} = -7$.

3. $\frac{\cos\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha + \sin\alpha} = tg2\alpha$; $\frac{\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha} = tg2\alpha$.

4. $x \neq \frac{\pi n}{2}$.



КР № 2. В 1.

1. $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2 - 9}$; ОДЗ: $x \geq -2.$ $x \neq \pm 3.$ $x \in [-2;3) \cup (3;+\infty)$.

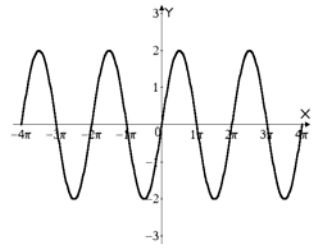
2. $sin(-750°) + ctg945° = -sin30° + ctg45° = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

3. $f(x) = 2x^5 + 4tgx$;

$f(-x) = 2(-x)^5 + 4tg(-x) = -2x^5 - 4tgx = -f(x)$.

4.

$y = 2\sin x. \quad x \in R; \quad y \in [-2;2].$



y возрастает на

$x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi]$;

max: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi; \quad 2)$;

y убывает на $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi; \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi]$;

min: $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi; \quad -2)$.

5. $y = \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{5-x}}{\cos x}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$; $x \in [0;\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2};5]$.

КР № 2. В 2.

1. $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2 - 4}$ ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}. \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$ $x \in [-\frac{1}{2};2) \cup (2;+\infty)$.

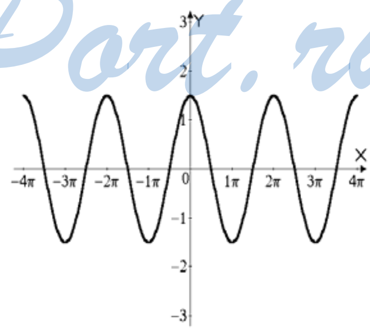
2. $\cos 1140° + tg(-495°) = \cos 360° - tg135° = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

3. $f(x) = \frac{3x^2}{\sin x}$; $f(-x) = \frac{3(-x)^2}{\sin(-x)} = \frac{-3x^2}{\sin x} = -f(x)$.

4.

$y = 1{,}5\cos x \quad x \in R$

$y \in [-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]$.



нули: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

y возрастает на $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$.

убывает на $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$.

max: $(2\pi n;\frac{3}{2})$ min: $(\pi + 2\pi n;-1)$.

5. $y = \dfrac{3\sqrt{-x} + 2\sqrt{x+4}}{\sin x}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \le 0 \\ x \ge -4 \\ \sin x \ne 0 \end{cases}$; $x \in [-4;-\pi) \cup (-\pi;0)$.

КР № 2. В 3.

1. $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 2x}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \le 1 \\ x \ne 0 \\ x \ne 2 \end{cases}$ $x \in (-\infty;0) \cup (0;1]$.

2. $\sin(-660°) + \cos 810° = \sin 60° + \cos(-90°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $h(x) = 3x^4 tgx \quad h(-x) = 3(-x)^4 tg(-x) = -3x^4 tgx = -h(x)$.

4.

$y = \sin\dfrac{1}{2}x \quad x \in R$; $y \in [-1;1]$.

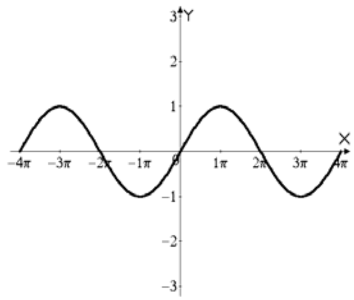
нули: $x = 2\pi n$;

возрастает: $x \in [-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n]$.

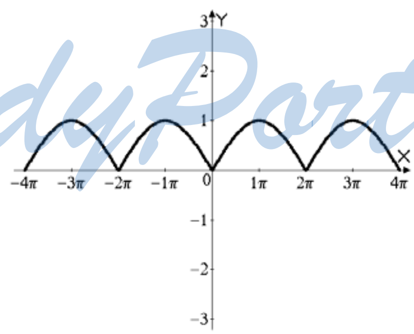
убывает: $x \in [\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n]$

max: $(\pi + 4\pi n; 1)$;

min: $(-\pi + 4\pi n; -1)$.



5.



$y = \left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ возрастает на $x \in [\pi n; \dfrac{1}{2}\pi + \pi n]$.

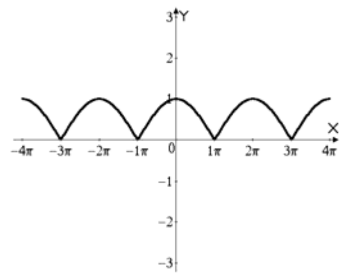
КР № 2. В 4.

1. $y=\dfrac{\sqrt{-x-1}}{x^2+3x}$ ОДЗ: $\begin{cases} x\le -1 \\ x\ne 0 \\ x\ne -3 \end{cases}$; $x\le -1$, $x\ne -3$; $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-1]$.

2. $\cos 840^\circ + tg(-585^\circ) = \cos 120^\circ + tg135^\circ = -\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$.

3. $\varphi(x)=\dfrac{5x^3}{\sin x}$ $\varphi(-x)=\dfrac{5(-x)^3}{\sin(-x)}=\dfrac{5x^3}{\sin x}=\varphi(x)$.

4.



$y=\cos\dfrac{x}{2}=0$ $x=\pi+2\pi n$ нули.

y возрастает на $[-2\pi+4\pi n;\quad 4\pi n]$

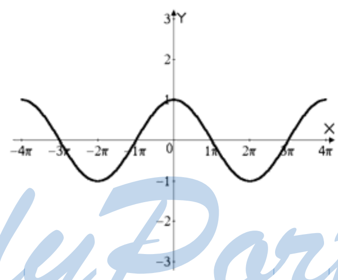
max: $(4\pi n;1)$.

y убывает на $[4\pi n;\quad 2\pi+4\pi n]$

min: $(2\pi+4\pi n;\quad -1)$.

$x\in R$. $y\in[-1;\quad 1]$.

5.



убывает на $[0;\quad \pi]\cup[2\pi;\quad 3\pi]$.

КР № 3. В 1.

1. **а)** $\sin x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$;

б) $2\cos^2 x-\cos x-1=0$; $\cos x=1$; $x=2\pi n$;

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$; $x=\pm 2\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$.

в). $\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=0.$; $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=-1$;

$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$;

2. $\sin x\ge-\frac{1}{2}$; $x\in[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\quad \frac{7\pi}{6}+2\pi n]$.

3. $\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x+\sin y=-\sqrt{2}.\end{cases}$; $\begin{cases} x=\pi-y \\ \sin y=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$; $\begin{cases} y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi n. \\ x=\pi-(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}-\pi n.\end{cases}$

4. $|2\sin x-1|\le 1$; $\begin{cases}\sin x\le 1\\ \sin x\ge 0.\end{cases}$; $x\in[2\pi n;\quad \pi+2\pi n]$.

КР № 3. В 2.

1. **а)** $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi n$;

б) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$;

$\sin x=1 \qquad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

$\sin x=-\frac{1}{2} \quad x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$.

в) $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=0$; $\qquad \cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

$\cos x\ne 0$; $\qquad tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\qquad x=\frac{\pi}{6}+\pi k.$

2. $\cos x\le-\frac{1}{2}$; $x\in[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\quad \frac{4\pi}{3}+2\pi n]$.

3. $\begin{cases} x+y=\pi \\ \cos x-\cos y=\sqrt{2}.\end{cases}$; $\begin{cases} x=\pi-y. \\ \cos y=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$; $y=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n.$

4. $|2\cos x+1|\le 1$; $\begin{cases}\cos x\le 0\\ \cos x\ge -1.\end{cases}$; $x\in[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n]$.

КР № 3. В 3.

1. **а).** $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k.$

б) $2\sin^2 x = \cos x + 1;$ $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0;$

$\cos x = -1.$ $x = \pi + 2\pi n.;$ $\cos x = \frac{1}{2},$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$

в) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x$ $\cos x \neq 0;$

$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0.$ $tgx = 3$ $x = arctg3 + \pi k.$

$tgx = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$

2. $tgx \geq -1$ $x \in [-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n).$

3. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y = -\sqrt{2}. \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y. \\ \sin(y + \frac{\pi}{4}) = -1. \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n. \\ x = \frac{5\pi}{4} - 2\pi n. \end{cases}$

4. $2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0.$ $\sin x \in [-1; \frac{1}{2}].$

$x \in [-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n].$

КР № 3. В 4.

1. **а)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k.$

б) $2\cos^2 x - 1 = \sin x;$ $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\sin x = -1;$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$ $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$

в) $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2\cos^2 x,$ $\cos x \neq 0.$

$tg^2 x + tgx - 2 = 0$ $tgx = -2$ $x = -arctg^2 + \pi k.$

$tgx = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$

2. $tgx \leq \sqrt{3}.$ $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n].$

3. $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}. \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2}. \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y. \\ \sin y + \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$; $\begin{cases} \sin(y + \frac{\pi}{4}) = 1. \\ x = \frac{\pi}{2} + y. \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n. \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n. \end{cases}$$

4. $2\cos^2 x - \cos x - 1 \le 0 \qquad \cos x \in [-\frac{1}{2}; 1].$

$x \in [-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n].$

КР № 4. В 1.

