А.В. Тронин

Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 10 класс

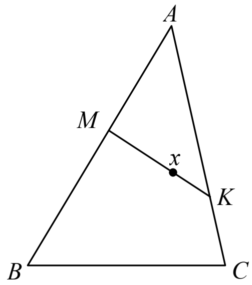
к пособию «Дидактические материалы по геометрии для 10 класса / Б.Г. Зив. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 2003»

Учебно-практическое пособие

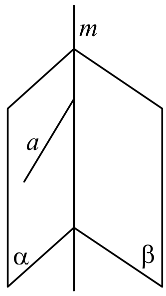
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1.

С-1.



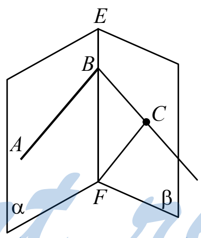
1. Дано: $M \in AB$, $K \in AC$, $x \in MK$; A, B, C не лежат на одной прямой.
Доказать: $x \in (ABC)$.
Доказательство:
$M \in (ABC)$; $K \in (ABC)$; $MK \in (ABC)$, т.к. $x \in MK$, то $x \in (ABC)$.
Ч.т.д.



2. Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta \neq \varnothing$.
Найти: пересекаются ли a и m.

Решение.
Допустим, что прямые a и m не пересекаются. $m \in \alpha$, $a \in \alpha$. Значит, $a \parallel m$. Значит, $a \parallel \beta$. Это противоречит условию. Значит, a и m пересекаются.
Ответ: a и m пересекаются.

С-2.

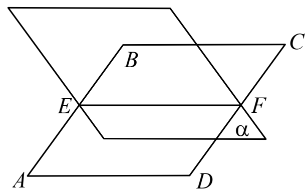


1. Дано: $\alpha \cap \beta = EF$, $AB \subset \alpha$, $C \in \beta$.
В плоскости β через т. C провести прямую так, чтобы она 1) пересекала AB; 2) скрещивалась с AB; 3) была параллельна AB.

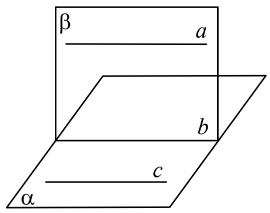
1) BC;
2) FC;
3) невозможно провести, если такую прямую возможно было провести, то т.к. она лежала бы в плоскости β и была параллельна AB, получилось бы, что $AB \subset \beta$, либо $AB \parallel \beta$, что противоречит условию.

2.
Дано: $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Доказать: $B_1C_1 = BC$.
Доказательство: Т.к. $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$, то $BB_1 \parallel CC_1$, а т.к. $BB_1 = CC_1$, то BB_1C_1C — параллелограмм $\Rightarrow B_1C_1 = BC$. Ч.т.д.

С-3.

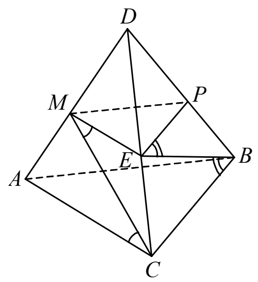


1. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $E \in AB$, $F \in CD$, $BE{:}EA = CF{:}FD$. Через E и F проведена плоскость α.
Доказать: $BC \parallel \alpha$.
Доказательство:
Т.к. $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{CF}{FD}$ и $AB = CD$ ($ABCD$ — параллелограмм), то $BE = CF$ и $BEFC$ — параллелограмм, тогда $EF \parallel BC$. Значит, $BC \parallel \alpha$. Ч.т.д.

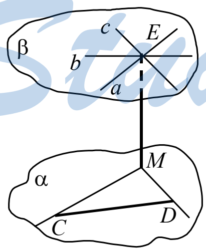


2.
Дано: $a \parallel \alpha$, $c \parallel a$, $\beta \cap \alpha = b$.
Доказать: $b \parallel c$.
Решение.
Т.к. $a \parallel \alpha$, то $a \parallel b$; т.к. $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$. Ч.т.д.

С-4.



1.
Дано: $\angle EMC = \angle MCA$, $\angle PEB = \angle EBC$.
Доказать: $MEP \parallel ABC$.
Доказательство.
Т.к. $\angle EMC = \angle MCA$, то $ME \parallel AC$;
т.к. $\angle PEB = \angle EBC$, то $EP \parallel BC$.
Значит, $(MEP) \parallel (ABC)$.

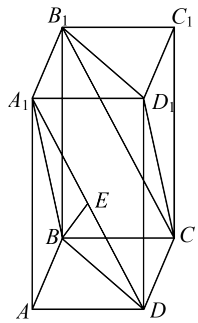


2.
Дано: $\alpha \parallel \beta$, $CD \subset \alpha$, $E \in \beta$, $M \in \alpha$.
Построить: $ECD \cap \beta$, $EMC \cap \beta$, $EMD \cap \beta$.

Решение: $MC \parallel \beta$, $MD \parallel \beta$, $CD \parallel \beta$ т.к. $\alpha \parallel \beta$.
$(ECD) \cap \beta = b$, $CD \parallel b$ т.к. $CD \parallel \beta$.
$(EMC) \cap \beta = a$, $MC \parallel a$ т.к. $MC \parallel \beta$.
$(EMD) \cap \beta = c$, $MD \parallel c$ т.к. $MD \parallel \beta$.

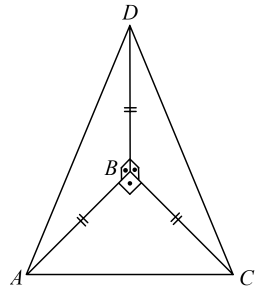
С-5.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед,
$BE \subset A_1BD$.
Доказать: $BE \parallel B_1D_1C$.
Доказательство:
$(A_1BD) \parallel (B_1D_1C)$ (т.к. $A_1B \parallel D_1C$ и $BD \parallel B_1D_1$);
т.к. $BE \in (A_1BD)$, то $BE \parallel (B_1D_1C)$. Ч.т.д.

2.



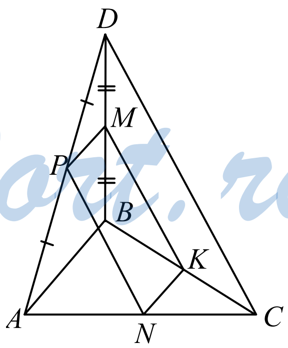
Дано: $DABC$ — тетраэдр, $\angle DBC = \angle DBA =$
$= \angle ABC = 90°$, $BD = BA = BC = 2$ см.
Найти $S(ADC)$.
Решение.
$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ см,
аналогично $DC = 2\sqrt{2}$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см.
$\Rightarrow \Delta ADC$ — равносторонний,
$\angle ADC = 60°$

$$S(ADC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \text{см}^2.$$

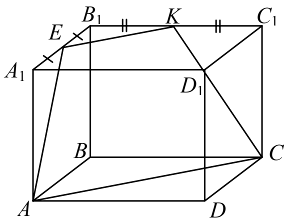
Ответ: $2\sqrt{3}$ см^2.

С-6.

1.



Дано: $DABC$ — тетраэдр, $P \in AD$,
$M \in BD$, $K \in BC$, $AP = PD$, $DM = MB$.
Построить: сечение плоскостью PMK.
Решение.
1) проведем прямую PM;
2) проведем прямую MK;
3) т.к. $AP = PD$ и $BM = MD$, то PM — средняя линия в ΔABD.
Значит, $PM \parallel AB$;
4) в плоскости (ABC) проведем прямую KN, параллельную PM; $N \in AC$;
5) проведем прямую PN;
6) $(PMKN)$ — сечение тетраэдра $DABC$.



2.
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — квадрат со стороной 8 см, боковые грани прямоугольники, $AA_1 = 3$ см. E — середина A_1B_1.
Построить: сечение плоскостью AEC.
Найти: $P_{\text{сеч.}}$.

Решение.
1) K — середина B_1C_1;
2) $(EKCA)$ — сечение искомое, т.к. $EK \parallel A_1C_1 \parallel AC$.

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2} \text{ см.}$$

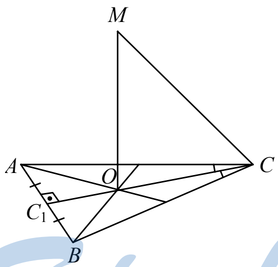
$$EK = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$EA = KC = \sqrt{AA_1^2 + \left(\frac{1}{2}A_1B_1\right)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ см.}$$

$$P(AEKC) = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5 + 5 = (10 + 12\sqrt{2}) \text{ см.}$$

Ответ: $(10 + 12\sqrt{2})$ см.

С-7.



1. Дано: ABC — правильный треугольник, O — его центр, $OM \perp ABC$, $OM = 1$, $AB = 3$.
Найти: расстояния от т. M до вершин ΔABC.
Решение.
CC_1 — высота, медиана ΔABC.

$$CC_1 = \sqrt{AC^2 - AC_1^2} = \sqrt{9 - \frac{1}{4}9} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

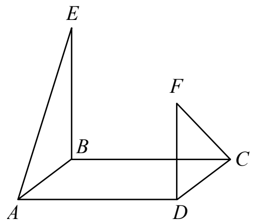
$$CO = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$MC = \sqrt{MO^2 + OC^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

$MC = MA = MC$ (т.к. ΔABC — правильный и O — центр).
Ответ: 2.

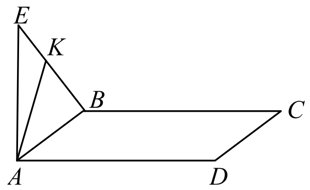
2.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм,
$BE \perp ABC$, $FD \perp ABC$.
Доказать: $ABE \parallel DFC$.
Доказательство:
Т.к. $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$; т.к. $EB \perp (ABC)$ и $FD \perp (ABC)$, то $EB \parallel FD$. Значит $(AEB) \parallel (FCD)$. Ч.т.д.



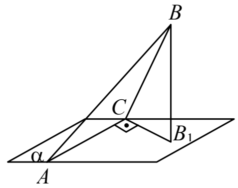
С-8.

1. Дано: $ABCD$ — квадрат,
$EA \perp BC$, $K \in EB$.
Доказать: $BC \perp AK$.
Доказательство:
Т.к. $BC \perp EA$ и $BC \perp AB$, то $BC \perp (AEB)$; т.к. $AK \in (AEB)$, то $BC \perp AK$. Ч.т.д.



2.

Дано: $AC \in \alpha$, ΔABC, $\angle C = 90°$, $BB_1 \perp \alpha$, $CB_1 \perp AC$, $AB = 25$, $AC = 24$.
Найти: $S(\Delta ABC)$.
Решение.

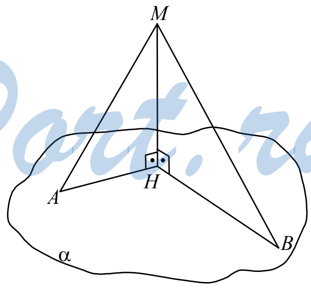


$$BC = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 \Rightarrow S(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 = 84.$$

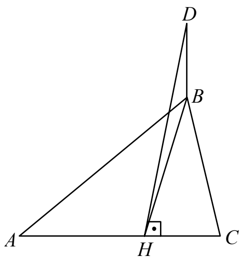
Ответ: 84.

С-9.

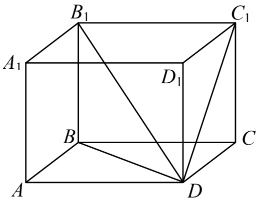
Дано: $M \notin \alpha$; $A, B \in \alpha$; AH и HB проекции MA и MB на α.
$MA = 18$, $MB = 2\sqrt{109}$, $\frac{AH}{BH} = \frac{3}{4}$.
Найти: $P(M, \alpha)$.
Решение.
$AH = 3x$, $BH = 4x$.
$MH^2 = MA^2 - AH^2 = 324 - 9x^2$.
$MH^2 = MB^2 - BH^2 = 436 - 16x^2$.
$324 - 9x^2 = 436 - 16x^2$; $7x^2 = 112$, $x = 4$.
$MH = \sqrt{436 - 16 \cdot 16} = \sqrt{180} = 3\sqrt{20}$.
Ответ: $3\sqrt{20}$.



С-10.



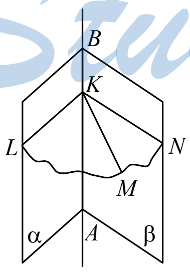
1. Дано: ΔABC — равнобедренный, BH — высота в ΔABC. $AB = BC = 25$, $AC = 48$, $BD \perp ABC$, $BD = \sqrt{15}$.
Найти: $P(D, AC)$.
Решение.
$AH = \frac{1}{2}AC$ т.к. ΔABC равнобедренный ($AB = BC$).
$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = 7$.
Т.к. $BD \perp BH$ и $BH \perp AC$, то по ТТП $DH \perp AC$.
$DH = \sqrt{BH^2 + BD^2} = \sqrt{49 + 15} = 8$. Ответ: 8.



2.
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — квадрат со стороной 2 см, боковые грани — прямоугольники.
$B_1D = 5$ см.
Найти: $\angle(B_1B, ABC)$, $\angle(B_1D; (DD_1C_1))$.

Решение.
$\angle(B_1D; (ABC)) = \angle BDB_1$ (т.к. параллелепипед прямоугольный).
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ см.
$\cos\angle BDB_1 = \frac{BD}{B_1D} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. $\angle(B_1D; (DD_1C_1)) = \angle B_1DC_1$.
$B_1C_1 = 2$ см. $\sin\angle B_1DC_1 = \frac{B_1C_1}{B_1D} = \frac{2}{5}$. Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{5}$; $\arcsin\frac{2}{5}$.

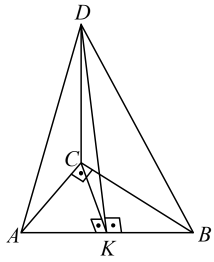
С-11.



1. Дано: AB — ребро двугранного угла, образованного плоскостями α и β. $\angle LKN$ — линейный угол этого двугранного угла. $M \in LKN$.
Найти $\angle(KM, AB)$.
Решение.
Т.к. плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла, то любая прямая, лежащая в плоскости линейного угла, перпендикулярна ребру двугранного угла.

Ответ: 90°.

2.



Дано: ΔABC — прямоугольный ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$, $AC = a$, $DC \perp ABC$, $DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найти: $\angle(ADB, ACB)$.

Решение.

$DK \perp AB$, $CK \perp AB$, $\angle((DAB), (ABC)) = \angle DKC$.

$DC \perp CK$, т.к. $DC \perp (ABC)$ и $CK \in (ABC)$.

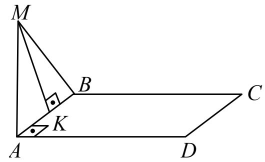
$CK = AC \cdot \sin\angle A = a \cdot \frac{1}{2}$. $\mathrm{tg}\angle DKC = \frac{CD}{CK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot a\sqrt{3}}{2 \cdot a} = \sqrt{3}$.

$\angle DKC = 60°$.

Ответ: 60°.

С-12.

1.



Дано: $\Delta AMB \perp ABCD$ ($ABCD$ — прямоугольник).

Доказать: $\angle MAD = 90°$.

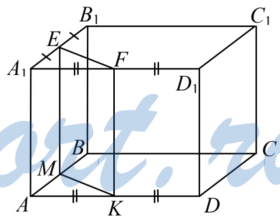
Доказательство:

$\angle((MAB), (ABC)) = 90°$.

MK — перпендикуляр к плоскости (ABC), $K \in AB$, $MK \perp AD$.

Т.к. $AD \perp AB$ и $DA \perp MK$, то $AD \perp (AMB)$, т.к. $AM \in (AMB)$, то $AD \perp MA$. Значит, $\angle MAD$ — прямой. Ч.т.д.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, E, F, K — середины A_1B_1, A_1D_1, AD, $AB = 4$, $AA_1 = 6$, $A_1C = \sqrt{56}$.

Построить: сечение EFK.

Доказать: $EFK \perp ABC$.

Найти: AD.

Решение:

1) проведем EF;

2) проведем FK;

3) в плоскости (ABC) проведем прямую MK, параллельную EF;

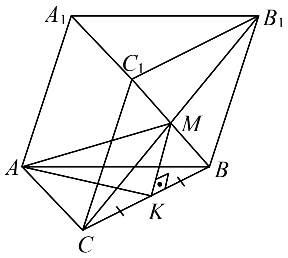
4) ($EFKM$) — искомое сечение.

M — середина AB. Т.к. F — середина A_1D_1 и K — середина AD, то $FK \parallel AA_1$. Значит, $FK \perp (ABC)$. Значит, $(EFK) \perp (ABC)$.

2) $AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = \sqrt{56-36} = \sqrt{20}$;

$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{20-16} = 2$. Ответ: 2.

С-13.



1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма.

$AA_1 = 2\sqrt{3}$,

$AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, M — центр CC_1B_1B.

Найти: $\angle(AM, (ABC))$.

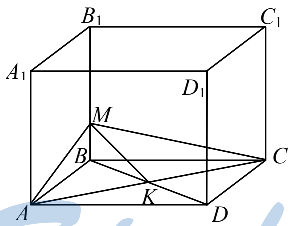
Решение:

$\angle(AM, (ABC)) = \angle MAK$, где K — середина BC (т.е. $MK \perp ABC$, т.к. $MK \parallel BB_1$).

AK — высота и медиана в ΔABC.

$AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9} - \frac{3}{9}} = 1$. $MK = \frac{1}{2} BB_1 = \sqrt{3}$.

$\text{tg}\angle MAK = \frac{MK}{AK} = \frac{\sqrt{3}}{1}$; $\angle MAK = 60°$. Ответ: 60°.



2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, AB = 4 см, $\angle((AMC), (ABC)) = 45°$.

Найти: $S(AMC)$.

Решение:

Т.к. $ABCD$ — квадрат,

то $BD \perp AC \Rightarrow BK \perp AC$.

По Т.Т.П. $MK \perp AC$, значит,

$\angle MKB = 45°$.

$AC = BD = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ см, $BK = 2\sqrt{2}$ см.

Т.к. $\angle MKB = 45°$, то прямоугольный ΔKBM — равнобедренный,

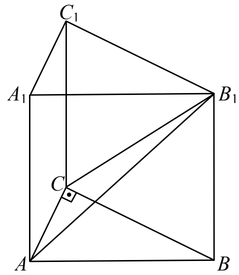
$MK = \sqrt{8+8} = 4$ см.

$S(AMC) = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: $8\sqrt{2}$ см^2.

(Т.Т.П. — теорема о трех перпендикулярах).

С-14.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, ΔABC — прямоугольный ($\angle C = 90°$).
$AC = 4$, $CB = 3$, $\angle B_1AC = 60°$.
Найти: $S_{бок.}$.
Решение:
Т.к. $CC_1 \perp AC$ и $AC \perp BC$,
то $AC \perp (CBB_1) \Rightarrow AC \perp CB_1$.
ΔACB_1 — прямоугольный;

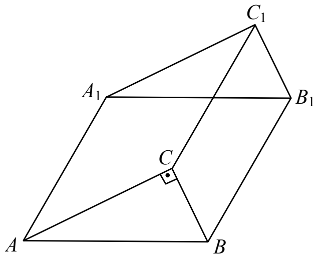
$CB_1 = \mathrm{tg}\angle B_1AC \cdot AC = 4\sqrt{3}$. $BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2} = \sqrt{48-9} = \sqrt{39}$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

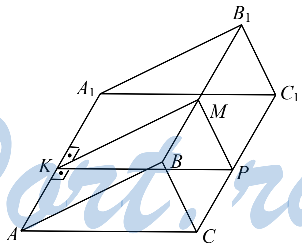
$S_{б.п.} = P(ABC) \cdot BB_1 = (AB + AC + BC)BB_1 = (5 + 4 + 3)\sqrt{39} = 12\sqrt{39}$.

Ответ: $12\sqrt{39}$.

С-15.



1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма, ΔACB — прямоугольный ($\angle C = 90°$).
$AA_1C_1C \perp ABC$.
Доказать: CC_1B_1B — прямоугольник.
Доказательство:
Т.к. $(AA_1C_1) \perp (ABC)$ и $BC \perp AC$, то $(AA_1C_1) \perp BC$, значит, $BC \perp CC_1$.
Значит, B_1BCC_1 — прямоугольник. Ч.т.д.



2. Дано: $S_1 = 70$ см^2, $S_2 = 150$ см^2, $\angle MKP = 60°$, $AA_1 = 10$ см.
$S_{AA_1C_1C} = 150$ см^2. $S_{ABB_1A_1} = 70$ см^2.

Найти: $S_{бок}$ — ?
Решение:
$AA_1 \perp (MKP) \Rightarrow KP \perp AA_1$, $KM \perp AA_1$
Т.к. AA_1C_1C параллелограмм,
то $S_{AA_1C_1C} = KP \cdot AA_1 = 150$ см^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow KP = \dfrac{150}{AA_1} = \dfrac{150}{10} = 15$ см.

Т.к. ABB_1A параллелограмм, то $S_{ABB_1A_1} = KM \cdot AA_1 = 70$ см^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow KM = \dfrac{70}{AA_1} = \dfrac{70}{10} = 7$ см.

По теореме косинусов из ΔKMP.

$$MP^2 = KM^2 + KP^2 - 2\cdot KM\cdot KP\cdot\cos\angle MKP = 49 + 225 - 2\cdot 15\cdot 7\cdot\frac{1}{2} =$$

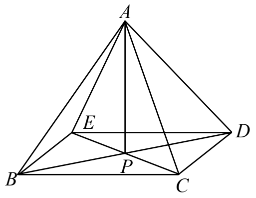
$= 49 + 225 - 105 = 169 \Rightarrow MP = 13$.

Т.к. $AA_1 \perp (MPK) \Rightarrow AA_1 \perp MP$, т.к. $AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow BB_1 \perp MP$.

Тогда $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot MP = 10\cdot 13 = 130$ см^2 (т.к. $BB_1 = AA_1$ и BB_1C_1C параллелограмм) $\Rightarrow S_{бок.} = 70 + 150 + 130 = 350$ см^2.

Ответ: 350 см^2.

С-16.



1. Дано: $AP = 4$ см, $BD = EC = 6\sqrt{2}$ см.

Найти: $S_{п.п.}$.

Решение:

$BEDC$— квадрат $\Rightarrow BP = PD =$

$= \dfrac{BD}{2} = 3\sqrt{2}$ см.

AP — высота, т.к. пирамида правильная $\Rightarrow \angle APB = 90° \Rightarrow$

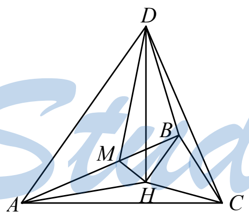
$\Rightarrow AB = AE = AD = AC = \sqrt{16+18} = \sqrt{34}$ см.

$$S_{BEDC} = \frac{1}{2}EC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2} = 36 \text{ см}^2.$$

Высота ΔABC на основание BC, т.к. он равнобедренный, равна:

$$h = \sqrt{AC^2 - \frac{BC^2}{4}} = 5 \text{ см} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 = 15 \text{ см}^2.$$

$S_{пир.} = 4\cdot 15 + 36 = 96$ см^2. Ответ: 96 см^2.



2. Дано: $ABCD$ — правильная треугольная пирамида, $AB = a$, DH — высота, $DH = 2a$.

Найти: $\angle DAH$; $\angle DMH$ — ?

Решение:

AH — радиус окружности, описанной около ΔABC,

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}a;$$

$$\left(\text{т.к } AH = \frac{AM}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}\right)$$

из ΔDHA: $\angle DHA = 90° \Rightarrow \text{tg}(DAH) = \dfrac{DH}{AH} = \dfrac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAH = \text{arctg}\, 2\sqrt{3}$.

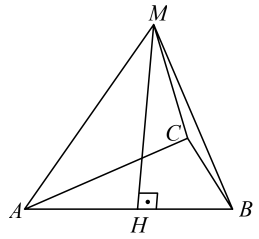
MH — радиус окружности, вписанной в ΔABC;

$MH = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a \Rightarrow$ из ΔMDH: $\text{tg}(MDH) = \dfrac{DH}{MH} = \dfrac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DMH = \text{arctg}(4\sqrt{3})$. Ответ: $\text{arctg}\, 2\sqrt{3}$, $\text{arctg}(4\sqrt{3})$.

С-17.

1. Дано: $MACB$ — пирамида, ΔABC прямоугольный ($\angle C = 90°$), $\angle CAB = 30°$, $BC = a$, $\angle MAH = 60°$, где MH — высота пирамиды.
Найти: MH — ?
Решение:
Т. к. все ребра равнонаклонены к основанию, то H — центр описанной окружности ΔABC.

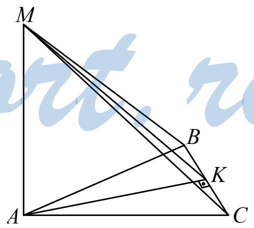


Высота MH, где $H \in AB$, т.к. центр описанной окружности ABC ($\angle C = 90°$) $\in AB$, и $AH = HB$; из ΔABC: $\sin 30° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 2a \Rightarrow AH = a$; из ΔAMH: $\text{tg}60° = \dfrac{MH}{AH} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{MH}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow MH = a\sqrt{3}$. Ответ: $a\sqrt{3}$.

2. Дано: $MA \perp (ABC)$, $MABC$ — пирамида. $\angle(MBC, ABC) = 60°$, $AB = AC = 10$, $BC = 16$.
Найти: $S_{\text{бок.}}$.
Решение:
ΔABC — равнобедренный $\Rightarrow AK$ — высота и медиана $\Rightarrow BK = KC = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow AK = \sqrt{100 - 64} = 6$; т.к. $AM \perp (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow AM \perp AK$



AK — высота и медиана ΔABC, MK — медиана ΔMBC, а т.к. $MA \perp (ABC)$, то $MC = MB$ и ΔMBC — равнобедренный $\Rightarrow MK$ — высота.

Следовательно $MK \perp BC$ и $AK \perp BC \Rightarrow \angle AKM = \angle(MBC, ABC) = 60°$.

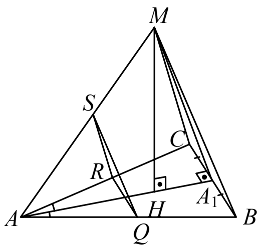
$\Rightarrow$ из ΔAKM: $\text{tg}(60°) = \dfrac{AM}{AK} \Rightarrow AM = 6\sqrt{3} \Rightarrow MK = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AMC} = S_{ABM} = \dfrac{1}{2} AM \cdot AB = \dfrac{1}{2} 6\sqrt{3} \cdot 10 = 30\sqrt{3}$;

$S_{BMC} = \dfrac{1}{2} MK \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 60\sqrt{3} + 96$.

Ответ: $60\sqrt{3} + 96$.

С-18.

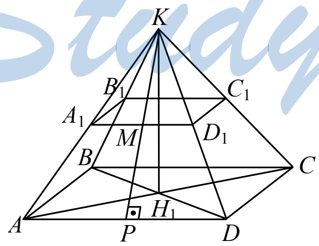


1. Дано: $MABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB = a$, грани наклонены под углом 60°, через среднюю линию основания, параллельно боковой грани, проведено сечение.
Найти: $S_{\text{сеч.}}$.
Решение:
QR — средняя линия основания.

$QR \parallel CB$, $QR = \dfrac{1}{2} CB$, $QS \parallel BM \Rightarrow QSR$ — искомое сечение.
Из подобия следует, что его площадь в четыре раза меньше площади ΔBMC. $AA_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$, $A_1H = \dfrac{\sqrt{3}a}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow MA_1 = \dfrac{A_1H}{\cos 60°} = \dfrac{\sqrt{3}a}{6} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow S(MBC) = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{3} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{сеч.}} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{24}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{24}$.



2. Дано: $ADCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная четырехугольная пирамида.
$AB = 8$, $A_1B_1 = 6$.
Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°.
Найти: $S_{\text{бок.}}$ — ?
Решение:
Т.к. $\angle KPH_1 = 45°$, $\angle KH_1P = 90°$
ΔKPH_1 — равнобедренный, $KH_1 = PH_1$

т.к. ΔAKD — равнобедренный, то P — середина $AD \Rightarrow PH_1$ — средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow PH_1 = \frac{1}{2}AB = 4$.

$KP = \sqrt{KH_1^2 + PH_1^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

т.к. ΔA_1KM и AKP подобны, то $\frac{KM}{KP} = \frac{A_1M}{AP}$, но $A_1M = \frac{1}{2}A_1D_1 = 3$.

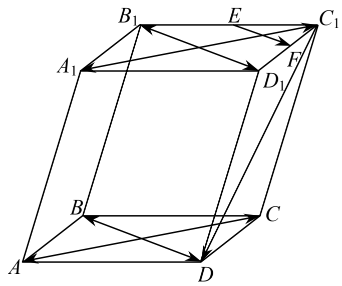
$AP = \frac{1}{2}AD = 4 \Rightarrow KM = KP \cdot \frac{A_1M}{AP} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} = 3\sqrt{2}$.

$MP = KP - KM = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{AA_1D_1D} = \left(\frac{A_1D_1 + AD}{2}\right) \cdot MP = \left(\frac{6+8}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

$S_{\text{бок.}} = 4 \cdot 7\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$. Ответ: $28\sqrt{2}$.

С-19.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — прямоугольник, $B_1E = EC_1$, $C_1F = FD_1$.

Решение:

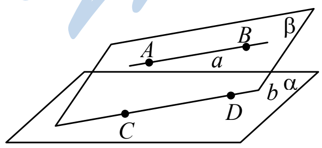
1) векторы, сонаправленные $\overrightarrow{EF}$: $\overrightarrow{B_1D_1}$; $\overrightarrow{BD}$ (т.к. сонаправленность: если векторы параллельны или лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление);

2) векторы, противоположно направленные $\overrightarrow{AB_1}$: $\overrightarrow{C_1D}$ ($AB_1 \parallel C_1D$); $\overrightarrow{B_1A}$;

3) имеют длину, равную $\overrightarrow{A_1C_1}$: $\overrightarrow{C_1A_1}$; $\overrightarrow{B_1D_1}$; $\overrightarrow{D_1B}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CA}$.

2. Дано: $a \not\subset \alpha$, $a \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = b$, $A, B \in a$; $C, D \in b$.

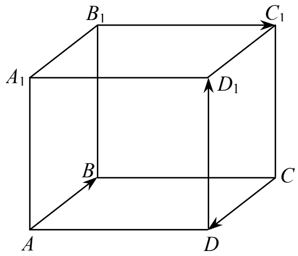
Найти: при каком условии $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — коллинеарны.



Решение:

$\overrightarrow{AB}$ коллинеарен $\overrightarrow{CD}$, если $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$.

С-20.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Найти: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}$ — ?

Решение:

$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C_1D_1}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}=$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}$

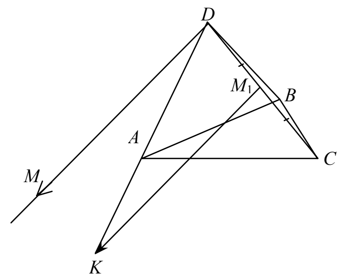
Ответ: $\overrightarrow{AD_1}$.

2. Доказать, что: $(\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1A_1})\uparrow\downarrow(\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB})$.

Доказательство: $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{CA_1}$;

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C}$; $\overrightarrow{CA_1}\uparrow\downarrow\overrightarrow{A_1C}$. Ч.т.д.

С-21.



1. Дано: $DABC$ — тетраэдр,

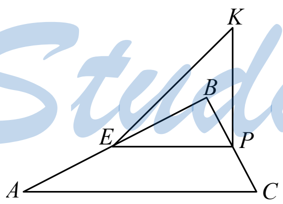
$\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Изобразить: $\overrightarrow{DM}$.

Решение:

$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right|=|\overrightarrow{DM_1}|$; $\left|2\overrightarrow{DA}\right|=|\overrightarrow{DA}|\cdot 2=\left|\overrightarrow{DK}\right|$;

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{DM_1}=\overrightarrow{M_1K}$, отложим от точки D вектор $\overrightarrow{M_1K}$, получим $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{M_1K}$ — искомый.



2. Дано: $K\notin ABC$, $AE=EB$; $BP=PC$.

Выразить: $\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KP}$ через $\overrightarrow{AC}$.

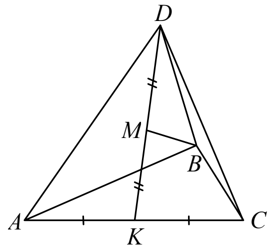
Решение:

$\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{PE}$; EP — средняя линия $\Delta ABC\Rightarrow|\overrightarrow{PE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$;

$\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{PE}\Rightarrow\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

С-22.



1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AK = KC$, $DM = MK$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$. $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

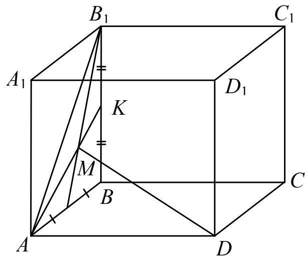
Разложить: $\overrightarrow{BM}$ по $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение:

$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$;

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$; $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} - \vec{b}$.

Ответ: $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} - \vec{b}$.



2. Дано: M — точка пересечения медиан ΔAB_1B, $\overrightarrow{DM}$ — по $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$.

Решение:

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB}\right)\right)$;

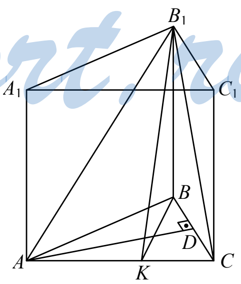
$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC}$;

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DD_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$;

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DD_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Ответ: $\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DD_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

С-23.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма.

$AB = 2$, $AA_1 = 1$.

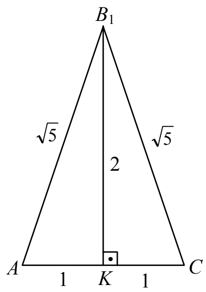
Решение:

1) $S_{\text{п.п.п.}}$ — ?

$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 2 \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 3 = 6$;

$AD = \sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{полн. пов.}} = 6 + 2\sqrt{3}$.



2) S_{AB_1C} — ?

Из ΔABB_1: $AB_1 = \sqrt{AB^2 + B_1B^2} = \sqrt{5} = CB_1 \Rightarrow$

$B_1K = 2 \Rightarrow S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$

3) Найти $\angle B_1AB$ — ?

$\sin(B_1AB) = \dfrac{B_1B}{AB_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \angle B_1AB = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right).$

4) $\angle B_1KB$ — ?

$\angle B_1BK = 90°$; $B_1K = 2$; $B_1B = 1 \Rightarrow \sin(\angle B_1KB) = \dfrac{B_1B}{B_1K} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\angle B_1KB = 30°.$

5) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{C_1C}$ — ?

$\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA_1}$; $2\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{C_1C}$; $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{C_1A_1}$;

$\overrightarrow{C_1A_1} \parallel \overrightarrow{CA} \Rightarrow |\overrightarrow{C_1A_1}| = |\overrightarrow{AC}| = 2.$

6) Доказать, что $A_1C_1 \parallel ACB_1$.

$A_1C_1 \parallel AC$; $AC \in (ACB_1) \Rightarrow A_1C_1 \parallel ACB_1$.

Ответ: 1) 6; 2) 2; 3) $\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 4) 30°; 5) 2.

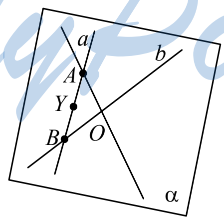
ВАРИАНТ 2.

С-1.

1.

Дано: $a \cap b = 0$, $A \in a$, $B \in b$, $Y \in AB$.

Доказать, что a, b и Y лежат в одной плоскости.



Доказательство:

a и b — лежат в одной плоскости α; $A \in a$ и $B \in b \Rightarrow A, B \in \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $A, B \in AB \Rightarrow AB \in \alpha$, т.к. $Y \in AB \Rightarrow Y \in \alpha$. Ч.т.д.

2.

Дано: $\alpha \cap \beta = c$, $a \cap \beta = A$, $b \cap \alpha = B$.

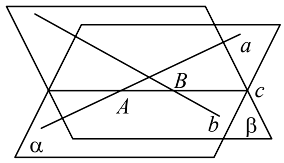
Доказать, что AB — линия пересечения α и β.

Доказательство:

c — линия пересечения α и β.

$b \in \beta$, $c \in \beta \Rightarrow c \cap b = B$; аналогично:

$a \cap c = A \Rightarrow A, B \in c \Rightarrow AB$ совпадает с c. Ч.т.д.



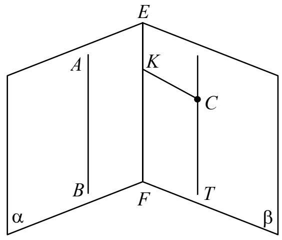
С-2.

1. В β через C провести прямую так, что

1) она пересекала AB. Невозможно, т.к. $AB \parallel \beta$.

2) скрещивалась с AB — соединить C с EF — CK.

3) параллельна AB: провести параллельно EF — прямую CT ($CT \parallel EF \parallel AB$).



2.

Дано: $A_1C_1 = AC$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$.

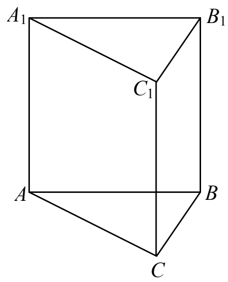
Доказать, что $CC_1 \parallel BB_1$.

Доказательство:

Т.к. $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1C_1 = AC \Rightarrow AA_1C_1C$ — параллелограмм.

$A_1B_1 = AB$, $A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow AA_1B_1B$ — параллелограмм $\Rightarrow$

$AA_1 \parallel B_1B$ и $AA_1 \parallel C_1C \Rightarrow CC_1 \parallel BB_1$. Ч.т.д.



С-3.

1. Дано: $E \in AB$; $F \in BC$; $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{2}{3}$; $AC \parallel \alpha$.

Найти: $BF : FC$.

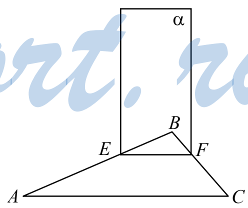
Решение:

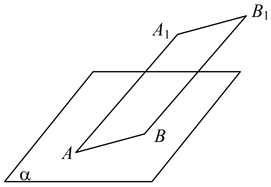
$AC, EF \in (ABC)$

Т.к. $EF \in \alpha$, а $AC \parallel \alpha \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме Фалеса $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{BF}{FC} \Rightarrow BF : FC = \dfrac{2}{3}$.

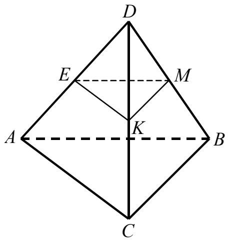
Ответ: 2/3.





2. Дано: $A, B \in \alpha$; $AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = BB_1$.
Доказать, что $A_1B_1 \parallel \alpha$.
Доказательство:
Т.к. $AA_1 = BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1B_1B$ — параллелограмм $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$, т.к. $AB \in \alpha \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$. Ч.т.д.

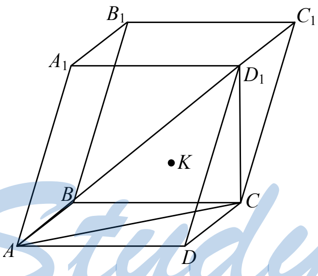
С-4.



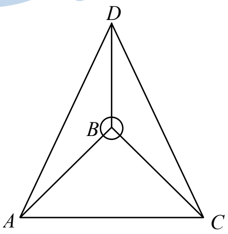
1. Дано: $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$.
Доказать, что $EKM \parallel ABC$.
Доказательство:
Т.к. $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC}$ и $\angle ADC$ — общий $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta EDK \Rightarrow AC \parallel EK$.
Аналогично из ΔCDB и ΔKDM:
$KM \parallel CB$; $EK \cap KM = K$; $AC \cap KM = K \Rightarrow EKM \parallel ABC$. Ч.т.д.

2. Дано: $\alpha \parallel \beta$; $A, C \in \beta$; $B, D \in \alpha$.
Построить: $ABC \cap \alpha$, $BDC \cap \beta$.
Построение: Строим $BK \parallel AC \Rightarrow$ прямая $BK = ABC \cap \alpha$.
Строим $CN \parallel BD \Rightarrow$ прямая $CN = BDC \cap \beta$.

С-5.



1. Дано: $AK \subset AD_1C$.
Доказать, что $AK \parallel A_1C_1B$.
Доказательство:
Т.к. дан параллелепипед $\Rightarrow$
$\Rightarrow AC \parallel A_1C_1$ и $BC_1 \parallel AD_1$;
$AD_1 \cap AC = A$; $A_1C_1 \cap BC_1 = C \Rightarrow$
$\Rightarrow (AD_1C) \parallel (A_1C_1B)$; $AK \subset AD_1C$
$\Rightarrow AK \parallel A_1C_1B$. Ч.т.д.



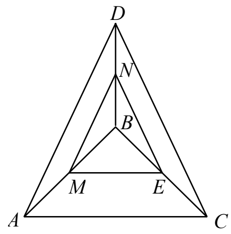
2. Дано: $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 60°$;
$BD = BA = BC = 4$ см.
Найти: S_{ADC} — ?
Решение:
ΔABD — равнобедренный, т.к. $AB = BD$;
$\angle ABD = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ равносторонний,
$\Delta ABD = \Delta DBC = \Delta CBA \Rightarrow AD = DC = CA = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ADC$ — равносторонний, со стороной 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ADC} = \frac{1}{2} AD^2 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

С-6.



1. Дано: $DA = DC = 13$, $AC = 10$, $BE = EC$, $(EMN) \parallel (ADC)$

Найти: S_{EMN} — ?

Решение:

Т.к. $ME \parallel AC$ и $BE = EC \Rightarrow ME = \frac{1}{2} AC$,

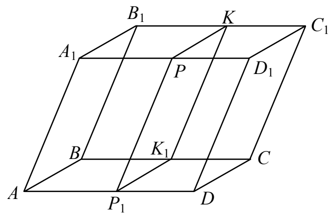
а $MN = NE = \frac{1}{2} AD \Rightarrow ME = 5$;

$MN = NE = \frac{13}{2}$.

Пусть NK — высота, а значит и медиана $\Delta MNE \Rightarrow$

$\Rightarrow NK = \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{25}{4}} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow S_{MNE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$.

Ответ: 15.



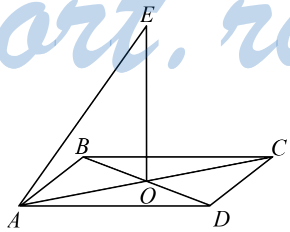
2. Дано: $P \in A_1D_1$; $K \in B_1C_1$.

Построить сечение через P и K и параллельное AA_1.

Построение:

Строим $PP_1 \parallel AA_1$ и $KK_1 \parallel BB_1$. $PKK_1B_1 \parallel AA_1$. PKK_1B_1 — требуемое сечение.

С-7.



1. Дано: $\angle BAD = 90°$, $AB = \sqrt{2}$, $OE \perp (ABC)$, $OE = \sqrt{3}$.