1. $y = x^2 \quad \Delta y = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x.$

$x_0 = 1 \quad \Delta x = 0{,}6 \qquad \Delta y = 0{,}36 + 1{,}2 = 1{,}56.$

2. **а)** $f(x) > \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \quad f'(x) = x^2 + 2x + 2.$

б) $\varphi(x) = \frac{2}{x^3} - x \qquad \varphi'(x) = -\frac{6}{x^4} - 1$

в) $g(x) = 4\sin x \quad g'(x) = 4\cos x \quad g'(-\frac{2\pi}{3}) = -2.$

г) $h(x) = \frac{2-3x}{x+2} \quad h'(x) = \frac{-8}{(x+2)^2} \quad h'(-1) = -8.$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$; $f'(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = \sqrt{x} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2\sqrt{x}(x^2 - 4) = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm 2$, но т.к.

$x > 0 \Rightarrow x = 2.$

4. $f(x) = -0{,}5x|x|$ Да $f'(0) = 0.$

КР № 4. В 2.

1. $y = \frac{1}{2}x^2 \quad \Delta y = \Delta x x_0 + (\Delta x^2)\frac{1}{2} \quad x_0 = 1 \quad \Delta x = 0{,}8$.; $\Delta y = 0{,}8 + 0{,}32 = 1{,}12$.

2. **а)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x \quad f'(x) = -2x^2 + 4x - 1.$

б) $f(x) = \frac{4}{x^2} + x \quad f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1.$

в) g(x)=3cosx $g'(x)=-3\sin x$ $g'(-\frac{5}{6}n)=\frac{3}{2}$.

г) $f(x)=\frac{3+2x}{x-2}$; $h'(x)=\frac{-7}{(x-2)^2}$; $h'(1)=-7$.

3. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-18x$; $f'(x)=2x^2-18$; $g(x)=2\sqrt{x}$; $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

$\frac{f'(x)}{g'(x)}=2\sqrt{x}(x^2-9)$ $x=0$; $x=\pm3$, но $x>0 \Rightarrow x=3$.

4. $f(x)=2x|x|$, да, $f'(0)=0$.

КР № 4. В 3.

1. $y=x^3$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$; $f(x_0+\Delta x)=8$.; $\begin{cases}8=2к+в.\\ \frac{1}{8}=\frac{1}{2}к+в.\end{cases}$; $\frac{3}{2}к=6\frac{3}{8}$. к=5,25.

2. **а)** $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-7x$; $f'(x)=2x^2-2x-7$.

б) $\varphi(x)=\frac{1}{2x^3}+7$; $\varphi'(x)=-\frac{1}{2x^4}$.

в) $g(x)=2\mathrm{tg}x$; $g'(x)=2/\cos^2 x$; $g'(-\frac{3n}{4})=4$.

г) $h(x)=\frac{4x+1}{x+3}$; $h'(x)=\frac{11}{(x+3)^2}$; $h'(-2)=11$.

3. $f(x)=x^3-6x^2$; $f'(x)=3(x^2-4x)$; $g(x)=\frac{5x}{3}$; $g'(x)=\frac{1}{6\sqrt{x}}$.

$f'(x)g'(x)=\frac{x^2-4x}{2\sqrt{x}}=0$; $x=0$ и $x=4$, но $x>0 \Rightarrow x=4$.

4. $f(x)=x^2+1$; $f(g(x))=g^2(x)+1=x$; $g(x)=\sqrt{x-1}$.

КР № 4. В 4.

1. $y=\frac{1}{2}x^3$; $y(0,6)=0,108$; $y(2)=4$.

$\begin{cases}4=2к+в\\ 0,108=0,6к+в\end{cases}$; $1,4k=3,892$. $k=2,78$.

2. а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 2x$. $f'(x) = -x^2 + 8x + 2$.

б) $\varphi(x) = \frac{2}{x^2} - 10$ $\varphi'(x) = -\frac{4}{x^3}$.

в) g(x)=4 ctgx $g'(x) = -\frac{4}{\sin^2 x}$; $\varphi'(-\frac{2n}{3}) = -\frac{16}{3}$.

г) $h(x) = \frac{3x+4}{x-3}$; $h'(x) = \frac{-13}{(x-3)^2}$; $h'(4) = -13$.

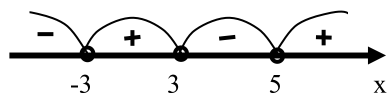
3. $f(x) = x^3 - 3x^2$; $f'(x) = 3(x^2 - 2x)$; $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}$; $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

$f'(x)g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = 0$; x=0 и x=2, но x>0 $\Rightarrow$ x=2.

4. $f(x) = x^2 - 2$; $g(x^2 - 2) = x$; $g(x) = \sqrt{x+2}$.

КР. № 5. В1.

1. $\frac{x^2 - 9}{x - 5} < 0$;

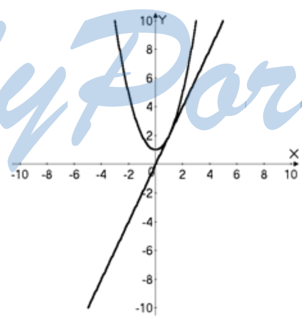


$x \in (-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

2. $x(t) = t^2 + 5$; $v(t) = 2t$; $v(3) = 6$.

3. $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$; $f'(x) = \frac{1}{x^2}$;

$f'(1) = 1$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

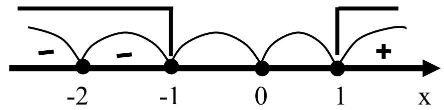


4. $f(x) = x^2 + 1$; $f(1) = 2$; $f'(x) = 2x$; $f'(1) = 2$;

$y_k = 2 + 2(x-1) = 2x$.

5. $x(x^2+4x+4)\sqrt{x^2-1}\le 0$;

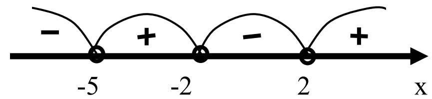
$x\in(-\infty;\ \ -1]\cup\{1\}$.



КР. № 5 В2.

1. $\dfrac{x^2-4}{x+5}>0$;

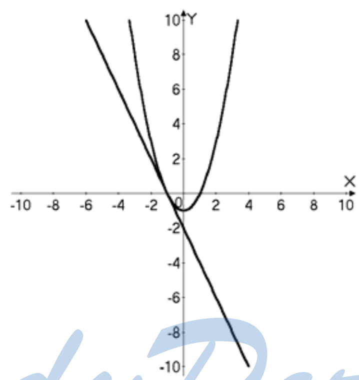
$x\in(-5;-2)\cup(2;+\infty)$.



2. $x(t)=3t^3+2t+1$;
$v(t)=9t^2+2\quad v(2)=38$.

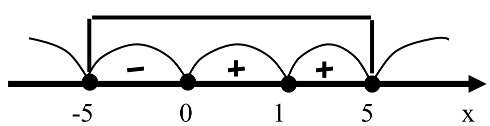
3. $f(x)=3-\dfrac{4}{x}$; $f'(x)=\dfrac{4}{x^2}$; $f'(2)=1$; $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

4. $f(x)=x^2-1$;



$f(-1)=0$; $f'(x)=2x$; $f'(-1)=-2$; $y=-2x-2$.

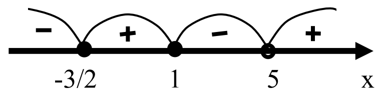
5. $x(x^2-2x+1)\sqrt{25-x^2}\ge 0$; $x(x-1)^2\sqrt{25-x^2}\ge 0$;



$x\in\{-5\}\cup[0;\ \ 5]$.

КР. № 5 В3.

1. $\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-5} \le 0;$



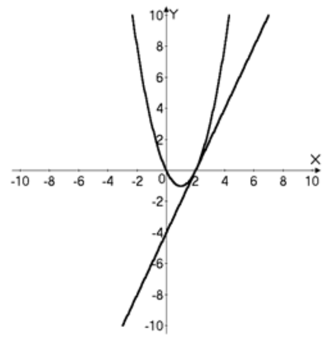
$x \in \left(-\infty; \ -\dfrac{3}{2}\right] \cup [1; \ \ 5).$

2. $x(t) = 3t^3 + 2t + 1;$ $\qquad v(t) = 9t^2 + 2;$

$a(v) = 18t;$ $\qquad a(2) = 36.$

3. $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{x};$ $\quad f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2};$ $\quad f'(-1) = \sqrt{3};$ $\quad \alpha = \dfrac{\pi}{3}.$

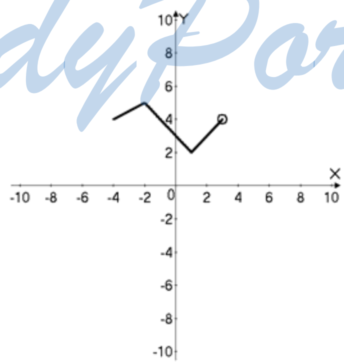
4.



$f(x) = x^2 - 2x;$ $\quad f(2) = 0;$ $\qquad f'(x) = 2x - 2;$

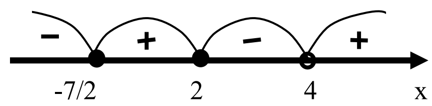
$f'(2) = 2.;$ $\ y_{кас} = 2x - 4.$

5.



КР. № 5 В4.

1. $\dfrac{(x-2)(2x+7)}{x-4} \ge 0$;

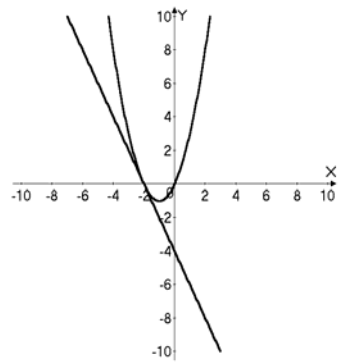


$x \in \left[-\dfrac{7}{2};\quad 2\right] \cup (4;\quad +\infty)$.

2. $x(t) = 2t^3 + 3t + 1$; $v(t) = 6t^2 + 3$; $a(t) = 12t$; $a(3) = 36$ м/с^2.

3. $f(x) = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{x}$; $f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$; $f'(1) = \sqrt{3}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

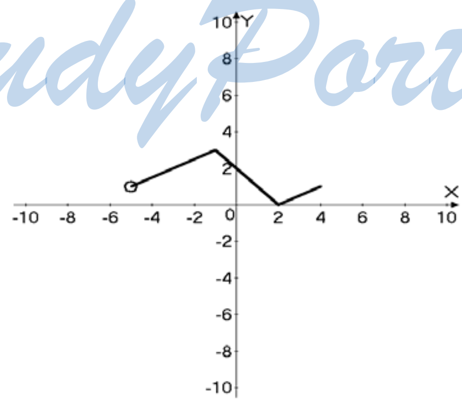
4.



$f(x) = x^2 + 2x$; $f'(x) = 2x + 2$; $f(-2) = 0$ $f'(-2) = -2$.

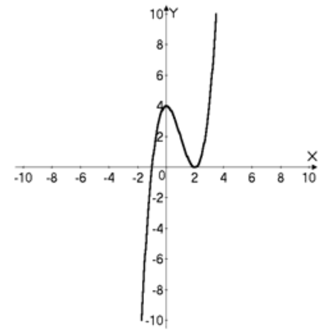
$y = -2x - 4$.

5.



КР. № 6 В1.

1.



$f(x)=x^3-3x^2+4;$

$f'(x)=3(x^2-2x)=0;$

$x_{\max}=0; \quad x_{\min}=2; \qquad f(0)=4$

$f(2)=0;$

возрастает $x\in(-\infty;\quad 0]\cup[2;\quad +\infty)$

убывает $x\in[0;\quad 2].$

2. $\begin{cases} a+b=12. \\ 2a^2b=y. \end{cases};\begin{cases} b=12-a. \\ y=24a^2-2a^3 \end{cases}$

$y'=6a(8-a)=0$

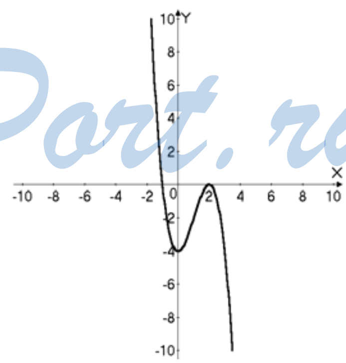
$\begin{cases} a=0 \\ b=12. \\ y=0. \end{cases};\begin{cases} a=8 \\ b=4 \\ y=512. \end{cases}$ 8+4=12.

3. $\varphi(x)=-4{,}3x\cos^2 x+\sin x=-4{,}3x-\cos 2x.$

$\varphi'(x)=-4{,}3+2\sin 2x<0.$

КР. № 6 В2.

1.



$f(x)=-x^3+3x^2-4$

$f'(x)=-3x(x-2)=0.$

$x=0 \quad x=2.$

возрастает: $x\in[0;\quad 2].$

убывает: $x\le 0, \quad x\ge 2$

$f(0)=\min=-4$

$f(2)=\max=0.$

2. $\begin{cases} a+b=9 \\ y=a^2\cdot 3b \end{cases};$

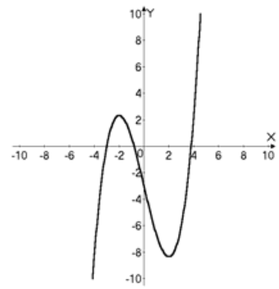
$\begin{cases} b=9-a \\ y=27a^2-3a^3 \end{cases}; \quad y'=9a(6-a) \quad a=6 \quad b=3. \quad 6+3=9$

3. $f(x) = 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3{,}2x = \sin 2x + 3{,}2x.$

$f'(x) = 2\cos 2x + 3{,}2 > 0$.

КР. № 6 В3.

1.



$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 3$;

$f'(x) = x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2.$

$\max = f(-2) = \frac{7}{3}$; $\min = f(2) = -\frac{25}{3}$;

$f(x)$ убывает на $x \in [-2;\ \ 2]$.

возрастает на $x \le -2$ и $x \ge 2$.

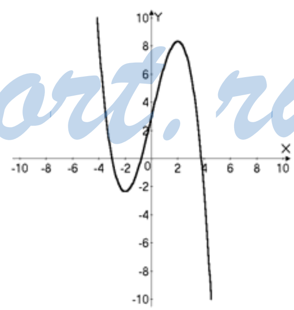
2. $\begin{cases} a + b = 8. \\ a^3 b = y. \end{cases}$; $\begin{cases} b = 8 - a. \\ y = 8a^3 - a^4 \end{cases}$; $y' = 4a^2(6 - a)$ $a = 6$ $b = 2$ $6 + 2 = 8.$

3. $f(x) = c$ – одно решенье, тогда, $c < -8\frac{1}{3}$, $c > 2\frac{1}{3}$.

2 решенья $c = -8\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{3}$. ; 3 решенья, тогда, $c \in \left(-8\frac{1}{3};\ \ 2\frac{1}{3}\right)$.

КР. № 6 В4.

1.



$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + 3$;

$f'(x) = -x^2 + 4 = 0$;

$x = \pm 2$ $\min = f(-2) = -\frac{7}{3}$;

$\max = f(2) = \frac{25}{3}$;

$f(x)$ возрастает на $x \in [-2;\ \ 2]$

убывает на $x \le -2$, $x \ge 2$.

2. $\begin{cases} a + b = 12. \\ y = 2a^2 b \end{cases}$; $\begin{cases} b = 12 - a. \\ y = 24a^3 - 2a^4 \end{cases}$; $y' = 8a^2(9 - a)$; $a = 9$ $b = 3$; $12 = 9 + 3.$

3. $f(x)=m$ - 1 решенье, тогда, $m>8\frac{1}{3}$, $m<-2\frac{1}{3}$;

2 корня $m=8\frac{1}{3}$ $m=-2\frac{1}{3}$; 3 корня $m\in\left(-2\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{3}\right)$.

КР. № 7 В1.

1. **а)** $2\sin^2-1=0$; $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

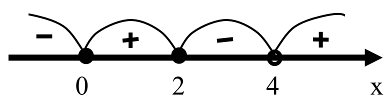
б) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=0$; $\cos 2x\neq 0$; $tg 2x=-\sqrt{3}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$.

1. $f(x)=\frac{2x}{2+x}-3\sin x$; $f'(x)=\frac{4}{(2+x)^2}-3\cos x$; $f'(0)=-2$.

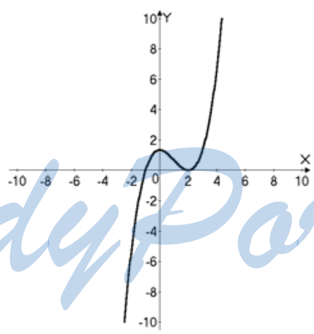
2. **а)** $2\cos x-\sqrt{2}>0$; $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$.

б) $\frac{2x-x^2}{x-4}\geq 0$;

$\frac{x(x-2)}{x-4}\leq 0$; $x\in(-\infty;0]\cup[2;4)$.



4.



$-1\leq x\leq 3$.

5. $(4x^2-9)(x^2+x+1)<0$; $x\in\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.;

$\cos x>0$; $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, но $\frac{\pi}{2}>\frac{3}{2}\Rightarrow$

при $x \in \left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$; $\cos x > 0$.

КР. № 7 В2.

1. **а)** $2\cos^2 x - 1 = 0$; $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

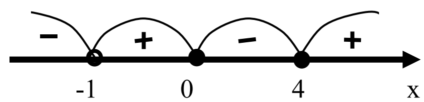
б) $3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$, $\cos 2x \neq 0$; $tg 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

2. $f(x) = \frac{3x}{x+3} + 7\cos x$; $f'(x) = \frac{9}{(x+3)^2} - 7\sin x$; $f'(0) = 1$.

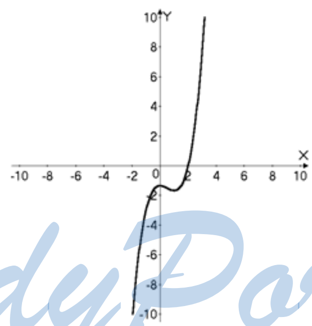
3. **а)** $2\sin x - \sqrt{3} > 0$; $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$;

б) $\frac{4x - x^2}{x+1} \leq 0$; $\frac{x(x-4)}{x+1} \geq 0$;

$x \in (-1;\ 0] \cup [4;\ +\infty)$.



4.



$f(x) \in [-3;\ 0]$ при $x \in [-1; 2]$.