Найти: AE.

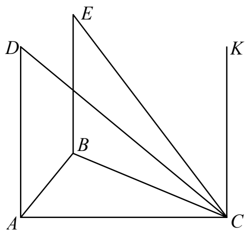
Решение: $OE \perp (ABC) \Rightarrow \angle AOE = 90°$;

$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2+2} = 1$

$\Rightarrow AE = \sqrt{1+3} = 2$.

Ответ: 2.

2.



Дано: AD и $BE \perp (ABC)$.

Найти взаимное расположение линии пересечения (ADC) и (EBC) и AD и BE.

Решение:

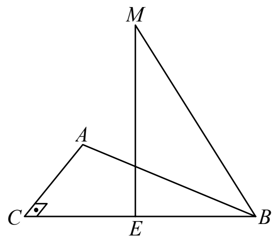
$AD \perp (ABC)$; $BE \perp (ABC) \Rightarrow AD \parallel BE$;

$(ADC) \cap (EBC) = CK$,

$CK \perp (ABC) \Rightarrow CK \parallel AD \parallel BE$.

Ответ: они параллельны.

С-8.



1.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$,

$E \in BC$, $EM \perp (ABC)$.

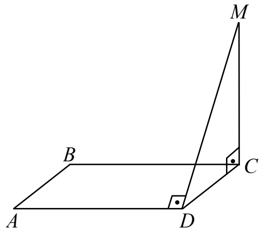
Доказать, что $AC \perp MB$.

Доказательство:

$ME \perp (ABC) \Rightarrow AC \perp ME$;

$AC \perp BE \Rightarrow AC \perp (MEB) \Rightarrow AC \perp MB$.

Ч.т.д.



2.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 4$, $CD = 6$, $MC \perp (ABC)$, $MD \perp AD$.

Найти: $S_{\text{пар.}}$ — ?

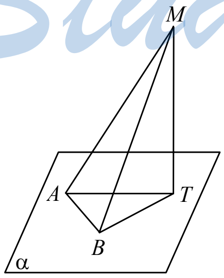
Решение:

По теореме о 3-х перпендикулярах $CD \perp AD$ ($MD \perp AD$; $MC \perp ABC$; MC — перпендикуляр), CD — проекция $MD \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ — прямоугольник $\Rightarrow S_{ABCD} = 4 \cdot 6 = 24$.

Ответ: 24.

С-9.



Дано: $MT \perp \alpha$, $\angle MAT = \angle MBT = 30°$,

$\angle AMB = 90°$, $MT = \sqrt{2}$.

Найти: AB.

Решение:

Из ΔAMT: $\angle MAT = 30° \Rightarrow AM = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

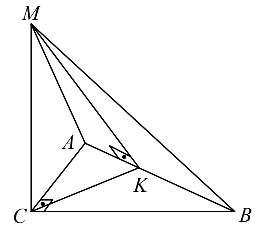
$\Rightarrow MB = 2\sqrt{2}$; ΔAMB — прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{8+8} = 4$.

Ответ: $AB = 4$.

С-10.

1.



Дано: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AC = a$,

$MC \perp (ABC)$, $MC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найти: $\rho(M, AB)$.

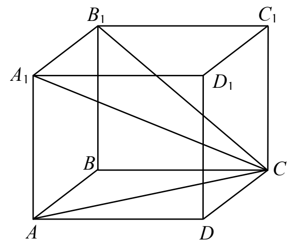
Решение: Пусть $K \in AB$ и $MK \perp AB$.

По теореме о 3-х перпендикулярах

$CK \perp AB \Rightarrow \angle CKA = 90° \Rightarrow \sin 30° = \dfrac{CK}{a} \Rightarrow CK = \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ из ΔKMC:

$MK = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = a = \rho(M, AB)$. Ответ: a.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ и все боковые грани — прямоугольники.

$\angle ABC = 90°$, $\angle A_1AB = 90°$, $AD = 12$,

$CD = 5$, $A_1C = 15$.

Найти: $\angle(ABC; A_1C)$, $\angle(A_1C; BB_1C_1)$.

Решение:

1) $\angle A_1CA$ — ? $AC = \sqrt{144 + 25} = 13$, $A_1C = 15$

$\Rightarrow \cos(A_1CA) = \dfrac{AC}{A_1C} = \dfrac{13}{15} \Rightarrow \angle A_1CA = \arccos\dfrac{13}{15}$.

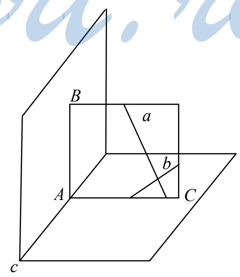
2) $\angle A_1CB_1$ — ?

$\Rightarrow \sin(A_1CB_1) = \dfrac{A_1B_1}{A_1C} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \angle A_1CB_1 = \arcsin\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{13}{15}$; $\arcsin\dfrac{1}{3}$.

С-11.

1.



Дано: $MN \perp c$, $MA \perp c$.

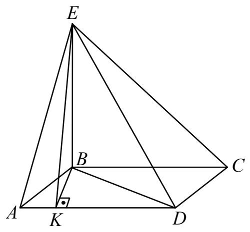
$c \perp a$, $c \perp b$.

Доказать, что $\angle BAC$ — линейный.

Доказательство:

$c \perp a$, $c \perp b \Rightarrow c \perp \alpha \Rightarrow c \perp AB$, $c \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC$ — линейный. Ч.т.д.



2. Дано: $ABCD$ — ромб, $\angle A = 60°$,

$AB = m$, $BE \perp (ABC)$, $BE = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$.

Найти: $\angle(AED;\ ABC)$.

Решение:

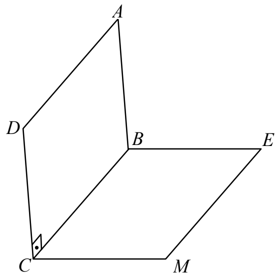
Искомый угол EKB — ? Т.к. $AB = BD \Rightarrow$ $\Rightarrow BK \perp AD$ (K — середина AD) и

$AE = ED \Rightarrow$ из ΔABD: $BK = \sqrt{m^2 - \dfrac{m^2}{4}} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\mathrm{tg}(EKB) = \dfrac{EB}{BK} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{m\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \angle EKB = \mathrm{arctg}\ 1 = 45°$.

Ответ: 45°.

С-12.



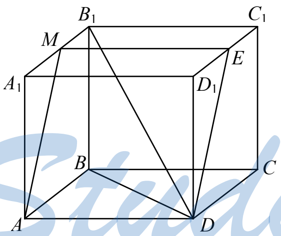
1.

Дано: $(ABC) \perp (BEM)$, $\angle DCB = 90°$.

Доказать, что $\angle MCD = 90°$.

Доказательство:

Т.к. $(DAB) \perp (BEM)$ и $DCBA$ — прямоугольник $\Rightarrow DC \perp (BEM) \Rightarrow DC \perp MC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle MCD = 90°$. Ч.т.д.



2.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. $C_1E = ED_1$, $AD = 5$, $AB = 4$, $B_1D = \sqrt{77}$.

Построить сечение плоскостью, проходящей через AD и E.

Найти: AA_1.

Решение:

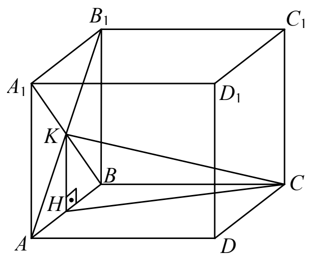
1) Искомое сечение $AMED$, где $ME \parallel A_1D_1$, M — середина A_1B_1;
$AD \perp CD$, $AD \perp DD_1 \Rightarrow AD \perp (DCC_1)$,
а т.к. $AD \subset (AED) \Rightarrow (AED) \perp (DC_1)$.

2) AA_1 — ? $BD = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \Rightarrow BB_1 = AA_1 = \sqrt{77-41} = 6$.

Ответ: 6.

С-13.

1.



Дано: $ADCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, AB=1, $AA_1 = \sqrt{5}$, K — середина AA_1B_1B.

Найти: ($\angle KC$; ABC).

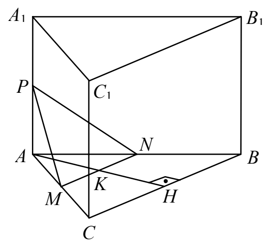
Решение:

$KH \perp AB \Rightarrow KH \perp ABC$ и $KH = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$CH = \sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, т.к. H — середина AB, т.к. K — середина AA_1B_1B; $\angle(KC, ABC) = \angle KCH = 45°$.

Ответ: 45°.

2.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, MN — средняя линия ΔABC, $MN \parallel CB$, $\angle(MPN, ABC) = 60°$, $P \in AA_1$, $AC = 4$ см.

Найти: $S(MPN)$.

Решение:

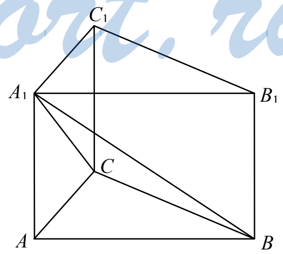
$CB = 4 \Rightarrow MN = 2$; $AH \perp CB \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3} \Rightarrow AK = \sqrt{3} \Rightarrow$

$PK = \dfrac{AK}{\cos 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S(PNM) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$ см^2.

С-14.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle C = 90°$, $BA_1C = 30°$, $A_1B = 10$, AC=5.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение: $A_1C \perp BC$ (по теореме о 3-х перпендикулярах: $AC \perp BC$)

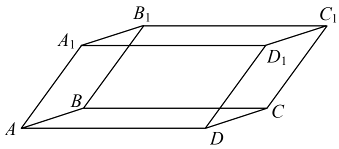
$\Rightarrow BC = \dfrac{1}{2} A_1B = 5$; $AB = 5\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$

$S_{\text{бок.}} = AA_1(AB + BC + AC) = 5\sqrt{2}(5\sqrt{2} + 10) = 50 + 50\sqrt{2}$.

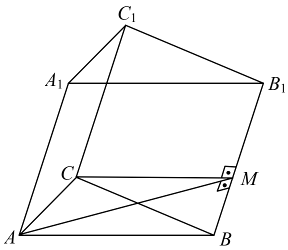
Ответ: $50 + 50\sqrt{2}$.

С-15.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — прямоугольник, $\angle BAD = 90°$, $(AA_1D_1D) \perp (ABC)$.
Доказать, что DD_1C_1C — прямоугольник.

Доказательство:
Т.к. $(AA_1D_1) \perp (ABC)$, а $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (AA_1D_1) \Rightarrow CD \perp DD_1 \Rightarrow$ DD_1C_1C — прямоугольник. Ч.т.д.



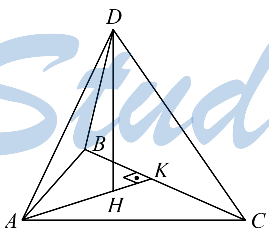
2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $S(BCC_1B_1)$= 25 см^2, $S(ABB_1A_1)$ = 15 см^2, $AA_1 = 5$, $\angle AMC = 120°$.
Найти: $S_{\text{бок.}}$.
Решение: $S_{\text{гран.}}=CM \cdot BB_1=25 \Rightarrow CM = 5$; аналогично $AM = 3 \Rightarrow AC$ по теореме косинусов:

$AC^2 = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5\frac{1}{2} = 49$; $AC = 7$;

из ΔAMC по тереме о 3-х перпендикулярах: $AC \perp AA_1$, $AC \perp CC_1$ $\Rightarrow$ $S_{AA_1C_1} = 7 \cdot 5 = 35 \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 35 + 25 + 15 = 75$.

Ответ: 75 см^2.

С-16.



1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, DH — высота, DH = 12 см, $AK \perp BC$, $K \in BC$, AK = 15 см.
Найти: $S_{\text{полн.пов.}}$.

Решение: $AH = \frac{2}{3} AK = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \sqrt{100 + 144} = 2\sqrt{61}$;

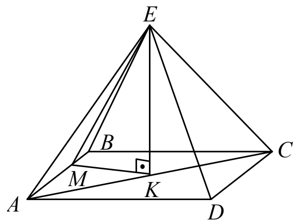
из ΔABC: $AB = x$; $BK = \frac{x}{2}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = AK^2 = 225$; $3x^2 = 900$;

$x^2 = 300$; $x = 10\sqrt{3}$ $\Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$ $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{150\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$.

$S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 10\sqrt{3}=65\sqrt{3}\Rightarrow S_{\text{полн.}}=195\sqrt{3}+75\sqrt{3}=270\sqrt{3}$.

Ответ: $270\sqrt{3}$ см^2.

2. Дано: $ABCDE$ — правильная пирамида, $AB = a$, EK — высота = $3a$.
Найти: $\angle EAK$ и $\angle EMK$.
Решение:



Из ΔADC: $AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$;

$AK=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

из ΔAKE: $\mathrm{tg}(EAK)=\frac{EK}{AK}=\frac{3a}{a\sqrt{2}}\cdot 2=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\Rightarrow$

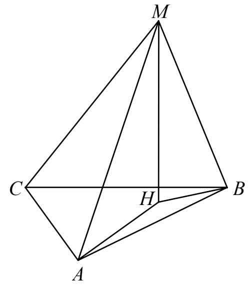
$\Rightarrow \angle EAK=\mathrm{arctg}\,3\sqrt{2}$.

$MK=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}\Rightarrow \mathrm{tg}(EMK)=\frac{EK}{MK}=\frac{3a}{a}\cdot 2=6\Rightarrow \angle EMK=\mathrm{arctg}6$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\,3\sqrt{2}$, arctg 6.

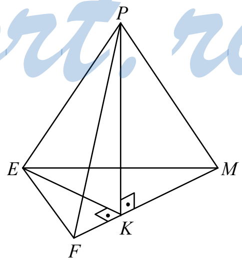
С-17.

1. Дано: $MABC$ — пирамида, $AB = a$, $\angle ACB=150°$, $\angle MAH=\angle MBH=\angle MCH=45°$.
Найти: MH.
Решение:



MH — высота из равенства углов 45° $\Rightarrow$
$\Rightarrow AH = BH = CH = MH \Rightarrow H$ — центр описанной окружности; $\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow$
$\Rightarrow 2AB = 2R$; $R = a \Rightarrow AH = a \Rightarrow MH = a$.

2. Дано: $EF = EM$, $MF=20\sqrt{6}$, $PE = 10$, $PE\perp(MEF)$, $\angle EPK = 60°$.
Найти: $S_{\text{бок.}}$.
Решение: $PE\perp(MEF)$; $PK\perp MF\Rightarrow$
$\Rightarrow EK\perp MF$ (по теореме о 3-х перпендикулярах) $\Rightarrow \angle EPK=\angle(EP,(MPF))$;
из ΔEPK: $\angle EPK = 60°\Rightarrow PK = 2EP = 20\Rightarrow$
$\Rightarrow EK=10\sqrt{3}\Rightarrow$
из ΔMEK: $ME=\sqrt{600+300}=30\Rightarrow$



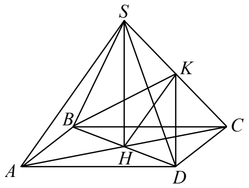
$\Rightarrow S_{MPE} = \frac{1}{2} ME \cdot EP = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 10 = 150.$

$S_{MPF} = \frac{1}{2} PK \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20\sqrt{6} = 200\sqrt{6} \Rightarrow S_{бок.} = 300 + 200\sqrt{6}$.

Ответ: $300 + 200\sqrt{6}$.

С-18.

1. Дано: $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = a$, $\angle SAH = 60°$, $KH \parallel AS$.



Найти: S_{BKD}.

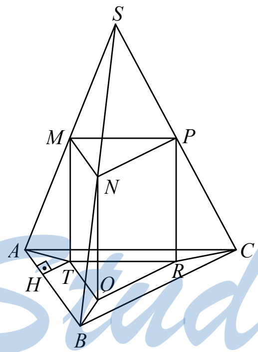
Решение:

$$SA = \frac{AH}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}a \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

т.к. HK — средняя линия $\Delta ASC \Rightarrow S(BKD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sqrt{2}a = \frac{a^2}{2}$.

Ответ: $\frac{a^2}{2}$.

2.



Дано: $MNPABC$ — правильная треугольная усеченная пирамида, $AC = 8$ см, $MN = 6$ см, $\angle(AM, ABC) = 60°$.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение:

Пусть TQR — проекция MNP на ABC.

$$S(ATQB) = \frac{1}{3}(S(ABC) - S(TQR)) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (8^2 - 6^2)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 28 =$$

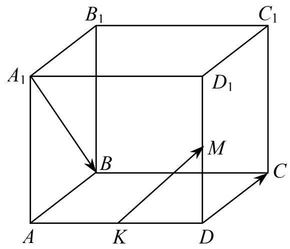
$$= \frac{28\sqrt{3}}{12} = \frac{14\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TH = \frac{2S(ATQB)}{(TQ + AB)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MH = \frac{TH}{\cos 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$S_{бок.} = \frac{1}{2}(MH + AB) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = 14\sqrt{3}$. Ответ: $14\sqrt{3}$ см^2.

С-19.

1. Дано: $AK = KD$, $DM = MD_1$.



Записать вектора, которые:

1) противоположно направлены $\overline{KM}$;

2) сонаправлены $\overline{DC}$;

3) имеют длину, равную $|\overline{A_1B}|$.

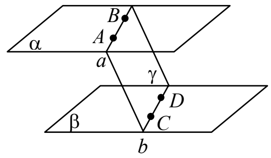
Решение:

1) $\overrightarrow{D_1A} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{C_1B} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{MK} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KM}$.

2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{D_1C_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$.

3) $|\overrightarrow{A_1B}| = |\overrightarrow{D_1C}| = |\overrightarrow{CD_1}| = |\overrightarrow{BA_1}|$; $|\overrightarrow{AB_1}| = |\overrightarrow{B_1A}| = |\overrightarrow{DC_1}| = |\overrightarrow{C_1D}|$.

2. Дано: $\gamma \cap \alpha = a$; $\gamma \cap \beta = b$; $A, B \in a$, $C, D \in b$.



Могут ли $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ быть коллинеарными?

Решение:

Могут, если $\alpha \parallel \beta$.

Ответ: могут.

С-20.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Найти: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{DB_1}$.

Решение:

$\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{O}$.

Ответ: $\vec{O}$.

2. Доказать, что $(-\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{KF}) \uparrow\downarrow (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{EC})$.

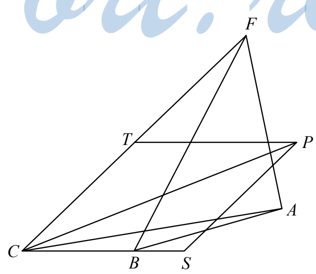
Решение:

$\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EK}$; $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KC}$;

$\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{KE}$; $\overrightarrow{EK} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KE}$. Ч.т.д.

С-21.

1. Дано: $FABC$ — тетраэдр.

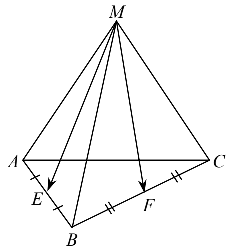


Изобразить: $\overrightarrow{FK} = 1{,}5\overrightarrow{CB} + 0{,}5\overrightarrow{CF}$.

Решение: $\overrightarrow{CS} = 1{,}5\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$;

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{FK} \Rightarrow \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{FK}$.

2. Дано: ΔABC, $E \in AB$, $F \in BC$, $AE = EB$, $BF = FC$, $M \notin (ABC)$.



Выразить $\overrightarrow{CA}$ через $\left(\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{ME}\right)$.

Решение:

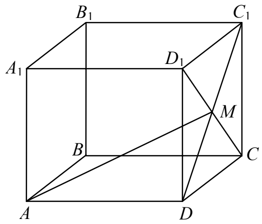
$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$; $\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$;

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MF} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MF}$.

Ответ: $2\left(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF}\right)$.

С-22.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $DC_1 \cap D_1C$.

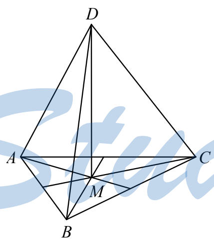
Разложить $\overrightarrow{AM}$ по $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение: $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (правило параллелограмма).

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DC_1} = 2\overrightarrow{MC_1} \Rightarrow \overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{MC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} = \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, M — точка пересечения медиан ΔABC.

Разложить $\overrightarrow{DM}$ по $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.

Решение:

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA})$; $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$;

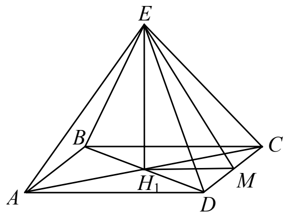
$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} \Rightarrow$

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

С-23.



Дано: $EABDC$ — правильная четырехугольная пирамида, $EA = 2\sqrt{2}$ см, $AB = 2$ см.

Найти:

1) $S_{\text{полн.пов.}}$.

$S_{ABCD} = 4$ ед^2; $EK \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow EK = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$.

$S_{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{\text{полн.}} = 4(1 + \sqrt{7})$.

2) S_{AEC} — ?

Из ΔACD:$AC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AEC$ — правильный треугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AEC} = \frac{1}{2} AE \cdot EC \cdot \sin(AEC) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

3) $\angle ECH$: из п. 2: $\angle ECH = 60°$.

4) ECD^$ABC = \angle EMH$ — ?

Из ΔAEH: $EH = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$; $HM = 1 \Rightarrow \text{tg}(EMH) = \sqrt{6}$;

$\angle EMH = \text{arctg}\sqrt{6}$.

5) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} = 2\sqrt{2}$ см.

6) Доказать, что $AEC \perp ABC$.

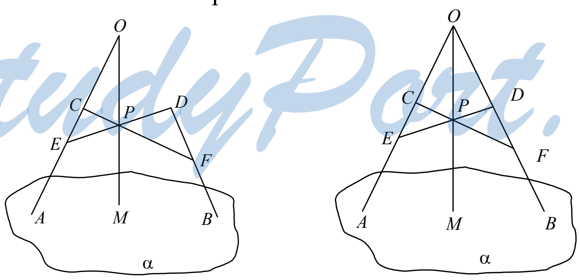
$EH \perp (ABC) \perp AC \perp BD$, $EHC \subset AEC \Rightarrow AEC \perp ABC$. Ч.т.д.

Ответ: 1) $4(1 + \sqrt{7})$ см^2; 2) $2\sqrt{3}$ см^2; 3) 60°; 4) $\text{arctg}\sqrt{6}$; 5) $2\sqrt{2}$ см.

ВАРИАНТ 3.

С-1.

1. Найти: в чем ошибка чертежа?

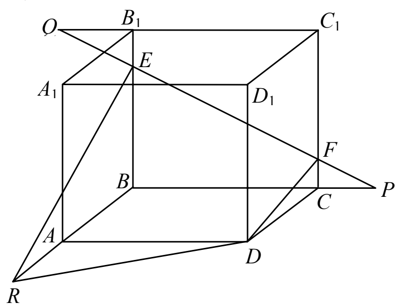


Решение:

Точки A, M и B должны лежать на одной прямой.

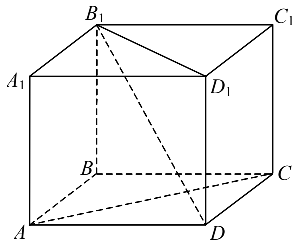
Ответ: $M \notin AB$.

2.



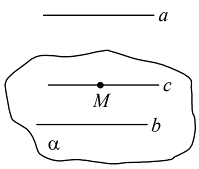
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $E \in B_1B$, $F \in C_1C$.
Построить: 1) $EF \cap ABC$, $EF \cap A_1B_1C_1$;
2) $ADF \cap EFD$;
3) $EFD \cap ABC$.
Построение:
$EF \cap ABC = EF \cap BC = P$
$EF \cap A_1B_1C_1 = EF \cap B_1C_1 = Q$
$ADF \cap EFD = FD$
$EFD \cap ABC = RD$, где $R = ER \cap AB$, $ER \parallel FD$.

С-2.



1.
Доказать: AA_1 и C_1D_1, AA_1 и B_1D, AC и B_1D_1 — скрещивающиеся.
Доказательство:
$D_1 \notin (AA_1C_1)$, $D \notin (AA_1B_1)$, $D_1 \notin (ACB_1) \Rightarrow$ Каждая пара прямых не лежит в одной плоскости. Ч.т.д.

2.



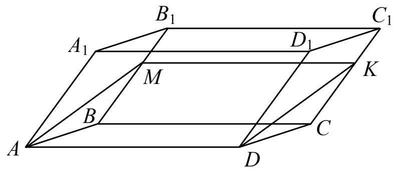
Дано: $b \in \alpha$, $a \notin \alpha$, $a \parallel b$, $M \notin b$, $M \in c$, $M \in \alpha$, $c \parallel a$.
Доказать: $c \in \alpha$.
Доказательство:
$b \in \alpha$, $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$; $c \parallel a \Rightarrow c \parallel b$ и $M \in c$, и $M \in \alpha \Rightarrow c \in \alpha$. Ч.т.д.

С-3.

1. Дано: $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$.
Найти: взаимное расположение b и α.
Решение:
b не может пересекать α, т.к. в этом случае a должно пересекать α. Поэтому либо $b \parallel \alpha$, либо $b \in \alpha$.
Ответ: $b \parallel \alpha$, либо $b \in \alpha$.

2.
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, $\angle ABC = 130°$, $M \in BB_1$.

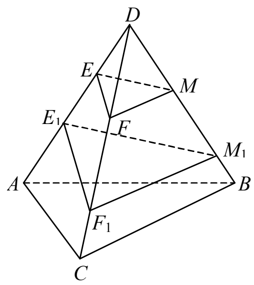
1) Построить: $AMD \cap AA_1B_1$,
$AMD \cap BB_1C_1$,
$AMD \cap DD_1C_1$.
2) Найти: $\angle(AB, A_1D_1)$.
Решение:
1) Строим $DK \parallel AM$,
тогда $AMD \cap AA_1B_1 = AM$, $AMD \cap BB_1C = MK$,
$AMD \cap CDD_1 = DK$.
2) $\angle(AB, A_1D_1) = \angle(AB, AD) = 180° - 130° = 50°$.
Ответ: 50°.



С-4.

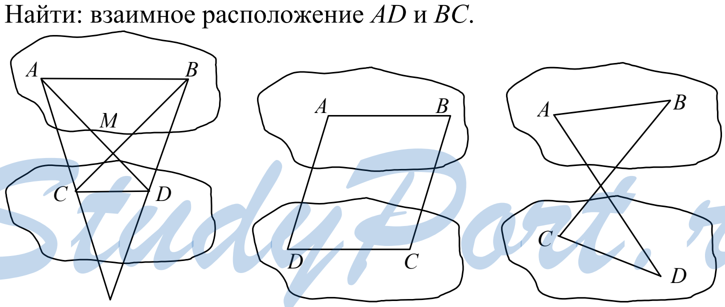
1.

Доказать, что $\angle DFM = \angle DF_1M_1$.
Доказательство:
$EF \parallel E_1F_1$, $EM \parallel E_1M_1$, $F_1E_1 \cap E_1M_1 = E_1$,
$EF \cap EM = E$.
$(EFM) \parallel (E_1F_1M_1)$; $(BCD) \cap (EFM) = FM$,
$(BCD) \cap (E_1F_1M_1) = F_1M_1 \Rightarrow FM \parallel F_1M_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta DFM \sim \Delta DF_1M_1 \Rightarrow \angle DFM = \angle DF_1M_1$.
Ч.т.д.



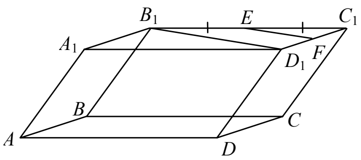
2.

Дано: $\alpha \parallel \beta$.
$AB \in \alpha$, $CD \in \beta$.
Найти: взаимное расположение AD и BC.



Решение:
1) Если $AB \parallel CD \Rightarrow \exists M = AD \cap BC$ либо $AD \parallel BC$;
2) если AB и CD — скрещиваются $\Rightarrow AD$ и BC скрещиваются.

С-5.



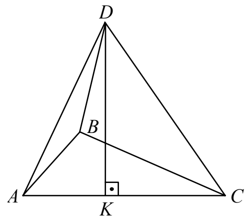
1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $B_1E = EC_1$, $C_1F = FD_1$, $AA_1 \perp EF$.

Доказать, что $B_1D = BD_1$.

Доказательство:

EF — средняя линия $\Delta B_1C_1D_1 \Rightarrow B_1D_1 \parallel EF \Rightarrow B_1D_1 \perp AA_1$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel DD_1 \Rightarrow B_1D_1 \perp BB_1$, $BD_1 \perp DD_1 \Rightarrow BB_1D_1D$ — прямоугольник, B_1D и BD_1 — диагонали $\Rightarrow B_1D = BD_1$. Ч.т.д.



2.

Дано: $\angle DBC = \angle DBA = 60°$, $BA = BC = 5$ см, $DB = 8$ см, $AC = 8$ см.

Найти S_{ADC} — ?

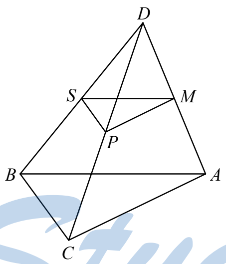
Решение:

Из ΔABD: $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60° =$
$= 64 + 25 - 40 = 49 \Rightarrow AD = 7 = DC$,

$DK = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{33} = 4\sqrt{33}$.

Ответ: $= 4\sqrt{33}$ см^2.

С-6.



1.

Дано: ΔABC — тетраэдр, $M \in AD$, $AM = MD$, $P \in DC$, $DP : PC = 1 : 3$, все ребра равны a.

Построить сечение, проходящее через P и M параллельно BC. Найти его площадь.

Решение: Строим $SP \parallel BC$ ($S \in BD$) MSP — наше сечение.

$MS = MP$, т.к. $SP \parallel BC \Rightarrow DS : SB = 1 : 3$;

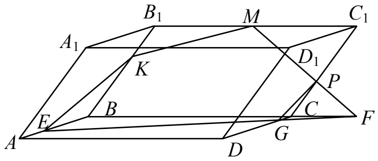
$AD = DC = a \Rightarrow MD = \frac{a}{2}$; $DP = \frac{a}{4}$;

$\angle MDP = 60° \Rightarrow MP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} - 2\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5a^2}{16} - \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2 3}{16}$

$\Rightarrow MP = MS = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $SP = \frac{a}{4} \Rightarrow MH \perp SP \Rightarrow$

$MH = \sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{11}}{8} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{8} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2\sqrt{11}}{64}$. Ответ: $\frac{a^2\sqrt{11}}{64}$.

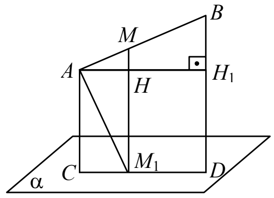
2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $M \in B_1C_1$, $P \in C_1C$, $E \in AB$.
Построить: сечение, проходящее через E, M и P.



Построение: $MP \cap BC = F$, $EF \cap DC = G$, $EK \parallel GP \Rightarrow$
$\Rightarrow EKMPG$ — искомое сечение.

С-7.

1. Дано: AB не пересекает α, $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$, $AC = 20$, $BD = 30$, $M \in AB$, $AM : MB = 2 : 3$, $MM_1 \perp \alpha$.
Найти: MM_1.
Решение: $A, M, B \in AB \Rightarrow C, M_1, D \in CD$.
Получили трапецию $ABCD$:

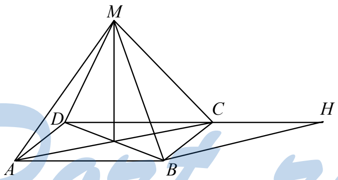


$\frac{MH}{BH_1} = \frac{2}{5}$; $BH_1 = 10 \Rightarrow 5MH = 2BH_1 = 20 \Rightarrow MH = 4$
$\Rightarrow MM_1 = 4 + HM = 4 + 20 = 24$. Ответ: 24.

2.
Дано: $a \perp \alpha$, $a \perp \beta$, $\gamma \cap \alpha = b$, $\gamma \cap \beta = c$.
Найти: взаимное расположение b и c.
Решение: $a \perp \alpha$ и $a \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta \Rightarrow b \parallel c$.
Ответ: они параллельны.

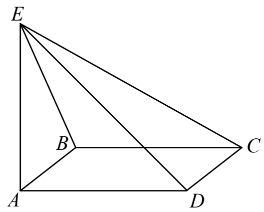
С-8.

1. Дано: $ABCD$ — квадрат, $MD \perp (ABC)$.
Доказать: $MB \perp AC$.
Доказательство:
Строим $BH \parallel AC$; $\angle DBH = 90°$ ($ADCB$ — квадрат).



По теореме о 3-х перпендикулярах: $MB \perp BH \Rightarrow MB \perp AC$. Ч.т.д.

2.
Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $AE \perp (ABC)$, $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$.
Доказать: ΔEDC — прямоугольный.
Найти: AE.
Решение: $AD \perp DC$, $EA \perp (ABC) \Rightarrow$



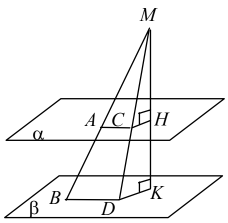
$\Rightarrow ED \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах $\Rightarrow \angle EDC = 90°$

Ч.т.д. $\Rightarrow DC = \sqrt{176} = AB \Rightarrow AE = \sqrt{EB^2 - AB^2} = \sqrt{225 - 176} = 7$.

Ответ: $AE = 7$.

С-9.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $MB \cap \beta = B$, $MB \cap \alpha = A$,



$MD \cap \beta = D$, $MD \cap \alpha = C$, $AM = CD$,

$MC = 16$, $AB = 25$, $MH = 12$.

Найти: MK.

Решение:

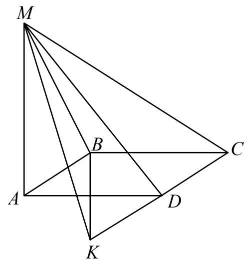
По теореме Фалеса $AC \parallel BD \Rightarrow \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{AM}{AB}$,

$CD = AM \Rightarrow CD = \sqrt{AB \cdot CM} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$.

Аналогично $CH \parallel KD \Rightarrow \dfrac{MH}{HK} = \dfrac{CM}{CD}$, $HK = \dfrac{CD}{CM} \cdot MH = \dfrac{20}{16} \cdot 12 = 15$.

HK — искомое расстояние. Ответ: 15.

С-10.



1. Дано: $AM \perp ABC$, $AM = \dfrac{a}{2}$, $\angle A = 60°$,

$ABCD$ — ромб со стороной a.

Найти: расстояние (M; CD).

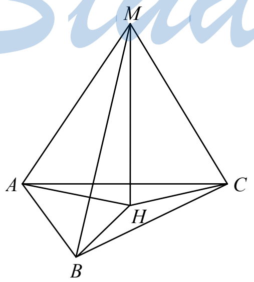
Решение: $K \in CD$, $MK \perp CD$,

Найдем $MK = \rho(M; CD)$;

$\angle ADK = 60° \Rightarrow KD = \dfrac{1}{2} AD = \dfrac{a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ из ΔAMK: $MK = \sqrt{AK^2 + AM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = a$.

Ответ: a.



2. Дано: ΔABC, $AC=CB = 8$, $\angle ACB = 130°$,

$MA = MC = MB$, $MH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$,

$MH = 12$.

Найти: $\angle MAH$.

Решение: Из ΔABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2 -$

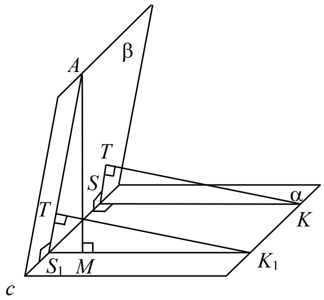
$- 2AC \cdot BC \cdot \cos 130° = 128 - 128\cos 130° \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{\sin(ACB)} = 2AH \Rightarrow \dfrac{64(1 - \cos 130°)}{\sin 130°} = AH \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(MAH)=\frac{MH}{AH}=\frac{12\sin 130°}{64(1-\cos 130°)}=\frac{3\sin 130°}{16(1-\cos 130°)}=\frac{3}{16}\operatorname{ctg}65°,$$

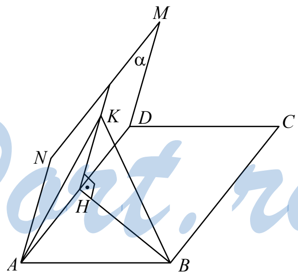
$\angle MAH=\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{16}\operatorname{ctg}65°\right)$. Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{16}\operatorname{ctg}65°\right)$.

С-11.



1. Дано: A и K лежат на разных гранях двугранного угла с ребром C ($A\in\beta$, $K\in\alpha$). $\rho(A, C) = 6$, $\rho(K, C) = 10$. $\rho(K, \beta) = 7{,}5$.
Найти: $\rho(A; \alpha)$.
Решение:
Пусть $S_1 \in c$, $AS_1 \perp c \Rightarrow AS_1 = 6$.
Пусть $S \in c$, $KS \perp c \Rightarrow KS = 10$.
Пусть $T \in \beta$ и $KT \perp \beta \Rightarrow KT = 7{,}5$.
Пусть теперь $S_1K_1 \parallel SK$ и $S_1K_1 = SK$.
$\rho(K_1, \beta) = \rho(K, \beta) \Rightarrow \Delta K_1T_1S_1 = \Delta KTS$.
Искомое $\rho(K, \beta) = \rho(K_1, \beta) = K_1T_1$
$T_1 \in AS_1$ (по ТТП).
Из $\Delta T_1S_1K_1$: $\sin\angle T_1S_1K_1 = \frac{T_1K_1}{S_1K_1}=\frac{7{,}5}{10}=\frac{3}{4}$.
Пусть $M \in \alpha$ и $AM \perp \alpha$.
По ТТП $M \in S_1K_1$, $\rho(A, \alpha) = AM = AS\sin\angle T_1S_1K_1 = \frac{9}{2}$.

Ответ: $\frac{9}{2}$.



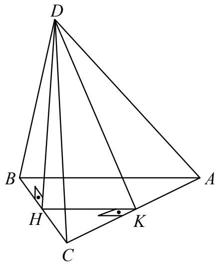
2. Дано: $ABCD$ — ромб, $AD \in \alpha$, $\angle A = 45°$, $\angle(\alpha, AB) = 30°$.
Найти: $\angle(\alpha, ABC)$.
Решение:
Пусть $AB = a$, $BH \perp AD$, $HK \perp AD$, $BK \perp HK \Rightarrow \angle KAB = 30° \Rightarrow$

$$KB=\frac{a}{2},\ KA=\frac{\sqrt{3}a}{2},\ AH=\frac{\sqrt{2}a}{2}\ \Rightarrow$$

$$HK=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}\ \Rightarrow \angle KHB=\angle(\alpha, ABC)=45°.$$

Ответ: 45°.

С-12.



1. Дано: ΔABC и ΔDBC — правильные, $(ABC) \perp (DBC)$.

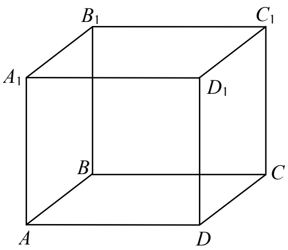
Найти: $\operatorname{tg}(\angle(ABC; ADC))$.

Решение: $DH \perp AC$, $HK \perp AC \Rightarrow DK \perp AC$.

$DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, где a — сторона ΔABC.

$HC = \frac{a}{2}$, $\angle C = 60° \Rightarrow HK = HC \cdot \sin 60° =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a \Rightarrow \operatorname{tg}\angle DKH = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{4}a} = 2.$ Ответ: 2.



2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильный параллелепипед, $ABCD$ — квадрат, $AD = 2$, $AC_1 = 2\sqrt{6}$.

Найти: CC_1.

Доказать: $ACC_1 \perp BB_1D_1$.

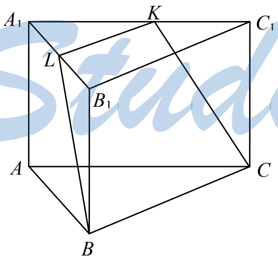
Решение: $AC = AD\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{24-8} = 4.$

Т.к. $AC \perp BD \subset BB_1D_1$, $AC \perp BB_1 \subset BB_1D_1$, $AC \subset ACC_1$, то $ACC_1 \perp BB_1D_1$. Ч.т.д.

Ответ: 4.

С-13.



1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, через середину A_1C_1 и BC проведена плоскость, $AB = 4$ см, $C_1C = 2$ см.

Найти: $S_{сеч.}$.

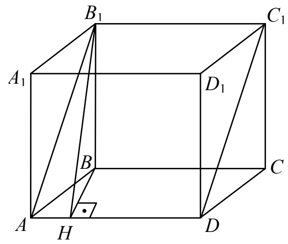
Решение:

Пусть K — середина A_1C_1. Проведем $KL \parallel BC$, $L \in A_1B_1 \Rightarrow KLBC$ — искомое сечение. $LK = \frac{1}{2}B_1C_1 = 2.$

$LB = KC = \sqrt{CC_1^2 + C_1K^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$S_{сеч.} = \dfrac{LK + BC}{2} \cdot h$, $h = \sqrt{KC^2 - \left(\dfrac{BC - LK}{2}\right)^2} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{сеч.} = 3\sqrt{7}$.

Ответ: $3\sqrt{7}$ см^2.

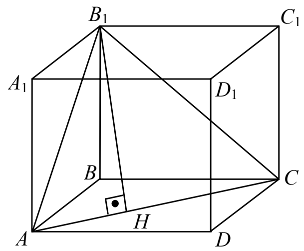


2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 60°$, $AB = a$, $\angle(B_1AD, ABC) = 45°$.
Найти: $S_{сеч.}$, AA_1.
Решение:
$BH \perp AD \Rightarrow B_1H \perp AD \Rightarrow \angle B_1HB = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1B = HB = AB \cdot \sin(BAD) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = AA_1$

$B_1H = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow S_{сеч.} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

С-14.



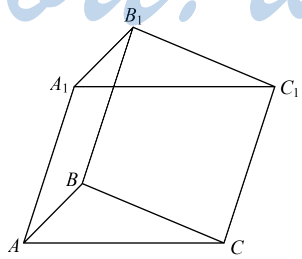
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $AB = 1$, $BC = 7\sqrt{3}$, $\angle ABC = 150°$, $\angle(AB_1C, ABC) = 60°$.
Найти: $S_{бок.}$.
Решение: Пусть $BH \perp AC \Rightarrow BH \cdot AC = AB \cdot BC \cdot \sin 150° \Rightarrow$

$$\Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 150°}{AC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 150°}{\sqrt{1 + 49 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 7\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1B = BH \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{21}{26} \Rightarrow S_{бок.} = \frac{21}{13}(7\sqrt{3} + 1).$$

Ответ: $\dfrac{21}{13}(7\sqrt{3} + 1)$.

С-15.