5. $(x^2 - 3x)(x^2 - x + 1) < 0$; $x \in (0;\ 3)$;

$\sin x > 0$, при $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$;

т.к. $\pi > 3$, то $\sin x > 0$, при $x \in (0;\ 3)$.

КР. № 7 В3.

1. **а)** $4\sin^2 x - 3 = 0$; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$;

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi n.$

б) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow$

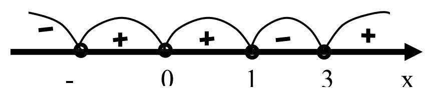
$tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$; $x = -\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$.

2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} + 2\cos x$; $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{x+1} - 2\sin x$;

$f'(0) = -1$.

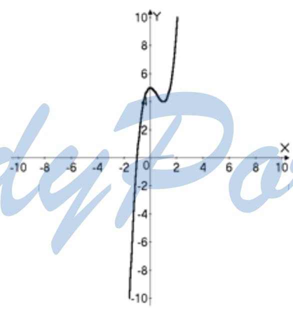
3. **а)** $2\cos x + \sqrt{2} \leq 0$; $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right]$.

б) $\frac{x^2(x^2-1)}{x-3} > 0$;



$x \in (-1;\ \ 0) \cup (0;\ \ 1) \cup (3;\ \ +\infty)$.

4. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$; $y \geq 0$ при $x \geq -1$.



5. $(x^2+1)(x^2 - 5x + 6) < 0$; $x \in (2;\ \ 3)$; $\sin\frac{x}{2} > 0$;

$x \in (4\pi n;\ \ 2\pi + 4\pi n)$;

т.к. $2 > 0$, $2\pi > 3 \Rightarrow \sin\frac{x}{2 > 0}$ при $x \in (2;\ \ 3)$.

КР. № 7 В4.

1. **а)** $4\cos^2 x-3=0$; $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$;

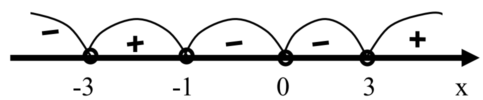
   б) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x\frac{\pi}{4}\right)=0$; $\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

2. $f(x)=\frac{x^2+2}{x+2}-2\sin x$; $f'(x)=\frac{2x^2+4x-x^2-2}{(x+2)^2}-2\cos x$;

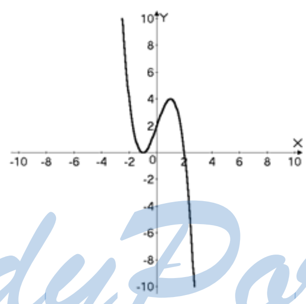
   $f'(0)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$.

3. **а)** $2\sin x+\sqrt{3}\le 0$; $\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x\in\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\quad -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$.

б) $\frac{x^2(x^2-9)}{x+1}<0$; $x\in(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 3)$.



4.



$x>2$.

5. $(x^2+3)(x^2-10x+24)<0$; $x\in(4;\ 6)$; $\cos\frac{x}{2}<0$;

   $x\in(\pi+4\pi n;\ \ 3\pi+4\pi n)$; т.к. $4>\pi$, $6<3\pi$, то $\cos\frac{x}{2}<0$;

   при $x\in(4;\ 6)$.

Материалы для итогового повторения

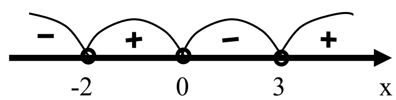
В1.

1. $2\cos^2 x + \cos x = 0$; $\quad \begin{matrix} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{matrix}$; $\quad \begin{matrix} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n; \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{matrix}$

2. $f(x) = x^{-2} + \dfrac{1}{2}\sin 2x$; $\quad f'(x) = \cos 2x - \dfrac{2}{x^3}$.

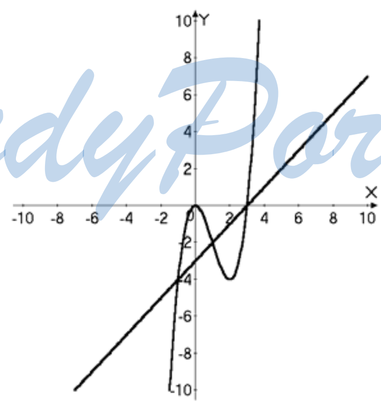
3. $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{\sin x - 1}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 9 \le 0 \\ \sin x \ne 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in [-3; \ 3] \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$; $\begin{cases} x \in [-3; \ 3] \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

4. $\dfrac{x(x+2)}{x-3} \le 0$; $\quad x \in (-\infty; \ -2] \cup [0; \ 3)$.



5. $x^2(x-3) = x - 3$; $\ x = 3 \quad x = \pm 1$.

3 точки пересечения.



B2.

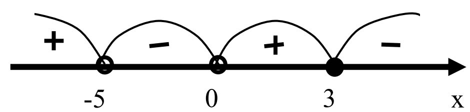
1. $2\sin x - 1 < 0;\quad \sin x < \frac{1}{2};\quad x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right).$

2. $f(x) = x^{-1} - 2\cos\frac{x}{2};\qquad f'(x) = \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}.$

3. $\sqrt{x-5}(\sin^2 x - 3\sin x) > 0;\qquad \begin{cases} x \ge 5 \\ x = 5 \\ \sin x = 0. \end{cases}$

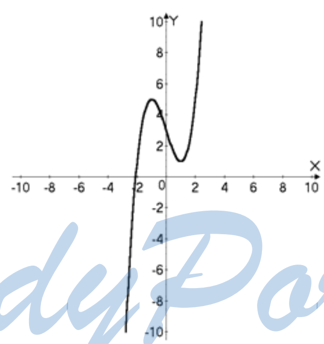
$x = \pi n,\quad n \ge 2,\ x = 2.$

4. $\frac{3-x}{x(x+5)} \ge 0;$



$x \in (-\infty;\ \ -5) \cup (0;\ \ 3].$

5.



$y = x^3 - 3x + 3;\quad y' = 3(x^2 - 1) = 0;$

$x = \pm 1;\quad y(1) = 1;\quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{8} = \frac{35}{8};\quad y(3) = 21;$

$\max - f(3) = 21.$

$\min - f(1) = 1.$

B3.

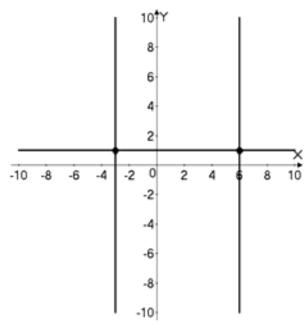
1. $f(x) = 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 2x$; $f'(x) = 2\cos 2x$;

$f'(\pi) = 2$.

2. $f(x) = \frac{2x+5}{3-x}$; $f'(x) = \frac{11}{(x-3)^2} > 0$ при $x \neq 3$, то есть при $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

3. $\sin\left(\frac{5}{3}\pi + x\right) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi + x\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x.$

4. $(y-1)(x^2 - 3x - 18) = 0$; $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 6 \\ x = -3 \end{array}\right.$.



5.

$y = 4x^2(x-2)^2 = 4x^4 - 16x^3 + 16x^2$;

$y' = 16x(x^2 - 3x + 2) = 0$;

$x = 0, \quad x = 2, \quad x = 1$;

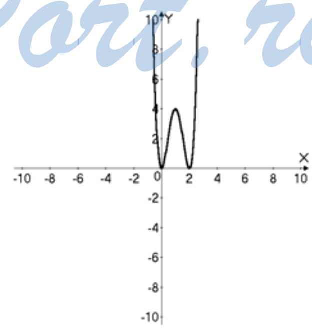
$y_{max} = y(1) = 4$;

$y_{min} = y(0) = y(2) = 0$;

нули: $x = 0 \quad x = 2$.

убывает: $x \leq 0, \quad x \in [1; \; 2]$.

возрастает: $x \in [0; \; 1] \cup x \geq 2$.



B4.

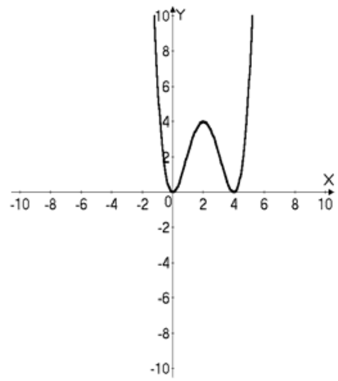
1. $f(x) = 2\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 2x$; $f'(x) = 2\cos 2x$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$

2. $x(t) = 3x^4 + 2t^3 + 6$; $v(t) = 6t^2(2t+1)$; $a(f) = 36t^2 + 12t.$

$v(2) = 120 \quad a(2) = 168.$

3. $\cos\left(\frac{4\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = 2\cos(\pi + x)\cos\frac{\pi}{3} = -\cos x.$

4.



$y = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$;

$y' = x^3 - 6x^2 + 8x = 0$;

$x = 0 \quad x = 4 \quad x = 2.$

$y_{\max} = y(2) = 4$

$y_{\min} = y(0) = y(4) = 0.$

возрастает: $x \in [0;\ \ 2] \cup x \geq 4$

убывает: $x \leq 0, \quad x \in [2;\ \ 4].$

5. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x - \sin y = \sqrt{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - x \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n. \\ y = -\frac{\pi}{4} - 2\pi n. \end{cases}$

B5.

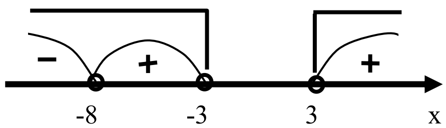
1. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = tg\alpha$.

2. $tg^2 x + 3tgx - 4 = 0$; $\begin{matrix} tgx = -4 \\ tgx = 1 \end{matrix}$;

$\begin{matrix} x = arctg(-4) + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{matrix}$.

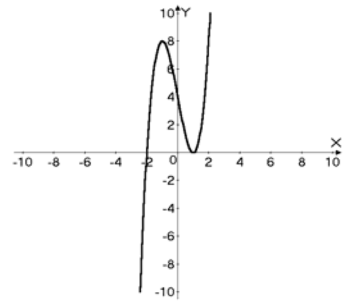
3. $f(x) = (3 - 2x)^6$; $f'(x) = -12(3 - 2x)^5$; $f'(1) = -12.$

4. $\sqrt{x^2-9}(x+8)>0$; $x\in(-8;\ -3)\cup(3;\ +\infty)$.



5. $y=(x-1)^2(2x+4)$;

$y'=2(x-1)(2x+4)+2(x-1)^2=$
$=2(x-1)(2x+4+x-1)=$
$=2(x-1)(3x+3)=0.$
$x_{\min}=1 \quad x_{\max}=-1$;
$y(1)=0$; $y(-1)=8$;
y возрастает на $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$;
убывает на $x\in[-1;\ 1]$.



B6.

1. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $0<\alpha<90°$; $\cos\alpha=\frac{1}{2}$;

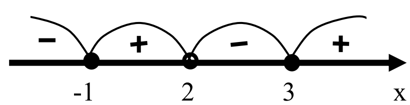
$\sin(30°+\alpha)=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$

2. $y=0{,}5x^2-2x$; $y(4)=0$; $y'=x-2$; $y'(4)=2$;

$y_{kac}=2(x-4)=2x-8.$

3. $\frac{3}{x-2}\geq x$; $\frac{3-x^2+2x}{x-2}\geq 0$; $\frac{x^2-2x-3}{x-2}\leq 0$;

$x\in(-\infty;-1]\cup(2;3]$.



4. $1-\cos^2 x=\sin 2x$;

$\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0$, $\cos x\neq 0.$;

$tg^2x - 2tgx - 3 = 0;$ $\quad$ $tgx = 3;\quad x = arctg3 + \pi n;$

$tgx = -1;\quad x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n.$

5.

$g(x) = x^4 - 2x^2 + 3;$

$g'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0;$

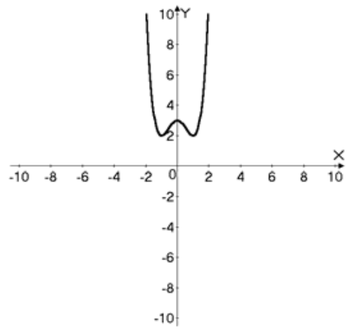
$x_{\max} = 0 \quad x_{\min} = \pm 1. \quad g(0) = 3;$.

$g(\pm 1) = 2;$

убывает на $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1);$

возрастает на:

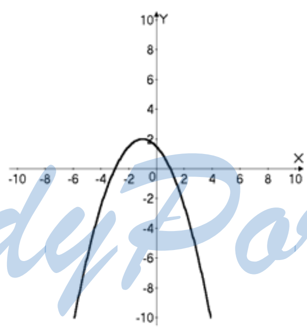
$x \in [-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty).$



B7.

1. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5};\quad \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi;\quad \sin\alpha = \dfrac{4}{5};\quad \sin 2\alpha = -\dfrac{24}{25}.$

2.



3. $\dfrac{\cos\left(\alpha + \dfrac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin(\pi + \alpha)} = \dfrac{-2\sin\alpha \cdot \sin\dfrac{5\pi}{4}}{-\sqrt{2}\sin\alpha} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} = -1.$

4. $y = \dfrac{x - 2{,}5}{x^2 - 4}$ **а)** ОДЗ: $x \neq \pm 2$, значит, y непрерывна на $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty);$

б) $y = \dfrac{x-2{,}5}{x^2-4}$; $\quad y' = \dfrac{x^2-4-2x^2+5x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2+5x-4}{(x^2-4)^2} = 0$;

$x = 4 \quad x = 1$; $\qquad$ возрастает на $x \in (1;2) \cup (2;4)$.

5. $\begin{cases} a+b+c=54 \\ a=2b \\ y=abc. \end{cases}$; $\begin{cases} c=54-3b \\ y=108b^2-6b^3 \\ a=2b. \end{cases}$; $\quad \begin{matrix} y'=18b(12-b)=0 \\ b=12 \\ a=24 \\ c=18. \end{matrix}$

В 8.

1. $\sin(-840°)+tg(-855°) = -\sin 120° - tg135° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

2. $f(x) = (2x-4)(x+1)^2 \qquad f'(x) = 2(x+1)(2x-4)+2(x+1)^2 =$

$= 2(x+1)(2x-4+x+1) = 2(x+1)(3x-3) = 0$; $\qquad x = \pm 1$.

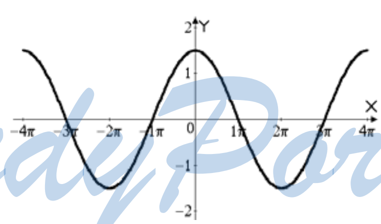
$f(1) = \max = -8 \qquad f(-1) = \min = 0$.

возрастает $x \le -1, \quad x \ge 1$. $\qquad$ убывает: $x \in [-1;\ \ 1]$.

3. $2\sin^2 x - 1 = \sin x. \qquad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

$\sin x = 1 \quad x = \dfrac{\pi}{2}+2\pi n \quad \sin x = -\dfrac{1}{2} \quad x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k.$

4.



5. $\begin{cases} a+b+c=48 \\ a=b \\ y=abc. \end{cases}$; $\begin{cases} c=48-2b \\ y=48b^2-2b^3 \end{cases}$; $\quad y'=6b(16-b)=0 \quad \begin{cases} b=16. \\ a=16 \\ c=16. \end{cases}$

Карточки-задания для проведения зачетов

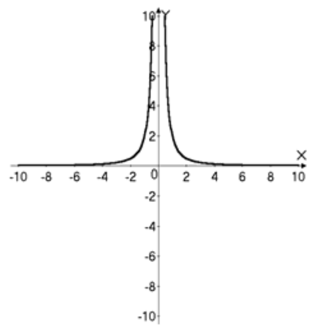
Зачет № 1 .   Карточка 1.

1. ф-ия – зависимость *y* от *x,* при котором для каждого допустимого *x* ставится в соответствие зн. *y.*
обл. опр. ф-ции допустимые зн. x; обл. зн. ф-ции допустимые зн. у
Схема исследования ф-ции:
1) обл. зн., обл. опр.; 2) нули; 3) экстремумы; 4) max, min;
5) промежутки возраст., убыв.

2. **а)** sin(-1830°)=-sin30°= $-\frac{1}{2}$; **б)** cos(-1140°)=cos60°= $\frac{1}{2}$;

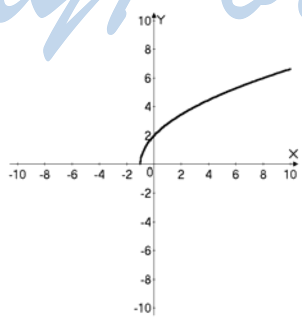
в) tg(-585°)=tg135°=-1.

3.

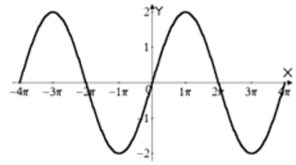


$f(x)=\frac{2}{x^2}$ возрастает на x<0; убывает на x>0

4.



5.



Карточка 2.

1. Четная функция, когда $f(-x)=f(x)$;

например $y=x^2$; $y=x^4$ - график симметричен относительно ОУ;

нечетная функция, когда $f(-x)=-f(x)$;

например: y=x, $y=x^3$, график симметричен относ. О.

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$; ОДЗ: $\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$; $x \in [-3;-2) \cup (-2;3]$.

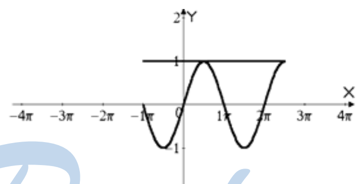
3. $f(x)=\dfrac{3}{\sin\frac{x}{2}}>0$; $\sin\frac{x}{2}>0$; $x \in (4\pi n; 2\pi+4\pi n)$;

$f(x)<0$ $x \in (2\pi+4\pi n; 4\pi+4\pi n)$.

4.

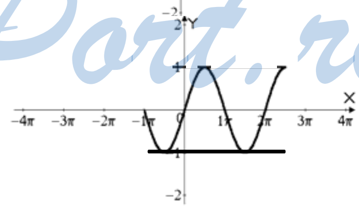
а)

$sinx=1$; $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$;

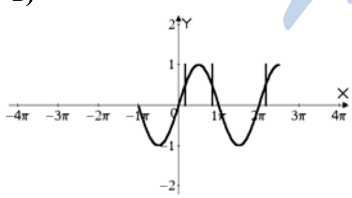


б)

$sinx=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$



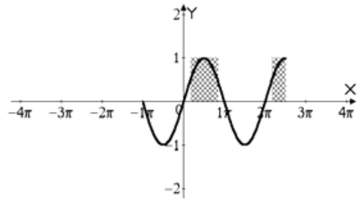
в)



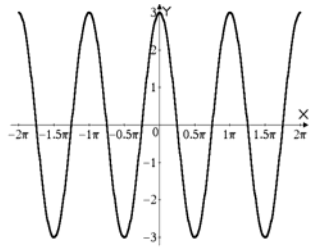
$sinx=\dfrac{1}{2}$; $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

г) $sinx > \frac{1}{2}$;

$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

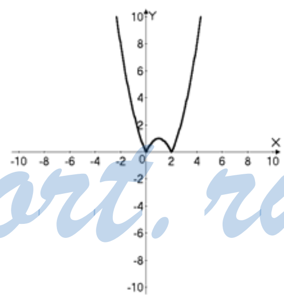


5.