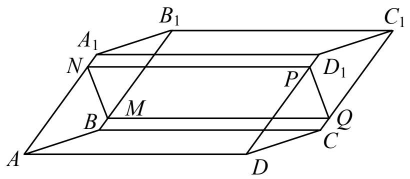
1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, ΔABC — правильный, $AB = a$, $AA_1 = b$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$.
Найти: $S(CC_1B_1B)$.
Решение:
Пусть AH — проекция AA_1 ($H \in BC$),

тогда AH — биссектриса $\angle A \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AA_1 \perp BC \Rightarrow BB_1$ и $C_1C \perp BC \Rightarrow S = ab$.

Ответ: ab.

2.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, $BB_1 = 10$, $\text{Р}(AA_1, DD_1) = \text{Р}(AA_1, B_1B) + 11$, $\text{Р}(BB_1, DD_1) = 19$, $S_{\text{бок.}} = 420$.



Найти: углы между смежными боковыми гранями.

Решение:

Пусть $MNPQ$ — перпендикулярное сечение $\Rightarrow$ $PM = 19$, $MN + 11 = NP$,

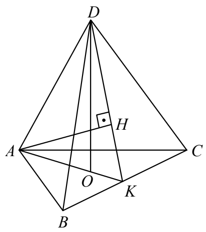
$MN + NP = 21 \Rightarrow NP = 16$, $MN = 5 \Rightarrow \cos MNP =$

$$= \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \frac{25 + 256 - 361}{2 \cdot 5 \cdot 16} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle(AA_1B, AA_1D) = 120° \Rightarrow \angle(AA_1B, BB_1C) = 60°$.

Ответ: 60°.

С-16.



1. Дано: $DABC$ — правильная треугольная пирамида, $\text{Р}(A, DBC) = 3\sqrt{3}$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

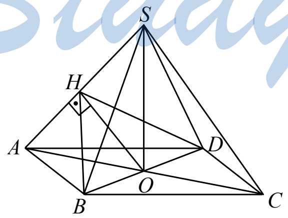
Решение: Пусть D проецируется в т. O, $AK \perp BC \Rightarrow DK \perp BC$.

$AH \perp DK \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp BDC \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$, $\angle DKA = 60° \Rightarrow$

$AK = \dfrac{AH}{\sin 60°} = 6 \Rightarrow OK = 2 \Rightarrow DK = 4$, т.к. $AK = 6$,

то $AB = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$. Ответ: $24\sqrt{3}$.



2.

Дано: $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = 4$, O — центр $ABCD$, $\text{Р}(O, SA) = 2$.

Найти: 1) $\angle(SAB, SAD)$; 2) $\angle ASB$.

Решение:

$OH \perp SA$, $AO \perp BD \Rightarrow OH \perp BD \Rightarrow$

$\Rightarrow HB = HD = \sqrt{4 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$, т.к. $BD = 4\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\angle BHD = \frac{BH^2 + HD^2 - BD^2}{2BH \cdot HD} = \frac{12+12-32}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{-8}{8 \cdot 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BHD = \pi - \arccos\frac{1}{3}.$$

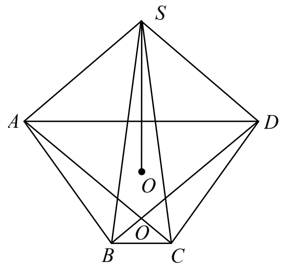
$$\sin\angle SAO = \frac{HO}{AO} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = AO = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BS = SC = \sqrt{8+8} = 4 \Rightarrow \angle CSB = 60° \ (= \angle ASB).$$

Ответ: 1) $\pi - \arccos\frac{1}{3}$; 2) $60°$.

С-17.

1.



Дано: $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — равнобедренная трапеция,
AD = 8 см, BC = 2 см, боковые грани наклонены к основанию под углом 60°.
Найти: высоту пирамиды и $S_{бок.}$.
Решение:
Т.к. грани равнонаклонены, то расстояния от т. O до сторон трапеции равны

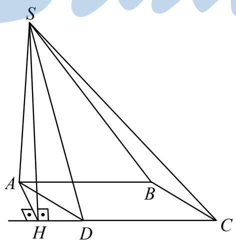
$\Rightarrow$ можно вписать окружность $\Rightarrow AB = CD = \frac{8+2}{2} = 5$.

Пусть радиус окружности равен $r \Rightarrow$ По формуле площади для описанной окружности $S_{осн.} = \sqrt{(10-6)(10-2)(10-5)^2} =$

$= 5 \cdot 4 = 20 = \frac{1}{2}(8 + 2 + 5 + 5)r \Rightarrow r = 2 \Rightarrow$ высота пирамиды равна

$2\text{tg}60° = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ высота боковой грани равна $4 \Rightarrow$

$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 = 40$. Ответ: $2\sqrt{3}$ см, 40 см^2.



2. Дано: $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD$=60°, AB=a, $SAD \perp ABC$, $SAB \perp ABC$, $\angle(SBC, ABC) = \angle(SDC, ABC) = 60°$.
Найти: $S_{бок.}$.
Решение: $AH \perp DC \Rightarrow AH = a\sin 60° =$

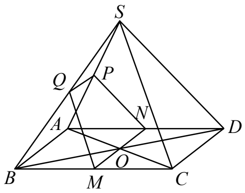
$= \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow SA = AH\text{tg}60° = \frac{3a}{2}$,

$$SH = \frac{AH}{\cos 60°} = \sqrt{3}a \Rightarrow S_{бок.} = 2(S(ADS) + S(SDC)) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot a \right) = \frac{a^2}{2}(3 + 2\sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{a^2}{2}(3 + 2\sqrt{3})$.

С-18.



1.

Дано: $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = a$, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Через центр основания проведена плоскость.

Найти: $S_{сеч.}$.

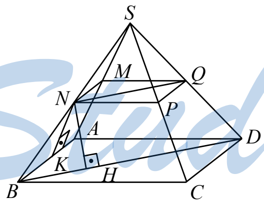
Решение:

Пусть O — центр $ABCD$, $MN \ni O$, $MN \parallel AB$, $MQ \parallel SC$, $Q \in SB$, $NP \parallel SD$, $P \in SA \Rightarrow QPNM$ — искомое сечение; $\angle SMO = 60° \Rightarrow$

$$\Rightarrow SM = \frac{MO}{\cos 60°} = a \Rightarrow SC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow QM = PN = \frac{\sqrt{5}}{4}a,$$

$$QP = \frac{a}{2}, \; MN = a \Rightarrow S_{сеч.} = \sqrt{\frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{4}a \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{4}a - \frac{a}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{a}{4}\right)} =$$

$$= \frac{3}{4}a \cdot \sqrt{\frac{5}{16}a^2 - \frac{a^2}{16}} = \frac{3}{4}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$ Ответ: $\frac{3a^2}{8}$.



2.

Дано: $ABCDMNPQ$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида, $AB = 10$ см, $MN = 6$ см, $S(ABPQ) = 8\sqrt{10}$.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение: $BD = 10\sqrt{2}$, $NQ = 6\sqrt{2} \Rightarrow$

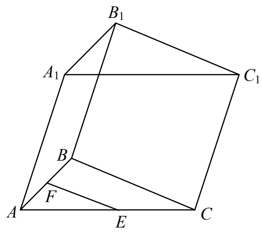
$$\Rightarrow NH = \frac{8\sqrt{10}}{8\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow BN = \sqrt{5 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{13} \Rightarrow NK = \sqrt{13 - 4} = 3 \Rightarrow$$

$$S_{бок.} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}(10 + 6) \cdot 3\right) = 96.$$

Ответ: 96 см².

С-19.

1.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $AB = AC$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, $E \in AC$, $F \in AB$, $EA = CE$, $FA = FB$.

Найти: 1) векторы, сонаправленные с $\overline{EF}$;

2) противоположно направленные $\overline{C_1C}$;

3) векторы, имеющие длину, равную длине $\overline{CB_1}$.

Решение:

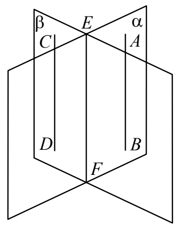
1) $\overline{C_1B_1}$, $\overline{CB}$.

2) $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$.

3) AA_1 проецируется на биссектрису $\Rightarrow$ и на высоту $\Rightarrow AA_1 \perp CB \Rightarrow$ $\Rightarrow BB_1$ и $CC_1 \perp BC \Rightarrow ACC_1B_1$—квадрат $\Rightarrow$ векторы: $\overline{B_1C}$, $\overline{C_1B}$, $\overline{BC_1}$.

Ответ: 1) $\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$; 3) $\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{BC_1}$.

2.



Дано: $AB \parallel CD$, $AB \in \alpha$, $CD \in \beta$, $\alpha \cap \beta = EF$.

Найти: будут ли коллинеарны $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$, $\overline{EF}$ и $\overline{CD}$.

Решение:

Будут, т.к. $EF \parallel AB \parallel CD$.

Ответ: да, будут.

С-20.

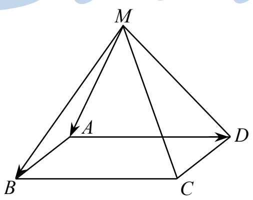
1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Найти: $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A}$.

Решение: $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{B_1C}$; $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{A_1A} = 0$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB_1} + 2\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

Ответ: AC_1.



2. Дано: $MABCD$ — пирамида; $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 8$ см, $BC = 15$ см.

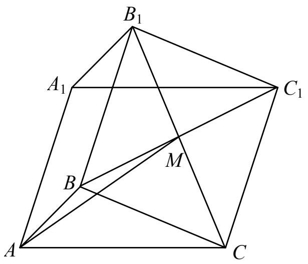
Найти: $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}|$.

Решение: $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$,

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{225 + 64} = 17$.

Ответ: 17 см.

С-21.



1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $BC_1 \cap B_1C = M$

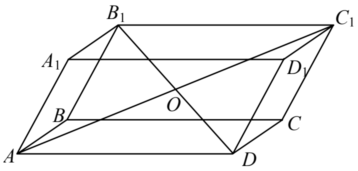
Выразить $\overrightarrow{AM}$ через, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



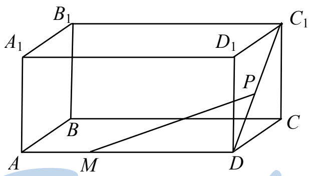
2. Дано: O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CO} = K\overrightarrow{C_1A}$.

Найти: K.

Решение: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A} \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$. Ответ: $-\frac{1}{2}$.

С-22.



1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $M \in AD$, $P \in DC_1$

$AM : MD = 1 : 3$, $DP : PC_1 = 2 : 5$.

Разложить вектор $\overrightarrow{MP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

Решение:

$\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{PC_1}$, $\frac{DP}{PC_1} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5DP = 2PC_1$, $\overrightarrow{PC_1} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DP}$,

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DP} \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1})$, $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AA_1}$.

Ответ: $\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AA_1}$.

2. Дано: $DABC$ — тетраэдр.

Доказать: отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство: Пусть E — середина AC, F — DB, O — середина $EF \Rightarrow \overline{CO} = \frac{1}{2}(\overline{CE} + \overline{CF}) = \frac{1}{4}\overline{CA} + \frac{1}{4}\overline{CB} + \frac{1}{4}\overline{CD}$.

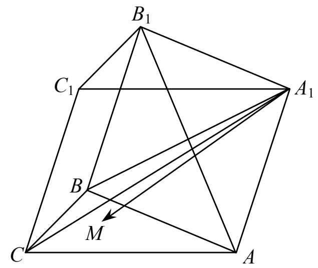
Дальше пусть P — середина AD, F — BC, O_1 — середина $PF \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{CO_1} = \frac{1}{4}\overline{CA} + \frac{1}{4}\overline{CB} + \frac{1}{4}\overline{CD}$.

Если теперь O_2 — середина отрезка, соединяющего середины AB и DC, то и в этом случае

$\overline{CO_2} = \frac{1}{4}\overline{CA} + \frac{1}{4}\overline{CB} + \frac{1}{4}\overline{CD} \Rightarrow \overline{CO} = \overline{CO_1} = \overline{CO_2}$, т.е. т. O, O_1, O_2 — совпадают. Этим и доказывается утверждение.

С-23.



Дано: $\angle ABC = 90°$, $\angle CAB = 60°$,
$AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см.

1) $S_{\text{полн.пов.}}$ — ?

$\angle BCA = 30° \Rightarrow AC = 2AB = 4$,

$BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 2\sqrt{3} \cdot 2 +$
$+ 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 4 = 12 + 12\sqrt{3}$,

$S_{\text{осн.}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{полн. пов.}} = 4(4\sqrt{3} + 3)$.

2) S_{A_1BC} — ?

$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$; $S_{A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, т.к. $A_1B \perp BC$ по теореме о 3-х перпендикулярах.

3) $\angle(A_1BC, ABC)$ — ?

Искомый угол — A_1BA; $\operatorname{tg}(A_1BA) = \frac{AA_1}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\angle A_1BA = 60°$.

4) $\angle(CC_1, A_1BC)$ — ?

Искомый угол — A_1BB_1, $\operatorname{tg}(A_1BB_1) = \frac{A_1B_1}{BB_1} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\angle A_1BB_1 = 30°$.

5) Разложить $\overline{A_1M}$ по $\overline{A_1A}$, $\overline{A_1B}$, $\overline{A_1C}$.

$A_1M = \frac{1}{3}(\overline{A_1A} + \overline{A_1B} + \overline{A_1C})$.

6) $\angle(AA_1B, A_1BC)$ — ?

$CB \perp AB$, $CB \perp BB_1 \Rightarrow CB \perp (ABB_1) \Rightarrow (A_1BC) \perp (AA_1B)$.

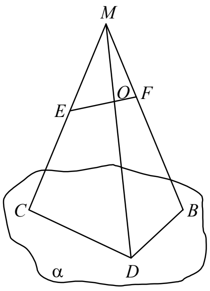
Искомый угол — $B_1BC = 90°$.

Ответ: 1) $4\left(4\sqrt{3}+3\right)$ см^2; 2) $4\sqrt{3}$ см^2; 3) 60°; 4) 30°;

5) $\frac{1}{3}(\overline{A_1A} + \overline{A_1B} + \overline{A_1C})$; 6) 90°.

ВАРИАНТ 4.

С-1.



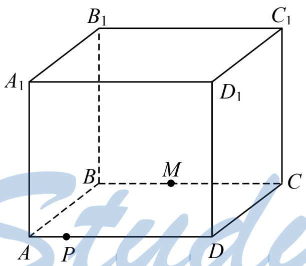
1.

Дано:

В чем ошибка чертежа, где $O \in EF$.

Решение:

EF должна быть проведена штрихами.



2.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $P \in AD$, $M \in BC$.

Построить: 1) $PM \cap DCC_1$, $PM \cap AA_1B$;

2) $PB_1M \cap AB_1M$;

3) $PMC_1 \cap DD_1C_1$.

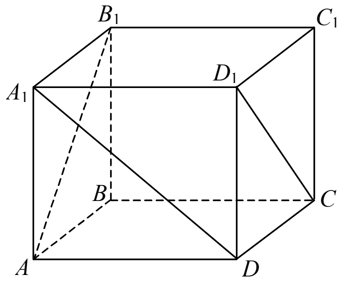
Решение:

1) Проведем PM до пересечения с DC — точка их пересечения F — искомая; проведем PM до пересечения с AB — точка их пересечения G — искомая.

2) Проведем $B_1M = AB_1M \cap PB_1M$.

3) Проводим MC_1, $PS \parallel MC_1$, $S \in D_1D \Rightarrow SC_1 = PMC_1 \cap DD_1C$.

С-2.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Доказать, что прямые AD и C_1D_1, A_1D и D_1C, D_1C и AB_1 являются скрещивающимися.

Решение:

AD и C_1D_1 — скрещиваются, т.к. $C_1D_1 \subset DC_1D_1$, а AD — пересекает ее. Аналогично и другие пары.

2. Дано: $a \parallel b$, $M \notin a$, $M \notin b$, через M можно провести прямую, пересекающую лишь одну из прямых.

Лежит ли M в одной плоскости с a и b?

Решение: Нет, т.к. в плоском случае прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую.

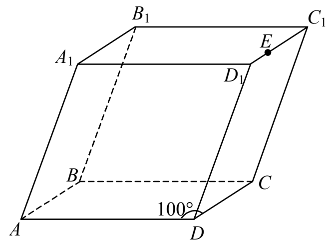
С-3.

1. Дано: $a \parallel \alpha$, $M \in \alpha$.

Доказать: $\exists b$: $b \subset \alpha$, $a \parallel b$, $M \in b$.

Доказательство: Проведем β через a и M, она пересечет α по прямой, параллельной a, т.к. $a \parallel \alpha$, эта прямая будет искомой. Ч.т.д.

2. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ADC = 100°$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.



Построить: $AA_1E \cap A_1D_1C_1$;

$AA_1E \cap DD_1C_1$; $AA_1E \cap ABC$.

Найти: $\angle(AD, D_1C_1)$.

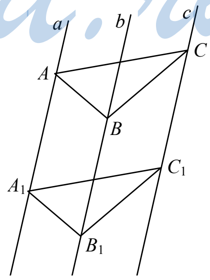
Решение: $AA_1E \cap A_1D_1C_1 = AE$.

Проводим $AH \parallel A_1E$, $H \in DC \Rightarrow$

$AA_1E \cap DD_1C_1 = HE$; $AA_1E \cap ABC = AH$; DCC_1D_1 — параллелограмм $\Rightarrow D_1C_1 \| DC \Rightarrow \angle(AD, D_1C_1) = \angle(AD, DC) = 180° – 100° = 80°$ т.к. угол между прямыми от 0 до 90°.

Ответ: 2) 80°.

С-4.



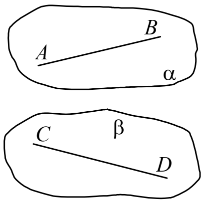
1. Дано: a, b, c не лежат в одной плоскости.

$a \parallel b \parallel c$, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$.

Доказать: $AC = A_1C_1$.

Доказательство: $a \parallel b$, $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow ABB_1A_1$ — параллелограмм $\Rightarrow AA_1 = BB_1$.

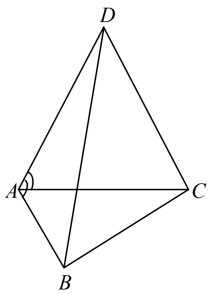
Аналогично BB_1C_1C — параллелограмм $\Rightarrow BB_1 = C_1C \Rightarrow$
$\Rightarrow AA_1 = CC_1 \Rightarrow AA_1CC$ — параллелограмм $\Rightarrow AC = A_1C_1$. Ч.т.д.



2.
Дано: $\alpha \parallel \beta$, $AB \subset \alpha$, $CD \subset \beta$.
Найти: взаимное расположение AC и BD.
Решение:
Если $AB \parallel CD$, то параллельны или пересекаются, если AB и CD скрещиваются, то скрещиваются.
Ответ: Пересекаются или скрещиваются, если $AD \parallel CD$; скрещиваются, если AB и CD скрещиваются.

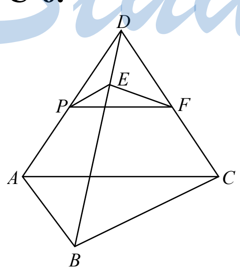
С-5.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $AP = PB$, $P \in AB$, $K \in BC$, $BK = KC$, $A_1C = AC_1$.
Найти: $\angle(DD_1, PK)$.
Решение:
Т.к. $A_1C = AC_1$, то параллелепипед прямой $\Rightarrow \angle(PK; D_1D) = 90°$.
Ответ: 90°.



2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AC = AB = 14$ см, $BC = 16$ см, $AD = 6\sqrt{2}$ см,
$\angle DAB = \angle DAC = 45°$.
Найти: $S(BDC)$.
Решение:
По теореме косинусов
$DB = DC = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6\sqrt{2}\cos 45°} =$
$= \sqrt{72 + 196 - 168} = \sqrt{72 + 28} = 10 \Rightarrow$ по формуле Герона $S(BDC) = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8} = 8 \cdot 6 = 48$ см^2.
Ответ: 48 см^2.

С-6.



1.
Дано: $DABC$ — тетраэдр, все ребра равны a, $P \in AD$, $PD = AP$,
$E \in DB$, $DE : EB = 1 : 3$.
Построить: сечение, проходящее через P и E параллельно AC.
Найти: его площадь.

Решение:

Проводим $PF \parallel AC$, $F \in DC \Rightarrow PEF$ — искомое сечение, PF — средняя линия $\Rightarrow PF = \dfrac{a}{2}$. По теореме косинусов: $DE = \dfrac{a}{4}$.

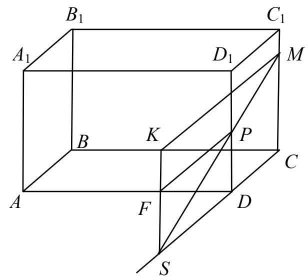
$$PE = EF = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}\cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{3a^2}{16}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{4} + \frac{a}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}a}{4} - \frac{a}{4}\right)\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

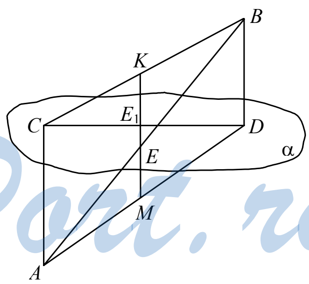
2.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $M \in D_1C_1$, $P \in DD_1$,
$K \in BC$.
Построить: сечение, проходящее через M, P и K.
Решение.
Проводим $MP \cap DC = S$ $S \in (ABC)$.
Проводим $KS \cap AD = F$.
$\Rightarrow KMPF$ — искомое сечение.



С-7.

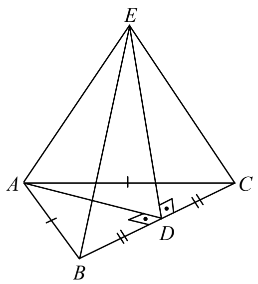
1. Дано: α, $AC \perp \alpha$, $AC = 14$, $BD \perp \alpha$, $BD = 10$, $E \in AB$, $AE = EB$, $EE_1 \perp \alpha$, $E_1 \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$.
Найти: EE_1.
Решение: Проводим KM — среднюю линию трапеции $ABCD$.
Из подобия следует $EE_1 \subset KM$;
$KM = \dfrac{14+10}{2} = 12$; $KE_1 = \dfrac{10}{2} = 5$;



$EM = \dfrac{10}{2} = 5 \Rightarrow E_1E = 2$. Ответ: 2.

2. Дано: α, $a \perp \alpha$, $b \perp a$, $b \not\subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = c$.
Найти: взаимное расположение b и c.
Решение: $a \perp \alpha$, $b \perp a \Rightarrow b \parallel \alpha \Rightarrow b \parallel c$.
Ответ: $b \parallel c$.

С-8.



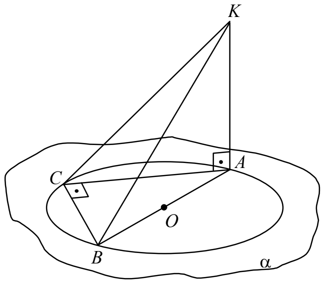
1.

Дано: ΔABC, $AB = AC$, D — середина BC, $DE \perp ABC$.

Доказать: $AE \perp BC$.

Доказательство:

$AD \perp BC$, т.к. ΔABC — равнобедренный. Т.к. $BC \perp ED$ и $BC \perp AD$, то $BC \perp (AED)$ $\Rightarrow BC \perp AE$ т.к. $AE \subset (AED)$. Ч.т.д.



2.

Дано: окружность (O, OA), $A \in$ окружности, окружность лежит в плоскости α, $AK \perp \alpha$, $AK = 1$, AB — диаметр окружности, BC — хорда, $\angle CBA = 45°$, $OA = 2$.

Доказать: ΔKCB — прямоугольный. Найти: KC.

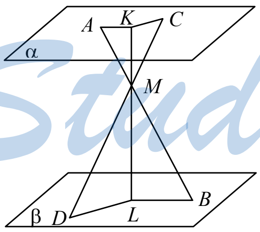
Решение:

ΔBCA — прямоугольный (т.к. $\angle BCA$ опирается на диаметр AB), $KA \perp AC$ и $AC \perp CB \Rightarrow$ по теореме о 3-х перпендикулярах $KC \perp CB \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta KCB$ — прямоугольный, ΔBCA — прямоугольный, $AB = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow CB = CA = AB \cdot \sin 45° = 2\sqrt{2}$.

Из ΔKCA: $KA = 1$, $CA = 2\sqrt{2}$, по теореме Пифагора $KC = \sqrt{1+8} = 3$.

Ответ: 3.

С-9.



Дано: плоскости $\alpha \parallel \beta$; точка M; A, $C \in \alpha$, B, $D \in \beta$, $M \in$ прямым AB, CD; $MA = MD$, $MC = 32$, $MB = 50$, MK — перпендикуляр к α, $MK = 24$, ML — перпендикуляр к β.

Найти: KL.

Решение: $\Delta KMC \sim \Delta LMD$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{KM}{MC} = \dfrac{ML}{MD}$ (1)

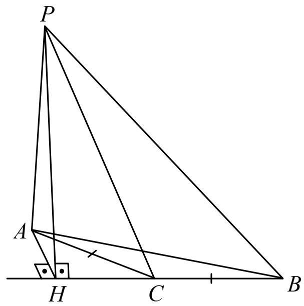
$\Delta KMA \sim \Delta LMB$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{KM}{MA} = \dfrac{ML}{MB}$ (2)

Умножим (1) на (2), получим $\dfrac{KM^2}{MC \cdot MA} = \dfrac{ML^2}{MB \cdot MD}$;

учитывая $MA = MD$, имеем $\dfrac{ML^2}{MB} = \dfrac{KM^2}{MC} \Rightarrow$

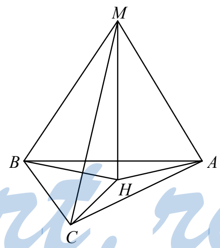
$ML^2 = \dfrac{MB \cdot KM^2}{MC} = \dfrac{50 \cdot 24^2}{32} = \dfrac{25}{16} \cdot 24^2 \Rightarrow ML = \dfrac{5}{4} \cdot 24 = 30 \Rightarrow$
$KL = ML + MK = 30 + 24 = 54.$
Ответ: 54.

С-10.



1. Дано: ΔABC, $AC = BC = m$, $\angle ACB = 120°$, $PA \perp ABC$, $PH \perp BC$, $H \in BC$, $PH = m$.
Найти: PA.
Решение:
ΔAHC — прямоугольный ($AH \perp HB$ по теореме о 3-х перпендикулярах); $\angle ACH = 60° = 180° - \angle ACB$; $AC = m \Rightarrow$
$\Rightarrow AH = \sin 60° \cdot AC = m\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного ΔPAH по теореме Пифагора $AP = \sqrt{PH^2 - AH^2} = \sqrt{m^2 - \dfrac{3}{4}m^2} = \dfrac{m}{2}$. Ответ: $\dfrac{m}{2}$.

2.

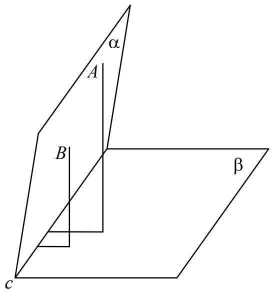


Дано: ΔACB, $\angle C = 90°$, $\angle A = 20°$, $AC = 15$, $MA = MB = MC = 25$.
Найти: угол между MC и плоскостью ABC.
Решение:
Из т. M на плоскость ABC опустим перпендикуляр MH. H — центр описанной окружности ΔABC. $BH = AH = CH = R$. $R = \dfrac{1}{2}BA$, т.к. радиус равен половине гипотенузы $BA = \dfrac{CA}{\cos \angle A} = \dfrac{15}{\cos 20°}$;

$R = CH = \dfrac{15}{2\cos 20°}$; $MC = 25$. Из прямоугольного ΔMHC:

$\cos \angle MCH = \dfrac{HC}{MC} = \dfrac{15}{2\cos 20° \cdot 25} = \dfrac{3}{10\cos 20°}$. Ответ: $\dfrac{3}{10\cos 20°}$.

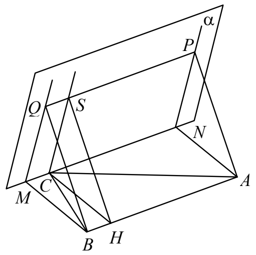
С-11.



1. Дано: $\alpha \cap \beta = c$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $\rho(A, \beta) = 60$ см, $\rho(B, \beta) = 48$ см.
Расстояние от одной из точек до c равно 50.
Найти расстояние от другой.
Решение:
Т.к. $48 < 50 < 60$, то $\rho(B, C) = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\angle(\alpha, \beta)) = \frac{48}{50} = \frac{24}{25} \Rightarrow$

$\rho(A, c) = \frac{60}{\sin\angle(\alpha,\beta)} = \frac{60 \cdot 25}{24} = \frac{125}{2} = 62{,}5$ см. Ответ: 62,5 см.



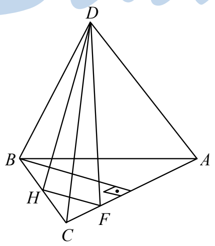
2.
Дано: ΔACB, $\angle C = 90°$, $AC = CB$, $\alpha \ni C$, $\alpha \parallel AB$, $\angle(\alpha, CB) = 30°$.
Найти: $\angle(ACB, \alpha)$.
Решение:
Строим: $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (\alpha \cap ACB)$.
$BM \parallel CH$, $M \in \alpha$, $AN \parallel CH$, $N \in \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow MN = \alpha \cap ACB$.

Через т. M и N проводим в α прямые, перпендикулярные к MN, и опускаем на них перпендикуляры из точек B и A. Пусть их основаниями являются точки Q и P соответственно. Через т. C в α проводим прямую, перпендикулярную MN. Пусть PQ пересекает ее в т. S. Очевидно, $SH \perp \alpha$.

Пусть $CA=CB=a \Rightarrow HC=\frac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow QB = AP = CB \cdot \sin 30° = \frac{a}{2} = SH \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(\alpha, ACB) = \arcsin\frac{SH}{HC} = \arcsin\frac{a \cdot 2}{2\sqrt{2}a} = 45°$. Ответ: 45°.

С-12.

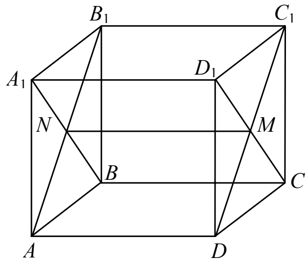


1. Дано: правильный ΔABC, $AB = BC = 4$, ΔDBC, $BD = DC$, $\angle(ABC, DBC) = 90°$, $\angle(ADC, ABC) = 60°$.
Найти: $S(BDC)$.
Решение: $DH \perp BC \Rightarrow DH \perp ABC$, $HF \perp AC \Rightarrow$
$\Rightarrow DF \perp AC \Rightarrow \angle DFH = 60°$.

$HF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = \sqrt{3} \Rightarrow DH = 3 \Rightarrow S(BDC) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$

Ответ: 6.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, DD_1C_1C — квадрат, $DC = 3$, $BD_1 = \sqrt{22}$.

1) Найти: BC.

2) Доказать: $BCD_1 \perp DC_1B_1$.

Решение: 1) $BD=\sqrt{22-9} = \sqrt{13}$,

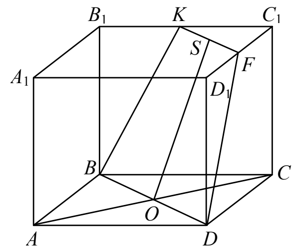
$BC=\sqrt{13-9} = 2$.

Пусть $DC_1 \cap D_1C = M$, $AB_1 \cap A_1B = N$, тогда $D_1C \perp C_1D$, $AB_1 \perp A_1B$, т.к. параллелепипед прямоугольный, то $AD \perp (AA_1B_1B) \Rightarrow MN \perp (AA_1BB_1)$ и $AN = MD$ (т.к. $AB_1 \perp DC_1$, то $ANMD$ — параллелограмм и $\Rightarrow AD \parallel MN) \Rightarrow A_1N \perp (AB_1C_1D) \Rightarrow BCD_1 \perp DC_1B_1$. Ч.т.д.

Ответ: 1) 2.

С-13.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, $AB = a$, $DD_1 = \frac{\sqrt{14}a}{4}$. Через BD и середину D_1C_1 проведена плоскость.

Найти: $S_{сеч.}$.

Решение:

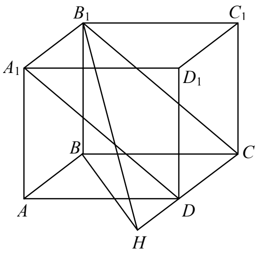
Пусть F — середина D_1C_1. Проводим $FK \parallel BD$, $K \in B_1C_1 \Rightarrow BKFD$ — искомое сечение. $BD = \sqrt{2}a \Rightarrow FK = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

PQ — средняя линия BDC. $PQ \cap AC = H$, $AC \cap BD = O \Rightarrow$

$\Rightarrow OH = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{2}a}{4}$. Пусть S — середина $FK \Rightarrow$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{\frac{14}{16}a^2 + \frac{2a^2}{16}} = a \Rightarrow S_{сеч.} = \left(\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}a}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2} \cdot 3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

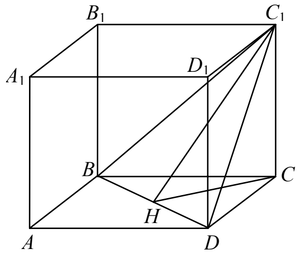


2.
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AB = m$, $\angle ADC = 135°$, через DC и A_1 проведена плоскость α, $\angle(\alpha, ABC) = 60°$.
Найти: BB_1, $S_{сеч.}$.
Решение:
$BH \perp DC \Rightarrow B_1H \perp DC \Rightarrow \angle B_1HB = 60°$.

$$BH = \frac{S(ABCD)}{DC} = \frac{m^2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{m} = \frac{\sqrt{2}m}{2} \Rightarrow B_1B = BH \cdot \text{tg}60° = \frac{\sqrt{6}m}{2}.$$

$$S_{сеч.} = \frac{S(ABCD)}{\cos 60°} = \sqrt{2}m^2.$$ Ответ: $\frac{\sqrt{6}m}{2}, \sqrt{2}m^2$.

С-14.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $BC = 7$, $CD = 15$, $\angle BCD = 60°$, $\angle(BC_1D, ABC) = 45°$.
Найти: $S_{бок.}$.
Решение:
$CH \perp BD \Rightarrow C_1H \perp BD \Rightarrow C_1HC = 45°$.
По теореме косинусов.

$$BD = \sqrt{49 + 225 - 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{274 - 105} = \sqrt{169} = 13.$$

$$S(BCD) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{105\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CH = C_1C = \frac{2S}{BD} = \frac{105\sqrt{3}}{2 \cdot 13} = \frac{105\sqrt{3}}{26} \Rightarrow$$

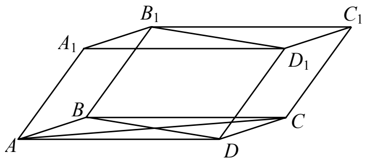
$$\Rightarrow S_{бок.} = 2C_1C \cdot BC + 2C_1C \cdot DC = 2C_1C(BC + CD) =$$

$$= \frac{105\sqrt{3}}{13} \cdot (7 + 15) = \frac{105\sqrt{3}}{13} \cdot 22 = \frac{2310\sqrt{3}}{13}.$$ Ответ: $\frac{2310\sqrt{3}}{13}$.

С-15.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, $ABCD$ — квадрат, $AB = a$, $AA_1 = b$.
Найти: $S(BB_1D_1D)$.

Решение:



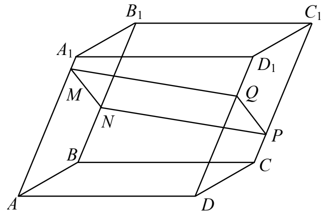
Т.к. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то AA_1 проецируется на AC.

Но $AC \perp BD \Rightarrow AA_1 \perp BD \Rightarrow$ высота BB_1D_1D равна $AA_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(BB_1D_1D) = \sqrt{2}\, ab$.

Ответ: $\sqrt{2}\, ab$.

2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, $AA_1 = 10$, $S_{бок.}=880$, $p(DD_1, CC_1):p(DD_1, AA_1) = 7 : 15$, $P(AA_1, CC_1) = 26$.



Найти: $\angle((DD_1C_1), (DD_1A_1))$, $\angle((DD_1C_1), (CC_1B_1))$ — углы между гранями.

Решение: Проводим $MNPQ$ — перпендикулярное сечение $\Rightarrow$ $S_{бок.}=10 \cdot p(MNPQ) \Rightarrow p(MNPQ)=88$. Пусть $QP = 7x \Rightarrow MQ = 15x \Rightarrow$ $\Rightarrow p = 88 = 44x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow QP = 14$, $MQ = 30$.

По теореме косинусов:

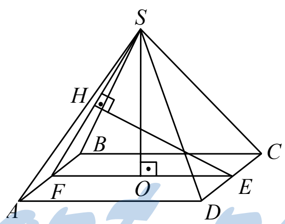
$$\angle MQP = \arccos\frac{MQ^2 + QP^2 - MP^2}{2MQ \cdot QP} = \arccos\frac{420}{840} = \arccos\frac{1}{2} = 60° \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle QPN = 120°$.

Ответ: 120° и 60°.

С-16.

1.



Дано: $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $\angle(SAB, ABC) = 60°$, $p(E, ABS) = 4\sqrt{3}$, E — середина DC.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение:

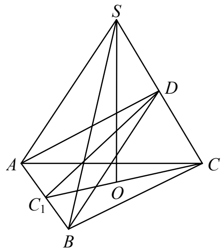
Проведем $EF \perp AB \Rightarrow SF \perp AB \Rightarrow \angle SFE = 60°$.

$EH \perp SF \Rightarrow HE = 4\sqrt{3} \Rightarrow FE = 8$. O — центр $FE \Rightarrow FO = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow SO = 4 \cdot \mathrm{tg}60° = 4\sqrt{3} \Rightarrow SF = \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{бок.} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 128$.

Ответ: 128.



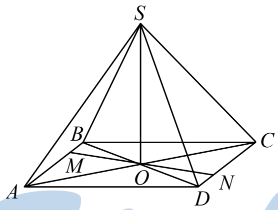
2.
Дано: $SABC$ — правильная треугольная пирамида, высота основания равна $2\sqrt{3}$, расстояние от середины основания до противоположного ребра равно 3.
Найти: 1) углы между боковыми гранями;
2) плоский угол при вершине.
Решение:
1) $CC_1 \perp AB$, $C_1D \perp SC \Rightarrow C_1D = 3$, $C_1C = 2\sqrt{3}$.
По теореме о 3-х перпендикулярах $AB \perp SC \Rightarrow SC \perp ABD \Rightarrow$
$SC \perp BD$, $SC \perp AD \Rightarrow \angle ADB = 2\text{arctg}\,\dfrac{2}{3}$ ($C_1B = 2$, т.к. $AB = 4$, т.к. $C_1C = 2\sqrt{3}$ и ΔABC — правильный).

2) $BD = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow \angle DCB = \arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BSC = 180° - 2\arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Ответ: 1) $2\text{arctg}\,\dfrac{2}{3}$; 2) $180° - 2\arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

С-17.



1. Дано: $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle BAD = 60°$, боковые грани наклонены под углом в 60° к плоскости основания.
Найти: высоту, $S_{\text{бок.}}$.
Решение: $SO \perp ABC$, $O = AC \cap BD$.
$MN \subset O$, $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp DC$;

$MN = \dfrac{2S(ABCD)}{AB} = \dfrac{a^2\sin 60°}{a} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow MO = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$, т.к. $MO \perp AB$,

то $SM \perp AB \Rightarrow \angle SMO = 45° \Rightarrow MO = SO = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$ и $SM = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$

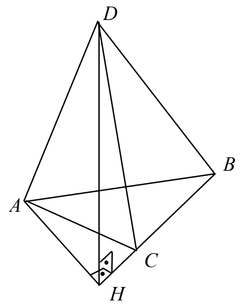
$S_{\text{бок.}} = 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}a}{4}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}a^2}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}a^2}{2}$.

2.

Дано: $DABC$ — пирамида, $AC = BC = a$, $\angle ACB = 120°$,
$(DAC) \perp (ACB)$, $(DAB) \perp (ABC)$, $\angle((DBC), (ABC)) = 45°$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.



Решение: Т.к. $DAC \perp ACB$ и $DAB \perp ACB \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \perp ACB$.

Проведем $AH \perp BC$, по ТТП $DH \perp BC$ и $\angle AHD = 45°$. $\Rightarrow AH = AD$.

$AH = AC\sin\angle ACH = AC \cdot \sin(180° - 120°) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$DH = \sqrt{2}AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, т.к. $AD \perp AH$ и $\angle AHD = 45°$.

$$AB = \frac{AH}{\sin\angle ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = a\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(DH \cdot CB + DA \cdot AB + DA \cdot AC) =$$

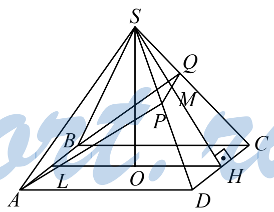
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{3} + 3\right).$$

Ответ: $\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{3} + 3\right)$.

С-18.

1. Дано: $SABC$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = a$, боковые грани наклонены к основанию под углом 60°, через сторону основания перпендикулярно к противоположной стороне проведена плоскость.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$.

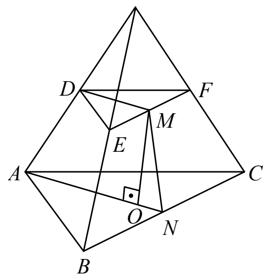


Решение: $SH \perp DC$, $HL \parallel BC \Rightarrow HL \perp DC \Rightarrow \angle SHL = 60°$.
$LM \perp SH$. $PQ \ni M$, $PQ \parallel DC \Rightarrow PQ \perp SM$. $LH \perp DC \Rightarrow LM \perp DC \Rightarrow$ $LM \perp PQ \Rightarrow ABQP$ — искомое сечение. SO — высота пирамиды.

$LH = a \Rightarrow LM = a\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SH = \frac{\frac{a}{2}}{\cos 60°} = a$,

$MH = a \cdot \cos 60° = \frac{a}{2} \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} DC = \frac{a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{8}$. Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.



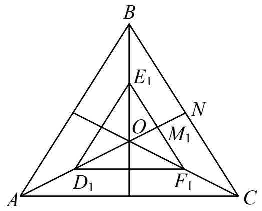
2. Дано: $ABCDEF$ — усеченная правильная пирамида, $AB = 8\sqrt{3}$, $DE = 6\sqrt{3}$. Через боковое ребро и середину противоположной стороны верхнего основания проведена плоскость, $S_{\text{сеч.}} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение: $EM = MF$, $M \in EF$; проводим $AN \parallel DM$, $N \in BC \Rightarrow ANMD$ — данное сечение и трапеция $EFCB$ равнобокая и M — середина EF, N — середина $BC \Rightarrow MN \perp BC$ и $MN \perp EF \Rightarrow MN$ — апофема.