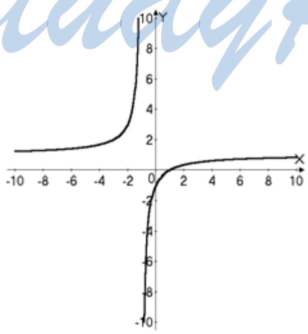


Карточка 3.

1. Пусть функция является периодич. и T - ее период то $f(x) = f(x+T)$; *sinx*, *cosx* T=2π; *tgx*, *ctgx* T=π.
2. $f(x) = \frac{2x^2+1}{2\cos x}$; $f(-x) = \frac{2(-x)^2+1}{\cos(-x)} = \frac{2x^2+1}{\cos x} = f(x) \Rightarrow$ четная.
3. $y = \left|x^2 - 2x\right|$; min: (0;0); (2;0); max (1;1)

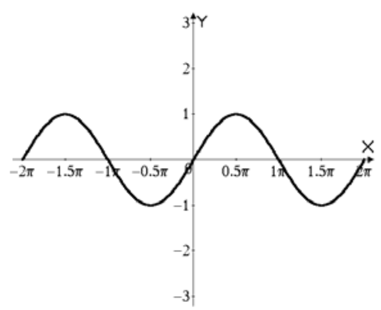


4. $y = 2\sin 2x \cos 2x = \sin 4x$; $T = \frac{\pi}{2}$.
5.



КАРТОЧКА 4.

1. $y = \sin x$ $x \in R$ $y \in$



[–1; 1] возрастает на

$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$

убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$

нули: $x = \pi n;$

min: $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -1\right)$;

max: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 1\right)$.

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x^2-3x-5}$; ОДЗ: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2-3x-5 \neq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \quad x \neq -1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$; Итого: $x \in \left[\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$.

3. $f(x) = 3\text{tg}\,(2x - 4)$; $T = \frac{\pi}{2}$.

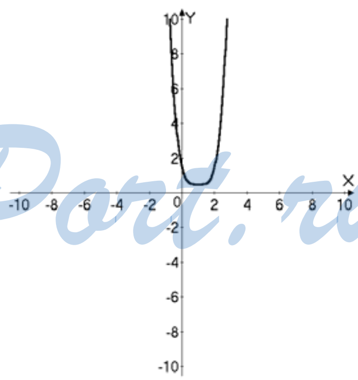
4.

$f(x) = (x-1)^4 + \frac{1}{2}$;

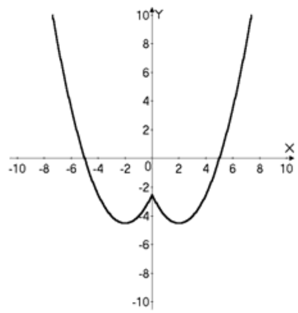
$x_{\min} = 1$; $f(1) = \frac{1}{2}$;

возрастает на $x \in (1;\infty)$;

убывает на $x \in (-\infty;1)$.

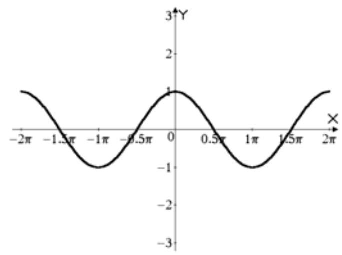


5.



КАРТОЧКА 5.

1.



$y = \cos x$; нули: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$

$x \in R$; $y \in [-1; 1]$;

y возрастает на $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$;

убывает на $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$;

max: $(2\pi n; 1)$;

min: $(-\pi + 2\pi n; -1)$.

2. $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$;

$f(-1) = -2 - 3 + 4 = -1$; $f(x + 1) = -2x^2 - 4x - 2 + 3x + y = -2x^2 - x + 5 = -1$;

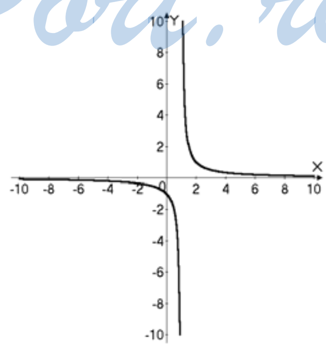
$2x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

3. $f(x) = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$; $x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$;

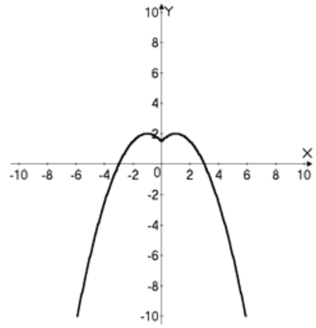
возрастает на области определения

4. $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

убывает: $x \neq 1$



5.

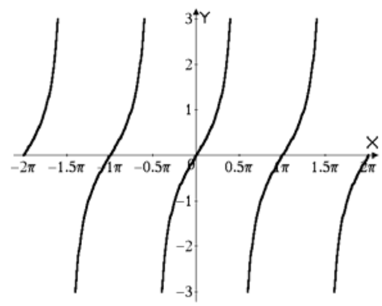


КАРТОЧКА 6.

1.

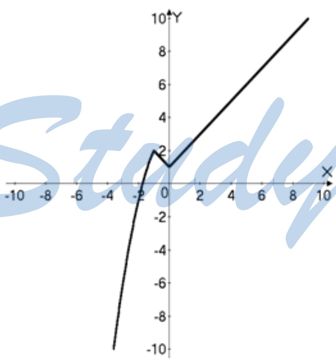
$y = \text{tg}\, x; \quad y \in R; \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k;$

возрастает на области определения; нули: $x = \pi k$



2.

возрастает на



$x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$;

убывает на $x \in [-1; 0]$

$x = -1; \quad f(-1) = 2; \quad x = 0; \quad f(0) = 1.$

3. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{x + 4}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x \neq -4 \end{cases}$;

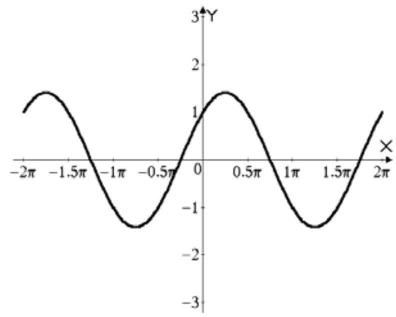
$x \in (-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$.

4. $y = 2\sin x + 3$;

max: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 5\right)$;

min: $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right)$.

5.



ЗАЧЕТ № 2

КАРТОЧКА 1.

1. arcsin числа a – такое число из $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, sin которого равен a.

2. а) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$;

$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

б) $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;

$\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$; $x = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$.

3. $\mathrm{tg}\, 3x < -1$; $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}\right)$.

4. $\begin{cases} x - y = \pi \\ \sin(x + y) = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - y = \pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ y = -\frac{3\pi}{4} + \pi n \end{cases}$.

5. $|2\sin x + 4| \le 5$; $\begin{cases} \sin x \le \frac{1}{2} \\ \sin x \ge -\frac{9}{2} \end{cases}$; $x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$.

КАРТОЧКА 2.

1. arccos числа a – такое число из $[0; 2\pi]$, cos которого равен a.

2. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2;\quad \operatorname{tg} x = 1;\quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

3. $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$; $\cos x \neq 0$; $2\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 7 = 0$;

$\operatorname{tg} x = -\frac{7}{2}$; $x = -\operatorname{arctg}\frac{7}{2} + \pi n;$ $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$.

4. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \cos x + \sin y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{matrix} y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} - (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \pi k \end{matrix}$.

5. $2\sin^2 x - |\sin x| = 0;\quad \sin x = 0;\quad x = \pi n;\quad \sin x = \frac{1}{2};\quad x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k.$

КАРТОЧКА 3.

1. arctg a – такое число из $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tg которого равен a.

2. а) $\frac{2}{\operatorname{ctg} x + 1} = 2 - \operatorname{ctg} x;\qquad$ ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x \neq \pi n \end{cases}$;

$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0$; $\operatorname{ctg} x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$ $\quad\operatorname{ctg} x = 1;\quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$

б) $1 - 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$, $\cos x \neq 0$; $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;

$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$; $\operatorname{tg} x = 3$; $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n;$ $\quad\operatorname{tg} x = 1;\quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

3. $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad x \in \left[-\frac{3\pi}{8} + \pi n;\ \frac{3\pi}{8} + \pi n\right].$

4. $\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pi - y \\ \sin y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} \end{cases}$.

5. $2\sin^2 x + \sin x \geq 0;\qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x \in \left[2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right].$

КАРТОЧКА 4

1. $\cos t = a$; $|a| \le 1$; $t = \pm \arccos a + 2\pi n$.