$DM = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$, $AN = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$; $MO \perp AN \Rightarrow$

$MO = \frac{2S(ADMN)}{DM + AN} = \frac{21\sqrt{3}}{21} = \sqrt{3}$.

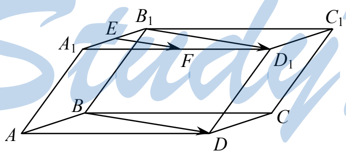


Спроецируем ΔDEF на ABC, получим $\Delta D_1E_1F_1$, у которого $D_1O = 6$, $OM_1 = 3$, но $AO = 8$, $ON = 4 \Rightarrow M_1N = 1 \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow$

$S_{\text{бок.}} = 3 \cdot \frac{1}{2}(6\sqrt{3} + 8\sqrt{3}) \cdot 2 = 42\sqrt{3}$.

Ответ: $42\sqrt{3}$.

С-19.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — ромб, F и E — середины A_1B_1 и A_1D_1 соответственно.

Записать векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:

1) сонаправлены с $\overline{EF}$;

2) противоположно направлены $\overline{DC}$;

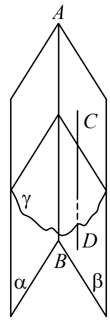
3) имеют длину, равную $|\overline{B_1D}|$.

Решение:
1) EF — средняя линия $\Delta A_1B_1D_1 \Rightarrow B_1D_1 \parallel EF \Rightarrow BD \parallel EF \Rightarrow$ это $\overline{B_1D}$ и $\overline{BD}$.

2) Очевидно, это $\overline{C_1D}$ и $\overline{B_1A}$, т.к. $B_1A \parallel C_1D$.

3) Очевидно, $\overline{DB_1}$, $\overline{BD_1}$ и $\overline{D_1B}$.

2.



Дано: $\alpha \cap \beta = AB$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $CD \perp \gamma$.
$CD \not\subset \alpha$, $CD \not\subset \beta$.

Будут ли коллинеарны $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

Решение:
$CD \perp \gamma \Rightarrow CD \parallel \alpha$ и $CD \parallel \beta \Rightarrow CD \parallel AB \Rightarrow$ будут.

Ответ: да.

С-20.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

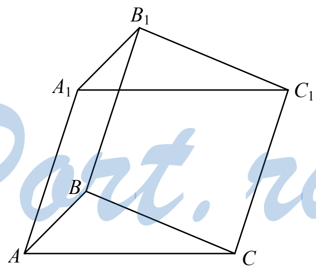
Найти: $\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{A_1D_1} + \overline{CB} + \overline{DA} + \overline{DC}$.

Решение:

$\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{A_1D_1} + \overline{CB} + \overline{DA} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{A_1D_1} + \overline{CB} + \overline{DA} + \overline{DC} =$
$= \overline{BC} + \overline{CB} + \overline{DC} = \overline{DC}$.

Ответ: $\overline{DC}$.

2.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, ΔABC — правильный, $AB = 2\sqrt{3}$ см, O — середина AB.

Найти: $|\overline{A_1A} - \overline{OA} - \overline{A_1C}|$.

Решение:

$\overline{A_1A} - \overline{OA} - \overline{A_1C} = \overline{A_1A} + \overline{AO} - \overline{A_1C} =$
$= \overline{A_1O} - \overline{A_1C} = \overline{CO}$.

$OC = BC \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$ см.

Ответ: 3 см.

С-21.

1. Дано: $MABC$ — тетраэдр, CE — медиана ΔBMC,
K — середина EC.

Выразить: $\overline{AK}$ через $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ и $\overline{BM}$.

Решение: $\overline{AK} = \overline{AC} + \overline{CK} = \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CE} = \overline{AC} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{CM}) =$

$= \overline{AC} + \frac{1}{4}(\overline{CB} + \overline{BM} - \overline{BC}) = \overline{AC} + \frac{1}{4}(2\overline{CB} + \overline{BM}) = \overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{CB}$.

Ответ: $\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{4}\overline{BM}$.

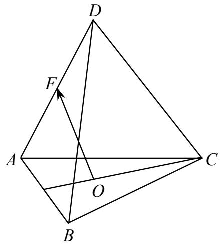
2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, диагонали пересекаются в т. O, $K \cdot (\overline{AO} + \overline{DA} + \overline{CD}) = \overline{A_1C}$.

Найти: K.

Решение: $\overline{AO} + \overline{DA} + \overline{CD} = \overline{AO} + \overline{CA} = \overline{CO}$, $\overline{A_1C} = -2\overline{CO} \Rightarrow K = -2$.

Ответ: –2.

С-22.



1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, O — т. пересечения медиан ΔABC, $F \in AD$,
$AF : FD = 3 : 1$.

Разложить $\overline{OF}$ по $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$.

Решение: $\overline{OF} = \overline{CF} - \overline{CO} =$

$= \overline{CA} + \frac{3}{4}\overline{AD} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(\overline{CA} + \overline{CB}) =$

$= \overline{CA} + \frac{3}{4}(\overline{CD} - \overline{CA}) - \frac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{1}{12}\overline{CA} + \frac{3}{4}\overline{CD} - \frac{1}{3}\overline{CB}$.

Ответ: $\frac{1}{12}\overline{CA} + \frac{3}{4}\overline{CD} - \frac{1}{3}\overline{CB}$.

2.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Доказать: его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (используя векторы).

Доказательство:

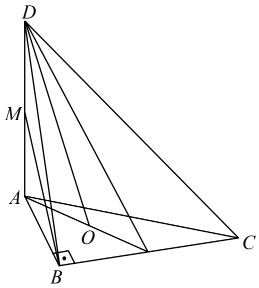
Пусть O_1 — середина AC_1, тогда $\overline{DO_1} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DC_1} =$

$= \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{DD_1}$.

Пусть O_2 — середина $A_1C \Rightarrow \overline{DO_2} = \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{DA_1} = \frac{1}{2}\overline{DA_1} + \frac{1}{2}\overline{DC} =$

$= \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DD_1} + \frac{1}{2}\overline{DC} \Rightarrow O_1$ и O_2 совпадают; для других аналогично.

С-23.



Дано: $DABC$ — тетраэдр, $DA \perp ABC$, $DA = 4\sqrt{3}$ см, $AB = 2$ см, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = 60°$, $M \in DA$, $AM = MD$, O — точка пересечения медиан ΔABC.

Найти: 1) $S_{бок.}$; 2) $S_{сеч.}$ плоскостью BMC; 3) $\angle(ABC, MBC)$; 4) $\angle(BD, BMC)$; 5) разложить $\overline{DO}$ по $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$; 6) $\angle(MBC, ABD)$.

Решение:

1) $AB \perp BC \Rightarrow DB \perp BC$. $DB = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4} = \sqrt{48+4} = 2\sqrt{13} \Rightarrow$

$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\cos 60°} + \frac{1}{2} \cdot 2\text{tg}60° \cdot 2\sqrt{13} =$

$= 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 2\sqrt{39} = 12\sqrt{3} + \sqrt{156}$ см^2.

2) $MB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4} = 4 \Rightarrow S(MBC) = 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$ см^2.

3) $AB \perp BC \Rightarrow MB \perp BC \Rightarrow \angle(ABC, MBC) = \angle MBA = \text{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} = 60°$.

4) аналогично пункту 3 $\angle(DB, BMC) = \angle DBM = \angle DBA - \angle MBA =$

$= \text{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{2} - 60° = \text{arctg}\, 2\sqrt{3} - 60°$.

5) $\overline{DO} = \overline{DA} + \overline{AO} = \overline{DA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) =$

$= \overline{DA} + \frac{1}{3}(\overline{DB} - \overline{DA} + \overline{DC} - \overline{DA}) = \frac{1}{3}(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC})$.

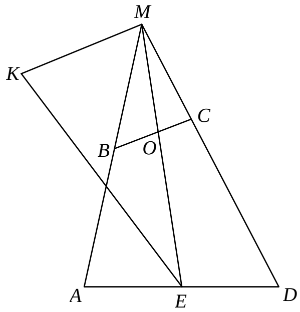
6) $\angle(MBC, ABD) = \angle(BC, AB) = 90°$.

Ответ: 1) $\left(12\sqrt{3} + \sqrt{156}\right)$ см^2; 2) $4\sqrt{3}$ см^2; 3) 60°;

4) $\text{arctg}\, 2\sqrt{3} - 60°$; 5) $\frac{1}{3}\left(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}\right)$; 6) 90°.

ВАРИАНТ 5.

С-1.



1.

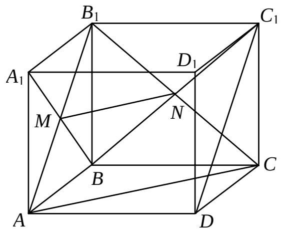
Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AB \cap CD = M$, E — середина AD, $O \in BC$, $K \notin (ABC)$.

Найти: при каком условии K, M, O и E лежат в одной плоскости.

Решение:

$O \in (KME)$, когда $O \in ME$, т.к. E — середина AD, то O — середина BC.

Ответ: когда O — середина BC.



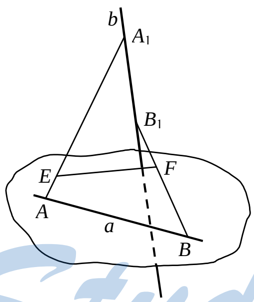
2.

Построить линию пересечения плоскостей (AB_1C) и (A_1C_1B).

Построение:

$A_1B \cap AB_1 = M$, $B_1C \cap BC_1 = N$, $MN \parallel AC$, $MN \parallel A_1C_1$, MN — искомая прямая.

С-2.

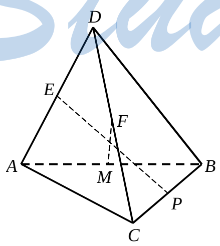


1. Дано: a и b — скрещивающиеся прямые.

Найти: взаимное положение прямых EF и a, EF и b.

Решение: Если прямые EF и a, EF и b параллельны или пересекаются, то прямые AA_1 и BB_1 лежат в одной плоскости. Значит, прямые a и b лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ противоречие. Значит, EF и a, EF и b — скрещиваются.

Ответ: они попарно скрещиваются.



2.

Дано: $ABCD$ — тетраэдр, E, F, P, M — середины AD, CD, BC, AB соответственно.

Доказать: EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство:

EM — средняя линия ΔADM.

Значит, $EM = \frac{1}{2} BD$, $EM \parallel BD$.

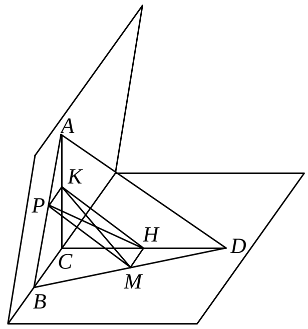
FP — средняя линия ΔCDB. Значит, $FP = \frac{1}{2}BD$, $FP \parallel BD$.

Значит, $FP = EM$ и $FP \parallel BD$. Значит $MEFP$ — параллелограмм. Его диагонали MF и EP пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

С-3.

1. Дано: ΔABC и ΔDBC не лежат в одной плоскости, M — середина BD, H — середина CD, K — середина AC, $(MKH) \cap AB = P$.

Доказать: PH и MK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.



Доказательство:

MH — средняя линия ΔBCD.

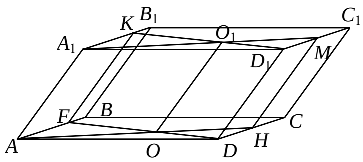
Значит, $MH \parallel BC$, $MH = \frac{1}{2}BC$.

Значит, (MKH) пересекает (ACB) по прямой, параллельной BC.

Значит, PK — средняя линия ΔBAC. $PK \parallel BC$, $PK = \frac{1}{2}BC$.

Значит, $PKHM$ — параллелограмм. Его диагонали PH и MK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

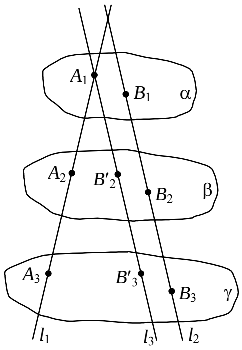
2. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BCC_1 = 120°$,
$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$,
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.



1) Построить линию пересечения OO_1 плоскостей, проходящих через прямую AA_1 и точку M и прямую DD_1 и точку K.
2) Найти взаимное положение OO_1 и AA_1.
3) $\angle(OO_1, AD)$ — ?

Решение: 1) Через т. M проведем прямую MH, параллельную DD_1.
$MH \cap CD = H$.
Через т. K проведем прямую KF, параллельную AA_1.
$KF \cap AB = F$, $D_1K \cap A_1M = O_1$, $DF \cap AH = O$.
OO_1 — линия пересечения плоскостей (DDK) и (AA_1M).
2) $(AA_1M) \parallel CC_1$, $(DD_1K) \parallel CC_1$. Значит, $OO_1 \parallel CC_1 \parallel AA_1$.
3) $OO_1 \parallel CC_1$, $AD \parallel BC$.
$\angle(AD; OO_1) = \angle(BC; CC_1) = 180° - 120° = 60°$.
Ответ: 2) $OO_1 \parallel AA_1$; 3) $60°$.

С-4.



1. Дано: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые, $l_1 \cap \alpha = A_1$, $l_1 \cap \beta = A_2$, $l_1 \cap \gamma = A_3$, $l_2 \cap \alpha = B_1$, $l_2 \cap \beta = B_2$, $l_2 \cap \gamma = B_3$, $B_1B_2 = 5$ см, $A_2A_3 = 6$ см, $\frac{A_1A_2}{B_2B_3} = \frac{8}{15}$.

Найти: A_1A_3 — ? B_1B_3 — ?

Решение:

Через точку A_1 проведем прямую l_3, параллельную l_2.

$l_3 \cap \beta = B'_2$, $l_3 \cap \gamma = B'_3$.

Из подобия $\Delta A_2A_1B'_2$ и $\Delta A_3A_1B'_3$ следует, что $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{A_1B'_2}{A_1B'_3}$, $A_1B'_2 = B_1B_2$, $A_1B'_3 = B_1B_3$.

Пусть $A_1A_2 = 8x$, $B_2B_3 = 15x$. $\frac{8x}{6+8x} = \frac{5}{5+15x}$.

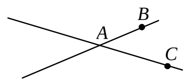
$30 + 40x = 40x + 120x^2$. $x^2 = \frac{1}{4}$, т.к. $A_1A_2 = 8x > 0$, то $x = \frac{1}{2}$.

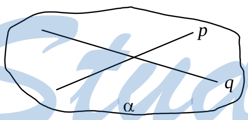
Значит, $A_1A_3 = 6 + 8x = 6 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 10$ см;

$B_1B_3 = 5 + 15x = 5 + 15 \cdot \frac{1}{2} = 12{,}5$ см.

Ответ: 10 см; 12,5 см.

2.





Дано: $p \subset \alpha$, $q \subset \alpha$, p и q пересекаются, $A \notin \alpha$, $AB \parallel p$, $AC \parallel q$, $A \in \beta$, $C \in \beta$.

Найти: взаимное расположение плоскостей α и β.

Решение:

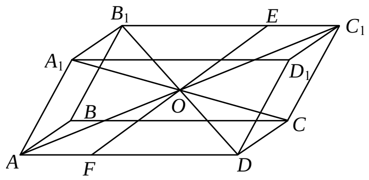
Если $B \in \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

Если $B \notin \beta$, то α и β пересекаются.

Ответ: $\alpha \parallel \beta$ ТИТТ, когда $B \in \beta$.

С-5.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $E \in B_1C_1$, $F \in AD$, $\frac{B_1E}{EC_1} = \frac{DF}{FA} = \frac{5}{2}$, O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

Доказать: E и F — симметричны относительно точки O.

Доказательство:

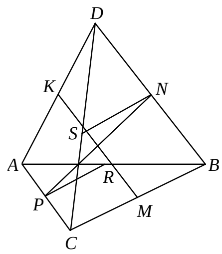
$\Delta AOD = \Delta C_1OB_1$ (по трем сторонам). Значит, $\angle ODA = \angle OB_1C_1$.

Т.к. $AD = B_1C_1$ и $\frac{B_1E}{EC_1} = \frac{DF}{FA}$, то $FD = B_1E$.

Значит, $\Delta EB_1O = \Delta FDO$ (по двум сторонам и углу между ними).

Значит, $EO = FO$. Значит, E и F симметричны относительно точки O. Ч.т.д.

2.



Дано: $ABCD$ — тетраэдр, K, N, M, P, R, S — середины AD, BD, BC, AC, AB, DC.

Доказать, что $AD^2 + BD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 + AC^2 = 4(PN^2 + KM^2 + RS^2)$.

Доказательство:

PR — средняя линия ΔABC; $PR = \frac{1}{2}BC$,

$PR \parallel BC$.

SN — средняя линия ΔDBC, $SN = \frac{1}{2}BC$, $SN \parallel BC$.

Значит, $PRNS$ — параллелограмм.

Аналогично $PKNM$ — параллелограмм и $KSMR$ параллелограмм.

По свойству параллелограмма: удвоенная сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей.

$2PR^2 + 2PS^2 = PN^2 + RS^2$.

$2KP^2 + 2PM^2 = RN^2 + KM^2$.

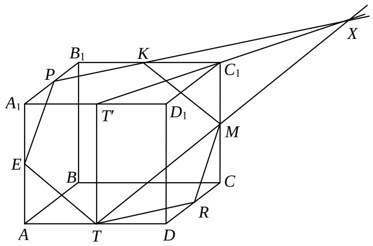
$2KP^2 + 2RM^2 = RS^2 + KM^2$.

$$2\left(\frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{4}AD^2 + \frac{1}{4}DC^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2\right) =$$

$= 2PN^2 + 2RS^2 + 2KM^2$.

$AD^2 + BD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 + AC^2 = 4(PN^2 + KM^2 + RS^2)$. Ч.т.д.

С-6.



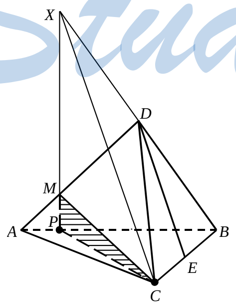
1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра равны 8 см. P, M, T — середины ребер A_1B_1, C_1C, AD.
Построить сечение куба плоскостью, проходящей через P, M, T.
Найти: $S_{сеч.}$ — ?
Построение:
Через точку T проведем прямую TT', параллельную AA_1, T' — середина A_1D_1; $TT' \cap A_1D_1 = T'$.
Пусть $TM \cap T'C_1 = X$. Пусть $PX \cap B_1C_1 = K$.
Проведем KM. В грани AA_1D_1D проведем прямую ET, параллельную KM; $TE \cap AA_1 = E$.
Проведем EP. В грани DD_1C_1C проведем прямую MR, параллельную EP; $MR \cap CD = R$.
Проведем TR.
($EPKMRT$) — искомое сечение.
Из построения видно, что E — середина AA_1; K — середина B_1C_1; R — середина CD.
Т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то $EP = PK = KM = MK = TR = ET$.
$EM \parallel AC$; $EM = AC$. $KT \parallel C_1D$; $KT = C_1D$. $PR \parallel A_1D$' $PR = A_1D$.
Значит, $EM = KT = PR$.
Значит, $EPKMRT$ — правильный шестиугольник со стороной

$$a = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \frac{8}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$S_{сеч.} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot 16 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $48\sqrt{3}$ см^2.

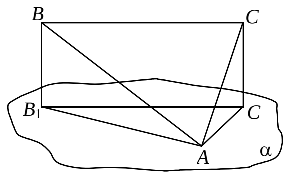


2.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, $P \in AB$, DE — медиана грани CDB.
Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и P и параллельной DE.
Построение:
В плоскости DBC через точку C проведем прямую, параллельную DE. Она пересекается с прямой DB в точке X. Т.к. E — середина

BC и $DE \| CX$, то DE — средняя линия ΔXBC. Значит, $XD = DB$.
Пусть $XP \cap AD = M$. (MPC) — искомое сечение.
$DE \parallel (MPC)$, т.к. $DE \parallel XC$ и $XC \in (MPC)$.

С-7.



1. Дано: ΔABC; $A \in \alpha$; $BC \parallel \alpha$; $BB_1 \perp \alpha$; $CC_1 \perp \alpha$; $CC_1 = 4$; $AC_1 = \sqrt{209}$, $AB_1 = \sqrt{33}$, $\angle BAC = 60°$.
Найти: BC — ?
Решение: Т.к. $BC \parallel \alpha$, то $BB_1 = CC_1 = 4$. $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$.
Значит, B_1BCC_1 — прямоугольник.
ΔCC_1A и ΔBB_1A — прямоугольные.

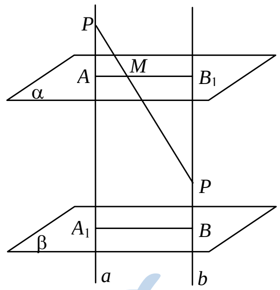
$$CA = \sqrt{CC_1^2 + AC_1^2} = \sqrt{16 + 209} = 15.$$

$$AB = \sqrt{BB_1^2 + AB_1^2} = \sqrt{16 + 33} = 7.$$

По теореме косинусов:

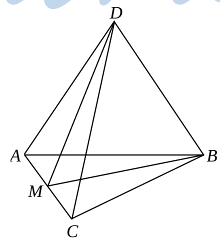
$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\angle BAC} = \sqrt{225 + 49 - 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$= \sqrt{225 + 49 - 105} = 13$. Ответ: 13.



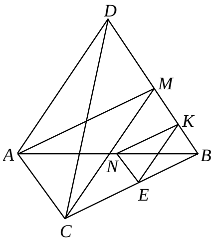
2. Дано: $\alpha \parallel \beta$; $a \perp \alpha$; $b \perp \beta$; $a \cap \alpha = A$; $b \cap \beta = B$; $PP_1 \cap \alpha = M$.
Построить: $a \cap \beta$, $b \cap \alpha$.
Построение: Т.к. $\alpha \| \beta$, и $a \perp \alpha$, и $b \perp \beta$, то $a \parallel b$. Значит, они и прямая PP_1 лежат в одной плоскости, которая пересекает α по прямой AM, а плоскость β по прямой, параллельной AM.
Пусть $AM \cap b = B_1$; $b_1 = b \cap \alpha$.
Через точку B в плоскости β проведем прямую BA_1, параллельную AM. $BA_1 \cap a = A_1$. $A_1 = a \cap \beta$.

С-8.



1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$.
Доказать: $AC \perp DB$.
Доказательство:
$\Delta DBC = \Delta DBA$ (по двум сторонам и углу между ними).

Значит, $DA = DC$.
Пусть M — середина AC, тогда DM и BM — медианы равнобедренных ΔADC и ΔABC. Значит, $AC \perp MB$; $AC \perp MD$.
Значит, $AC \perp (MBD)$. А т.к. $DB \in (MBD)$, то $AC \perp BD$. Ч.т.д.



2.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AB=BC= AC = DA = DB = DC = a$, E — середина BC.
Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E и перпендикулярной DB.
Найти $S_{сеч.}$.
Построение:
Пусть M — середина DB. Т.к. все грани тетраэдра правильные треугольники, то $CM \perp BD$ и $AM \perp DB$.
Построим $EK \parallel CM$ и $KN \parallel AM$. (EKN) — искомое сечение.

NE — средняя линия ΔABC, $NE = \dfrac{a}{2}$.

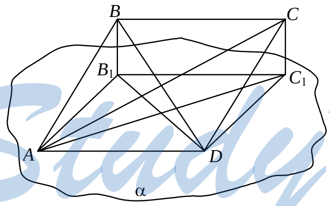
$$EK = NK = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Пусть высота ΔNKE h.

$$h = \sqrt{KE^2 - \frac{NE^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$S_{сеч.} = \frac{1}{2}NE\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}.$$ Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

С-9.



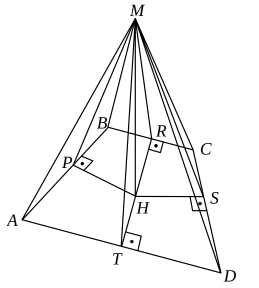
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $A, D \in \alpha$, $B, C \notin \alpha$, $AB = 15$ см, $BC = 19$ см, AC_1 и B_1D — проекции диагоналей AC и BD на α, $AC_1=22$ см, $B_1D = 20$ см.
Найти: $d(BC, \alpha)$ — ?
Решение:
Т.к. $BC \parallel AD$ и $DA \in \alpha$, то $BC \parallel \alpha$. Значит, $d(BC, \alpha) = BB_1 = CC_1$.
$B_1C_1 \parallel BC$, $B_1C_1 = BC$. Значит, $AD = B_1C_1$; $AD \parallel B_1C_1$.
Значит, AB_1C_1D — параллелограмм. По свойству параллелограмма $AC_1^2 + B_1D^2 = 2AB_1^2 + 2AD^2$. $484 + 400 + 2AB_1^2 + 722$;

$AB_1^2 = 81$, $AB_1 = 9$ см. $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2} = \sqrt{225 - 81} = 12$ см.

Значит, $d(BC, \alpha) = 12$ см. Ответ: 12 см.

С-10.

1.



Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, CD) = d(M, AD)$=12 см, AD = 32 см, BC = 18 см.

Найти: $d(M,(ABC))$ — ?

Решение:

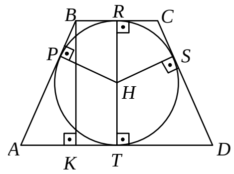
Пусть $MH \perp (ABC)$. $HP \perp AB$; $HR \perp BC$; $HS \perp CD$; $HT \perp AD$;

$MP \perp AB$; $MR \perp BC$; $MS \perp CD$; $MT \perp AD$.

$\Delta MHP = \Delta\ MHR = \Delta MHS = \Delta MHT$ (по гипотенузе и катету).

Значит, $HT = HP = HR = HS$.

Значит, H — центр вписанной окружности.



$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{(AP + BP)^2 - (AT - BR)^2} =$$

$$= \sqrt{(AT + BR)^2 - (AT - BR)^2} =$$

$$= \sqrt{(AT + BR - AT + BR)(AT + BR + AT - BR)} =$$

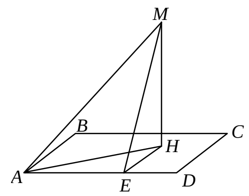
$$= \sqrt{2BR \cdot 2AT} = \sqrt{BC \cdot AD} = \sqrt{18 \cdot 32} = 24 \text{ см}.$$

Значит, $HR = HP = HS = HT = \frac{1}{2}BH$ = 12 см.

Значит, M — лежит в плоскости трапеции.

Ответ: M — лежит в плоскости трапеции.

2. Дано: $ABCD$ — прямоугольник, AM — наклонная, $\angle MAB = \angle MAD = 50°$.



Найти: $\angle(AM, (ABC))$ — ?

Решение:

Пусть $MH \perp (ABC)$. Т.к. $\angle MAB = \angle MAD$, то H лежит на биссектрисе $\angle BAD$.

Пусть $HE \perp AD$. По ТТП $ME \perp AD$.

Пусть $AM = a$. Тогда $AE = AM \cdot \cos 50° = a\cos 50°$.

Т.к. AH — биссектриса $\angle BAD$, то $\angle HAE = 45°$. Значит, ΔAEH — равнобедренный.

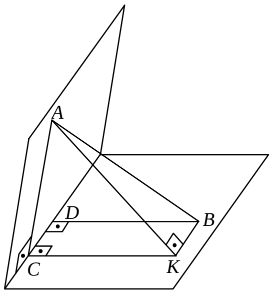
$$AH = \sqrt{AE^2 + EH^2} = AE \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \cos 50°.$$

$$\cos\angle(MAH) = \frac{AH}{AM} = \sqrt{2}\cos 50°.$$

Значит, $\angle(AM, (ABC)) = \arccos(\sqrt{2}\cos 50°)$.

Ответ: $\arccos(\sqrt{2}\cos 50°)$.

С-11.



1.

Дано: концы отрезка $AB = 25$ см лежат на гранях двугранного угла, равного 60°. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребра двугранного угла. $AC = 5$ см, $BD = 8$ см.

Найти: CD — ?

Решение:

Через точку C в плоскости (BDC) проводим прямую, параллельную BD. $CK = BD$, $CK \perp CD$. $CDBK$ — прямоугольник. $\angle ACK = 60°$.

$$AK = \sqrt{AC^2 + CK^2 - 2AC \cdot CK \cdot \cos\angle ACK} = \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} =$$

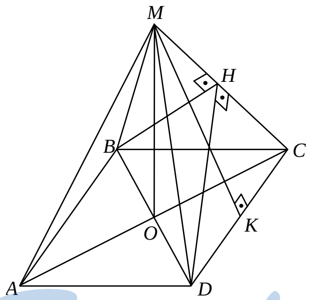
$$= \sqrt{89 - 40} = 7.$$

Т.к. $CD \perp AC$ и $CD \perp CK$, то $CD \perp (ACK)$.

Значит, $KB \perp (ACK) \Rightarrow KB \perp AK$.

Значит, $CD = KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$ см.

Ответ: 24 см.



2.

Дано: $ABCD$ — квадрат, $AC \cap BD = O$, $OM \perp (ABC)$, $OM = 3$,

$AB = BC = CD = AD = 4\sqrt{2}$.

Найти: $\angle((BMC), (DMC))$.

Решение:

Т.к. $ABCD$ — квадрат, то $AO = BO = CO = DO$.

Значит, $\Delta OMB = \Delta OMC = \Delta OMD$ (по двум катетам).

Значит, $BM = MC = MD$.

Значит, $\Delta MBC = \Delta MCD$ (по трем сторонам).

Значит, если $DH \perp MC$, то $BH \perp MC$.

Значит, $\angle((BMC), (DMC)) = \angle BHD$.

$BD = AD \cdot \sqrt{2} = 8$, $OD = 4$, $MD = \sqrt{MO^2 + OD^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

MK — высота и медиана ΔCDM.

$MK = \sqrt{MD^2 - DK^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$.

$MK \cdot CD = DH \cdot CM$; $DH = BH = \dfrac{CD \cdot MK}{CM} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}}{5} = \dfrac{4}{5}\sqrt{34}$.

По теореме косинусов

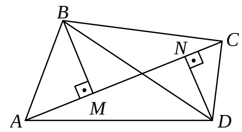
$$\cos\angle BHD = \frac{-BD^2 + BH^2 + HD^2}{2BH \cdot HD} = \frac{-64 + \frac{16}{25} \cdot 34 + \frac{16}{25} \cdot 34}{2 \cdot \frac{16}{25} \cdot 34} = -\frac{8}{17}.$$

Значит, $\angle((BMC), (DMC)) = \arccos\left(-\frac{8}{17}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{8}{17}\right)$.

С-12.

1.



Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 3$, $AD = 4$, прямоугольник перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол.

Найти: BD.

Решение: $BM \perp AC$, $DN \perp AC$, $BD^2 = BM^2 + MN^2 + ND^2$.

$$BM = ND = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{12}{5}.$$

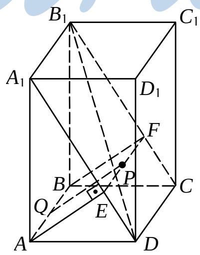
$$MC = \sqrt{BC^2 - BM^2} = \sqrt{16 - \frac{144}{25}} = \sqrt{16\left(1 - \frac{9}{25}\right)} = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}.$$

$$NC = \sqrt{CD^2 - ND^2} = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{225 - 144}{25}} = \frac{9}{5}.$$

$$MN = MC - NC = \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = \frac{7}{5}.$$

$BD^2 = \frac{144}{25} + \frac{49}{25} + \frac{144}{25} = \frac{337}{25}$, $BD = \frac{\sqrt{337}}{5}$. Ответ: $\frac{\sqrt{337}}{5}$.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 4$, $AB_1 = 15$, $B_1D = \sqrt{305}$.

Найти: $d(AB, B_1D)$ — ?

Изобразить общий перпендикуляр этих прямых.

Решение:

$AB \parallel (DA_1B_1)$, $AE \perp A_1D$; $AE \perp CD$.

Значит, $d(AB, B_1D) = d(AB, (DA_1B_1)) = AE$.

$$BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{225 - 16} = \sqrt{209}\ .$$

$$BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = \sqrt{305 - 209} = \sqrt{96}\ .$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{96 - 16} = \sqrt{80}\ .$$

$$A_1D = \sqrt{B_1D^2 - A_1B_1^2} = \sqrt{305 - 16} = \sqrt{289}\ .$$

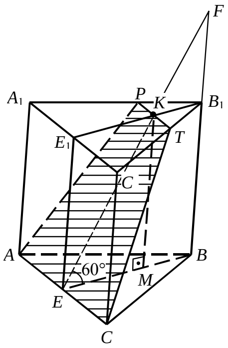
$$AE = \frac{AA_1 \cdot AD}{A_1D} = \frac{\sqrt{209} \cdot \sqrt{80}}{\sqrt{289}} = 4\sqrt{\frac{209 \cdot 5}{289}} = \frac{4}{17}\sqrt{1045}\ .$$

$EF \parallel CD$; $QP \parallel AE$.

QP — общий перпендикуляр прямых AB и B_1D.

Ответ: $\frac{4}{17}\sqrt{1045}$.

С-13.



1.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, все ребра равны $2\sqrt{3}$, через сторону основания под углом 60° к его плоскости проведена плоскость.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$ — ?

Решение:

E — середина AC, $BE \perp AC$ (т.к. ΔABC — правильный).

В плоскости (B_1BE) проведем прямую FE под углом 60° к основанию.

$EF \cap B_1B = F$ (по ТТП $FE \perp AC$), $FC \cap B_1C_1 = T$, $FA \cap A_1B_1 = P$.

$(APTC)$ — искомое сечение.

$$BE = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\,,\ FB = BE \cdot \text{tg}60° = 3 \cdot \sqrt{3}\,,\ FB_1 = FB - BB_1 = \sqrt{3}\ .$$

$\Delta FB_1K \sim \Delta FBE$ (по двум углам).

Значит, $\frac{KB_1}{EB} = \frac{FB_1}{FB} = \frac{1}{3}$, $KB_1 = \frac{1}{3}EB = 1$.

$\Delta PB_1T \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по двум углам).

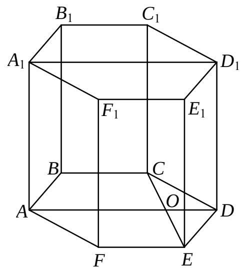
$$\frac{PT}{A_1C_1} = \frac{KB_1}{E_1B_1} = \frac{1}{3}\,,\ PT = \frac{A_1C_1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\ KM \perp BE.$$

$$\frac{KM}{KE} = \sin 60°,\ KE = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} = 4.$$

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(PT + AC)\cdot KE = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}\right)\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) =$$

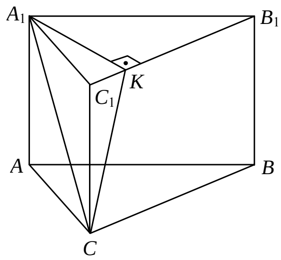
$$= 4\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$ Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

2.



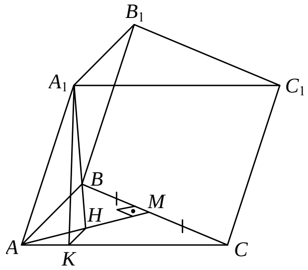
Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма, $S_{\text{бок. грани}} = Q$.
Найти: площадь сечения, перпендикулярного к меньшей диагонали основания и делящего эту диагональ пополам.
Решение: Т.к. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $EC \perp AD$, $CE \cap DA = O$ и O — середина EC.
Значит, $CE \perp (AA_1D)$, $AD = 2FE$.
$S_{AA_1D_1D} = AD\cdot AA_1 = 2FE\cdot AA_1 = 2Q$. Ответ: $2Q$.

С-14.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$,
$\angle(A_1C, (CC_1B_1)) = 30°$.
Найти: $S_{\text{полн. пов.}}$ — ?
Решение:
$A_1K \perp B_1C_1$, $CC_1 \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow CC_1 \perp A_1K$.
Значит, $A_1K \perp (CC_1B_1)$.
Значит, $\angle(A_1C, (CC_1B_1)) = \angle A_1CK$.
$S(ABC)$
$= \sqrt{27(27-13)(27-21)(27-20)} = \sqrt{27\cdot 14\cdot 6\cdot 7} =$
$= \sqrt{9\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 7} = 7\cdot 3\cdot\sqrt{3\cdot 2\cdot 6} = 21\cdot 6 = 126.$
$A_1K^2 = A_1C_1^2 - C_1K^2 = A_1B_1^2 - B_1K^2 \Leftrightarrow 231 = C_1K^2 - B_1K^2$
$C_1K + B_1K = C_1B_1 = 21 \Rightarrow C_1K - B_1K = 11 \Rightarrow C_1K = 16 \Rightarrow B_1K = 5$
$A_1K = \sqrt{A_1C_1^2 - C_1K^2} = \sqrt{400 - 256} = 12$
$A_1C = \frac{AK}{\sin 30°} = 24$. $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{576 - 400} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$.
$S_{\text{п.п.}} = 2S(ABC) + AA_1(AB + BC + AC) = 2\cdot 126 + 4\sqrt{11}\cdot 54 =$
$= 216\sqrt{11} + 252 = 36(7 + 6\sqrt{11})$. Ответ: $36(7 + 6\sqrt{11})$.

С-15.



1.
Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, все ребра равны между собой,
$\angle(AA_1, (ABC)) = 60°$,
$\angle CAA_1 = \angle A_1AB < 90°$, $S(CC_1B_1B) = Q$.
Найти: $S_{\text{бок. пов.}}$ — ?
Решение:
AM — высота, биссектриса и медиана правильного ΔABC.
Т.к. $\angle CAA_1 = \angle A_1AB$, то основание высоты A_1H призмы лежит на AM. Значит, $\angle(AA_1; (ABC)) = \angle A_1AH = 60°$.
$A_1H \perp BC$; $AM \perp BC$. Значит, $BC \perp (AA_1M)$.
Значит, $BC \perp AA_1$. Значит, $BC \perp CC_1$.
Значит, BCC_1B_1 — прямоугольник.
Пусть ребро призмы a. Значит, $a^2 = Q$. $a = \sqrt{Q}$.
$KH \perp AC$. $\angle CAM = 30°$.

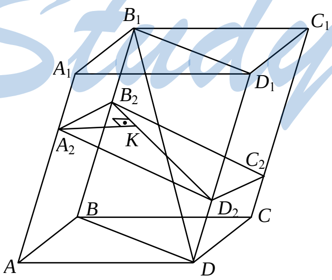
$$\frac{AK}{AH} = \cos 30°;\ AH = \frac{AK}{\cos 30°} = \frac{2AK}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{AH}{AA_1} = \cos 60°;\ AA_1 = \frac{AH}{\cos 60°} = 2AH = \frac{4AK}{\sqrt{3}}.$$

$$\sqrt{3}AA_1 = 4AK;\ \frac{AK}{AA_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \cos\angle CAA_1,\ \sin\angle CAA_1 = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Значит, $S_{\text{бок.пов.}} = 2 \cdot AA_1 \cdot AC \cdot \sin\angle CAA_1 + Q = 2Q \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} + Q =$

$= Q\left(1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$. Ответ: $Q\left(1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.



2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $d(AA_1, DD_1) = 10$,
$d(AA_1, BB_1) = 17$, $S(BB_1D_1D) = 210$,
$d(AA_1, B_1D) = 8$.
Найти: $S_{\text{бок. пов.}}$ — ?
Решение:
Построим перпендикулярное сечение $A_2B_2C_2D_2$ параллелепипеда.
Тогда $A_2B_2 = 17$; $B_2C_2 = 10$.
B_2D_2 — проекция B_1D на плоскость $(A_2B_2D_2)$.

$A_2K \perp B_2D_2$. $B_1B_2 \perp (A_2B_2C_2) \Rightarrow A_2K \perp B_1B_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_2K \perp (B_1BD) \Rightarrow A_2K \perp B_1D$. $AA_1 \perp (A_2B_2D_2)$. Значит, $AA_1 \perp A_2K$.
Значит, $d(AA_1, B_1D) = A_2K = 8$.

$B_2K = \sqrt{A_2B_2^2 - A_2K^2} = \sqrt{289 - 64} = 15$.

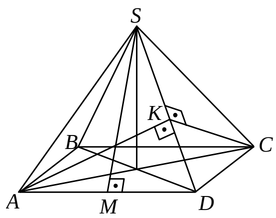
$D_2K = \sqrt{A_2D_2^2 - A_2K^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$.

Значит, $B_2D_2 = 21$ или 9. $S(BB_1D_1D) = B_2D_2 \cdot BB_1$.

Значит, $BB_1 = \frac{210}{21}$ или $\frac{210}{9}$. $BB_1 = 10$ или $\frac{210}{9}$.

Значит, $S_{\text{бок. пов.}} = AA_1 \cdot (2A_2B_2 + 2A_2D_2) = 2AA_1(27) = 54AA_1$.
Значит, $S_{\text{бок. пов.}} = 540$ или 1260.
Ответ: 540 или 1260.

С-16.



1. Дано: $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = a$,
$\angle((ASD), (CSD)) = 120°$.
Найти: $S_{\text{бок. пов.}}$ — ?
Решение: Т.к. пирамида правильная, то $\Delta ASD = \Delta CSD$.
Значит, если $AK \perp SD$, то $CK \perp SD$.
Значит, $\angle AKC = 120°$. $AC = a\sqrt{2}$.
Пусть $AK = x$, тогда по теореме косинусов
из ΔACK: $2a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos 120°$; $2a^2 = 2x^2 + x^2$;

$x^2 = \frac{2}{3}a^2$, $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$;

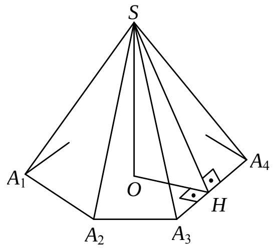
из ΔAKD: $\sin\angle ADK = \frac{AK}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos\angle ADK = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$\operatorname{tg}\angle ADK = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2}$. $SM \perp AD$. $\operatorname{tg}\angle ADK = \frac{SM}{MD} = \sqrt{2}$.

$SM = \sqrt{2} \cdot MD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. $S(SAD) = \frac{1}{2}SM \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$.

$S_{\text{б.п.}} = 4S(SAD) = a^2\sqrt{2}$.
Ответ: $a^2\sqrt{2}$.

2.



Дано: правильная n-угольная пирамида, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ.

Найти: плоский угол при вершине пирамиды и вычислить его для $\varphi = 40°$ и $n = 10$.

Решение: H — середина A_3A_4; $SH \perp A_3A_4$; $OH \perp A_3A_4$.

$\angle SHO = \varphi$. $\angle A_3OA_4 = \dfrac{360°}{n}$.

$\dfrac{A_3H}{HO} = \operatorname{tg}\dfrac{360°}{2n} = \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$; $A_3H = HO \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$.

$\dfrac{HO}{SH} = \cos\varphi$; $HO = SH \cdot \cos\varphi$; $A_3H = SH \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$.

$\operatorname{tg}\angle A_3SH = \dfrac{A_3H}{SH} = \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$.

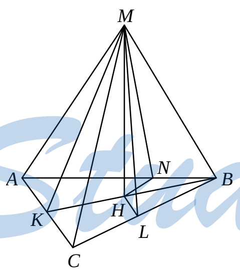
$\angle A_3SA_4 = 2\operatorname{arctg}\left(\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}\right)$.

Т.к. пирамида правильная, то углы при всех вершинах равны.

Если $\varphi = 40°$ и $n = 10$, то $2\operatorname{arctg}(\cos 40° \cdot \operatorname{tg}18°) \approx 27°57'$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}\right)$; $\approx 27°57'$.

С-17.



1. Дано: $MABC$ — пирамида, $AB = BC$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ.

Найти: высоту пирамиды, $S_{\text{бок. пов.}}$ — ?

Решение:

Пусть MH — высота пирамиды, $HK \perp AC$; $HL \perp BC$; $HN \perp AB$.

По ТТП $MK \perp AC$; $ML \perp BC$; $MN \perp AB$.

Значит, $\angle MKH = \angle MLH = \angle MNH = \varphi$.

Значит, $\Delta MKH = \Delta MLH = \Delta MNH$ (по катету и острому углу).

Значит, $HK = HL = NH$.

Значит, H — центр вписанной в ΔABC окружности.

Т.к. ΔABC — равнобедренный, то $H \in BK$, где BK — медиана, высота и биссектриса ΔABC.

$AK = \frac{b}{2}$; $BK = AK \cdot \text{tg}\alpha = \frac{b}{2}\,\text{tg}\alpha$; $AB = \frac{AK}{\cos\alpha} = \frac{b}{2\cos\alpha}$.

r — радиус вписанной в ΔABC окружности.

$$r = \frac{2S(ABC)}{P(ABC)} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{b}{2}\,\text{tg}\alpha}{b + 2\cdot\frac{b}{2\cos\alpha}} = \frac{\frac{b^2}{2}\,\text{tg}\alpha}{b\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)} = \frac{b}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha(\cos\alpha+1)} =$$

$= \frac{b}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+1} = \frac{b}{2}\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}$. Значит, $MH = r\cdot\text{tg}\varphi = \frac{b}{2}\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{tg}\varphi$.

$$MK = \frac{KH}{\cos\varphi} = \frac{b}{2}\cdot\frac{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}.$$

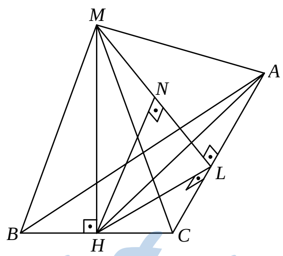
Т.к. $\Delta MKH = \Delta MLH = \Delta MNH$, то $MK = MN = ML$.

Значит, $S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2}\cdot MK\cdot P(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}\left(b+\frac{b}{\cos\alpha}\right) =$

$= \frac{b^2}{4}\cdot\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha+1)\cos\varphi}\cdot\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right) = \frac{b^2}{4}\cdot\frac{\text{tg}\alpha}{\cos\varphi}$.

Ответ: $\frac{b}{2}\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{tg}\varphi$; $\frac{b^2}{4}\cdot\frac{\text{tg}\alpha}{\cos\varphi}$.

2.



Дано: $MABC$ — пирамида, $AB{=}AC = 50$, $BC = 80$, $\angle MAC = \angle MAB < 90°$, $(MBC) \perp (ABC)$, MH — высота пирамиды, $d(H, (AMC)) = 12\sqrt{3}$.

Найти: $S_{\text{бок. пов.}}$ — ?

Решение: Т.к. $\angle MAB = \angle MAC$, то H лежит на биссектрисе $\angle A$.

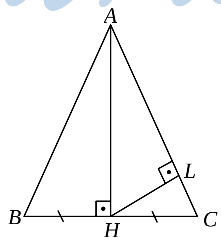
А т.к. $AB = AC$, то на высоте и медиане.

Т.к. $(MBC) \perp (ABC)$, то AH высота ΔABC.

$HL \perp AC$, т.к. $MH \perp AC$, то $AC \perp (MLH)$.

$HN \perp ML$, $AC \perp HN$, т.к. $AC \perp (MLH)$.

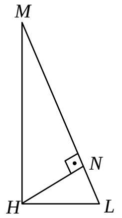
Значит, $d(H, (AMC)) = HN = 12\sqrt{3}$.



$$AH = \sqrt{AC^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{2500 - \frac{6400}{4}} =$$

$= \sqrt{\dfrac{10000 - 6400}{4}} = \sqrt{\dfrac{3600}{4}} = \dfrac{60}{2} = 30.$

$HL = \dfrac{AH \cdot HC}{AC} = \dfrac{30 \cdot 40}{50} = \dfrac{1200}{50} = \dfrac{120}{5} = 2{,}4.$



$\sin\angle MLH = \dfrac{NH}{HL} = \dfrac{12\sqrt{3}}{24} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle MLH = 60°$, значит,

$ML = 2HL = 48.$

$MH = ML \cdot \sin\angle MLH = 48 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$.

$S(MAC) = \dfrac{1}{2} ML \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 48 \cdot 50 = 1200.$

$\Delta MAC = \Delta MAB$ (по двум сторонам и углу между ними).

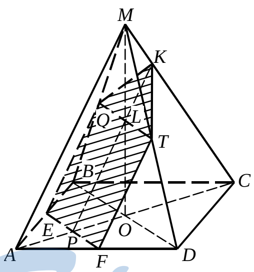
Значит, $S(MAC) = S(MAB)$.

$S(MBC) = \dfrac{1}{2} MH \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 80 = 960\sqrt{3}$.

$S_{\text{б.п.}} = S(MBC) + 2S(MAC) = 960\sqrt{3} + 2400 = 480(5 + 2\sqrt{3})$.

Ответ: $480(5 + 2\sqrt{3})$.

С-18.



1. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AB = a$, $MA = MB = MC = MD = b$, E — середина AB, F — середина AD. Через E, F параллельно AM проведена плоскость.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$ — ?

Решение:

Пусть $EF \cap AC = P$.

Через точку P в плоскости AMC проведем прямую PK, параллельную AM.

$PK \cap MC = K$.

Через точку F в плоскости AMD проведем прямую FT, параллельную AM.

$FT \cap MD = T$.

Через точку E в плоскости AMB проведем прямую EQ, параллельную AM.

$EQ \cap MB = Q$.

($EQKTF$) — искомое сечение.

$EF \perp AC$ и $EF \perp MO \Rightarrow EF \perp (AMO)$.

Значит, $EF \perp EQ$ и $EF \perp FT$.

Значит, $EFTQ$ — прямоугольник.

$PK \perp QT$. $S_{\text{сеч.}} = S_{EQTF} + S_{QKT} = FT \cdot EF + \frac{1}{2} QT \cdot LK$.

$EF = \frac{1}{2} BD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. $FT = \frac{1}{2} AM = \frac{b}{2}$.

$\Delta KCP \sim \Delta MCA$ (по двум углам).

$\frac{PK}{AM} = \frac{PC}{AC} = \frac{3}{4}$. $PK = AM \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} b$. $LK = PK - PL = \frac{3}{4} b - \frac{b}{2} = \frac{b}{4}$.

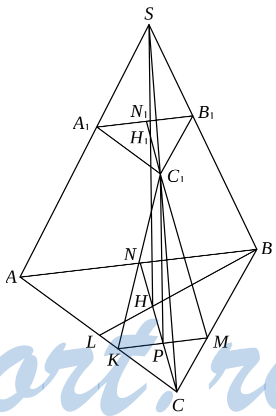
$S_{\text{сеч.}} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{ab\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}$.

Ответ: $\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$.

2.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида, $AB = 8\sqrt{3}$, $A_1B_1 = 6\sqrt{3}$. Через вершину верхнего основания перпендикулярно к плоскости основания и параллельно противолежащей стороне основания проведена плоскость. $S_{\text{сеч.}} = 4\sqrt{2}$, SH — высота полной пирамиды.

Найти: $S_{\text{бок. пов.}}(ABCA_1B_1C_1)$ — ? SH — ?



Решение:

Т.к. пирамида правильная, то H — центр ΔABC.

В плоскости (SCH) через точку C_1 проведем прямую C_1P параллельную SH.

В плоскости (ABC) через точку P проведем прямую KM параллельную AB.

$KM \cap AC = K$, $KM \cap BC = M$.

(C_1KM) — искомое сечение.

Т.к. $C_1P \| SH$, то $C_1P \perp (ABC) \Rightarrow C_1P \perp KM$.

Значит, $\frac{1}{2} C_1P \cdot KM = 4\sqrt{2}$.

H_1 — центр $\Delta A_1B_1C_1$. Т.к. $C_1P \parallel HH_1$, то HPC_1H_1 — параллелограмм. Значит, $C_1H_1 = HP$.

$C_1H_1 = \frac{2}{3} \cdot C_1N_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$. $CN = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12$.

$CH = \frac{2}{3} CN = 8$; $HN = \frac{1}{3} CN = 4$.

$PC = CH - PH = 8 - 6 = 2$; $NP = HN + HP = 4 + 6 = 10$.
$\Delta KMC \sim \Delta ABC$ (по двум углам).

Значит, $\frac{KM}{AB} = \frac{PC}{CN} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. $KM = \frac{1}{6}AB = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Значит, т.к. $\frac{1}{2}KM \cdot C_1P = 4\sqrt{2}$, то $C_1P = \frac{4\sqrt{2}\cdot 2}{KM} = 3\frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = 6\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Значит, $HH_1 = 6\sqrt{\frac{2}{3}}$. $H_1N_1 = \frac{1}{2}C_1H_1 = 3$

$NN_1 = \sqrt{(NH - N_1H_1)^2 + HH_1^2} = \sqrt{1 + 36\cdot\frac{2}{3}} = 5$.

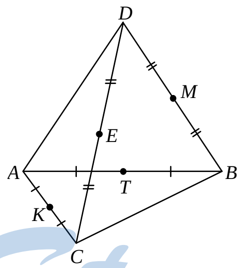
$S_{\text{бок. пов.}} = 3\cdot\frac{1}{2}(AB + A_1B_1)\cdot NN_1 = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\sqrt{3}\cdot 5 = 105\sqrt{3}$.

$\Delta C_1CP \sim \Delta SCH$ (по двум углам). Значит, $\frac{CP}{CH} = \frac{C_1P}{SH} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Значит, $SH = 4C_1P = 4\cdot 6\sqrt{\frac{2}{3}} = 24\sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{6}$.

Ответ: $105\sqrt{3}$; $8\sqrt{6}$.

С-19.



1. Дано: $DACB$ — правильная пирамида, E — середина DC, M — середина DB, T — середина BA, K — середина AC.

1) Перечислить пары противоположно направленных векторов, не лежащих на одной прямой и с началом и концом в точках E, M, T и K.

2) Перечислить пары равных векторов с началом и концом в точках E, M, T и K.

3) Перечислить векторы, имеющие равные длины, с концами в точках E, M, T и K.

Решение:

TK — средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow TK \parallel CB$ и $TK = \frac{1}{2}BC$.

EM — средняя линия $\Delta DBC \Rightarrow EM \parallel BC$ и $EM = \frac{1}{2}BC$.

TM — средняя линия $\Delta ADB \Rightarrow TM \parallel AD$ и $TM = \frac{1}{2}AD$.

KE — средняя линия $\Delta ADC \Rightarrow KE \parallel AD$ и $KE = \frac{1}{2}AD$.

1) Значит, $\overrightarrow{TK} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{KT} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{TM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EK}$; $\overrightarrow{MT} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KE}$.

2) $\overrightarrow{TK} = \overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{KE}$; $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{EK}$.

3) $|\overrightarrow{TK}| = |\overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{EM}|$; $|\overrightarrow{TM}| = |\overrightarrow{MT}| = |\overrightarrow{KE}| = |\overrightarrow{EK}|$.

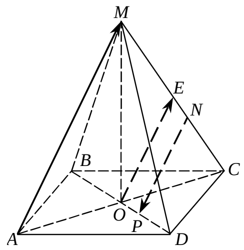
$\Delta DTE = \Delta DKM$ (по двум сторонам и углу между ними).

Значит, $|\overrightarrow{ET}| = |\overrightarrow{TE}| = |\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{KM}|$.

Ответ: 1) $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{TK}$; $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$; $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$;

2) $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{TK}$ и $\overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{KE}$; $\overrightarrow{EK}$ и $\overrightarrow{MT}$;

3) $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{TM}$; $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{MK}$.



2. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $ME = EC$.

Найти: какие из указанных на рисунке векторов коллинеарны?

Решение:

OE — средняя линия ΔAMC.

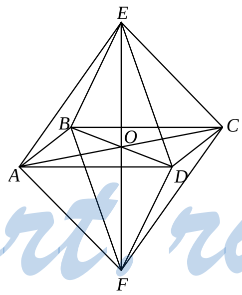
Значит, $OE \parallel AM$.

$PN \nparallel OE$, т.к. иначе прямые BD и MC лежали бы в одной плоскости.

Значит, $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OE}$.

Ответ: $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{OE}$.

С-20.



1. Дано: $EABCDF$ — правильный октаэдр с ребром, равным a.

Найти: $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA}|$ — ?

Решение:

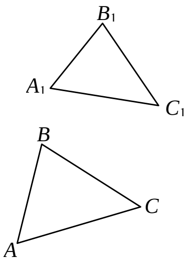
Т.к. октаэдр правильный, то $BC = AD$ и $BC \parallel AD \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;

$FA = CE$ и $FA \parallel CE \Rightarrow \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CE}$.

Значит, $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FE}$.

$O = AC \cap FE$; $OC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $OE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$FE = 2OE = a\sqrt{2}$. Ответ: $a\sqrt{2}$.



2.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ произвольно расположены в пространстве.

Доказать: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}$.

Доказательство:

Составим разность:

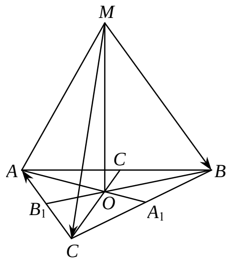
$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{CA_1}=$

$=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB_1})+(\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC_1})+(\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CA_1})=$

$=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}=0.$

Значит, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}$. Ч.т.д.

С-21.



1.

Дано: ΔABC — правильный, $M \notin (ABC)$, $MA = MB = MC$, $MO \perp (ABC)$.

Выразить $\overrightarrow{MO}$ через $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

Решение:

Т.к. MA=MB=MC, то ΔMOA=ΔMOB = ΔMOC (по гипотенузе и катету).

Значит, $OA = OB = OC$.

Значит, O — точка пересечения медиан ΔABC.

$\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC})$.

$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Ответ: $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

2.

Дано: $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны,

$3\vec{a}+5\vec{b}=m\vec{a}+(2n+1)\vec{b}$.

Найти: m — ? n — ?

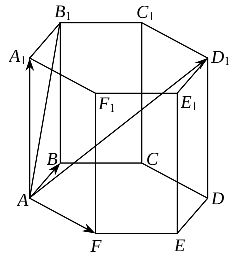
Решение:

$\vec{a}(3-m)=\vec{b}(2n-4)$.

Т.к. $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$, то $m = 3$, $n = 2$.

Ответ: $m = 3$, $n = 2$.

С-22.



1. Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма, длина стороны основания — a, $\angle(AB_1, AB) = \varphi$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

Разложить вектор $\overrightarrow{AD_1}$ по векторам $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$.

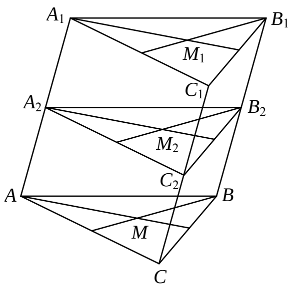
Решение: $\angle(AB_1, AB) = \angle B_1AB = \varphi$.

Значит, $AA_1 = BB_1 = AB \cdot \operatorname{tg}\varphi = a\operatorname{tg}\varphi$.

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AF} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} =$$

$$= 2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} = 2a\overrightarrow{e_1} + 2a\overrightarrow{e_2} + a\operatorname{tg}\varphi\,\overrightarrow{e_3}.$$

Ответ: $2a\overrightarrow{e_1} + 2a\overrightarrow{e_2} + a\operatorname{tg}\varphi\,\overrightarrow{e_3}$.



2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $(A_2B_2C_2)$ пересекает боковые ребра и параллельна основаниям.

Доказать: точки пересечения медиан оснований и сечения лежат на одной прямой.

Доказательство:

Пусть M_1 и M — точки пересечения медиан верхнего и нижнего оснований соответственно.

M_2 — точка пересечения медиан сечения.

Отметим в пространстве произвольную точку O.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Аналогично $\overrightarrow{M_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C})$.

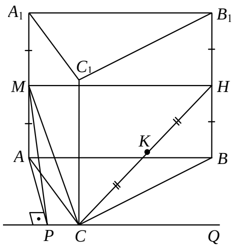
Т.к. $(A_2B_2C_2)$ параллельна (ABC) и $(A_1B_1C_1)$, то

$$\frac{A_1A_2}{A_1A} = \frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{C_1C_2}{C_1C} = k.$$

Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = k \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}) = k \cdot \overrightarrow{M_1M}$.

Значит, точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой. Ч.т.д.

С-23.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, AC = 13 см, AB = 14 см, BC = 15 см, AA_1 = 10 см, M — середина AA_1, H — середина BB_1.

Найти: 1) $S_{\text{полн. пов.}}$;

2) площадь сечения плоскостью (MHC);

3) $\angle((MHC), (ABC))$ — ?

4) $\angle(AA_1, (MHC))$ — ?

5) разложить вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, K — середина CH;

6) построить линию пересечения плоскостей MHC и ABC.

Решение: 1) $P(ABC)$ = 42 см.

$$S(ABC) = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}\ \text{см}^2 = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} =$$

$$= 7\sqrt{3\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 3} = 21\cdot 4 = 84\ \text{см}^2.$$

$S_{\text{п.п.}} = P(ABC)\cdot AA_1 + 2S(ABC) = (42\cdot 10 + 2\cdot 84)$ см^2 =
= (420 + 168) см^2 = 588 см^2.

2) $(MHC) \cap (ABC) = PQ$, $PQ \parallel AB$, $AP \perp PQ$.

По ТТП $MP \perp PQ$. Значит, $MP \perp MH$ (т.к. $MH \parallel PQ$).

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AP\cdot AB.\ AP = \frac{2S(ABC)}{AB} = \frac{2\cdot 84}{14} = 12\ \text{см}.$$

$$MP = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{AP^2 + \frac{AA_1^2}{4}} = \sqrt{144+25} = 13\ \text{см}.$$

$S(MHC) = 1/2 MP\cdot MH = 1/2\cdot 13\cdot 14 = 91$ см^2.

3) $\angle MPA$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями MHC и ABC.

$$\cos\angle MPA = \frac{AP}{MP} = \frac{12}{13}.\ \text{Значит, } \angle MPA = \arccos\frac{12}{13}.$$

$$4)\ \angle(AA_1,(MHC)) = \angle AMP.\ \cos\angle AMP = \frac{AM}{MP} = \frac{5}{13}.\ \angle AMP = \arccos\frac{5}{13}.$$

$$5)\ \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

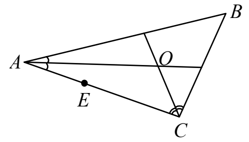
Ответ: 1) 588 см^2; 2) 91 см^2; 3) $\arccos\frac{12}{13}$; 4) $\arccos\frac{5}{13}$;

5) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 6) см. рисунок (линия PQ).

ВАРИАНТ 6.

С-1.

1.



Дано: ΔABC, $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, биссектрисы $\angle A$ и $\angle C$ пересекаются в точке O, $E \in AC$, $D \notin (ABC)$.

Найти: при каком условии можно провести плоскость через точки D, B, O и E?

Решение:

Через точки D, B, O и E можно провести плоскость, когда точки B, O, E лежат на одной прямой, а это возможно, когда BE — биссектриса $\angle B$. По свойству биссектрисы треугольника:

$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.

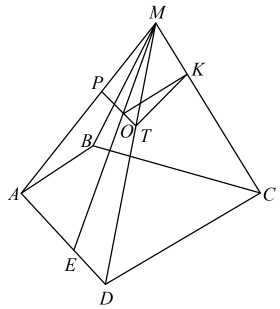
Ответ: когда $AE : EC = 2 : 3$.

2.

Построить линию пересечения плоскостей (PKT) и (MCE).

Решение:

$ME \cap PT = O$, $(PKT) \cap (MCE) = KO$, т.к. $KO \subset (MCE)$ и $KO \subset (PKT)$.



С-2.

1.

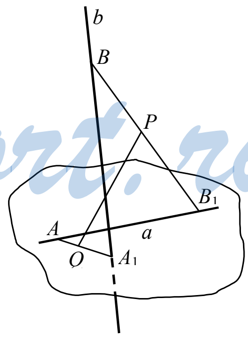
Дано: на рисунке прямые a и b — скрещивающиеся.

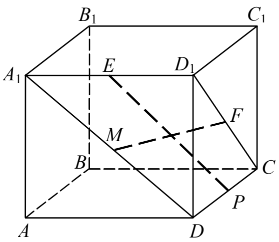
Найти: взаимное положение прямых PQ и a, PQ и b.

Решение:

Прямые PQ и a, PQ и b скрещиваются, т.к. иначе прямые AA_1 и BB_1 лежали бы в одной плоскости, т.е. a и b лежали бы в одной плоскости, что противоречит условию.

Ответ: PQ и a, PQ и b скрещиваются.



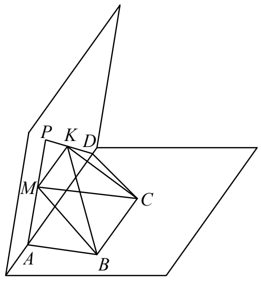


2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E — середина A_1D_1, F — середина D_1C, P — середина CD, M — середина A_1D.
Доказать: EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
Доказательство:
EM — средняя линия ΔA_1D_1D.
Значит, $EM \parallel DD_1$ и $EM = \frac{1}{2} DD_1$.

FP — средняя линия ΔCD_1D. Значит, $FP \parallel DD_1$ и $FP = \frac{1}{2} DD_1$.

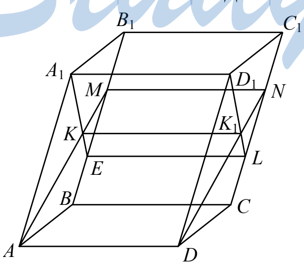
Значит, $EM \parallel FP$ и $EM = FP$. Значит, $EFPM$ — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма EP и FM пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

С-3.



1. Дано: ΔAPD и $ABCD$ — трапеция — имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях, $(BCK) \cap AP = M$, K — середина PD, $AD = 2BC$.
Доказать: MC и BK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
Доказательство:
(BCK) пересекает (APD) по прямой, параллельной $AD \Rightarrow MK \parallel AD$.
Т.к. K — середина PD, то MK — средняя линия $\Delta APD \Rightarrow MK =$
$= \frac{1}{2} AD$. $BC = \frac{1}{2} AD$ и $BC \parallel AD \Rightarrow MK \parallel BC$ и $MK = BC$.

Значит, $MKCB$ — параллелограмм, по свойству диагоналей параллелограмма MC и BK пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

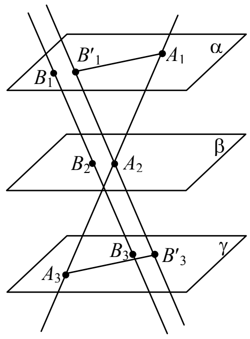


2. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 110°$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $M \in BB_1$, $E \in BB_1$.
1) Построить линию пересечения KK_1 плоскостей, проходящих через прямую AD и точку M и прямую A_1D_1 и точку E.

2) Каково взаимное положение прямых KK_1 и BC?
3) Чему равен угол между прямыми KK_1 и DC?
Решение: 1) Через точку M проведем прямую MN, параллельную AD. Через точку E проведем прямую EL, параллельную A_1D_1.
$EA_1 \cap AM = K$, $DN \cap D_1L = K_1$, KK_1 — искомая прямая.
2) $KK_1 \parallel AD \Rightarrow KK_1 \parallel BC$. 3) $DC \parallel AB$, $KK_1 \parallel BC$.
Значит, $\angle(KK_1, DC) = \angle(AB, BC) = 70°$.
Ответ: 2) $KK_1 \parallel BC$; 3) 70°.

С-4.

1. Дано: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, l_1 и l_2 — скрещиваются и пересекают эти плоскости в т. A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно; $A_1A_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 9$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$.
Найти: A_1A_3, B_1B_3.

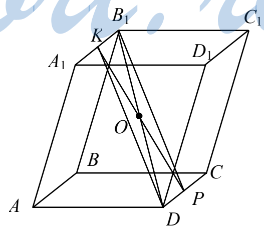


Решение: Проведем l'_2 через т. $A_2 \parallel l_2$.
Пусть $l'_2 \cap \alpha = B'_1$, $l'_2 \cap \gamma = B'_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta A_2B'_1A_1 \sim \Delta A_2B'_3A_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{A_2A_1}{A_2A_3} = \dfrac{A_2B'_1}{A_2B'_3} \Rightarrow A_2B'_1 \cdot A_2A_3 =$
$= A_2A_1 \cdot A_2B'_3 = 36$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow A_2B'_1 = A_2A_3 = B_2B_1 = 6$ см $\Rightarrow A_1A_3 = 10$ см, $B_1B_3 = 15$ см.
Ответ: 10 см, 15 см.

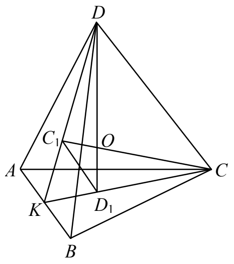
2. Дано: $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$.
Найти: взаимное расположение a и b, чтобы α и β были параллельны.
Решение: Из признака параллельности плоскостей следует, что a и b должны пересекаться, либо скрещиваться.
Ответ: Прямые должны пересекаться, либо скрещиваться.

С-5.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $A_1K : KB_1 = CP : PD =$ $= 3:1$, $K \in A_1B_1$, $P \in DC$.
Доказать: K и P — симметричны относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда.



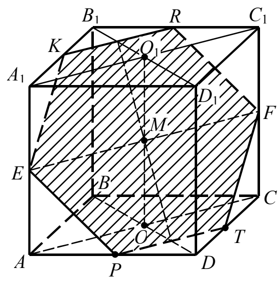
Доказательство: $KB_1 = PD$, $KB_1 \parallel PD \Rightarrow$ $\Rightarrow KB_1PD$ — параллелограмм. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда. $\Rightarrow$ т.к. $B_1O = OD$, $B_1D \cap KP =$ $= O \Rightarrow KO = OP$. Ч.т.д.



2.
Дано: $DABC$ — тетраэдр.
Доказать: прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точку пересечения медиан противоположных сторон, пересекаются в одной точке.
Доказательство:
Пусть K — середина AB, C_1 — точка пересечения медиан ΔADB, а D_1 — ΔABC.
$O = DD_1 \cap CC_1$; т.к. DK и CK — медианы $KC_1 : KD = KD_1 : KC = 1 : 3 \Rightarrow \Delta KC_1D_1 \sim \Delta\ KDC \Rightarrow C_1D_1 \parallel CD$ и $C_1D_1 = \frac{1}{3}CD \Rightarrow \Delta OC_1D_1 \sim \Delta OCD$ и $C_1O : OC = D_1O : OD = \frac{1}{3}$.

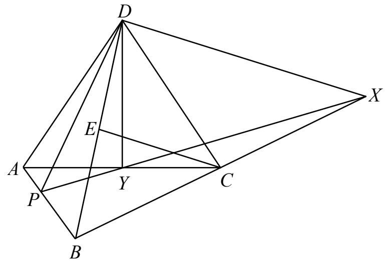
Такое же отношение аналогично доказывается и для других отрезков $\Rightarrow$ все они пересекаются в одной точке. Ч.т.д.

С-6.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = 4$ см, P — середина AD, T — середина CD, O — центр $ABCD$, O_1 — $A_1B_1C_1D_1$.
Построить: сечение, проходящее через P, T, M, где M — середина OO_1.
Найти: его площадь.
Решение:
$EF \parallel PT$, $M \in EF$, $E \in AA_1$, $F \in CC_1$;
$EK \parallel FT$, $K \in A_1B_1$;
$RF \parallel EP$, $R \in B_1C_1 \Rightarrow KRFTPE$ — искомое сечение.
По условию P и T — середины ребер, по построению E и F — середины ребер $\Rightarrow K$ и R — середины ребер $\Rightarrow$ сечение — правильный шестиугольник со стороной $PT = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2 = 12\sqrt{3}$ см^2. Ответ: $12\sqrt{3}$ см^2.

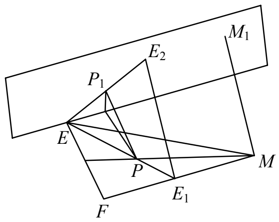
2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $P \in AB$, CE — медиана ΔCBD.
Построить: сечение, проходящее через P и D параллельно CE.
Решение:
Проводим $DX \parallel CE$, $DX \cap BC = X$. $PX \cap AC = Y \Rightarrow PYD$ — искомое сечение.



С-7.

1. Дано: ΔEFM, через E проведена плоскость α, $\alpha \parallel FM$, $MM_1 \perp \alpha$, MM_1 = 12 см, P — точка пересечения медиан ΔEFM, $PP_1 \perp \alpha$.

Найти: PP_1.



Решение: E_1 — середина FM, $E_1E_2 \perp \alpha$ $\Rightarrow E_1E_2 = MM_1$ = 12 см $\Rightarrow EE_1$ проецируется на $EE_2 \Rightarrow P$ проецируется на EE_2 в т. $P_1 \Rightarrow PP_1 : E_1E_2 =$ $= EP : EE_1 \Rightarrow PP_1$ = 8 см.

Ответ: 8 см.

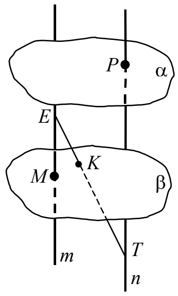
2. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \beta$, $n \perp \alpha$, $n \cap \alpha = P$, $m \cap \beta = M$, $ET \cap \beta = K$.

Построить: точки пересечения m с α и n с β.

Решение:

$n \parallel m$ т.к. $\alpha \parallel \beta$, $n \perp \alpha$, $m \perp \beta$.

$n \cap \beta = MK \cap n$, проведем через P прямую, параллельную MK до пересечения с m, точка их пересечения — искомая.



С-8.

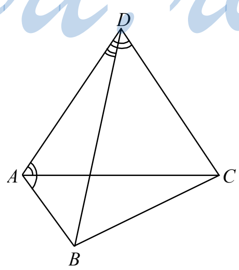
1.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, $\angle DAB = \angle DAC$, $\angle ADC = \angle ADB$.

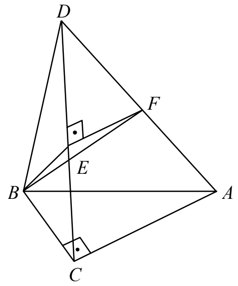
Доказать: $AD \perp BC$.

Доказательство:

$\Delta ADB = \Delta ADC$ по стороне и двум углам $\Rightarrow$ $AB = AC$. AD проецируется на биссектрису $\Delta ABC \Rightarrow$ и на высоту $\Rightarrow AD \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Ч.т.д.

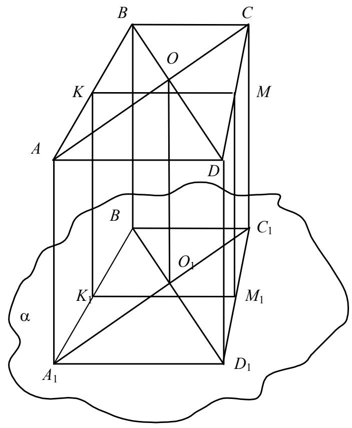


2.

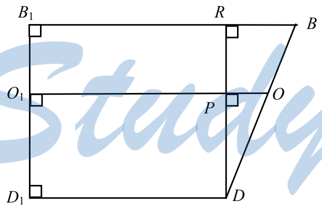


Дано: $DABC$ — тетраэдр, $DB \perp ABC$, $DB = BC$, $\angle BCA = 90°$, F — середина AD.
Построить: сечение, проходящее через F перпендикулярно CD.
Решение:
По теореме о трех перпендикулярах $AC \perp CD$. Проведем $FE \parallel AC \Rightarrow FE \perp CD$, E — середина CD. $BE \perp CD$, т.к. ΔBDC — равнобедренный $\Rightarrow \Delta BEF$ — искомое сечение.

С-9.



Дано: $ABCD$ — трапеция, одно из оснований которой вдвое больше другого, средняя линия трапеции параллельна α и удалена от нее на 13 см, точка пересечения диагоналей удалена от α на 15 см.
Найти: расстояние от оснований до α.
Решение: Пусть AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — перпендикулярны α. Плоскости, определяемые прямыми AA_1, CC_1 и BB_1, DD_1 — пересекаются по прямой OO_1.
Очевидно, $OO_1 \perp \alpha$ и $OO_1 = 15$. Т.к. средняя линия параллельна α, то основания — тоже. $KK_1 \perp \alpha$, $MM_1 \perp \alpha$.



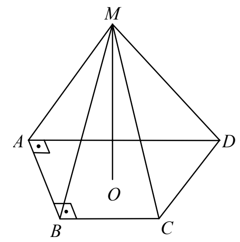
Пусть $AA_1 = x$. Т.к. средняя линия удалена на 13 см, $KK_1 = 13$, то $BB_1 = 26 - x$, т.к. из трапеции AA_1BB_1, KK_1 — средняя линия и $2KK_1 = AA_1 + BB_1$, $KK_1 = 13$. Т.к. основания относятся как $1 : 2$, то $BO : OD = 1 : 2$. Рассмотрим трапецию BB_1DD_1 — она прямоугольная (см. рис. 2).
У нее $B_1B = 26 – x$, $D_1D = x$, $O_1O = 15$, $BO : OD = 1 : 2$.
Пусть $OR \perp BB_1$, $DR \cap O_1O = P$.

$\Delta DPO \infty \Delta DRB \Rightarrow \dfrac{PO}{RB} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$ но $DD_1 = O_1P = B_1R = x$

$\Rightarrow RB = 26 - 2x$, $PO = 15 - x \Rightarrow \dfrac{15 - x}{26 - 2x} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 7 \;\Rightarrow x = 7 \Rightarrow$ расстояния равны 7 см и 19 см. Ответ: 7 см и 19 см.

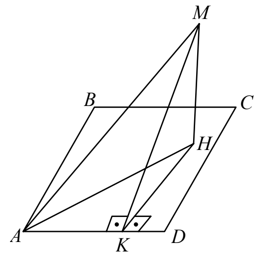
С-10.

1.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle D = 30°$, $\rho(M, ABC) = 2\sqrt{3}$, средняя линия равна 6, M равноудалена от сторон.
Найти: расстояние до сторон.
Решение:
Т.к. M равноудалена, то она проецируется в центр вписанной окружности $\Rightarrow AD + BC = AB + CD = 12$.
$CD = 2AB \Rightarrow AB = 4 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \rho(M, BC) = \sqrt{12 + 4} = 4$.
Ответ: 4.

2.



Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $\angle(AM, ABCD) = 40°$, $\angle MAB = \angle MAD$.
Найти: $\angle MAD$.
Решение:
Пусть $MH \perp ABC \Rightarrow \angle HAD = 45°$.

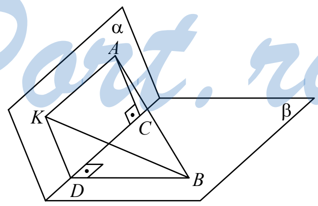
$HK \perp AD \Rightarrow HK = AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

если $AH = a \Rightarrow MH = a\text{tg}40° \Rightarrow MK = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + a^2\text{tg}^2 40°} = a\sqrt{\dfrac{1}{2} + \text{tg}^2 40°} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MAD = \text{arctg}\sqrt{1 + 2\text{tg}^2 40°}$. Ответ: $\text{arctg}\sqrt{1 + 2\text{tg}^2 40°}$.

С-11.

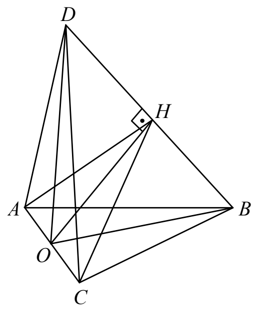
1.



Дано: $AB = 16$ см, $AC = 7$ см, $BD = 11$ см, $\angle(\alpha, \beta) = 120°$, $AC \perp (\alpha \cap \beta)$, $BD \perp (\alpha \cap \beta)$.
Найти: CD.
Решение:

$KD \perp DC$, $KD = 7 \Rightarrow KB = \sqrt{49 + 121 + 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dfrac{1}{2}} = \sqrt{247}$.

$AK = DC = \sqrt{16^2 - 247} = 3$. Ответ: 3 см.



2.

Дано: ΔABC — правильный, $AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

O — середина AC, $OD \perp ABC$, $OD = 3$.
Найти: $\angle(ABD, CBD)$.

Решение: $BO = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$. $OH \perp DB$.

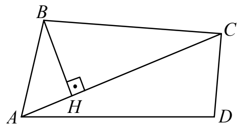
$OH = \frac{2S(DOB)}{DB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$,

$\angle(ADB, CDB) = \angle AHC$, т.к. ΔAHC равнобедренный, то HO — биссектриса $\angle AHC$

$\Rightarrow \angle(ADB, CDB) = 2\angle OHC$; $\operatorname{tg}\angle OHC = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$.

С-12.

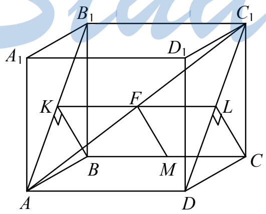


1.
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AB = 4$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60°$. Сгибаем вдоль AC так, чтобы $ABC \perp ACD$.
Найти: BD.
Решение: $BH \perp AC \Rightarrow AH = AB\cos\angle BAC = 2 \Rightarrow HC = 3 \Rightarrow$ по теореме косинусов, т.к. $\angle ACD = \angle BAC$ получим

$HD = \sqrt{HC^2 + CD^2 - 2HC \cdot CD\cos\angle ACD} \Rightarrow$

$\Rightarrow HD = \sqrt{9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}$,

$BH \cdot AB\sin\angle BAC = 2\sqrt{3} \Rightarrow BD = \sqrt{12 + 13} = 5$. Ответ: 5.



2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $ABCD$ — квадрат, $AB = 5$ см, $\rho(AC_1, BC) = 4$ см.
Найти: AC_1. Изобразить: общий перпендикуляр BC и AC_1.
Решение: Проводим C_1D, B_1A.
$CL \perp C_1D$, $BK \perp B_1A$, $BK \perp AB_1$, $CL \perp DC_1$, $KL \cap AC_1 = F$, $FM \parallel KB$, $M \in BC$. т.к. параллелепипед прямо-

угольный, то $BC \perp AA_1B_1B \Rightarrow BC \perp KB \Rightarrow$ т.к. $BC \parallel KL$, то $KL \perp KB$, т.к. $KB \perp AB_1$, то $KB \perp AB_1C_1D \Rightarrow KB \perp AC_1 \Rightarrow FM \perp AC_1 \Rightarrow FM$ — искомый общий перпендикуляр.

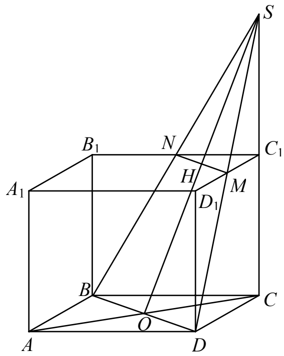
$LC = 4 \Rightarrow LD = 3$, $\Delta DLC \sim \Delta CLC_1 \Rightarrow \dfrac{DL}{LC} = \dfrac{LC}{LC_1} \Rightarrow LC_1 = \dfrac{LC^2}{DL} \Rightarrow$

$C_1L = \dfrac{16}{3} \Rightarrow C_1C = \sqrt{\dfrac{625}{9} - 25} = 5 \cdot \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC_1 = \sqrt{\dfrac{400}{9} + 25 + 25} = \sqrt{\dfrac{850}{9}} = \dfrac{5}{3}\sqrt{34}$. Ответ: $\dfrac{5}{3}\sqrt{34}$ см.

С-13.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, AD = 8 см, $C_1C = 3\sqrt{2}$ см, через AC проведена плоскость, составляющая 45° с основанием.

Найти: $S_{сеч.}$.

Решение: $OC = 4\sqrt{2} > 3\sqrt{2} \Rightarrow SC = OC = 4\sqrt{2} \Rightarrow SC_1 = \sqrt{2}$.

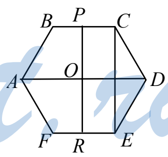
$SD \cap D_1C_1 = M$, $SB \cap B_1C_1 = N$.

Из подобия следует $MN = 2\sqrt{2}$. $OS = \sqrt{OC^2 + CS^2} = 8$.

$HS = \sqrt{HC_1 + C_1S}$, т.к. $\angle SOC = \angle SHC_1 = 45°$ то $HC_1 = SC_1 \Rightarrow HS = 2$ $\Rightarrow HO = 6$, т.к. HO — высота равнобокой трапеции $BNMD$, то

$S_{сеч.} = \dfrac{1}{2}(MN + BD) \cdot OH = \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right) \cdot 6 = 30\sqrt{2}$.

Ответ: $30\sqrt{2}$ см^2.



2. Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, $S_{бок.} = Q$.

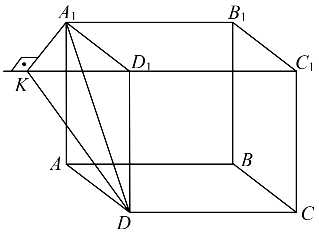
Найти: $S_{сеч.}$, которое перпендикулярно AD и делит эту диагональ пополам.

Решение: Т.к. $CE \perp AD \Rightarrow PR \parallel CE$ (PR — линия пересечения сечения и нижней грани, O — середина AD) $\Rightarrow$ площадь искомого сечения равна площади прямоугольника CC_1E_1E.

Пусть $AB = a$. $AA_1 = h \Rightarrow Q = ah$.

Т.к. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $CE = \sqrt{3}a$ (по теореме косинусов) $\Rightarrow S(CC_1E_1E) = \sqrt{3}Q$. Ответ: $\sqrt{3}Q$.

С-14.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $AD = 17$, $DC = 28$, $CA = 39$, $\angle(DA_1, DD_1C_1C) = 45°$.
Найти: $S_{\text{полн.}}$.
Решение:
$A_1K \perp D_1C_1$, KD — проекция $A_1D \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle KA_1D = \angle KDA_1 = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1K = KD$.