2. а) $1 + \cos x = 2\sin^2 x$; $\cos 2x + \cos x = 0$;

$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$; $x = \pi + 2\pi n$;

б) $\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$; $\cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$.

3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left[-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi n\right]$.

4. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \cos y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{matrix} y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} \end{matrix}$.

5. $\sqrt{2x - \pi}\,(\sin x - 1) = 0$; ОДЗ: $x \ge \frac{\pi}{2}$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n = 0; 1; 2; 3$.

КАРТОЧКА 5.

1. $\sin t = a$; $|a| \le 1$; $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k$.

2. а) $1 - \cos 2x + \sin x = 0$; $2\sin^2 x + \sin x = 0$;

$\sin x = 0$; $x = \pi n$; $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$;

б) $5\sin 2x - 6\cos x = 6$; $12\cos^2\frac{x}{2} - 10\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$ $\cos\frac{x}{2} = 0$;

$x = 2\pi n + \pi$; $\sin\frac{x}{2} = \frac{6}{5}\cos\frac{x}{2}$; $x = 2\operatorname{arctg}\frac{6}{5} + 2\pi n$.

3. $\operatorname{tg} 2x \ge -\sqrt{3}$; $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right]$.

4. $\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pi - y \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \pi - (-1)^k\frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases}$

5. $|x|\sin x + x = 0$, т.к. $x > 0$, то $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in N$.

КАРТОЧКА 6.

1. $\operatorname{tg} t = a$; $t = \operatorname{arctg} a + \pi n.$

2. а) $\cos 2x = \cos x$; $\sin\frac{x}{2}\ \sin\frac{3x}{2} = 0$; $x = \frac{2\pi n}{3}$;

б) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$;

$2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2} = 0$; $\cos\frac{x}{2} = 0$; $x = \pi + 2\pi n$;

$\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\ \sin\frac{x}{2} = 0$; $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

3. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) > -\frac{1}{2}$; $\cos x < \frac{1}{2}$; $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$.

4. $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$.

5. $2\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$;

$\cos x \in [-1; \frac{1}{2}]$; $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$.

ЗАЧЕТ № 3.

КАРТОЧКА 1.

1. Производной функции в точке x_0 называется

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

пример: $f(x) = x$; $\Delta f(x_0) = \Delta x$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x - 7$; $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 8$;
$f'(-1) = -4 - 18 + 8 = -14.$

3. $\varphi(x) = \frac{6 - x}{x} = \frac{6}{x} - 1$; $\varphi'(x) = -\frac{6}{x^2}$; $\varphi'(x) < 0,\ \ x \ne 0.$

4. $h(x) = (6 + 5x)^7$; $h'(x) = 35(6 + 5x)^6$; $h(-1) = 35.$

5. $f(x) = \sin^2 3x$; $f'(x) = 6\sin 3x\cos 3x = 3$; $\sin 6x = 1$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.

КАРТОЧКА 2.

1. $(f(x)+g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x);$

$f(x)=x^7;\quad g(x)=\dfrac{1}{x};\quad (f(x)+g(x))' = 7x^6-\dfrac{1}{x^2}.$

2. $f(x) = x^3-2x^2+x+10;\quad f'(x)=3x^2-4x+1;$

$f'(-2) = 12+8+1=21;\quad f'(x)\le 0;\quad 3x^2-4x+1\le 0;$

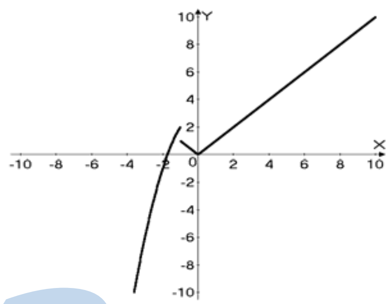
$x\in\left[\dfrac{1}{3};1\right].$

3. $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right);\ g'(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0;\ x=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2};\ g'(\pi)=\sqrt{2}.$

4. $f(x)=x\sqrt{x-5};\quad f'(x)=\sqrt{x-5}+\dfrac{x}{2\sqrt{x-5}};\quad f'(6)=1+\dfrac{3}{1}=4.$

5. $f(x)=\begin{cases}|x| & x\ge -1\\ -x^2+3 & x<-1\end{cases};$

а)



б) $x=-1;$

в) нет.

КАРТОЧКА 3.

1. $(f(x)\,g(x))' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x);$

$(\lambda f(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\lambda\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lambda\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lambda f'(x);$

$y=2x^2;\quad y'=4x;\quad y=7x^5;\quad y'=35x^4.$

2. $f(x)=(2x-3)(4x^2+6x+9);\ f'(x)=8x^2+12x+18+(2x-3)(8x+6);$

$f'(-2)=32-24+18+7\cdot 10=96.$

3. $f(x)=\operatorname{tg}3x;\quad f'(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x};\quad f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=6.$

4. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x;\qquad f'(x)=x^2-3x-4;\ g(x)=2\sqrt{x}\,;$

$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,;\ f'(x)g'(x)=\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}=0;\ x=4;\ x=-1,$ но $x>0\ \Rightarrow\ x=4.$

5. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}\,;$ ОДЗ: $\begin{cases} x\le 2 \\ \sqrt{2-x}<2 \end{cases};\quad \begin{cases} x>-2 \\ x\le 2 \end{cases}.$

КАРТОЧКА 4.

1. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}\,;\ y=\frac{x-2}{x+4}\,;\qquad y'=\frac{6}{(x+4)^2}\,.$

2. $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\,;\qquad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{6}{x^3}\,;\qquad f'(1)=1-6=-5.$

3. $h(x)=\cos 2x;\qquad h'(x)=-2\sin 2x;\qquad h'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\,;$

$-2\sin 2x=1;\qquad \sin 2x=-\frac{1}{2}\,;\qquad x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\,.$

4. $f(x)=\frac{2x+7}{x-4}\,;\qquad f'(x)=\frac{-15}{(x-4)^2}\,;\qquad f'(5)=-15;\ f'(x)<0$ при $x\ne 4.$

5. $f(x)=1-2x;\qquad f(g(x))=1-2g(x)=x;\qquad g(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\,.$

КАРТОЧКА 5.

1. $(f^n(x))'=nf'(x)\,f^{n-1}(x);$
$y=x^{100};\qquad y'=100x^{99};\qquad y=(2x)^{100};\qquad y'=200(2x)^{99}.$

2. $f(x)=\mathrm{ctg}\,4x;\qquad f'(x)=\frac{-4}{\sin^2 4x}\,;\qquad f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{8}{3}\,.$

3. $f(x)=2x^3+3x^2-12x;\qquad f'(x)=6(x^2+x-2)=-12;$
$x=0$ и $x=-1;\quad f'(x)>0,\quad x\in(-2;\,1).$

4. $f(x)=(x-1)\sqrt{x}\,;\qquad f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,;\qquad f'(1)=1.$

5. $f(x)=x^2-1;\qquad f(f(x))=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2>0;$
$x^2(x^2-2)>0;\qquad x\in(-\sqrt{2}\,;\,0)\cup(0;\ \sqrt{2}\,).$

КАРТОЧКА 6.

1. $y = \sin x$; $y' = \cos x$.
2. $f(x) = (3x^2 - 2)(3x^2 + 2) = 9x^4 - 4$; $f'(x) = 36x^3$; $f'(-1) = -36$.
3. $f(x) = \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = \cos 4x$; $f'(x) = -4\sin 4x$;

$$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}.$$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$; $f'(x) = x^2 - 2x$;

$$g'(x) = x^2 + 1; \quad \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \le 0; \quad x \in [0; 2].$$

5. $f(x) = \frac{2}{2-x}$; $f(f(x)) = \frac{2}{2 - \frac{2}{2-x}} = \frac{4-2x}{2-2x} = 1 + \frac{2}{2-2x}$;

$$f(f(f(x))) = 1 + \frac{2}{2 - \frac{4}{2-x}} = 1 + \frac{4-2x}{-2x} = 2 - \frac{2}{x}.$$

КАРТОЧКА 7.

1. $y = \cos x$; $y' = -\sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
2. $f(x) = (2x^2 - 5)(x^2 - 4) = 2x^4 - 13x^2 + 20$; $f'(x) = 8x^3 - 26x$.
3. $f(x) = \frac{2x-7}{x+3}$; $f'(x) = \frac{13}{(x+3)^2}$; $f'(-2) = 13$; $f'(x) > 0$;   при $x \ne -3$.

4. $f(x) = \sin x \cos x + 1$; $f'(x) = \cos 2x$; $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

5. $f(x) = \sin^2 x$; $f'(x) = \sin 2x > -\frac{1}{2}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \pi n\right)$.

ЗАЧЕТ № 4

КАРТОЧКА 1.

1. Геометрический смысл производной в точке x_0 – tg угла наклона касательной в точке x_0.

$y = f'(x_0)x + b$.   Но нам нужно, чтобы $y(x_0) = f(x_0)$ $\Rightarrow$
$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ $\Rightarrow$ $b = -f'(x_0)x_0 + f(x_0)$ $\Rightarrow$
$y_{кас} = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

2. $f(x) = 6x + 5\cos x$; $f'(x) = 6 - 5\sin x > 0 \Rightarrow$ возрастает.