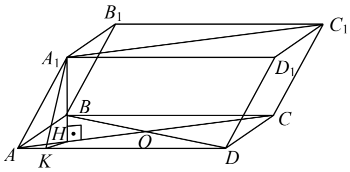
$S(A_1D_1C_1) = \sqrt{42 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 25} = 5 \cdot 42 = 210 \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = \dfrac{420}{28} = 15 \Rightarrow A_1D_1 = 15\sqrt{2} \;\Rightarrow AA_1 = \sqrt{225 \cdot 2 - 289} = \sqrt{161} \;\Rightarrow$

$S_{\text{полн.}} = 4 \cdot 210 + 2\sqrt{161}\,(17 + 28) = 30(3\sqrt{161} + 28)$.

Ответ: $30\left(3\sqrt{161} + 28\right)$.

С-15.



1.
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, все его ребра равны, $\angle AA_1B = \angle A_1AB < 90°$, $ABCD$ — квадрат, $S(BB_1D_1D) = Q$, $\angle(AA_1, ABC) = 60°$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.
Решение:
Т.к. $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, то A_1 проецируется на AC в т. H, и т.к. $AC \perp BD$, то $AA_1 \perp BD \Rightarrow B_1BDD_1$ — прямоугольник $\Rightarrow Q = \sqrt{2}a^2 = BB_1 \cdot BD$ (где a — ребро куба).

$A_1H = AA_1 \cdot \sin 60° \Rightarrow A_1H = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а $AH = \dfrac{a}{2} \;\Rightarrow$

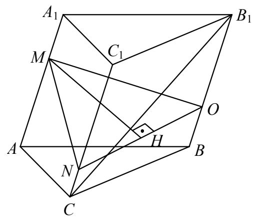
$\Rightarrow HK = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ (где HK — перпендикуляр к AD, $\angle HAK = 45°$ по

ТПП $A_1K \perp AD$, $A_1K = \sqrt{A_1H^2 + HK^2}$ $) \Rightarrow A_1K = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{8}} = \sqrt{\dfrac{7}{8}}a \;\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = 4a \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}a^2 = \sqrt{7}Q$.

Ответ: $\sqrt{7}Q$.

2.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, р(AA_1, CB_1) = 1, $\angle(AA_1C_1C, C_1CBB_1) = 45°$, $\angle(C_1CBB_1, B_1BAA_1) = 30°$, $S(C_1CBB_1) = 4(1+\sqrt{3})$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение:

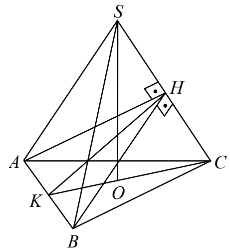
Пусть MNO — перпендикулярное сечение.

$MH \perp NO \Rightarrow \rho(AA_1, CB_1) = \rho(AA_1, CC_1B_1B)$ т.к. $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 \parallel CC_1B_1B \Rightarrow MH = 1 \Rightarrow NH = 1$, $MO = 2$, $HO = \sqrt{3}$, $MN = \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CC_1 = \frac{4(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 4(\sqrt{2}+2+1+\sqrt{3}) = 4(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

Ответ: $4\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

С-16.



1. Дано: $SABC$ — правильная пирамида, $\angle(ASC, BCS) = 120°$, $AB = m$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение:

$AH \perp SC$, $BH \perp SC \Rightarrow \angle AHB = 120°$.

(по теореме косинусов)

Пусть $HA=HB=x \Rightarrow m^2 = 2x^2(1 - \cos 120°) \Rightarrow$

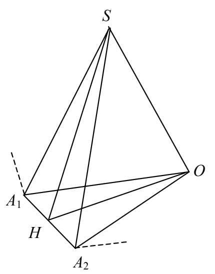
$$\Rightarrow m^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \frac{m}{\sqrt{3}} \Rightarrow KH = \sqrt{\frac{m^2}{3} - \frac{m^2}{4}} = \frac{m}{\sqrt{12}} \Rightarrow \sin\angle HCK =$$

$$= \frac{\frac{m}{\sqrt{12}}}{\frac{\sqrt{3}m}{2}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle HCK = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{8}} \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{8}} m\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2}{12} + \frac{m^2}{24}} = \frac{m}{\sqrt{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = 3 \cdot \frac{1}{2} m \cdot \frac{m}{\sqrt{8}} = \frac{3m^2}{2\sqrt{8}}.$$ Ответ: $\frac{3m^2}{2\sqrt{8}}$.



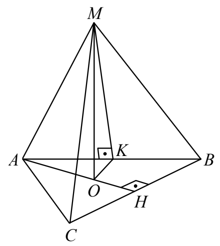
2. Дано: $SA_1A_2...A_{20}$ — правильная пирамида, $\angle A_1SA_2 = 10°$.
Найти: $\angle(A_1SA_2,\ A_1A_2A_3)$.
Решение: Пусть O — центр основания, SH — высота грани $SA_1A_2 \Rightarrow OH$ — высота ΔOA_1A_2,
$HA_2 = SH\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. $OH = HA_2\,\mathrm{ctg}\frac{\angle A_1OA_2}{2}$.
$\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n} \Rightarrow OH = SH\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}$.

$\angle(A_1SA_2,\ A_1OA_2) = \angle SHO = \arccos\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}\right)$.

т.к. $\cos\angle SHO = \frac{HO}{SH}$.

$\alpha = 10°$, $n = 20 \Rightarrow \angle(A_1SA_2,\ A_1OA_2) = \arccos(\mathrm{tg}\,5°\mathrm{ctg}\,9°)$.
Ответ: $\arccos(\mathrm{tg}\,5°\mathrm{ctg}\,9°)$.

С-17.



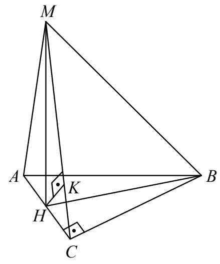
1. Дано: $MABC$ — пирамида, ребра равнонаклонены, $AC = AB$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle(AMB,\ ABC) = \angle(AMC,\ ABC) = \varphi$.
Найти: высоту пирамиды и площади равнонаклоненных граней.
Решение: Т.к. ребра равнонаклонены, то M проецируется в т. O — центр описанной окружности и $O \in AH$ ($AH \perp CB$), т.к. $AC = AB$ и $\angle CAH = \angle BAH = \frac{\alpha}{2}$. $OK \perp AB \Rightarrow AK = KB = \frac{1}{2}AB =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow OK = AK\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow MO = \frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}}\mathrm{tg}\varphi,$$

$$MK = \frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{8\sin\alpha\cos\varphi}.$$

Ответ: $\frac{a\,\mathrm{tg}\varphi}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a^2}{8\sin\alpha\cos\varphi}$.

2. Дано: $MABC$ — пирамида, $MAC \perp ABC$, остальные грани равнонаклонены, $\angle C = 90°$, $\rho(H, BMC) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. $AC = 4$ см, $BC = 3$ см.



Найти: $S_{бок.}$.

Решение:

$HK \perp MC \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $HK \perp BMC \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Из равнонаклоненности $\Rightarrow BH$ — биссектриса $\Rightarrow \cos\angle ABC =$

$= 1 - 2\sin^2\angle HBC \Rightarrow \sin\angle HBC = \sqrt{\frac{1-\cos\angle ABC}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$.

$\cos\angle HBC = \sqrt{\frac{1+\cos\angle ABC}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\angle HBC = \frac{1}{2} \Rightarrow HC = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow KC = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{18}{16}} = \sqrt{\frac{36-18}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle MCH = 45° \Rightarrow MH = \frac{3}{2}$,

$MC = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S(AMC) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{3}{2} = 3$.

$S(MCB) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{4}\sqrt{2}$.

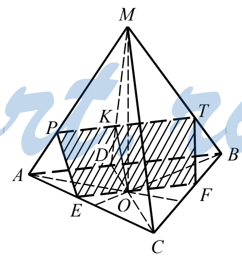
$S(AMB) = \frac{S(AHB)}{\cos 45°} = \frac{1}{2}\left(3\cdot 4 - 3\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{15}{4}\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{бок.} = 3(1 + 2\sqrt{2})$.

Ответ: $3(1 + 2\sqrt{2})$.

С-18.

1. Дано: $MABC$ — правильная пирамида, $AB = a$, боковые грани наклонены к плоскости основания под 60°, через центр основания проведена плоскость, параллельная стороне основания и перпендикулярная грани, проходящей через эту сторону.



Найти: $S_{сеч.}$.

Решение:

O — центр основания. $EF \| AB$, $O \in EF$; $CD \perp AB$, $D \in AB$; $OK \perp DM$, $K \in DM$; $PT \| EF$, $T \in MB$, $P \in AM \Rightarrow PTEF$ — искомое сечение.

Т.к. $\angle(AMB, ACB) = 60°$, то $\angle(PTFE, ABC) = 30° = \angle KOD \Rightarrow$

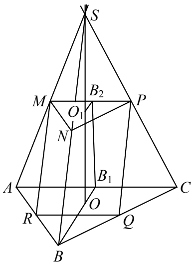
$$\Rightarrow KO = DO\cdot\cos 30^\circ = \frac{1}{3}CD\cdot\cos 30^\circ = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4},$$

$$DK = DO\sin 30^\circ = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{12},$$

$$DM = \frac{DO}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow MK = DM - KD = \frac{\sqrt{3}a}{3} - \frac{\sqrt{3}a}{12} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}a}{12} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow \text{из } \Delta PMT \sim \Delta AMB \Rightarrow PT : AB = MK : MD = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PT = \frac{3a}{4} \Rightarrow S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{4} + \frac{2}{3}a\right)\frac{a}{4} = \frac{17a^2}{96}.\ \text{Ответ: } \frac{17a^2}{96}.$$



2. Дано: $MNPABC$ — правильная усеченная пирамида, $MP = 2$, через MP параллельно NS проведена плоскость, $S_{\text{сеч.}} = 8$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$, высоту полной пирамиды, частью которой является данная усеченная.

Решение:

$PQ \parallel NS$, $MR \parallel NS \Rightarrow MPQR$ — данное сечение.

Т.к. плоские углы при вершине нижнего основания равны, то NS проецируется а биссектрису $\Rightarrow$ на высоту $\Rightarrow NS \perp AC \Rightarrow MPQR$ — прямоугольник $\Rightarrow NS = PQ = MR = 4 \Rightarrow PC = CQ = MA = AR = 4$.

Пусть S — вершина нашей пирамиды. Пусть S проецируется в т. O и O_1 верхнего и нижнего основания $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OO_1 = \sqrt{PC^2 - (OC - O_1P)^2} = \sqrt{16 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)^2} =$$

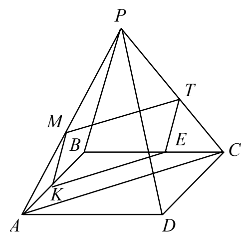
$$= \sqrt{16 - \frac{16}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}.\ B_1B_2 = \sqrt{OO_1^2 + (OB_1 - O_1B_2)^2} =$$

$$= \sqrt{OO_1^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)^2} = \sqrt{\frac{32}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{\text{бок.}} = 3\cdot 4\cdot\frac{6}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{3}.\ \ \mathrm{tg}\angle PCO = \frac{OO_1}{OC - O_1P} = \frac{4\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO = OC\sqrt{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{6}.\ \text{Ответ: } 24\sqrt{3};\ 2\sqrt{6}.$$

С-19.



1. Дано: $PABCD$ — правильная пирамида, K, M, T, E — середины AB, PA, PC, BC соответственно.

Перечислить: 1) пары сонаправленных векторов с концами в т. K, M, T, E. 2) пары равных векторов с концами в т. K, M, T, E. 3) векторы, имеющие равные длины, с концами в т. K, M, T, E.

Решение:

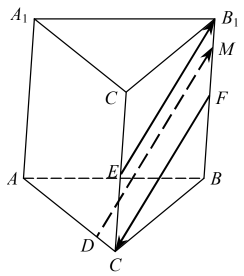
Заметим, что $MTEK$ — параллелограмм, т.к. MT — средняя линия ΔAPC, $MT = \frac{1}{2}AC$, $MT \parallel AC$, KE — средняя линия ΔABC, $KE = \frac{1}{2}AC$, $KE \parallel AC$.

1) $\overline{MT}$ и $\overline{KE}$, $\overline{TM}$ и $\overline{EK}$, $\overline{MK}$ и $\overline{TE}$, $\overline{KM}$ и $\overline{ET}$.

2) те же.

3) $\overline{MT}$, $\overline{TM}$, $\overline{KE}$ и $\overline{EK}$, $\overline{MK}$, $\overline{KM}$, $\overline{TE}$ и $\overline{ET}$, $\overline{KT}$, $\overline{TK}$, $\overline{ME}$ и $\overline{EM}$.

2.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, E и F — середины ребер C_1C и B_1B.

Найти: коллинеарные векторы из указанных.

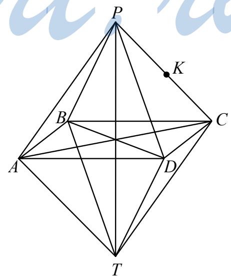
Решение:

$\overline{EB_1}$ и $\overline{FC}$. т.к. EB_1FC — параллелограмм ($B_1F = EC = \frac{1}{2}BB_1$, $B_1F \parallel CE$) $\overline{EB_1}$ и $\overline{DM}$, $\overline{DM}$ и $\overline{FC}$ не коллинеарны, т.к. иначе AC и BB_1 лежали бы в одной плоскости, что противоречит условию.

Ответ: $\overline{EB_1}$ и $\overline{FC}$.

С-20.

1.



Дано: $PABCDT$ — правильный октаэдр, $AB = a$, K — середина PC.

Найти: $|\overline{KD} + \overline{AB} + \overline{CT} + \overline{CP}|$.

Решение: $\overline{KD} + \overline{AB} + \overline{CT} + \overline{CP} =$

$\overline{KD} + \overline{DC} + \overline{CT} + \overline{CP} = \overline{KT} + \overline{TA} = \overline{KA}$.

ΔAPC — прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK = \sqrt{AP^2 + PK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}a}{2}$.

2. Дано: $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ — два четырехугольника, произвольно расположенных в пространстве.

Доказать: $\overline{AB_1} + \overline{BC_1} + \overline{CD_1} + \overline{DA_1} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} + \overline{DD_1}$.

Доказательство:

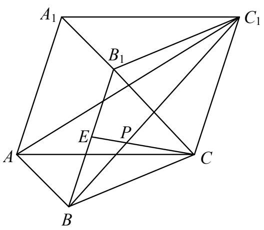
Составим разность:

$\overline{AB_1} + \overline{BC_1} + \overline{CD_1} + \overline{DA_1} - \overline{AA_1} - \overline{BB_1} - \overline{CC_1} - \overline{DD_1} =$

$= \overline{AB_1} + \overline{B_1B} + \overline{BC_1} + \overline{C_1C} + \overline{CD_1} + \overline{D_1D} + \overline{DA_1} + \overline{A_1A} =$

$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{0}$, что и доказывает равенство.

С-21.



1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, E — середина BB_1, $C_1B \cap EC = P$.

Выразить: $\overline{AP}$ через $\overline{AC_1}$, $\overline{CB}$, $\overline{CC_1}$.

Решение:

P — точка пересечения медиан $\Delta BB_1C \Rightarrow$

$\overline{AP} = \overline{AC_1} + \overline{C_1P} =$

$= \overline{AC_1} + \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \overline{C_1B} = \overline{AC_1} + \frac{2}{3}\overline{C_1B}$;

$\overline{C_1B} = -\overline{CC_1} + \overline{CB} \Rightarrow \overline{AP} = \overline{AC_1} + \frac{2}{3}\left(\overline{CB} - \overline{CC_1}\right)$.

2. Дано: $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые и неколлинеарные.

$(x + y - 1)\ \overline{a} + (2x - y)\ \overline{b} = \overline{0}$.

Найти: x и y.

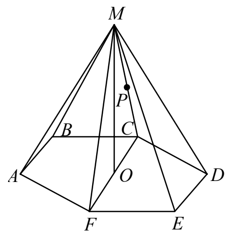
Решение:

Т.к. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые и неколлинеарные, то коэффициенты при $\overline{a}$ и при $\overline{b}$ равны 0.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array} \right. .$$

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.

С-22.



1. Дано: $MABCDEF$ — правильная пирамида, стороны основания равны a, $P \in MC$, $MP : PC = 2 : 3$, боковые ребра сторон основания составляют угол φ, $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ — единичные векторы, сонаправленные с $\overline{FA}$, $\overline{FE}$, $\overline{FM}$.

Разложить: $\overline{FP}$ по $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$.

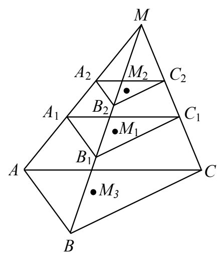
Решение: $\overline{FP} = \overline{FA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP} = \overline{FA} + (\overline{FA} + \overline{FE}) + \overline{FE} + \frac{3}{5}\overline{CM} =$

$= 2\overline{FA} + 2\overline{FE} + \frac{3}{5}(\overline{FM} - \overline{FC}) = 2\overline{FA} + 2\overline{FE} + \frac{3}{5}(\overline{FM} - 2(\overline{FA} + \overline{FE})) =$

$= 2\overline{FA} + 2\overline{FE} + \frac{3}{5}\overline{FM} - \frac{6}{5}\overline{FA} - \frac{6}{5}\overline{FE} = \frac{4}{5}a\overline{e_1} + \frac{4}{5}a\overline{e_2} + \frac{3}{5}\frac{a}{\cos\varphi}\overline{e_3}$.

Ответ: $\frac{4}{5}a\overline{e_1} + \frac{4}{5}a\overline{e_2} + \frac{3}{5}\frac{a}{\cos\varphi}\overline{e_3}$.

2.



Дано: $MABC$ — пирамида, $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2 \parallel ABC$, M_2, M_1, M — точки пересечения медиан $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_1B_1C_1$, ΔABC.

Доказать: M, M_2, M_1 — лежат на одной прямой.

Доказательство:

O — произвольная точка пространства:

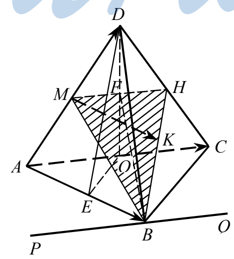
$\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} =$

$= \frac{1}{3}(\overline{OA_2} + \overline{OB_2} + \overline{OC_2} - \overline{OA_1} - \overline{OB_1} - \overline{OC_1}) = \frac{1}{3}(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2})$.

$\overline{M_1M_3} = \frac{1}{3}(\overline{A_1A} + \overline{B_1B} + \overline{C_1C})$, но $\frac{A_1A_2}{A_1A} = \frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{C_1C_2}{C_1C} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{M_1M_2} = k\overline{M_1M_3} \Rightarrow$точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой ч.т.д.

С-23.



Дано: $DABC$ — пирамида, $DA = DB = DC = AC = 2$, $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$, M, H — середины AD, DC соответственно.

Найти: 1) $S_{бок.}$; 2) $S(BMH)$; 3) $\angle(BMH, ABC)$; 4) $\angle(BD, BMH)$.

Разложить: MK по $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ (K — середина $\overline{BH}$).
Построить: $MBH \cap ABC$.
Решение: Т.к. $DA = DB = DC$, то D проецируется в центр описанной окружности, т.е. в середину AC. $OE \perp AB$. DE — высота ΔADB. $DO = \sqrt{3}$. $OE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $DE = \sqrt{3 + \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

$S_{\text{бок.}} = \dfrac{1}{2} AC \cdot DO + 2 \cdot \dfrac{1}{2} AB \cdot DE = \sqrt{7} + \sqrt{3}$. FB — высота BMH.

$FB = \sqrt{\dfrac{3}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2} MH \cdot FB = \dfrac{1}{4} AC \cdot FB = \dfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

$\angle FBO = \angle(BMH, ABC) \Rightarrow \operatorname{tg}\angle FBO = \dfrac{FO}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\angle DBF = \angle(BD, BMH) \Rightarrow \operatorname{tg}\angle DBO = \dfrac{DO}{OB} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle DBO = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBF = 60° - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

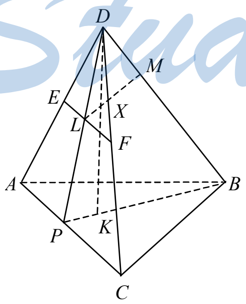
$\overline{MK} = \dfrac{1}{2}\overline{MB} + \dfrac{1}{2}\overline{MH} = \dfrac{1}{2}\overline{MA} + \dfrac{1}{2}\overline{AB} + \dfrac{1}{4}\overline{AC} = -\dfrac{1}{4}\overline{AD} + \dfrac{1}{2}\overline{AB} + \dfrac{1}{4}\overline{AC}$.

Т.к. $MH \parallel AC$, то проводим PQ через B параллельно AC — это и есть линия пересечения BMH и ABC.

Ответ: 1) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$ см^2; 2) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ см^2; 3) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $60° - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\dfrac{1}{4}\overline{AD} + \dfrac{1}{2}\overline{AB} + \dfrac{1}{4}\overline{AC}$.

ВАРИАНТ 7.

С-1.

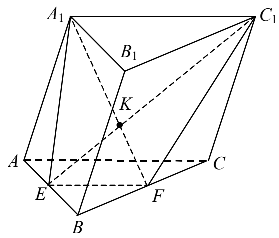


1. Дано: $ABCD$ — тетраэдр $K \in (ABC)$, $E \in AD$, $M \in BD$, $F \in CD$.
Построить: $DK \cap EFM$.
Построение:
Пусть $BK \cap AC = P$, а $PD \cap EF = L$, тогда $X = LM \cap DK$ — искомая точка.
Докажем это: $L \in EMF \Rightarrow LM \in EMF$, т.к. имеет в этой плоскости 2 точки (т. L и т. M) $\Rightarrow X \in EMF$, т.к. т. X принадлежит и DK, то X — искомая точка.

2. Дано: O — центр окружности, описанной около ΔABC.
Найти: принадлежит ли точка C плоскости ABO.
Решение: Если $\angle C = 90°$, то $O \in AB$. Очевидно, через AB (а значит и через т. O) можно провести плоскость, в которой т. C не лежит. Например, плоскость, перпендикулярную плоскости ABC.
Ответ: C не обязательно лежит в плоскости ABO.

С-2.

1. Дано: $O \notin \gamma$, $(a \parallel b) \in \gamma$, $O \in \alpha$, $a \in \alpha$, $O \in \beta$, $b \in \beta$.
Доказать: $(\alpha \cap \beta) \parallel a \parallel b$.
Доказательство:
Обозначим прямую пересечения плоскостей α и β через c. Предположим, $c \cap a \neq \varnothing$ и $c \cap b = \varnothing$, тогда c не параллельна a и $c \parallel b$, но $b \parallel a \Rightarrow c \parallel a \Rightarrow$ получили противоречие. Случай c не параллельна b и $c \parallel a$ разбирается аналогично. Пусть теперь c не параллельна a и c не параллельна b, но тогда две точки c принадлежат $\gamma \Rightarrow$ вся c лежит в γ, $c \ni O \notin \gamma \Rightarrow$ противоречие и $c \parallel a \parallel b$. Ч.т.д.
2. Дано: $\Delta ABC \in \alpha$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$, E, F, M — середины AB, BC, CA соответственно.
Доказать: A_1F, B_1M, C_1E — пересекаются в одной точке.
Найти: в каком отношении эта точка делит отрезки.



Решение:
Т.к. $AC \parallel A_1C_1$ и EF — средняя линия, то $EF \parallel A_1C_1$ и $EF = \frac{1}{2} A_1C_1$. Пусть диагонали трапеции A_1C_1FE пересекаются в т. K. Тогда из подобия треугольников при основаниях следует, что $A_1K : KF = C_1K : KE = 2 : 1$.
Аналогичное утверждение можно получить для трапеции A_1B_1FM: $A_1K_1 : K_1F = B_1K_1 : K_1M = 2 : 1 \Rightarrow$ точки K и K_1 совпадают.
Ответ: 2 : 1.

С-3.

1. Дано: H, H_1 — точки пересечения медиан ΔMAD и ΔMCD.
Найти: параллельна ли AMC HH_1.
Решение: Пусть ME и MF — медианы ΔAMC и ΔDMC, тогда $MH : ME = MH_1 : MF = 2 : 3$, при этом $\angle EMF$ — общий $\Rightarrow \Delta EMF \sim \Delta HMH_1 \Rightarrow HH_1 \parallel EF$, но $EF \parallel CF$ как средняя линия $\Rightarrow HH_1 \parallel AC$, а т.к. $AC \in MAC$, то $HH_1 \parallel MAC$. Ответ: параллельна.

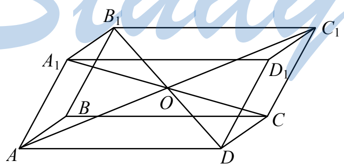
2.
Дано: $ABCD$ — тетраэдр. M, F, E — середины CD, BC, AB соответственно, $AC = 10$, $BD = 20$, $S_{\text{сеч.}} = 25\sqrt{3}$.
1) Построить: сечение MFE.
2) Найти: $\angle(AC, DB)$.
Решение:
1) Очевидно, MF и EF — линии пересечения MFE с плоскостями CDB и ABC. Линия пересечения с плоскостью ADC проходит через т. M и параллельна AC. Обозначим точку ее пересечения с AD точкой $P \Rightarrow PE$ — линия пересечения с плоскостью ADB.
2) $\angle(AC, BD) = \angle EFM$, но $S = \frac{1}{2} EF \cdot MF \cdot \sin\angle EFM \Rightarrow \sin\angle EFM =$

$$= \frac{2S}{\frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle EFM = 60°.$$ Ответ: 60°.

С-4.

1. Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $M \in (AA_1C_1)$.
Через точку M проведена плоскость, параллельная B_1BK.
Построить: линии пересечения AA_1B и этой плоскости.
Решение: Проведем через M прямую, параллельную B_1B. Пусть она пересекает A_1C_1 в т. N_1, и AC в т. N. Через т. N и N_1 проведем прямые, параллельные BK до пересечения A_1B_1 в т. L_1 и AB в т. L. L_1L — искомая прямая.
2. Дано: $M \notin \alpha$.
Найти: где расположены все прямые, проходящие через M, параллельные α.
Решение: В плоскости, проходящей через т. M параллельно α.
Ответ: в плоскости, проходящей через M параллельно α.

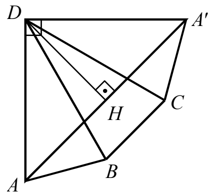
С-5.



1. Дано: $ABCD$ — четырехугольник, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, AC_1. A_1C, B_1D, DB_1 пересекаются в одной точке.
Доказать: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.
Доказательство:
Пусть указанные отрезки пересекаются в т. O, тогда: A_1C_1CA — параллелограмм, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1 \Rightarrow A_1O = OC$ и $AO = OC_1$;

BB_1D_1D — параллелограмм, т.к. $BB_1 \| DD_1$ и $BB_1 = DD_1 \Rightarrow B_1O = DO$ и $OB = D_1O$. Т.к. $A_1O = OC$ и $B_1O = OD$, то A_1B_1CD — параллелограмм и $A_1B_1 \parallel CD$, но $A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow AB \parallel CD$.
Аналогично доказывается, что $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Ч.т.д.

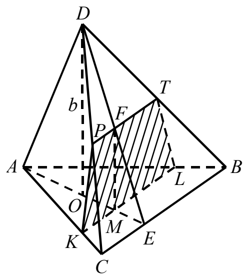
2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $DA = 3$ см. Углы при основании боковых граней равны 75°. Точка A начинает двигаться по грани ADC, затем по грани CDB, затем по ADB и возвращается в исходное положение.
Найти: наименьший путь, проходимый точкой.
Решение:



Сделаем развертку боковой поверхности тетраэдра как показано на рис., тогда наименьший путь равен длине отрезка AA', но $\angle ADA' = 30° \cdot 3 = 90° \Rightarrow$ по теореме Пифагора $AA' = 3\sqrt{2}$ см.
Ответ: $3\sqrt{2}$ см.

С-6.

1.



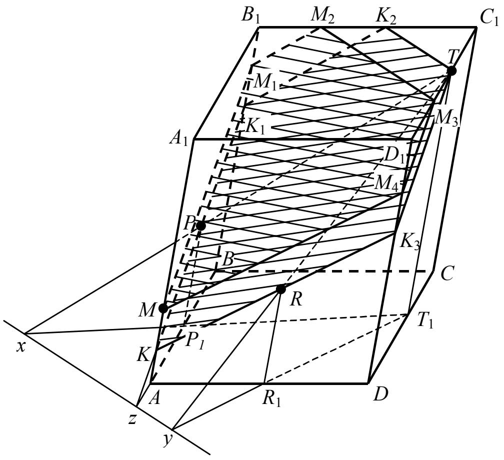
Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AE \perp BC$, O — середина AE, $DO \perp AE$, $DO \perp BC$, $K \in AC$, $AK : KC = 3 : 1$, $BC = a$, $DO = b$.
Построить: сечение плоскостью, проходящей через точку K параллельно BC и DO.
Найти: площадь сечения S.
Решение:

Т.к. K делит AC в отношении $3 : 1$ и $KL \parallel CB$, то $LK = \frac{3}{4}a$ и $MA : ME = 3 : 1$. Но O — середина $AE \Rightarrow OM = ME \Rightarrow DF = FE$, но по теореме о трех перпендикулярах $DE \perp BC \Rightarrow PT$ — средняя линия и $PT = \frac{a}{2}$, аналогично, FM — средняя линия и $FM = \frac{b}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a + \frac{a}{2}\right)\frac{b}{2} = \frac{5ab}{16}.$$

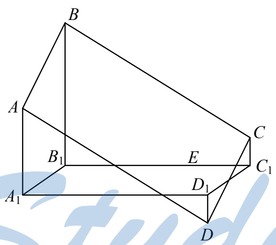
Ответ: $\frac{5ab}{16}$.

2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $P \in AA_1B_1$, $R \in AA_1D_1$, $T \in C_1D_1$, $M \in AA_1$.
Построить: сечение, проходящих через точку M параллельно PRT.



Решение:
Проводим $TT_1 \parallel CC_1$, TR до пересечения с T_1R_1 в т. y ($RR_1 \parallel DD_1$) и TP до пересечения с T_1P_1 в т. x ($PP_1 \parallel AA_1$).
Пусть $AB \cap xy = z$.. $zP \cap B_1B = K_1$, а A_1A в т. K. Проводим $K_2T \parallel xy$.
Соединяем K_2 с K_1. Проводим $KK_3 \parallel K_1K_2 \Rightarrow KK_1K_2TK_3$ — сечение параллелепипеда плоскостью PRT.
Проводим $MM_1 \parallel KK_1$, $M_1M_2 \parallel K_1K_2$, $M_2M_3 \parallel K_2T$, $M_3M_4 \parallel K_3T$, $M_4M \parallel K_3K$; $MM_1M_2M_3M_4$ — искомое сечение.

С-7.



1. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 \perp \alpha$, $AA_1 = 13$, $BB_1 = 36$, $CC_1 = 19$.
Найти: DD_1.
Решение: Пусть сначала вершины параллелограмма расположены по одну сторону от α. Пусть также $AC \cap BD = O$ и $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$, тогда OO_1 — средняя линия в трапециях A_1ACC_1 и $B_1BDD_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow OO_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{BB_1 + DD_1}{2} \Rightarrow AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 13 + 19 = 36 + DD_1$ или $32 = 36 + DD_1$, но $DD_1 > 0 \Rightarrow$ т. D лежит с другой стороны от α, чем т. A, B и C. Тогда получим:

$$OO_1 = \frac{A_1A + C_1C}{2} = \frac{BB_1 - DD_1}{2} \Rightarrow DD_1 = 36 - 19 - 13 = 4.$$

Ответ: 4.

2. Дано: прямая.

Найти: на ней точки, равноудаленные от двух данных.

Решение: Множеством точек, равноудаленных от двух данных, является плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину. Поэтому если прямая пересекает эту плоскость, то точка пересечения — искомая, если не пересекает, то таких точек нет, если лежит в ней, то искомой является любая ее точка.

С-8.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, грани — равные ромбы, плоские углы при вершине A_1 равны.

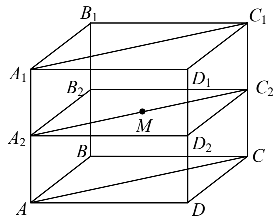
Доказать: $A_1C \perp B_1D_1$.

Доказательство: $\Delta AA_1D_1 = \Delta AA_1B \Rightarrow AB_1 = AD_1$.

Пусть O — середина $B_1D_1 \Rightarrow B_1D_1 \perp AO$ и $B_1D_1 \perp A_1C_1$, т.е.

$B_1D_1 \perp (ACC_1) \Rightarrow B_1D_1 \perp A_1C$, т.к. A_1C лежит в $(AA_1C) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1C \perp B_1D$. Ч.т.д.



2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, грани — прямоугольники, $M \in AA_1C_1$.

Построить: сечение через т. M перпендикулярно BB_1.

Решение:

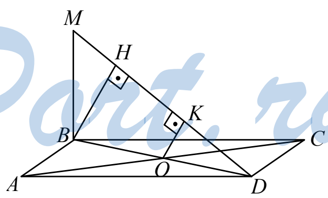
$BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC \Rightarrow BB_1 \perp (ABC)$,

наше сечение $\perp BB_1 \Rightarrow$ оно параллельно (ABC).

Через т. M проводим прямую, параллельную AC, через точки ее пересечения с AA_1 и CC_1 проводим прямые, параллельные AB и AD. ($A_2B_2 \parallel AB$, $C_2D_2 \parallel AB$, $A_2D_2 \parallel AD$, $B_2C_2 \parallel AD$).

$A_2B_2C_2D_2$ — искомое сечение.

С-9.



Дано: $ABCD$ — квадрат, $AB = 1$, $MB \perp ABC$, $MB = 1$.

Найти: ρ(AC, MD).

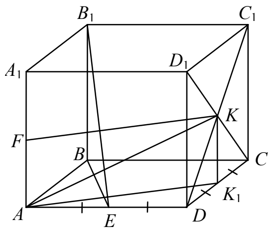
Решение: $BH \perp MD$.

Пусть $AC \cap BD = O$ и $OK \perp MD$,

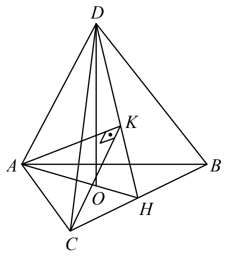
$AC \perp BD$ и $AC \perp MB \Rightarrow AC \perp MBD \Rightarrow AC \perp OK \Rightarrow$ опустим общий перпендикуляр.

$$\Delta MBD \sim \Delta OKD \Rightarrow \frac{MB}{OK} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow OK = \frac{MB \cdot OD}{MD} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

С-10.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, грани — квадраты, E и F — середины AD и AA_1, K — точка пересечения диагоналей DD_1C_1C.
Доказать: $B_1E \perp FK$.
Доказательство:
Пусть $KK_1 \perp ABC$, где $K_1 \in DC$, очевидно, что $AK_1 \parallel FK$ и $AK_1 \perp BE \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $B_1E \perp AK_1$, и т.к. $FK \parallel AK_1$, то $B_1E \perp FK$. Ч.т.д.



2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, ΔABC — правильный, $AB = 2\sqrt{3}$, $DA = DB = DC$, $O \in (ABC)$, $DO \perp (ABC)$, $DO = \sqrt{3}$.
Найти: $\angle(AC, BDC)$.
Решение: Проведем $AH \perp BC$, затем DH, затем $AK \perp DH$. Очевидно, O — центр правильного треугольника $\Rightarrow OH = \frac{1}{3}AH =$

$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\angle AHD = \sqrt{3} \Rightarrow \angle AHD = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = AH\sin 60° = 3OH\sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а $KH = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CK = \sqrt{3 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$. По теореме косинусов:

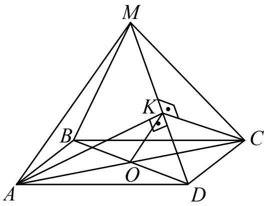
$$\cos \angle ACK = \frac{CK}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \angle ACK = 48°35'.$$

Ответ: $48°35'$.

С-11.

1. Дано: ΔABC и ΔADC — равнобедренные, образуют острый двугранный угол, $m \perp AC$, $m \cap ABC = X$.
Построить: $m \cap ADC$.
Построение:
$XK \perp AC$ ($K \in AC$), $KP \perp AC$ ($KP \in ACD$).
Точка пересечения m и KP — искомая.

2. Дано: $ABCD$ — квадрат, $AB = a$.
$BM \perp ABC$, $BM = a$.
Найти: $\angle(AMD, CMD)$.
Решение:
Из т. O пересечения диагоналей квадрата опустим перпендикуляр OK на MD, тогда AK и CK по теореме о трех перпендикулярах перпендикулярны к MD.

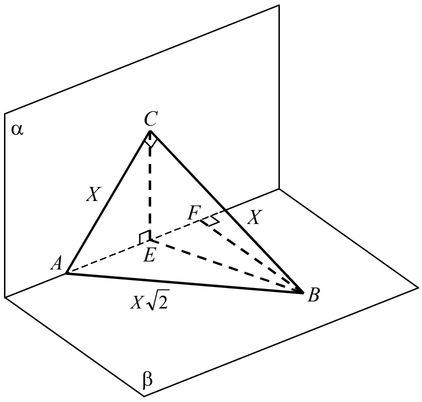


$$\Delta MBD \sim \Delta OKD \Rightarrow \frac{MB}{OK} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow OK = \frac{MB \cdot OD}{MD} = \frac{a \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \angle AKC = 2\text{arctg}\,\frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = 120°.$$ Ответ: 120°.

С-12.

1. Дано: катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в разных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла удалена от его ребра на 2 см, а вершина острого угла — на $\sqrt{15}$ см.
Найти: S_Δ.
Решение:



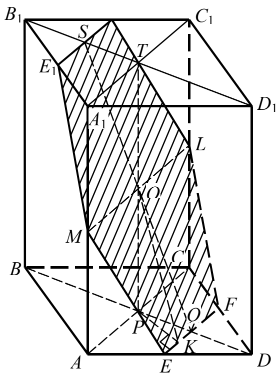
Пусть $AC = CB = x \Rightarrow AB = x\sqrt{2}$.

$AE = BE = \sqrt{x^2 - 4}$ и $EF = \sqrt{EB^2 - BF^2} = \sqrt{x^2 - 4 - 15} = \sqrt{x^2 - 19}$,

$AF = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 19} \Rightarrow$ из ΔABF: $2x^2 = x^2 - 4 + x^2 -$
$- 19 + 2\sqrt{(x^2 - 4)(x^2 - 19)} + 15 \Rightarrow x^4 - 23x^2 + 60 = 0$ $x^2 \neq 3$,

т.к. $AE = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow S = 10$. Ответ: 10 см^2.

2.
Дано: стороны основания и боковые ребра прямоугольного параллелепипеда равны 3 см, 4 см и 14 см.
Найти: площадь сечения через середины двух смежных сторон основания и точку пересечения диагоналей параллелепипеда.



Решение:

$ML \parallel EF$, $EF = \frac{5}{2}$, $ML = 5$.

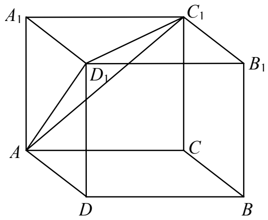
Строим $PK \perp EF$. Соединяем т. O и K $\Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $OK \perp EF$, но PK равняется половине высоты ΔADC, т.е. $PK = \frac{6}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow OK = \sqrt{\frac{36}{25} + 49} = \frac{\sqrt{1261}}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MLEF} = \frac{1}{2}(EF + MD) \cdot OK = \frac{3}{4}\sqrt{1261}$,

тогда $S_{\text{сеч.}} = 2S_{MLEF} = \frac{3}{2}\sqrt{1261}$. Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{1261}$ см^2.

С-13.



1.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра равны.

Найти: $\angle(AC_1, B_1C)$.

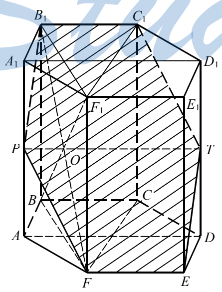
Решение:

Достроим призму до прямого параллелепипеда $ADBCA_1D_1B_1C_1$ (с основанием $ADBC$ (ромб)), тогда $\angle(AC_1, B_1C) = \angle D_1AC_1$.

$AA_1 = a$, $AC_1 = AD_1 = a\sqrt{2}$, а $D_1C_1 = a\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ по теореме косинусов:

$$\cos\angle D_1AC_1 = \frac{D_1A^2 + AC_1^2 - D_1C_1^2}{2D_1A \cdot AC_1} = \frac{2a^2 + 2a^2 - 3a^2}{4a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle D_1AC_1 = \arccos\frac{1}{4} \approx 75°31'$. Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.



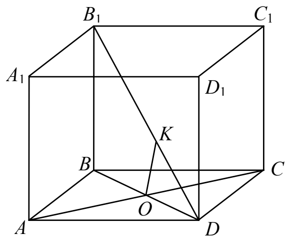
2. Дано: в правильной шестиугольной призме меньшая диагональ основания равна боковому ребру. Проведено сечение, которое перпендикулярно меньшей диагонали основания и делит ее пополам. Сторона основания равна a.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$.

Решение: Строим сечение, перпендикулярное диагонали F_1B, т.к. B_1F_1FB — квадрат, то $F_1B \perp B_1F$, кроме того $F_1B \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Т.к. $PT \parallel BC$, то $F_1B \perp PT \Rightarrow F_1B \perp PT$ и B_1F, а они и задают плоскость сечения. Т.к. плоскость сечения составляет с основанием угол 45°, то $S_{сеч.} = \frac{S_{осн.}}{\cos 45°} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{\cos 45°} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

С-14.

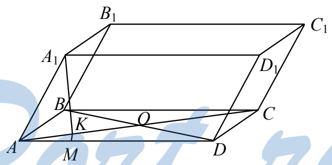


Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб,
$\angle(AA_1, B_1D) = 60°$, $\rho(AA_1, B_1D) = 3$ см,
$\rho(AC, B_1D) = 2$ см.
Найти: $S_{полн.}$.
Решение:
Пусть диагонали основания пересекаются в т. $O \Rightarrow AO = 3$,
$\angle BB_1D = 60°$. Строим $OK \perp B_1D \Rightarrow OK = 2. \Rightarrow \angle B_1DB = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow OD = \frac{OK}{\sin 30°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow$ по теореме Пифагора $AB = 5$,

$BB_1 = 8 \cdot \text{tg}30° = \frac{8\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{полн.} = 4 \cdot 5 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot 24 = \frac{16}{3}(10\sqrt{3} + 9)$

Ответ: $\frac{16}{3}(10\sqrt{3} + 9)$ см^2.

С-15.



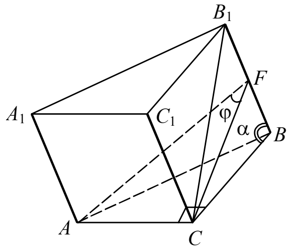
1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — ромб,
$AC = 40$, $BD = 30$, $AA_1 = 2\sqrt{17}$,
$\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90°$, высота параллелепипеда равна 2.
Найти: $S_{бок.}$.
Решение:
Т.к. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то высота A_1K проектируется на диагональ AC. $KM \perp AD \Rightarrow A_1M$ — высота грани AA_1D_1D по теореме о трех перпендикулярах.

$AK = \sqrt{68 - 4} = 8$. $\Delta AKM \sim \Delta ADO \Rightarrow \frac{AK}{KM} = \frac{AD}{DO}$ $KM = \frac{DO \cdot AK}{AD} =$

$= \dfrac{15\cdot 8}{25} = \dfrac{24}{5}$ $AM = \sqrt{AK^2 - KM^2} = \sqrt{64 - \left(\dfrac{24}{5}\right)^2} = \dfrac{32}{5}$.

Из ΔA_1AM $A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2} = \sqrt{68 - \left(\dfrac{32}{5}\right)^2} = \dfrac{26}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = 4 \cdot 25 \cdot \dfrac{26}{5} = 520.$ Ответ: 520.



2.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $\angle C = 90°$, $BC = a$, B_1 проектируется в т. C. Двугранный угол с ребром BB_1 равен φ. Боковые ребра составляют с плоскостью основания угол α.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение:

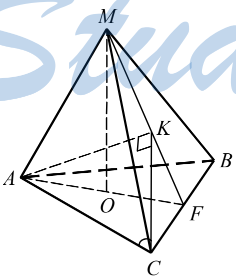
$AC \perp BC_1B_1C \Rightarrow AC \perp (BB_1C) \Rightarrow AC \perp B_1B$. Перпендикулярным сечением призмы является прямоугольный треугольник ACF ($\angle ACF = 90°$), $CF = a\sin\alpha$, $AC = a\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\varphi$, $AF = \dfrac{a\sin\alpha}{\cos\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = a\sin\alpha\left(1 + \mathrm{tg}\varphi + \dfrac{1}{\cos\varphi}\right) = \dfrac{a\sin\alpha(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$.

ΔB_1CB: $BB_1 = \dfrac{a}{\cos\alpha}$; $S_{\text{бок.}} = \dfrac{a^2\mathrm{tg}\alpha(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$.

Ответ: $\dfrac{a^2\mathrm{tg}\alpha(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$.

С-16.



1.

Дано: $MABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB = a$, высота $2a$.

Найти: $\angle(AC, CMB)$.

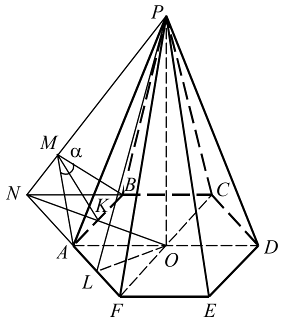
Решение:

Проведем $AF \perp CB$, и $MF \perp CB \Rightarrow (AMF) \perp CB \Rightarrow AK \perp CB$, $AK \perp MF \Rightarrow AK \perp MCB$. $OF = \dfrac{1}{3}AF = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow MF = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{7a}{2\sqrt{3}}$. Т.к. $2 \cdot S = AF \cdot MO = AK \cdot MF$, то

$AK = \dfrac{MO \cdot AF}{MF} = \dfrac{6a}{7} \Rightarrow \sin\angle ACK = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow \angle ACK \approx 59°$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{6}{7}$.



2. Дано: $PABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, $AB = a$,
$\angle(PBC, PAF) = \alpha$.
Найти: $S_{бок.}$.
Решение:
$PBC \cap PAF = NP$, $KM \perp PN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMA = \alpha \Rightarrow \angle KMB = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MK = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, т.к. $MK \perp AB$,

т.к. ΔAMB — равнобедренный.

$\Delta NMK \sim \Delta NOP \Rightarrow \dfrac{PO}{MK} = \dfrac{ON}{NM} \Rightarrow PO = \dfrac{NO \cdot MK}{NM}$.

ΔNKM: $MN = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \Rightarrow PO = \dfrac{a\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$

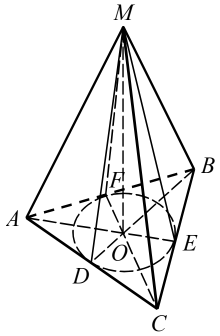
$\Rightarrow PL = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{3 + 3\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \dfrac{3a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$

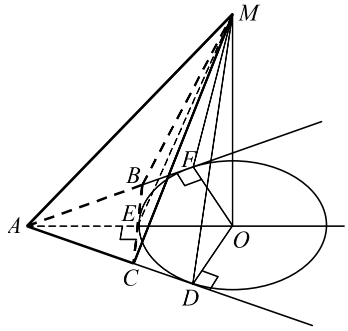
$\Rightarrow S_{бок.} = \dfrac{1}{2} PL \cdot P_{осн.} = \dfrac{9a^2}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

Ответ: $\dfrac{9a^2}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

С-17.

1.





Дано: основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a. Боковые грани разновелики. (Вероятно, здесь допущена опечатка, следует читать: «боковые грани равновелики»). Высота пирамиды равна a.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение:

Т.к. площади боковых граней равны и равны их основания, то равны и их высоты, а следовательно, и расстояния от проекции вершины M до прямых, содержащих стороны ΔABC.

Случай а) $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow MD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot MD = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{39}}{4}$.

Случай б) Т.к. треугольник правильный, то радиусы всех вневписанных окружностей равны между собой и равны $\frac{S}{P-a}$, где р — полупериметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MD = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}a}{2} \Rightarrow$

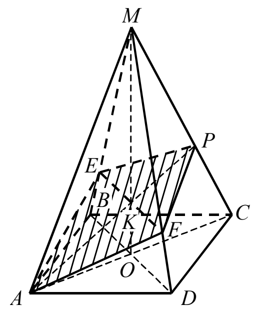
$\Rightarrow S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot MD = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}a}{2} = \frac{3\sqrt{7}a^2}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}a^2}{4}$.

2. Дано: треугольная пирамида, высота проходит через точку пересечения высот основания.
Доказать: суммы квадратов скрещивающихся ребер равны.
Доказательство:
Пусть в ΔABC, что лежит в основании $MABC$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CK \perp AB$. Пусть $AD \cap BE \cap CK - O \Rightarrow MO$ — высота пирамиды.
По теореме о трех перпендикулярах $ME \perp AC \Rightarrow$
$\Rightarrow ME^2 = MA^2 - AE^2 = MC^2 - EC^2 \Rightarrow MA^2 - MC^2 = EA^2 - EC^2$, но $AE^2 = AB^2 - BE^2$, а $EC^2 = BC^2 - BE^2 \Rightarrow AE^2 - EC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow MA^2 - MC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow MA^2 + BC^2 = MC^2 + AB^2$.
Аналогично и для других скрещивающихся сторон. Ч.т.д.

С-18.

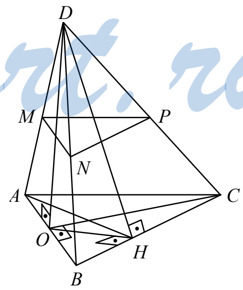
1. Дано: правильная четырехугольная пирамида, стороны основания равны a, боковое ребро наклонено к основанию под 60°. Через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру.
Найти: $S_{\text{сеч.}}$.
Решение:
$AP \perp MC$. $EF \parallel BD \Rightarrow EF \perp AP$ по теореме о трех перпендикулярах и $EK = KF$. ΔAMC — правильный $\Rightarrow AP = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



K — центр правильного $\Delta BMD \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3} BD = \dfrac{2}{3} a\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

2. Дано: в основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной, равной $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. Одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а остальные наклонены к нему под равными углами. Высота пирамиды равна 12. На боковом ребре выбрана точка, которая делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины. Через нее проведена плоскость параллельная основанию.
Найти: $S_{\text{бок. усе. пирамиды}}$.



Решение:
$DABC$ — данная пирамида. $(ABD) \perp (ABC)$ $DH \perp BC$, $DO \perp AB \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $OH \perp BC \Rightarrow$

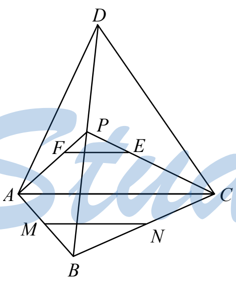
$\Rightarrow OH = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \Rightarrow DH = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3}(12 + 13 + 13) = \frac{380\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ т.к. $\frac{S_{\text{верх.}}}{S_{\text{бок.}}} = \left(\frac{2}{3+2}\right)^2$

$S_{\text{бок. усеч.}} = \frac{21}{25} S_{\text{бок.}} = \frac{532\sqrt{3}}{5}$. Ответ: $\frac{532\sqrt{3}}{5}$.

С-19.

1. Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, O — центр нижнего основания, $M \in AA_1$.
Найти: 1) векторы с началом и концом в вершинах призмы: а) сонаправленные с $\overline{OC}$; б) равные $\overline{FD}$.
2) От т. M отложить векторы, равные $\overline{FD}$ и $\overline{OC}$.
Решение: 1) а) $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ED}$, $\overline{E_1D_1}$, $\overline{FC}$, $\overline{F_1C_1}$.
б) $\overline{AC}$, $\overline{F_1D_1}$, $\overline{A_1C_1}$.
2) через M проводим $MC' \parallel OC$ и $MD' \parallel FD$, где $C' \in BB_1$, $D' \in CC_1$, $\overline{MC'}$ и $\overline{MD'}$ — векторы, которые требовалось построить.
Ответ: 1) а) $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ED}$, $\overline{E_1D_1}$, $\overline{FC}$, $\overline{F_1C_1}$. б) $\overline{AC}$, $\overline{F_1D_1}$, $\overline{A_1C_1}$.
2) $\overline{MC'}$, $\overline{MD'}$.



2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AC = 18$ см, F и E — точки пересечения медиан граней ADB и CDB, $M \in AB$, $N \in BC$, $AM : MB = CN : NB$.
1) Доказать: $\overline{FE} \parallel \overline{MN}$. 2) Найти: $|\overline{FE}|$.
Решение:
1) Т. F и E лежат на медианах AP и $CP \Rightarrow$ $\frac{FP}{AF} = \frac{PE}{EC} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow FE \parallel AC$, но т.к. $AM : MB = CN : NB$, то и $MN \parallel AC \Rightarrow$ $\overline{FE} \uparrow\uparrow \overline{MN}$. Ч.т.д.

2) $\Delta APC \sim \Delta FPE$ с коэффициентом подобия 3 $\Rightarrow FE = \frac{1}{3}AC = 6$.

Ответ: 6 см.

С-20.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Найти: $\overline{AA_1}$ как сумму $\overline{DA_1}$, $\overline{DC_1}$, $\overline{DB_1}$.

Решение: $\overline{AA_1} = \overline{DA_1} - \overline{DA} = \overline{DA_1} - \overline{C_1B_1} =$

$= \overline{DA_1} - (\overline{DB_1} - \overline{DC_1}) = \overline{DA_1} - \overline{DB_1} + \overline{DC_1}$.

Ответ: $\overline{DA_1} - \overline{DB_1} + \overline{DC_1}$.

2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед,

$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} + \overline{MA_1} + \overline{MB_1} + \overline{MC_1} + \overline{MD_1} = \overline{0}$.

Найти: M.

Решение: Пусть M' — точка пересечения его диагоналей.

$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} + \overline{MA_1} + \overline{MB_1} + \overline{MC_1} + \overline{MD_1} =$

$=\left(\overline{MM'} + \overline{M'A}\right) + \left(\overline{MM'} + \overline{M'B}\right) + \left(\overline{MM'} + \overline{M'C}\right) + \left(\overline{MM'} + \overline{M'D}\right) +$

$+\left(\overline{MM'} + \overline{M'A_1}\right) + \left(\overline{MM'} + \overline{M'B_1}\right) + \left(\overline{MM'} + \overline{M'C_1}\right) + \left(\overline{MM'} + \overline{M'D_1}\right) =$

$= 8\overline{MM'} = \overline{0} \Rightarrow M'$ совпадает с $M \Rightarrow M$ — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

Ответ: M — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

С-21.

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $\angle DAC = \angle DAB$, $DBC \perp ABC$, DM — высота тетраэдра, $AC = a$, $AB = b$, $AD = c$. От точки A отложены единичные векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, сонаправленные с $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ соответственно.

Найти: разложение $\overline{DM}$ по $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$.

Решение: Т.к. $DBC \perp ABC$, то $M \in BC$, причем т.к. $\angle DAC = \angle DAB$, то AM — биссектриса $\Delta ABC \Rightarrow \frac{CM}{MB} = \frac{a}{b}$;

$\overline{DM} = \overline{AM} - \overline{AD}$, $\overline{AM} = \frac{a}{a+b}\overline{AB} + \frac{b}{a+b}\overline{AC} \Rightarrow$

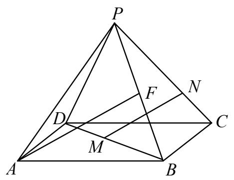
$\Rightarrow \overline{DM} = \frac{a}{a+b}\overline{AB} + \frac{b}{a+b}\overline{AC} - \overline{AD}$, но $\overline{AB} = b\,\overline{e_2}$, $\overline{AC} = a\,\overline{e_1}$,

а $\overline{AD} = c\,\overline{e_3} \Rightarrow \Rightarrow \overline{DM} = \frac{ab}{a+b}\overline{e_1} + \frac{ab}{a+b}\overline{e_2} - c\overline{e_3}$.

Ответ: $\frac{ab}{a+b}\overline{e_1} + \frac{ab}{a+b}\overline{e_2} - c\overline{e_3}$.

2. Дано: $ABCD$ — трапеция, $O \notin ABC$, $AD \parallel BC$, $AD = kBC$.
Найти: разложение $\overline{OD}$ по $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$.
Решение:
$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + k\overline{BC} = \overline{OA} + k(\overline{OC} - \overline{OB}) = \overline{a} + k\overline{c} - k\overline{b}$.

С-22.



1.
Дано: $PABCD$ — пирамида, $ABCD$ — параллелограмм, $M \in BD$,
$N \in PC$, $MN \parallel AF$, F — середина PB.
Найти: $\dfrac{MN}{AF}$.

Решение:
Пусть $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{x}{y}$, $\dfrac{PN}{NC} = \dfrac{m}{n}$.

$$\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN} = \frac{y}{x+y}\overline{BD} + \overline{AB} + \frac{n}{m+n}\overline{CP}.$$

$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$; $\overline{CP} = -\overline{AB} - \overline{AD} + \overline{AP} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{y}{x+y}(\overline{AD} - \overline{AB}) + \overline{AB} + \frac{n}{m+n}(-\overline{AB} - \overline{AD} + \overline{AP}) =$$

$$= \left(\frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n}\right)\overline{AD} + \left(1 - \frac{y}{x+y} - \frac{n}{m+n}\right)\overline{AB} + \frac{n}{m+n}\overline{AP} \qquad 1)$$

$\overline{AF} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{AP}$. Т.к. $MN \parallel AF$, то

$$\overline{MN} = k\overline{AF} = \frac{k}{2}\overline{AB} + \frac{k}{2}\overline{AP} \qquad 2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} - \dfrac{n}{m+n} = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{x+y} - \dfrac{n}{m+n} = \dfrac{k}{2}; \\ \dfrac{n}{m+n} = \dfrac{k}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x+y} = 1 - k \\ \dfrac{n}{m+n} = 1 - k \\ 1 - \dfrac{y}{x+y} - \dfrac{n}{m+n} = \dfrac{k}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$1 - (1 - k) - (1 - n) = \dfrac{k}{2}$, $1 - 1 + k - 1 + k = \dfrac{k}{2} = 0$,

$\frac{3}{2}k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = k \cdot AF$ и $\frac{MN}{AF} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

2. Дано: точки A, B, C, D; $A \notin BC$, O — произвольная точка пространства, $x + y + z = 1$, $\overline{OD} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$.

Доказать: A, B, C, D лежат в одной плоскости.

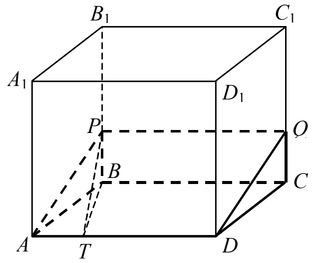
Доказательство:

$z = 1 - x - y \Rightarrow \overline{OD} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + (1 - x - y)\overline{OC}$.

$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = x \cdot \overline{OA} + y \cdot \overline{OB} + \overline{OC} - x \cdot \overline{OC} - y \cdot \overline{OC} - \overline{OC} =$

$= x(\overline{OA} - \overline{OC}) + y(\overline{OB} - \overline{OC}) = x \cdot \overline{CA} + y \cdot \overline{CB} \Rightarrow \overline{CD}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$ компланарны, значит, точки A, B, C, и D лежат в одной плоскости. Ч.т.д.

С-23.



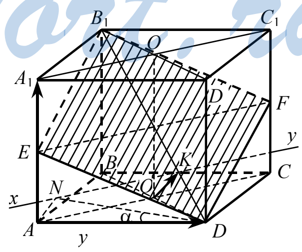
1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, AC = 8 см, BD = 6 см, BB_1 = 6 см, $P \in BB_1$, PB = 2 см. Через AD и P проведена плоскость.

Найти: $S_{бок.}$ образовавшейся треугольной призмы.

Решение:

$PQ \parallel AD$. $BT \perp AD \Rightarrow PT \perp AD$ по теореме о трех перпендикулярах $\Rightarrow PBT$ — перпендикулярное сечение призмы $APBDQC \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{бок.} = P_{PBT} \cdot AD = 5 \cdot \left(2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8}{5} + \sqrt{4 + \frac{576}{25}} \right) = 60$. Ответ: 60 см^2.



2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, AC = 8 см, BD = 6 см, BB_1 = 6 см. Через B_1D параллельно AC проведена плоскость.

Найти:

1) $S_{сеч.}$;

2) расстояние OK от точки пересечения диагоналей ромба $ABCD$ до плоскости сечения;

3) $\rho(AA_1, B_1D)$;

4) разложить $\overline{OK}$ по $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$;

5) угол между AD и плоскостью сечения.

Решение:

1) $EF \parallel AC$ и $EF \perp B_1D \Rightarrow S = \frac{1}{2} EF \cdot B_1D = \frac{1}{2} 8 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$.

2) $OK \perp B_1D$, $OK \perp AC \Rightarrow OK \perp EF \Rightarrow OK \perp EDF$.

$\angle ODK = 45° \Rightarrow OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3) $\rho(AA_1, B_1D) = AO = 4$.

4) $\overline{OK} = \frac{1}{4}\overline{OB_1} + \frac{3}{4}\overline{OD} = \frac{1}{4}(\overline{OB} + \overline{BB_1}) + \frac{3}{8}\overline{BD} =$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\overline{BD} + \overline{AA_1}\right) + \frac{3}{8}\overline{BD} = \frac{1}{4}\overline{BD} + \frac{1}{4}\overline{AA_1} = \frac{1}{4}(\overline{AD} - \overline{AB}) + \frac{1}{4}\overline{AA_1} =$

$= -\frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AD} + \frac{1}{4}\overline{AA_1}$.

5) $AOK \cap EDF = XY \parallel AC$. В ΔAOK: $AN \parallel OK$.

Очевидно, $AN \perp EDK$. Пусть $\angle ADN = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AN}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \Rightarrow$

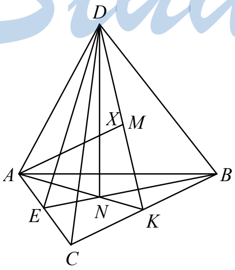
$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: 1) $24\sqrt{2}$ см^2; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см; 3) 4 см;

4) $-\frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AD} + \frac{1}{4}\overline{AA_1}$; 5) $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

ВАРИАНТ 8.

С-1.



1.

Дано: $M \in BDC$.

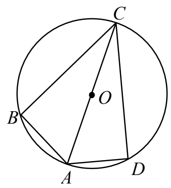
Построить: $AM \cap DBE$.

Построение:

$DM \cap BC = K$; $AK \cap BE = N$; $AM \cap DN = X$.

X — искомая точка.

2.



Дано: O — центр окружности, описанной около $ABCD$, A, O, $C \in \alpha$.

Найти: принадлежит ли α точка D.

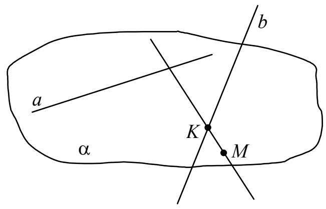
Решение:

Не обязательно. Т.к. если точки A, O, C лежат на одной прямой, то через эту прямую можно провести бесконечно много плоскостей.

Ответ: необязательно.

С-2.

1.



Дано: a и b скрещивающиеся, $M \notin a$, $M \notin b$.

Найти: всегда ли существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая a и b?

Решение:

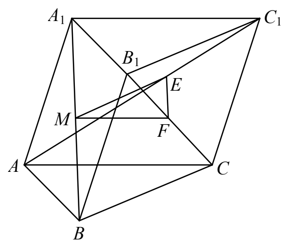
Пусть a и M принадлежат плоскости α.

$b \cap \alpha = K$.

Если KM не параллельна a, то KM — искомая прямая.

Ответ: не всегда.

2.



Дано: $\Delta ABC \in \alpha$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$, F, E, M — середины B_1C, AC_1, A_1B соответственно.

Доказать: $\Delta EMK \sim \Delta ABC$.

Доказательство:

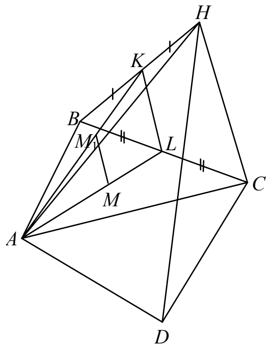
Т.к. $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$, то AA_1B_1B, BB_1C_1C, AA_1C_1C — параллелограммы, а т.к. F, E, M — середины A_1B, B_1C, C_1A, то F, E, M — точки пересечения диагоналей в параллелограммах.

Значит, EF — средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AB$.

Аналогично, $ME = \frac{1}{2}BC$; $MF = \frac{1}{2}AC$.

Значит, $\Delta EMF \sim \Delta BCA$ (по третьему признаку). Ч.т.д.

С-3.



1.

Дано: M_1 и M — точки пересечения медиан ΔAHB и ΔABC.

Найти: параллельны ли AHC и MM_1.

Решение:

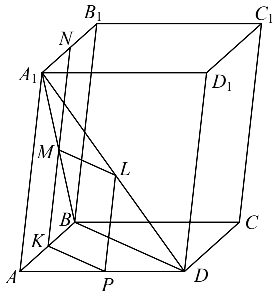
Проведем в ΔAHB и ΔABC медианы AK и AL соответственно.

$$\frac{AM_1}{M_1K} = \frac{AM}{ML} = \frac{2}{1}.$$

Значит, $MM_1 \parallel KL$. А KL — средняя линия ΔBHC. Значит, $KL \parallel HC$.

Значит, $MM_1 \parallel HC$. Значит, $MM_1 \parallel (AHC)$.

Ответ: параллельна.



2.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \parallel DD_1$, K, M, P — середины AB, A_1B, AD соответственно, $AA_1 = 20$, $BD = 40$, $\angle(BD, CC_1) = 90°$.

1) Построить: линии пересечения плоскости MKP с плоскостями AA_1B, BA_1D, AA_1D_1 и ABC.

2) Найти: площадь четырехугольника, образованного построенными линиями.

Решение:

1) Пусть N — середина A_1B_1. Значит, $(MKP) \cap (AA_1B) = KN$.

Пусть L — середина A_1D. ($PL \parallel MK$). Значит, $(MKP) \cap (A_1BD) = ML$.

$(MKP) \cap (AA_1D) = PL$.

$(MKP) \cap (ABC) = KP$.

2) $MK \parallel PL$ и $ML \parallel KP \Rightarrow MLPK$ — параллелограмм.

KM — средняя линия ΔAA_1B. $KM = \frac{1}{2} AA_1 = 10$.

KP — средняя линия ΔABD. $KP = \frac{1}{2} BD = 20$.

Т.к. $BD \perp CC_1$ и $KP \parallel BD$. Значит, $KP \perp CC_1$.

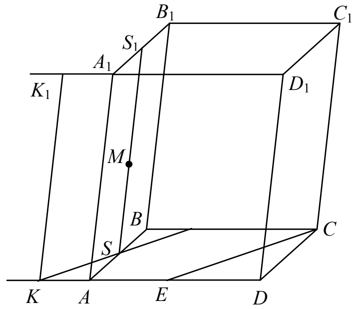
Т.к. $KM \parallel CC_1$, то $KP \perp KM$. Значит, $KMLP$ — прямоугольник.

$S_{\text{сеч.}} = KM \cdot KP = 10 \cdot 20 = 200$.

Ответ: 200.

С-4.

1.



Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1=BB_1=CC_1 = DD_1$, $M \in AA_1B_1$. Через точку M проведена плоскость, параллельная CC_1E.

Построить: линию пересечения этой плоскости с AA_1D_1.

Построение:

Проведем через точку M прямую, параллельную AA_1.

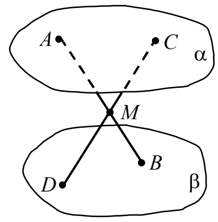
Пусть она пересекает AB и A_1B_1 в точках S и S_1 соответственно.

Проведем через точку S прямую SK, параллельную CE, $K \in$ прямой AD. Через точку K проведем прямую KK_1, параллельную AA_1.

$KK_1 \cap A_1D_1 = K$.

KK_1 — искомая прямая.

2.



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $AB \cap CD=M;$ $A, C \in \alpha$, $D, B \in \beta$.

Доказать: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CM}{MD}$.

Доказательство:

$AC \parallel \beta$; $DB \parallel \alpha$.

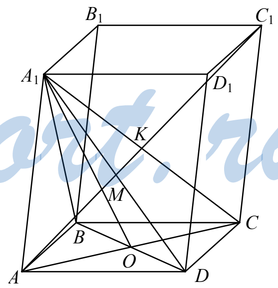
Т.к. AC и DB лежат в одной плоскости, то $AC \parallel DB$.

Значит, $\angle CAM = \angle MBD$ и $\angle ACM = \angle MDB$.

Значит, $\Delta ACM \sim \Delta BDM$. Значит, $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CM}{MD}$. Ч.т.д.

С-5.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Доказать: AC_1 проходит через точку пересечения медиан ΔBDA_1.

Доказательство:

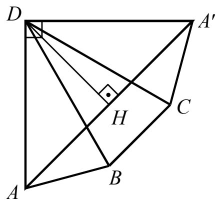
$(BDA_1) \cap (AA_1C_1) = A_1O$, где O — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

$AC_1 \cap A_1O = M$; $(AC_1 \cap (A_1DB)) = M$.

Пусть $(A_1C \cap AC_1) = K$. Тогда AK и A_1O — медианы ΔAA_1C.

Значит, $A_1M : MO = 2 : 1$.

Значит, M — точка пересечения медиан ΔA_1BD. Ч.т.д.



2.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, угол при основании боковых граней равен 70°. Точка начинает двигаться по грани ADC, затем по CDB, затем по ADB и возвращается в исходное положение. Наименьший путь, который она проходит, равен $12\sqrt{3}$.

Найти: длину бокового ребра.

Решение: Сделаем развертку.

AA_1 — наименьший путь. $DH \perp AA_1$, $AA_1 = 12\sqrt{3}$.

$\angle ADA' = 3 \cdot (180° - 140°) = 120°$.

$\angle ADH = \frac{1}{2} \angle ADA' = 60°$. $AH = \frac{1}{2} AA' = 6\sqrt{3}$.

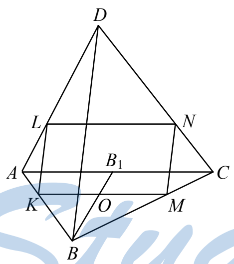
$AD = \dfrac{AH}{\sin \angle ADH} = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 12$ см.

Ответ: 12 см.

С-6.

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AC = 12$, $DB = 9$, O — точка пересечения медиан ΔABC, $\angle(AC; DB) = 60°$.

Построить: сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку O параллельно прямым AC и DB.



Найти: $S_{\text{сеч.}}$

Построение:

1) Через т. O проведем прямую KM, параллельную AC.

2) Через точки K и M проведем прямые KL и MN, параллельные BD.

3) $KLNM$ — искомое сечение.

$\dfrac{BK}{KA} = \dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{2}{1}$.

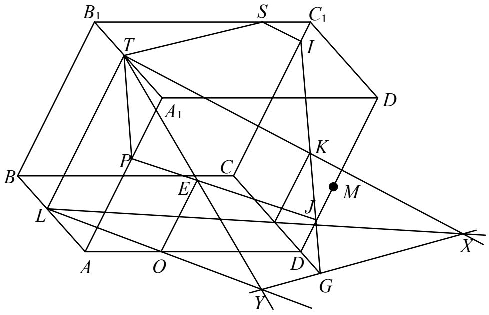
$\Delta BKM \sim \Delta BAC$; $\dfrac{KM}{AC} = \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{2}{3}$; $KM = \dfrac{2}{3} AC = \dfrac{2}{3} \cdot 12 = 8$.

$\Delta AKL \sim \Delta ABD$; $\dfrac{KL}{BD} = \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{1}{3}$; $KL = \dfrac{1}{3} BD = 3$.

Т.к. $KL \parallel BD$ и $KM \parallel AC$, то $\angle LKM = 60°$.

$S_{\text{сеч.}} = 8 \cdot 3 \cdot \sin 60° = 24 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$. Ответ: $12\sqrt{3}$.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $T \in A_1B_1$, $M \in DD_1$, $K \in DD_1C_1C$, $E \in AA_1D_1D$.

Построить: сечение плоскостью, параллельной TEK и проходящей через точку M.

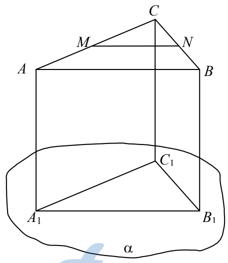
Построение: $TL \parallel AA_1$, $KH \parallel AA_1$, $LH \cap TK = X$.

$EO \parallel AA_1$, $OL \cap TE = Y$. $TS \parallel XY$, $CD \cap XY = G$.

$GK \cap C_1C = I$, $GK \cap D_1D = J$, $JE \cap AA_1 = P$. $\Rightarrow$ $TSIJP$ — сечение плоскостью TEK.

Чтобы построить искомое сечение, проведите сечение, параллельное построенному, через т. M. На рисунке не изображено, чтобы не перегружать его.

С-7.



1. Дано: ΔABC — прямоугольный, MN — средняя линия ΔABC,

$\alpha \parallel MN$, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$,

$C_1B_1 = 11$ см, $C_1A_1 = 12$ см, $A_1B_1 = 19$ см.

Найти: $S(\Delta ABC)$.

Решение: Т.к. $MN \parallel AB$, то $AB \parallel \alpha$.

Значит, $AB = A_1B_1 = 19$ см.

Проведем через точку C плоскость β ($\beta \parallel \alpha$).

$\beta \cap BB_1 = B_2$; $\beta \cap AA_1 = A_2$.

$CB_2 = C_1B_1 = 11$ см; $CA_2 = C_1A_1 = 12$ см; $A_2B_2 = A_1B_1 = 19$ см.

ΔCB_2B и ΔCA_2A — прямоугольные.

Пусть $BB_2 = AA_2 = x$. $CB^2 = x^2 + 121$, $CA^2 = x^2 + 144$,

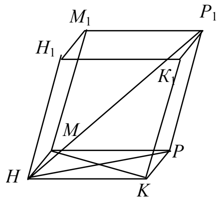
$AB^2 = CA^2 + CB^2$; $x^2 + 121 + x^2 + 144 = 361$.

Значит, $x^2 = 48$; $CB = \sqrt{48+121} = 13$; $CA = \sqrt{48+144} = 8\sqrt{3}$.

$S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 13 = 52\sqrt{3}$ см^2. Ответ: $52\sqrt{3}$ см^2.

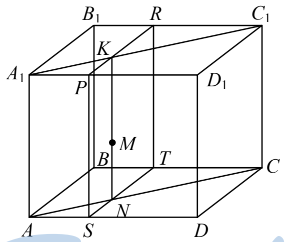
2. Дано: α, точки A и B.
Найти: множество точек, принадлежащих α и равноудаленных от A и B.
Решение: Заметим, что любая точка плоскости, проходящей через середину AB и перпендикулярно AB, равноудалена от точек A и B, и никакая другая точка пространства не обладает этим свойством. Значит, искомым множеством точек будет пересечение этой плоскости (обозначим ее за β) с плоскостью α. Т.е. это m, если $\alpha \cap \beta = m$; $\varnothing$ если $\alpha \parallel \beta$; α, если $\alpha = \beta$.
Ответ: m, если $\alpha \cap \beta = m$; $\varnothing$ если $\alpha \parallel \beta$; α, если $\alpha = \beta$.

С-8.



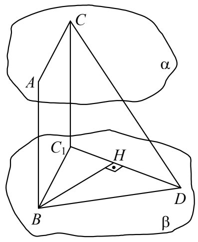
1.
Дано: $MPKHM_1P_1K_1H_1$ — параллелепипед, $\angle M_1MH + \angle M_1MP = 180°$, все грани ромбы.
Доказать: $P_1H \perp MK$.
Доказательство:
Очевидно, что все ромбы равны между собой.
Значит, $\angle P_1PM = \angle P_1PK$. Значит, P_1 проецируется на PH.
Т.к. $PH \perp MK$, то по ТТП $P_1H \perp MK$. Ч.т.д.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, все грани — прямоугольники, M — внутренняя точка грани AA_1C_1C.
Построить: сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BC.
Построение:
1) Через точку M проведем прямую a, $a \parallel AA_1$.
$a \cap A_1C_1 = K$, $a \cap AC = N$.
2) Через точки K и N проводим прямые b и c, параллельные AB.
$b \cap A_1D_1 = P$, $b \cap B_1C_1 = R$;
$c \cap AD = S$, $c \cap BC = T$.
($PRTS$) — искомое сечение.

С-9.



Дано: $\alpha \parallel \beta$; $A, C \in \alpha$; $B, D \in \beta$; $AB \perp \alpha$;
$AB = 20$; $CD = 25$; $AC = 14$; $BD = 13$.
Найти: $\rho(AB, CD)$ — ?
Решение:
Т.к. $\alpha \parallel \beta$ и $AB \perp \alpha$. то $AB \perp \beta$.
Из точки C проведем отрезок CC_1, перпендикулярный α.

$CC_1 = AB = 20$. $C_1D = \sqrt{CD^2 - CC_1^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.

Т.к. C_1D — проекция CD на плоскость β,
то $\rho(AB, CD) = \rho(B, C_1D) = BH$, где BH — высота ΔBC_1D.

$BC_1 = AC = 14$. $P(BC_1D) = \dfrac{14 + 15 + 13}{2} = 21$.

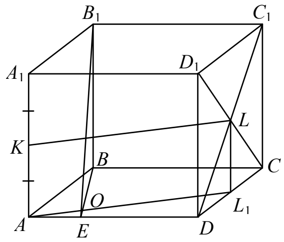
$S(BC_1D) = \sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = 84$.

$S(BC_1D) = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot C_1D = \dfrac{1}{2} \cdot 15BH$. $BH = \dfrac{84 \cdot 2}{15} = 11{,}2$.

Ответ: 11,2.

С-10.

1.



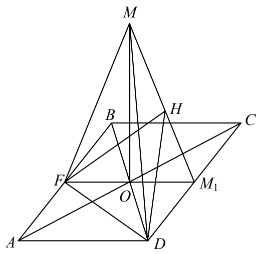
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, K — середина AA_1, L — точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C, $E \in AD$, $AD = 4$,

$CD = 2$, $AE = \dfrac{1}{2}$.

Доказать: $B_1E \perp KL$.
Доказательство:
Пусть $LL_1 \perp CD$. L_1 — середина CD.
AL_1 — проекция KL на (ABC), параллельная KL.
BE — проекция B_1E.

$\text{tg}\angle ABE = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{4}$. $\text{tg}\angle DAL_1 = \dfrac{L_1D}{AD} = \dfrac{1}{4}$.

$\Delta ADL_1 \sim \Delta BAE$, т.к. $\angle ABE = \angle DAL_1$.
Пусть $AL_1 \cap BE = O$.
$\Delta AOE \sim \Delta BAE$, т.к. $\angle OAE = \angle ABE$ и $\angle OEA = \angle AEB$.
Значит, $\angle AOE = 90°$.
Значит, $BE \perp AL_1 \Rightarrow B_1E \perp KL$. Ч.т.д.



2.

Дано: $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей,

$MO \perp ABC$, F — середина AB, $AB = 4$.

$MO = 2\sqrt{3}$.

Найти: $\angle(FD, (DMC))$ — ?

Решение:

M_1 — середина CD. $DC \perp FM_1$;

$DC \perp MM_1$ (MM_1 — медиана и высота в равнобедренном ΔDMC).

Значит, $DC \perp (FMM_1)$. $FH \perp MM_1$; т.к. $DC \perp (FMM_1)$, то $DC \perp FH$.

Значит, $FH \perp (DMC)$.

Значит, $\angle(DF, (DMC)) = \angle FDH$. $\angle FHD = 90°$.

$FD = \sqrt{AD^2 + AF^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$MM_1 = \sqrt{OM_1^2 + MO^2} = \sqrt{4+12} = 4$.

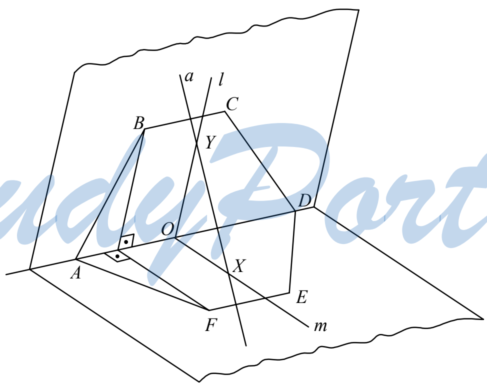
$\sin\angle MM_1O = \dfrac{MO}{MM_1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin\angle MM_1O = \dfrac{FH}{FM_1} = \dfrac{FH}{4}$.

$FH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. $\sin\angle FDH = \dfrac{FH}{FD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

$\angle FDH = \arcsin\sqrt{0{,}6} \approx 50°46'$.   Ответ: $\approx 50°46'$.

С-11.

1.

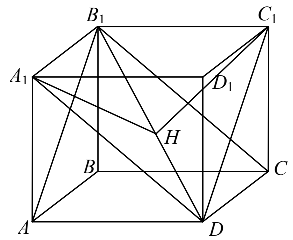


Дано: $ABCD$, $ADEF$ — равнобедренные трапеции, $a \perp AD$, $a \cap \beta = X$.

Построить: $a \cap \alpha = ?$

Построение: Через точку X проведем прямую m, параллельную высоте трапеции $ADEF$. $m \cap AD = O$.
Через точку O проведем прямую l, параллельную высоте трапеции $ABCD$.
AD перпендикулярна плоскости, проходящей через прямые l и m.
Т.к. $AD \perp a$ и X лежит в плоскости, проходящей через l и m, то если $a \cap l = Y$, то Y — искомая точка.

2.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, у которого все грани квадраты.
Найти: величину двугранного угла, образованного сечениями AB_1C_1D и CB_1A_1D.
Решение:
B_1D — ребро двугранного угла.
$\Delta A_1B_1D = \Delta C_1B_1D$. A_1H и C_1H — высоты.
$\angle A_1HC_1$ — линейный угол двугранного угла.
Пусть ребро — a.

$$A_1D = a\sqrt{2}\ .\ \ B_1D = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}\ .\ \ A_1H \cdot a\sqrt{3} = a\sqrt{2} \cdot a.$$

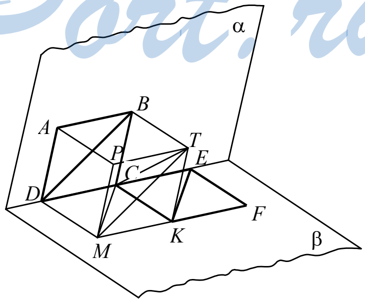
$$A_1H = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = C_1H.\ \ A_1C_1 = a\sqrt{2}\ .$$

$$\cos\angle A_1HC_1 = \frac{A_1C_1^2 - A_1H^2 - HC_1^2}{2A_1H \cdot HC_1} = \frac{2a^2 - a^2 \cdot \frac{2}{3} - a^2 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot a^2 \cdot \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2a^2 - a^2 \cdot \frac{4}{3}}{a^2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}\ .\ \ \angle A_1HC_1 = 120°.$$ Ответ: 120°.

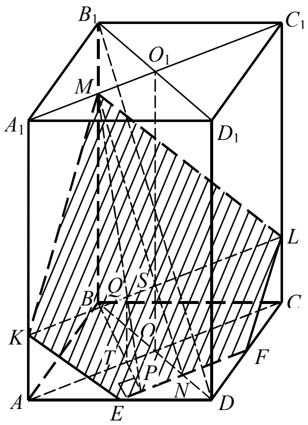
С-12.

1.



Дано: $\alpha \perp \beta$, $ABCD \in \alpha$, $CEFK \in \beta$, $ABCD = CEFK$.
Найти: $\angle(BD, EK)$ — ?
Решение:
Построим квадрат $DCKM$ как показано на рисунке.
$CM \parallel EK$.

Построим куб на квадрате $DCKM$.
$MT \parallel DB$.
ΔMTC — равносторонний $\Rightarrow \angle CMT = 60°$.
Т.к. $CM \parallel EK$ и $MT \parallel DB$, то $\angle(BD, EK) = \angle(MT, CM) = 60°$.
Ответ: 60°.



2.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (основание — прямоугольник), $AD = 4$, $CD = 3$, $CC_1 = 14$, E — середина AD, F — середина DC.
Построить: сечение, проходящее через точки E, F, параллельное B_1D.
Найти: $S_{\text{сеч.}}$.
Построение:
1) Проведем EF.
2) $EF \cap BD = N$.
3) В плоскости BB_1D проведем прямую MN, параллельную B_1D.
$MN \cap BB_1 = M$.
4) $MN \cap OO_1 = S$
(OO_1 — прямая, проведенная через точки пересечения диагоналей граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$).
5) Через точку S проведем прямую KL, параллельную AC.
6) $KL \cap AA_1 = K$; $KL \cap CC_1 = L$.
7) $MKEFL$ — искомое сечение.
Решение:
Построим $BP \perp EF$. $MP \perp EF$ и $MP \perp KL$; $MP \cap KL = Q$.
$S_{\text{сеч.}} = S_{KML} + S_{EKLF}$.

$$S_{KML} = \frac{1}{2} KL \cdot QM = \frac{1}{2} AC \cdot QM.$$

$$S_{EKLF} = \frac{1}{2}(KL + EF) \cdot QP = \frac{1}{2}\left(AC + \frac{1}{2} AC\right) \cdot QP = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} AC \cdot QP.$$

Прямоугольные ΔMPB и ΔQPT подобны.

Значит, $MQ = \dfrac{2}{3} MP$ и $QP = \dfrac{1}{3} MP$.