3. $\begin{cases} a + b = 15 \\ a^3 + 3b = y \end{cases}$; $\begin{cases} b = 15 - a \\ y = a^3 - 3a + 45 \end{cases}$; $\begin{matrix} y' = 3a^2 - 3 = 0 \\ a = 1 \quad b = 14 \end{matrix}$; $15 = 1 + 14$.

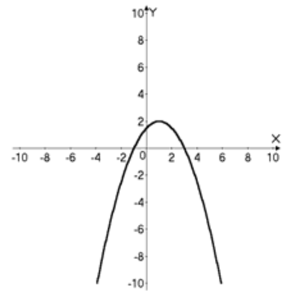
4. а)

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$; $x_в = 1$;

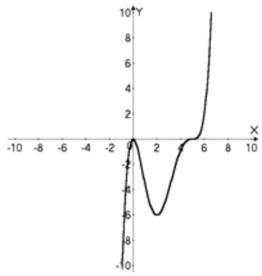
$f(1) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2$; $x \in R$; $f \le 2$.

$f(x)$ убывает на $x \ge 1$; возрастает на $x \le 1$;

$x_{max} = 1$ –



б) $f(x) = \frac{1}{18}x^2(x-5)^3$;



$f'(x) = \frac{x(x-5)^3}{9} + \frac{x^2(x-5)^2}{6} = 0$;

$x(x-5)^2(2x - 10 + 3x) = 0$;

$x = 0$; $x = 5$; $x = 2$; $f(0) = 0$;

$f(2) = -\frac{2}{9} \cdot 27 = -6$;

$f(x)$ возрастает на $x < 0$, $x > 2$

убывает на $x \in (0; 2)$.

КАРТОЧКА 2.

1. производная от перемещения – скорость.

производная от скорости – ускорение.

2. $f(x) = -\sin x$; $f(0) = 0$; $f'(x) = -\cos x$; $f'(0) = -1$; $y_к = -x$.

3. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 8x + 1$; $x \in [-2; 1]$; $f'(x) = -3x^2 + 4x - 8 = 0$;

$\frac{D}{4} = 4 - 24 < 0 \Rightarrow$ убывает на R

max: $f(-2) = 8 + 8 + 16 + 1 = 33$

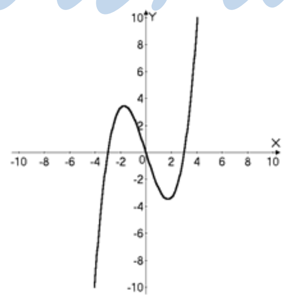
min: $f(1) = -1 + 2 - 8 + 1 = -6$

4. а)

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$

$f'(x) = x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$

max: $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

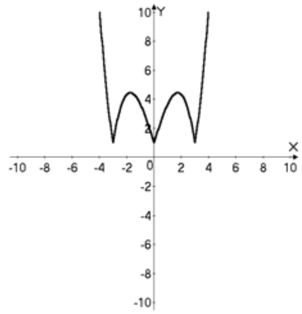


min: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$;

$f(x)$ возрастает на $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$;

убывает на $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$;

б)



КАРТОЧКА 3.

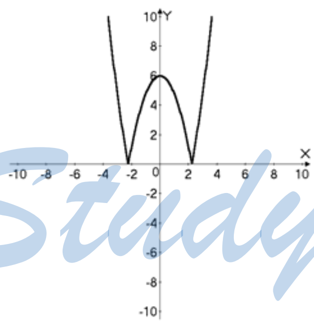
1. возрастание: производная > 0.; убывание: производная < 0.

2. $s(t) = 6t^3 + 5t + 2$ $v(t) = 18t^2 + 5$ $v(2) = 77$

$a(t) = 36t$ $a(2) = 72$

3. а) $f(x) = -0{,}5x^2 + 6$ $f'(x) = -x$ $f'(1) = -1$

б)



По рисунку видно, что в точках $x = \pm 2\sqrt{3}$ производной не существует, а в точке $x = 0$ она равна нулю.

4. Пусть вершина прямоугольника, лежащая правее нуля, равна x_0, тогда $S = 2x_0 \cdot f(x_0) = -x_0^3 + 12x_0$

$S' = -3x_0^2 + 12 = 0$ $x_0 = \pm 2$,

но $x_0 > 0 \Rightarrow$ длина = 4, высота = 4.

КАРТОЧКА 4.

1. Критические точки – точки, в которых производная равна нулю или не существует.

Пусть в этой точке производная меняет знак с «больше» на «меньше», то это точка max.

Если с «меньше» на «больше» $\Rightarrow$ min.

2. $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x$; $f(0) = 0$; $f'(x) = -x + 2$; $f'(0) = 2$; $y_{кас} = 2x$.

3. $f(x) = -7x - 6\sin x$; $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$; $f'(x) = -7 - 6\cos x < 0$ всегда

max: $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} + 3$; min $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{49\pi}{6} + 3$.

4. а)

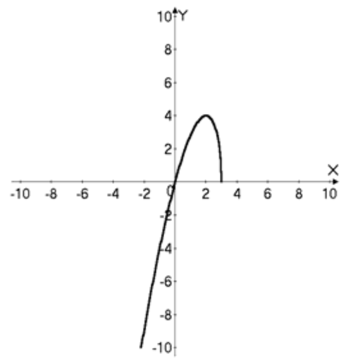
$f(x) = 2x\sqrt{3-x}$

$f'(x) = 2\sqrt{3-x} - \frac{x}{\sqrt{3-x}} = 0$

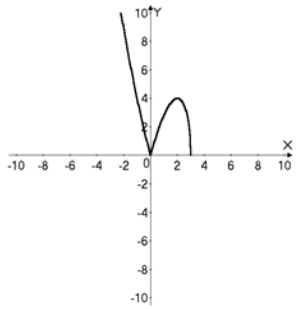
$6 - 2x = x$ $x = 2$ – max $f(2) = 4$

возрастает: $x \le 2$,

убывает $x \in [2; 3]$



б) $1 \le x \le 3$



КАРТОЧКА 5.

1. а) находим $P(f)$ и $E(f)$; **б)** нули; **в)** критические точки;
г) max и min; **д)** промежутки возрастания, убывания
Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ находим вершину ($y'(x_0) = 0$).
Если $a > 0$, то $x \le x_0$ убывает, $x \ge x_0$ возрастает, а x_0 – min;
если $a < 0$, то наоборот.

2. $f(x) = 2\sin x - x$; $f'(x) = 2\cos x - 1$; $y = 2\sin x_0 - x_0 + (2\cos x_0 - 1)(x - x_0)$;

$2\cos x_0 - 1 = 0$; $x_0 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 10$; $x \in [0; 6]$; $f'(x) = x^2 - 9$;

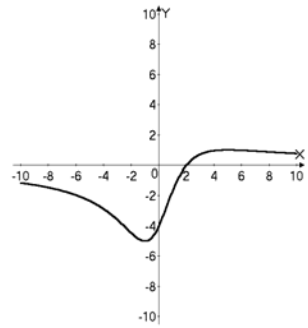
$x = \pm 3$; $f(0) = 10$; $f(3) = \min = -8$; $f(6) = \max = 28$.

4. а)

$f(x) = 10\dfrac{x-2}{x^2+5}$;

$f'(x) = \dfrac{10x^2 + 50 - 20x^2 + 40x}{(x^2+5)^2} =$

$= \dfrac{-10(x^2 - 4x - 5)}{(x^2+5)^2} = 0$; $x_{max} = 5$, $x_{min} = -1$;



f (x) возрастает на $x \in [-1; 5]$;
убывает на $x < -1$, $x > 5$;

$f(5) = \dfrac{30}{30} = 1$; $f(-1) = \dfrac{-30}{6} = -5$;

б) из рисунка видно, что $f(x) > -4$ при $x < -2{,}5$, $x > 0$.

КАРТОЧКА 6.

1. находите экстремумы, смотрите значения в них и в концевых точках отрезка. Что больше, то max. Что меньше, то min.

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x + 1$ $f'(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$ $x = \pm 2$;

f (x) убывает: $x \in (-2; 2)$ возрастает на $x < -2$, $x > 2$.

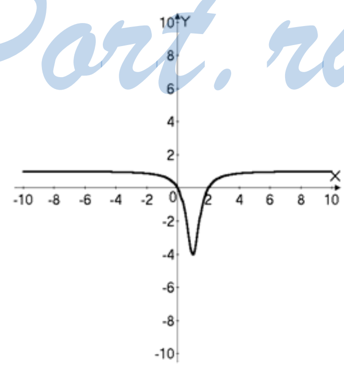
3. $\begin{cases} 2a + b = 24 \\ ab = y \end{cases}$; $\begin{cases} b = 24 - 2a \\ y = 24a - a^2 \end{cases}$; $\begin{matrix} y' = 24 - 4a = 0 \\ a = 6 \quad b = 12 \quad S = 72 \end{matrix}$.

4. а) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x}{4x^2 - 8x + 5} = 1 - \dfrac{5}{(4x^2 - 8x + 5)}$;

$f'(x) = \dfrac{5(8x-8)}{(4x^2 - 8x + 5)^2} = 0$; $x = 1$;

f (x) возрастает: $x > 1$;
убывает: $x < 1$;

$x_{min} = 1$; $f(1) = \dfrac{4-8}{-4+5} = -4$;



б) $f(x) = \left|\dfrac{4x^2 - 8x}{4x^2 - 8x + 5}\right|$;

Из рисунка видно, что $x = 1$ – критическая точка; (1; 4) – max.