Значит, $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2} AC \cdot \dfrac{2}{3} MP + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} AC \cdot \dfrac{1}{3} MP =$

$$= \frac{1}{3} AC \cdot MP + \frac{1}{4} AC \cdot MP = \frac{7}{12} AC \cdot MP.$$

$\Delta B_1BD \sim \Delta MBN$.

$MB = \frac{3}{4}BB_1 = \frac{3}{4}CC_1 = \frac{3}{4} \cdot 14 = \frac{21}{2}$.

$S_{BEF} = AB \cdot AD - \frac{1}{2}AB \cdot AE - \frac{1}{2}ED \cdot DF - \frac{1}{2}BC \cdot CF =$

$= 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 12 - 3 - \frac{3}{2} - 3 = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{16+9} = 5$. $EF = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

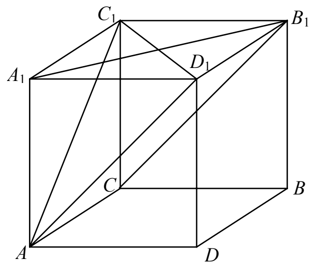
$\frac{1}{2}EF \cdot BP = S_{BEF}$. $BP = \frac{2S_{BEF}}{EF} = \frac{9}{\frac{5}{2}} = \frac{18}{5}$.

Значит, $MP = \sqrt{MB^2 + BP^2} = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{324}{25}} = \frac{111}{10}$.

$S_{сеч.} = \frac{7}{12} \cdot 5 \cdot \frac{111}{10} = \frac{259}{8}$. Ответ: $\frac{259}{8}$.

С-13.

1.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, ΔABC — прямоугольный ($\angle C = 90°$), $AC = 4$, $BC = 3$, $B_1B = 4$.

Найти: $\angle(AC_1, B_1C)$ — ?

Решение:

Достроим до прямого параллелепипеда $ACBDA_1C_1B_1D_1$.

Основание — прямоугольник $ACBD$.

$AD_1 \parallel CB_1$.

Значит, $\angle(AC_1; B_1C) = \angle D_1AC_1$. $AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

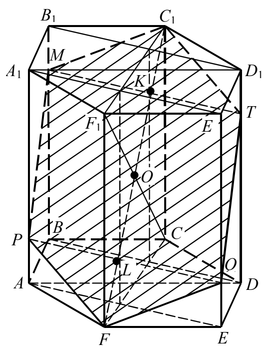
$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

$D_1C_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + A_1C_1^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

$\cos\angle D_1AC_1 = \frac{-D_1C_1^2 + AD_1^2 + AC_1^2}{2AD_1 \cdot AC_1} = \frac{-25+25+32}{2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{32}{40\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

$\angle D_1AC_1 = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 55°33'$. Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 55°33'$.

2.



Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма, a — сторона основания, $2a$ — боковое ребро, O — середина F_1C.

Построить: через O перпендикулярно F_1C сечение.

Найти: площадь сечения.

Построение:

Т.к. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $FC = 2a$.

Значит, FF_1C_1C — квадрат.

Значит, $F_1C \perp FC_1$.

Пусть L — точка пересечения FC_1 и прямой, проведенной через точку пересечения AE и FC параллельно FF_1.

Через точку L проведем прямую PQ параллельно AE.

$PQ \cap AA_1 = P$; $PQ \cap EE_1 = Q$.

Пусть K — точка пересечения FC_1 и прямой, проведенной через точку пересечения F_1C_1 и B_1D_1 параллельно CC_1.

Через точку K проведем прямую MT параллельно B_1D_1.

$MT \cap BB_1 = M$, $MT \cap DD_1 = T$.

MC_1TQFP — искомое сечение.

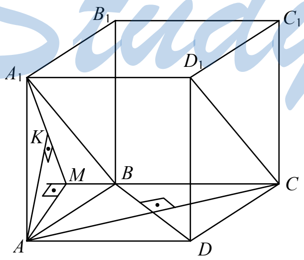
($F_1C \perp FC_1$; $F_1C \perp AE$, а т.к. $PQ \parallel AE$, то $F_1C \perp PQ$)

Угол между плоскостью сечения и плоскостью основания — $\angle C_1FC = 45°$.

$\frac{S_{\text{осн.}}}{S_{\text{сеч.}}} = \cos 45°$. $S_{\text{осн.}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

$S_{\text{сеч.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos 45°} = \frac{3a^2\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2}} = 3a^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$. Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

С-14.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 60°$, $AA_1 = 4$ см, $\rho(AD, D_1C) = \frac{12}{5}$ см.

Найти: $S_{\text{п.п.}}$ — ?

Решение:

$\rho(AD, D_1C) = \rho(AD, (A_1D_1CB))$.

$AM \perp BC$, $AK \perp A_1M$, $BC \perp AA_1$ и $BC \perp AM$, значит, $BC \perp (AA_1M)$.

Т.к. $AK \in (AA_1M)$, то $AK \perp BC$.
Т.к. $AK \perp A_1M$, то $AK \perp (BA_1D_1)$.
Длина AK — расстояние между AD, D_1C.

$AK = \dfrac{12}{5}$. $\sin\angle KA_1A = \dfrac{AK}{AA_1} = \dfrac{12}{5 \cdot 4} = \dfrac{3}{5}$. $\cos\angle KA_1A = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

$\operatorname{tg}\angle KA_1A = \dfrac{3}{4}$. $\operatorname{tg}\angle KA_1A = \dfrac{AM}{AA_1}$; $AM = \dfrac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

Пусть сторона ромба a. Т.к. $\angle BAD = 60°$, то $BD = a$.

$AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120°} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$. $\angle BCA = 30°$.

$\sin\angle BCA = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{3}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$; $a = 2\sqrt{3}$ см; $AC = 6$ см.

$S(ABCD) = \dfrac{1}{2} BD \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 6\sqrt{3}$ см^2.

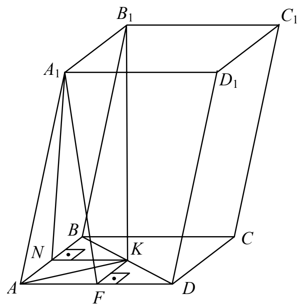
$S_{\text{б.п.}} = 4a \cdot AA_1 = 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}$ см^2.

$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S(ABCD) = 32\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 44\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $44\sqrt{3}$ см^2.

С-15.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 15$, $BD = 7$, $\angle BDA = 60°$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90°$, $\angle(A_1D; (ABC)) = 45°$, A_1 проектируется на BO.

Найти: $S_{\text{б.п.}}$.

Решение:

Пусть A_1K — высота параллелепипеда. $K \in BD$.

Т.к. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то AK — биссектриса ΔABD.

По теореме косинусов $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 60°} =$

$= \sqrt{225 + 49 - 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \dfrac{1}{2}} = \sqrt{225 + 49 - 105} = 13$.

По свойству биссектрисы треугольника $KD = \dfrac{15}{4}$.

$\angle(A_1D; (ABC)) = \angle A_1DK = 45°$. Значит, $A_1K = \dfrac{15}{4}$; $KF \perp AD$.

Т.к. $A_1K \perp (ABC)$, $KF \perp AD \Rightarrow$ по ТТП $A_1F \perp AD$.
Значит, A_1F — высота грани AA_1D_1D.

$KF = KD \cdot \sin 60° = \frac{15\sqrt{3}}{8}$.

$A_1F = \sqrt{(A_1K)^2 + KF^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{15\sqrt{7}}{8}$.

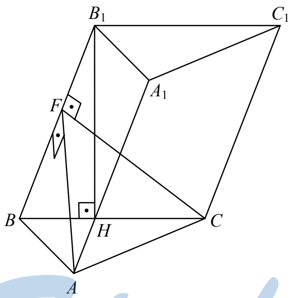
$KN \perp AB$. $AB \perp (A_1KN) \Rightarrow A_1N \perp AB$.
$\Delta ANK = \Delta AFK$ (по гипотенузе и острому углу).
Значит, $NK = KF$.
Значит, $\Delta A_1KN = \Delta A_1KF$ (по двум катетам).

Значит, $A_1N = A_1F = \frac{15\sqrt{7}}{8}$.

$S_{б.п.} = 2 \cdot 15 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} + 2 \cdot 13 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = 56 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = 105\sqrt{7}$.

Ответ: $105\sqrt{7}$.

2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонная призма, ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$, B_1 проектируется на середину BC, $AA_1 = l$, $\angle(AA_1; (ABC)) = \varphi$, двугранный угол с ребром BB_1 равен α.



Найти: $S_{б.п.}$ — ?
Решение:
Пусть H — середина BC, B_1H — высота призмы, $\angle B_1BC = \varphi$.
По ТТП $BB_1 \perp AC$. $CF \perp BB_1$,
$BB_1 \perp (ACF)$, $\angle ACF = 90°$.
Из ΔBB_1H: $BH = l \cdot \cos\varphi$. $BC = 2l\cos\varphi$.
Из ΔFBC: $FC = BC \cdot \sin\varphi =$
$= 2l\sin\varphi\cos\varphi = l\sin 2\varphi$.
Из ΔACF: $AC = FC \cdot \text{tg}\alpha = l\sin 2\varphi \cdot \text{tg}\alpha$.

$AF = \frac{FC}{\cos\alpha} = \frac{l \cdot \sin 2\varphi}{\cos\alpha}$.

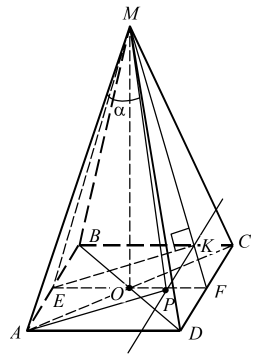
Периметр перпендикулярного сечения равен:

$P = l\sin 2\varphi\left(1 + \text{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{l\sin 2\varphi(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

$S_{б.п.} = \frac{l^2 \sin 2\varphi(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$. Ответ: $\frac{l^2 \sin 2\varphi(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

С-16.

1.



Дано: $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, a — сторона основания, $a\sqrt{2}$ — высота.

Найти: $\angle(MA; (DMC))$ — ?

Решение: MO — высота пирамиды.

Пусть E — середина AB.

$EK \perp (CMD)$ ($EK \perp MF$, $EK \perp CD$).

(ABK) пересекает плоскость (CMD) по прямой параллельно AB;

$AP \parallel EK$; т.к. $EK \perp (CMD)$, то $AP \perp (CMD)$.

Значит, $\angle(MA; (DMC)) = \angle AMP$.

$$MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2},\ MO \cdot EF = EK \cdot MF.$$

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2}{3a} = \frac{2\sqrt{2}a}{3}.\ \ AP = EK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a.$$

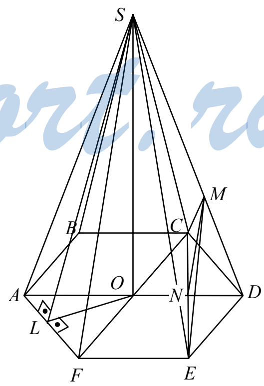
Из ΔAMP: $\sin\alpha = \frac{AP}{AM}$.

$$AM = \sqrt{MO^2 + AO^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}a.$$

Значит, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{10}} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$. $\alpha = \arcsin\frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36°36'$.

Ответ: $\arcsin\frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36°36'$.

2.



Дано: $SABCDEF$ — правильная пирамида, a — сторона основания, угол между смежными боковыми гранями — φ.

Найти: $S_{\text{б.п.}}$ — ?

Решение:

$CM \perp SD$; $EM \perp SD$; $\angle CME = \alpha$;

$\angle CDE = 120°$.

$$CE = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120°} = a\sqrt{3}.$$

$NM \perp SD$; $\Delta NMD \sim \Delta SOD$.

$$\frac{SO}{NM}=\frac{OD}{MD};\ NM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};\ SO=\frac{NM\cdot OD}{MD};\ ND=\frac{a}{2}.$$

$$MD=\sqrt{ND^2-NM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}.$$

$$SO=\frac{2a^2\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{2a\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{a\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}.\ \ LO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$SL=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=$$

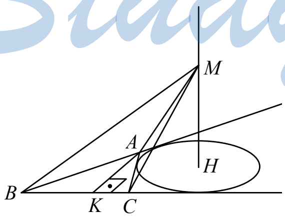
$$=a\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}+4\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Значит, $S_{\text{б.п.}}=6\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}$.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}$.

С-17.



1. Дано: $MABC$ — пирамида, ΔABC — равнобедренный, $AB = AC$, $BC = 24$, $AK = 5$, $MH = 12$, высоты боковых граней, проведенных из точки M, равны между собой, $\angle MAB \neq \angle MAC$.

Найти: $S_{\text{б.п.}}$.

Решение:

Т.к. высоты боковых граней равны, то вершина пирамиды одинаково удалена от сторон основания или от прямых, на которых лежат эти основания. В таком случае вершина проектируется либо в центр вписанной в основание окружности, либо в один из центров вневписанных окружностей.

Т.к. $\angle MAB \neq \angle MAC$, то вершина пирамиды может проектироваться только в центр вневписанных окружностей, которые касаются равных сторон основания.

$BK = KC = 12$. $AB = AC = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.

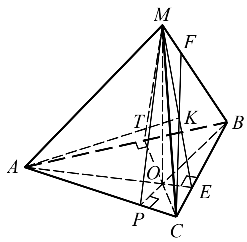
$P(ABC) = 13 + 13 + 24 = 50$. $S(ABC) = \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 24 = 60$.

Значит, $r = \dfrac{S(ABC)}{\dfrac{P(ABC)}{2} - AB} = \dfrac{60}{25 - 13} = 5$ — радиус вневписанной окружности.

Тогда высота боковых граней: $h_{\text{бок.гр.}} = \sqrt{12^2 + 25} = 13$.

Значит, $S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{бок.гр.}} = 25 \cdot 13 = 325$. Ответ: 325.

2. Дано: $MABC$ — пирамида, O — точка пересечения высот ΔABC, MO — высота пирамиды.



Доказать: если $AK \perp (MBC)$, $K \in MBC$, то K — точка пересечения высот грани MBC.

Доказательство:

Пусть $AK \perp ME$, покажем, что AK — высота.

По ТТП $ME \perp BC$. $AK \perp ME$ (по построению).

Значит, $BC \perp (AME)$. Значит, $BC \perp AK$. Значит, $AK \perp (MBC)$.

CK — проекция на плоскость (MBC) наклонной AC.

$MO \perp AC$ и $BP \perp AC$. Значит, $AC \perp (MBP)$. Значит, $AC \perp MB$.

По ТТП $CK \perp MB \Rightarrow CF \perp MB$.

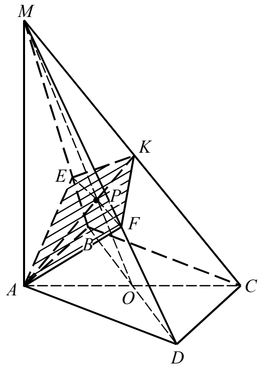
Значит, K — точка пересечения высот грани MBC. Ч.т.д.

С-18.

1. Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $AC = 32$ см, $BD = 18$ см, грани проходящие через стороны AB и AD основания, перпендикулярны к плоскости основания, их общее ребро — 24 см, K — середина MC.

Провести плоскость через точки A и K, параллельно BD.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$.



Построение:
Т.к. грани, проходящие через стороны AB и AD основания, перпендикулярны к плоскости основания, то $MA \perp (ABC)$.
$MA = 24$ см.
Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$.
Пусть $P = MO \cap AK$.
Через точку P проведем прямую EF, параллельную BD.
$EF \cap MB = E$; $EF \cap MD = F$; $(AEKF)$ — искомое сечение.
$AK \perp EF$ (по ТТП).

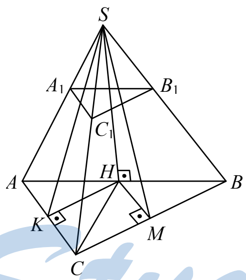
$MC = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1024 + 576} = 40$ см.

$AK = \dfrac{1}{2} MC = 20$ см.

P — точка пересечения медиан в ΔAMC и в ΔBMD.

Значит, $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{MP}{MO} = \dfrac{2}{3}$. $EF = \dfrac{2}{3} BD = \dfrac{2}{3} \cdot 18 = 12$ см.

$S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2} AK \cdot EF = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 = 120$ см^2. Ответ: 120 см^2.



2.
Дано: $SABC$ — пирамида, ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$, $AC = 10$ см, $BC = 32$ см, боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания, SH — высота, $SH = 12$ см, $\dfrac{SB_1}{B_1B} = \dfrac{1}{3}$. Через B_1 проведена плоскость $(A_1B_1C_1)$, параллельная ABC.
Найти: $S_{\text{б.п. ус.пир.}}$.

Решение: Т.к. боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания, то H — центр описанной окружности ΔABC.
H — середина AB, SK и SM — высоты граней (ACS) и (CSB).

$HK = \dfrac{1}{2} BC = 16$ см. $HM = \dfrac{1}{2} AC = 5$ см.

$SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$.

$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$ см.

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{100 + 1024} = 2\sqrt{281}$.

$S_{\text{бок.пов. полной пирамиды}} = \frac{1}{2} SH \cdot AB + \frac{1}{2} SK \cdot AC + \frac{1}{2} SM \cdot BC =$

$= \frac{1}{2}(12 \cdot 2\sqrt{281} + 10 \cdot 20 + 13 \cdot 32) = \frac{1}{2}(24\sqrt{281} + 200 + 416) =$

$= 12\sqrt{281} + 308 = 4(3\sqrt{281} + 77)$ см^2.

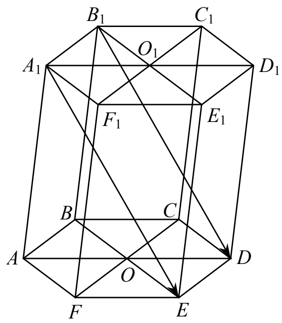
$S_{\text{бок.пов. ус.пирамиды}} = \frac{15}{16} S_{\text{бок.п.п.}} = \frac{15}{4}(3\sqrt{281} + 77)$ см^2.

(т.к. $\frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{4}$, то $\frac{S_{SC_1B_1}}{S_{SCB}} = \frac{1}{16}$).

Ответ: $\frac{15}{4}(3\sqrt{281} + 77)$ см^2.

С-19.

1.



Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма, O_1 — центр верхнего основания.

1) Найти: а) векторы, противоположно направленные $\overrightarrow{O_1F_1}$ с началом и концом в вершинах призмы;

б) векторы, имеющие длины, равные $|\overrightarrow{FC}|$, началом и концом в вершинах призмы.

2) От точки A_1 отложить векторы, равные векторам $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{OE}$.

Решение:

1)

а) Т.к. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то $A_1B_1 \parallel F_1C_1 \parallel E_1D_1$.

Значит, векторы, противоположно направленные вектору $\overrightarrow{O_1F_1}$:

$\overrightarrow{A_1B_1}$; $\overrightarrow{F_1C_1}$; $\overrightarrow{E_1D_1}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{ED}$.

б) Т.к. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $AD = FC = BE$.

Значит, имеющие равные $\overrightarrow{FC}$ длины:

$\overrightarrow{CF}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{F_1C_1}$; $\overrightarrow{C_1F_1}$; $\overrightarrow{A_1D_1}$; $\overrightarrow{D_1A_1}$; $\overrightarrow{B_1E_1}$; $\overrightarrow{E_1B_1}$.

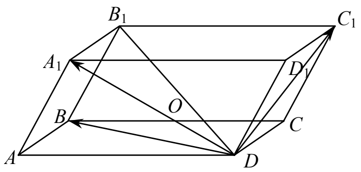
2) Т.к. $A_1B_1 = ED$ и $A_1B_1 \parallel ED$, то A_1B_1DE — параллелограмм.

Значит, $A_1E = B_1D$ и $A_1E \parallel B_1D$. Значит, $\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{B_1D}$.

$BE \parallel A_1F_1$, $BE = 2A_1F_1$. Значит, $\overrightarrow{A_1F_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE}$.

Ответ: 1) а) $\overrightarrow{F_1C_1}$; $\overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{A_1B_1}$; $\overrightarrow{E_1D_1}$; $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CF}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{C_1F_1}$; $\overrightarrow{F_1C_1}$; $\overrightarrow{A_1D_1}$; $\overrightarrow{D_1A_1}$; $\overrightarrow{B_1E_1}$; $\overrightarrow{E_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{A_1E}$ и $\overrightarrow{A_1F_1}$.

С-20.



1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Представить вектор $\overrightarrow{DB}$ как алгебраическую сумму векторов $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$.

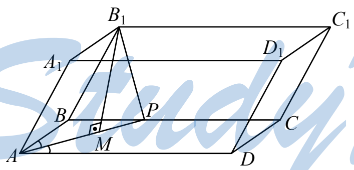
Решение: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1} =$
$= 2\,\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DC_1}$.

Ответ: $2\,\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DC_1}$.

2. Дано: $EABCDF$ — правильный октаэдр,
$\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KF} = \vec{0}$.
Найти: точку K.
Решение: Очевидно — это центр октаэдра.
Ответ: центр октаэдра.

С-21.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, $AD = a$, $AB = b$, $a > b$, $AA_1 = c$, A_1M — высота, $AM \cap BC = P$.

Выразить вектор $\overrightarrow{A_1P}$ через единичные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, отложенные от вершины и сонаправленные соответственно с векторами $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1}$.

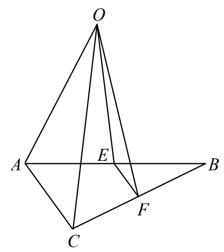
Решение:
Т.к. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то AP — биссектриса угла $\angle BAD$.
Т.к. $AD \parallel BC$, то $\angle BPA = \angle PAD = \angle BAP$.

Значит, ΔBAP — равнобедренный.
Значит, $AB = BP = b$.

$$\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{b}{a}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} =$$

$= b\vec{e_1} + b\vec{e_2} - c\vec{e_3}$. Ответ: $b\vec{e_1} + b\vec{e_2} - c\vec{e_3}$.

2.



Дано: ΔABC, $E \in AB$, $F \in BC$,
$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{3}{2}$, $O \notin (ABC)$, $\overrightarrow{OE} = \vec{m}$,
$\overrightarrow{OA} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$.

Выразить вектор $\overrightarrow{OF}$ через векторы $\vec{m}$, $\vec{p}$, $\vec{k}$.

Решение:

Т.к. $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB}$, то $\frac{BE}{AB} = \frac{BF}{CB} = \frac{2}{5}$ и $\angle B$ — общий.

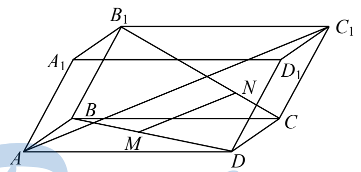
Значит, $\Delta ABC \sim \Delta EBF$. Значит, $\frac{EF}{AC} = \frac{2}{5}$.

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}.$$

Ответ: $\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}$.

С-22.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $M \in BD$, $N \in B_1C$, $MN \parallel AC_1$.

Найти: $\frac{BM}{MD}$ — ? $\frac{B_1N}{NC}$ — ?

Решение: Пусть $\frac{BM}{MD} = \frac{a}{b}$, $\frac{B_1N}{NC} = \frac{c}{d}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \frac{d}{c+d}\overrightarrow{CB_1} =$$

$$= \frac{b}{a+b}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} + \frac{d}{c+d}(\overrightarrow{A_1A_1} - \overrightarrow{AD}) =$$

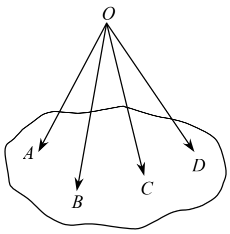
$$= \left(\frac{b}{a+b} - \frac{d}{c+d}\right)\overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{d}{c+d}\overrightarrow{A_1A_1}$$

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$

Т.к. $MN \parallel AC$, то $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA_1}$

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a+b} - \dfrac{d}{c+d} = k \\ 1 - \dfrac{b}{a+b} = k \\ \dfrac{d}{c+d} = k \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} = 2k \\ k = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{d}{c+d} = k \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{d}{c+d} = \dfrac{1}{3} \\ k = \dfrac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{c}{d} + 1 = 3 \\ k = \dfrac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c}{d} = \dfrac{2}{1} \\ k = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{B_1N}{NC} = \dfrac{2}{1}$.



2.

Дано: точки A, B, C и D, $A \notin BC$, O — произвольная точка пространства.

Доказать: если точки лежат в одной плоскости, то $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, $x + y + z = 1$.

Доказательство:

$\overrightarrow{CD} = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

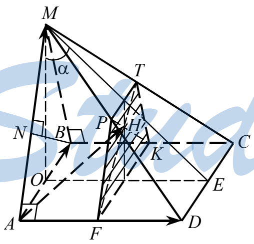
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} - x \cdot \overrightarrow{OC} + y \cdot \overrightarrow{OB} - y \cdot \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - x - y)\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$,

где $x + y + z = 1$. Ч.т.д.

С-23.



Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — квадрат, $AB = BC = CD = AD = a$, ΔMAB — правильный, $(MAB) \perp (ABC)$.

Найти: 1) $S_{б.п.}$;

2) площадь сечения, проведенного через середину ребра MD перпендикулярно плоскости основания и параллельно AB;

3) $\angle((AMB), (DMC))$;

4) угол между MD и плоскостью сечения;

5) H — точка пересечения диагоналей сечения. Разложить вектор $\overrightarrow{AH}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$;

6) $\rho(BC, MD)$.

Решение:

1) Т.к.ΔMAB — правильный, то ΔMAD и ΔMBC — равные равнобедренные прямоугольные треугольники.

Пусть MO — высота, $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$OE \perp CD$. По ТТП $ME \perp CD$.

$ME = \sqrt{MO^2 + OE^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Тогда $S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2} MO \cdot AB + 2 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot AD + \frac{1}{2} ME \cdot CD =$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4)$.

2) P — середина MD.

Т.к. плоскость сечения перпендикулярна плоскости основания и параллельна AB, то она параллельна плоскости (MAB).

Через точку P в плоскости (MAD) проведем прямую PF, параллельную AM.

$PF \cap AD = F$.

Через точку F проведем прямую FK, параллельную AB.

$FK \cap BC = K$.

Через точку P проведем прямую PT, параллельную FK.

$PT \cap MC = T$.

$(PFKT)$ — искомое сечение.

$PFKT$ — равнобедренная трапеция, т.к. $PT \parallel FK$ и $PF = TK$ ($\Delta MAD = \Delta MBC$).

PT — средняя линия ΔDMC: $PT = \frac{a}{2}$, $FK = a$.

Высота сечения: $\frac{1}{2} MO = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

3) Ребром двугранного угла, образованного плоскостями (AMB) и (DMC), будет прямая, проходящая через точку M и параллельная AB. Значит, $\angle((AMB), (DMC)) = \angle OME$.

$\operatorname{tg}\angle OME = \frac{OE}{OM} = \frac{a \cdot 2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\angle((AMB,(DMC)) = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4) Т.к. $AD \perp (AMB)$, то $\angle(AD, (AMB)) = \angle AMD$, т.к. $(PFK) \parallel (AMB)$ $\Rightarrow \angle((PFK), MD) = \angle AMD = 45°$.

5) $\Delta PHT \sim \Delta FHK$ (по двум углам).

$\frac{HT}{HF}=\frac{PT}{FK}=\frac{1}{2}$. $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AT}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

6) $\rho(BC, MD) = \rho(BC, (AMD)) = BN$, где BN — высота ΔAMB.

$BN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 1) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{7}+4)$; 2) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 4) 45°;

5) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$; 6) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ДС-1

В-1.

1. Три точки проектируются в плоскость. Сколько при этом может получиться точек на плоскости проекции?

Решение:

Одна, две или три точки, в зависимости от того, принадлежат ли вторая или третья точки прямой, проходящей через первую точку перпендикулярно плоскости.

Ответ: одна, две или три.

2. Изобразите ромб с перпендикулярами, опущенными из середины одной из сторон на его диагонали.

Решение:

Изображением служит произвольный параллелограмм. Из середины одной из его сторон провести отрезки до каждой из диагоналей, параллельно другой диагонали, т.к. диагонали ромба перпендикулярны.

3. Изобразите правильный шестиугольник с перпендикуляром, опущенным из его центра на одну из его сторон.

Решение:

Изображением служит произвольный шестиугольник с попарно параллельными сторонами и отрезком, соединяющим его центр с серединой одной из сторон.

В-2.

1. Что из себя представляют проекции двух параллельных прямых на плоскость?

Решение:

Если они перпендикулярны плоскости, то проекцией будут две точки, иначе — две прямые, возможно совпадающие.

Ответ: две параллельные прямые, одна прямая или две точки.

2. Изобразите равнобедренный треугольник с перпендикуляром, опущенным из середины боковой стороны на основание.

Решение:

Изображением служит произвольный треугольник с отрезком, соединяющим середину одной из сторон с точкой, делящей основание в отношении 3 : 1, считая от другой боковой стороны.

3. Изобразите правильный шестиугольник с перпендикуляром, опущенным из его центра на меньшую диагональ.

Решение:

Изображением служит произвольный шестиугольник с попарно параллельными сторонами, меньшей его диагональю и отрезком, соединяющим его центр с серединой этой диагонали.

В-3.

1. перечислите свойства прямоугольника, которые сохраняются при параллельном проектировании.

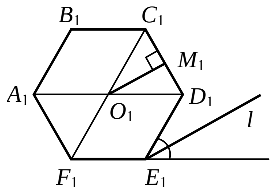
Решение:

Параллельные прямые остаются параллельными, а равные отрезки остаются равными на этих прямых.

Сохраняются все свойства прямоугольника как параллелограмма.

2. Изобразите правильный шестиугольник с биссектрисой одного из его внешних углов.

Решение:



Биссектриса l параллельна O_1M_1.

3. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) относятся как 2 : 3. Изобразите треугольник вместе с высотой, опущенной из вершины прямого угла.

Решение:

Изображением служит произвольный треугольник $A_1B_1C_1$. Так как катеты треугольника относятся как 2 : 3, то их проекции на гипотенузу относятся как 4 : 9. Поэтому на изображении гипотенузы нужно построить такую точку K_1, что $A_1K_1 : K_1B_1 = 4 : 9$. Тогда C_1K_1 — изображение высоты треугольника.

В-4.

1. Перечислите свойства ромба, которые сохраняются при параллельном проектировании.

Решение:

Параллельные прямые остаются параллельными, а равные отрезки на них остаются равными.

Ответ: сохраняются все свойства ромба как параллелограмма.

2. Изобразите ромб с углом 60° и перпендикуляром, опущенным из точки пересечения диагоналей на сторону.

Решение:

Пусть $ABCD$ ромб с углом BAD, равным 60°. Тогда треугольник ABD правильный и высота BE, опущенная на сторону AD, делит ее пополам. Перпендикуляр OF, опущенный из точки пересечения диагоналей O на AD, параллелен BE. Изображением ромба служит произвольный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Построим медиану B_1E_1 треугольника $A_1B_1D_1$ и проводим $O_1F_1 \parallel B_1E_1$; O_1F_1 — искомый перпендикуляр.

3. Изобразите равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 4$ и $AC = 5$, с центром вписанной в треугольник окружности.

Решение:

Центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения его биссектрис. Пусть произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ есть изображение данного треугольника. Медиана B_1E_1 есть изображение одной из биссектрис этого треугольника. Чтобы построить изображение другой биссектрисы, необходимо на стороне B_1C_1 построить такую точку K_1, что $B_1K_1 : K_1C_1 = 4 : 5$. Тогда A_1K_1 — изображение второй биссектрисы. Точка их пересечения и есть изображение центра вписанной в треугольник окружности.

В-5.

1. Что из себя представляют проекции двух скрещивающихся прямых на плоскости?

Решение:

Если одна из них перпендикулярна плоскости, то проекцией будут прямая и точка, иначе — две пересекающиеся или параллельные прямые.

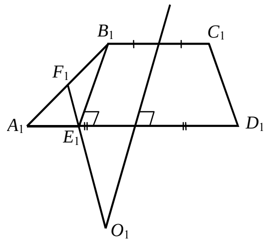
Две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, прямая и точка.

2. Изобразите квадрат $ABCD$ с перпендикуляром, опущенным из вершины C на отрезок BE, где E — середина AD.

Решение:

Пусть параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ есть изображение данного квадрата и E_1 — середина A_1D_1. Пусть F_1 — середина A_1B_1, и $C_1F_1 \cap B_1E_1 = H_1$. C_1H_1 и есть изображение перпендикуляра, опущенного из точки C на BE.

3. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания) с углом при основании 45° и с центром описанной около нее окружности.



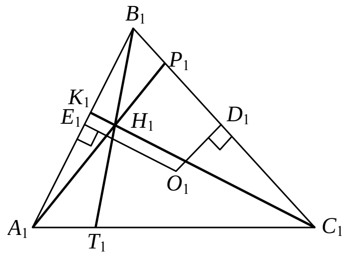
Решение:
Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров. Один из этих перпендикуляров есть ось симметрии данной трапеции, а другой проходит через основание высоты BE этой трапеции. Построение показано на рисунке.

В-6.

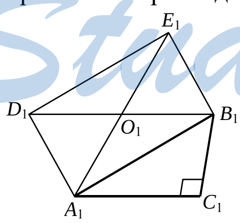
1. Проекции двух прямых на плоскости параллельны. Каково взаимной положение самих прямых?

Решение:
Из условия следует, что наши прямые лежат в параллельных плоскостях. Значит они либо параллельны, либо скрещиваются.
Ответ: прямые параллельные или скрещивающиеся.

2. Дано изображение некоторого треугольника и центра его описанной окружности, расположенного внутри треугольника. Постройте изображение высот этого треугольника.



Решение:
Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ есть изображение треугольника ABC и O_1 — изображение центра описанной окружности. На рисунке D_1 и E_1 — середины сторон B_1C_1 и A_1B_1, Тогда O_1D_1 и O_1E_1 — изображение серединных перпендикуляров. В таком случае изображения высот A_1P_1 и C_1K_1 параллельны O_1D_1 и O_1E_1. Изображение третьей высоты B_1T_1 проходит через точку H_1 пересечения изображений первых двух высот.



3. Изобразите равнобедренный треугольник с квадратом, построенным на его гипотенузе (квадрат расположен вне треугольника).

Решение:
Пусть $A_1B_1C_1$ — изображение данного треугольника, проводим $A_1E_1 \parallel C_1B_1$, $A_1E_1 = 2C_1B_1$, $D_1B_1 \parallel A_1C_1$, $D_1B_1 = 2A_1C_1$, тогда $A_1D_1E_1B_1$ — изображение искомого квадрата.

ДС-2

В-1.

1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 90°, 20°, 120°; б) 40°, 30°, 70°?

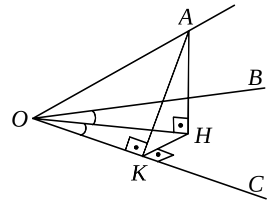
Решение:

а) нет; б) нет, т.к. (один из) наибольший угол должен быть меньше суммы двух других.

Ответ: а) нет; б) нет.

2. В трехгранном угле *OABC* все плоские углы равны 60°. Какой угол с плоскостью *BOC* составляет ребро *OA*?

Решение:



Пусть *A* проецируется в т. *H* и $HK \perp BC$ $\Rightarrow AK \perp BC$. Пусть $HK = x \Rightarrow OH = 2x$, $OK = \sqrt{3}\,x$.

Т.к. $\angle AOK = 60°$, то $OA = 2\sqrt{3}\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOH = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 60° и 90°. Найдите двугранный угол, лежащий против плоского угла в 60°.

Решение:

По теореме косинусов для трехгранного угла:

$\cos 60° = \cos 45° \cos 90° + \sin 45° \sin 90° \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 45°$.

Ответ: 45°.

В-2.

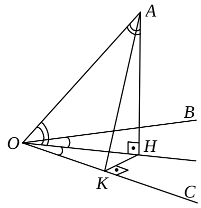
1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 100°, 150°, 110°; б) 60°, 90°, 120°?

Решение:

а) нет, т.к. их сумма 360°; б) да.

2. В трехгранном угле *OABC* $\angle AOC = \angle AOB$, $\angle BOC = 90°$. Ребро *OA* составляет с плоскостью противолежащего плоского угла угол 45°. Найдите равные плоские углы.

Решение:
Пусть A проецируется в т. H, тогда OH — биссектриса, AH=OH =
$= x \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{2}}{2}x = OK \Rightarrow \angle AOK = \arccos\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{2}x} = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$



Ответ: 60°.
3. В трехгранном угле плоские углы равны 120°, 120° и 90°. Найдите двугранный угол, лежащий против меньшего плоского угла.
Решение:
По теореме косинусов для трехгранного угла: $\cos 90° = \cos^2 120° + \sin^2 120° \cos x \Rightarrow 0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos x \Rightarrow x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

В-3.

1. В трехгранном угле два плоских угла равны 110° и 100°. В каких границах может находиться третий плоский угол?
Решение:
Пусть x — величина третьего плоского угла. Исходя из свойств плоских углов трехгранного угла, имеем:
$x > 10°$, $x < 210°$, $x + 100° + 110° < 360°$.
Отсюда $10° < x < 150°$.
Ответ: $10° < x < 150°$.
2. В пирамиде $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB = 30°$. Двугранный угол при ребре AD равен 90°, $DC \perp AC$ и $DB \perp AB$, $DC = DB = 20$. Найдите площадь грани BDC.
Решение:
Рассмотрим трехгранный угол $DABC$, у которого два плоских угла ADC и ADB равны 60°. Двугранный угол с ребром AD равен 90°. Тогда по теореме косинусов
$\cos\angle BDC = \cos^2 60° + \sin^2 60° \cdot \cos 90° = \frac{1}{4}$.

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot 400\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = 200\frac{\sqrt{15}}{4} = 50\sqrt{15}\ .$$

Ответ: $50\sqrt{15}$.

3. Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. Если сечение этого угла плоскостью, перпендикулярной к грани с наибольшим плоским углом, имеет форму равнобедренного треугольника (основание треугольника лежит в плоскости прямого угла), то секущая плоскость отсекает на ребрах трехгранного угла равные отрезки. Докажите.

Доказательство:

Рассмотрим трехгранный угол $OABC$, у которого

$\angle AOB = \angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 90°$.

Плоскость BAC перпендикулярна плоскости BOC и $AB = AC$. Тогда перпендикуляр AM, опущенный из точки A на плоскость BOC, попадет в точку M — середину BC, т.е. в центр описанной около прямоугольного треугольника BOC окружности. Отсюда следует, что $MB = MC = MO$.

Так как $\angle AOC = \angle AOB = 60°$, $\angle(OMB,\ AMB) = 90°$ $\angle BOM = \angle COM = 45° \Rightarrow$ по теореме косинусов $\angle AOM = 45° \Rightarrow AO = OB = OC$, что и требовалось доказать.

В-4.

1. В каких границах могут изменяться плоские углы при стороне основания правильной пятиугольной пирамиды?

Решение:

Плоские углы при вершине изменяются в пределах $0 < \alpha < \frac{360°}{5} = 72°$, $\Rightarrow$ при стороне основания в пределах $\frac{180° - \alpha}{2} < x < 90°$, т.е. $54° < x < 90°$.

2. В пирамиде $DABC$ $\angle DAC = \angle DAB = 60°$. Двугранный угол при ребре AD равен 120°, $DC \perp AC$, $DB \perp AB$, $BC = \sqrt{39}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BDC.

Решение:

По теореме косинусов: $\cos\angle BDC = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle BDC = \frac{\sqrt{39}}{8}$ и $R = \frac{BC}{2\sin\angle BDC} = \frac{\sqrt{39} \cdot 8}{2 \cdot \sqrt{39}} = 4$. Ответ: 4.

3. Плоские углы трехгранного угла 60°, 60° и 90°. Докажите, что плоскость, отсекающая от ребер три равных отрезка, перпендикулярна плоскости прямого угла.

Доказательство:

Т.к. $AO = BO = OC$ и $\angle AOB = \angle AOC = 60°$, то $AO = AB = AC \Rightarrow A$ проецируется в центр описанной окружности около прямоугольного треугольника OBC, т.е. на середину $BC \Rightarrow ABC \perp BOC$.

В-5.

1. Докажите, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные углы.

Доказательство:

Это очевидным образом следует из симметричности теоремы косинусов относительно входящих в нее плоских углов.

2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle A_1AC = 45°$, $\angle A_1AB = 60°$, $\angle BAC = 90°$, $AC = \sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AA_1 = 5$.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение:

Построим перпендикулярное сечение призмы $A_2B_2C_2$;

$A_2C_2 = AC \cdot \sin 45° = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $A_2B_2 = AB \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Угол $B_2A_2C_2$ находим, используя теорему косинусов для трехгранного угла. Имеем:

$\cos 90° = \cos 45° \cdot \cos 60° + \sin 45° \cdot \cos 60° \cdot \cos\angle B_2A_2C_2$;

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\cos\angle B_2A_2C_2 = 0;\ \cos\angle B_2A_2C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сторону B_2C_2 находим по теореме косинусов.

$$B_2C_2 = \sqrt{9 + 3 - 2 \cdot 3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{2},$$

$$P_{A_2B_2C_2} = 3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6}).$$

$$S_{бок.} = 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6}).$$

Ответ: $5\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{3} + 1)$.

3. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной a. Грань MAB — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Найдите двугранный угол при ребре MD.

Решение:
Необходимо рассмотреть трехгранный угол *DAMC*, у которого $\angle MDA = 45°$, $\angle ADC = 90°$ и $\cos\angle MDC = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Пусть искомый двугранный угол — α.

Тогда $\cos 90° = \cos 45° \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sin 45° \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos\alpha$.

Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ и $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 112°12'$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 112°12'$.

В-6.

1. Докажите, что в трехгранном угле против равных двугранных углов лежат равные плоские углы.
Доказательство:
Следует из теоремы косинусов для трехгранного угла.
2.В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°, а высота боковой грани m. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
Решение:
Рассмотрим правильную пирамиду *MABCD*. В трехгранном угле *CMBD* один плоский угол *BCD* прямой, а два других — *MCD* и *MCB* обозначим за α. Двугранный угол при ребре *MC* равен 120°.
Тогда по теореме косинусов имеем:
$\cos 90° = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos 120°$.
Отсюда $\operatorname{tg}^2\alpha = 2$. Пусть *MK* — высота боковой грани *DMC*. Тогда $KC = m \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

В таком случае сторона основания равна $m\sqrt{2}$.

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot MK = 2m\sqrt{2} \cdot m = 2m^2\sqrt{2}$.

Ответ: $2m^2\sqrt{2}$.

3. Основанием пирамиды *MABCD* служит квадрат со стороной a. Ребро *MB* равно a и перпендикулярно плоскости основания.
Найдите величину двугранного угла с ребром *MD*.

Решение:
Необходимо рассмотреть трехгранный угол $DAMC$, у которого $\cos\angle MDA = \cos\angle MDC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle ADC = 90°$. Пусть α — величина искомого двугранного угла.

Тогда $\cos 90° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\alpha$.

Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = 120°$.

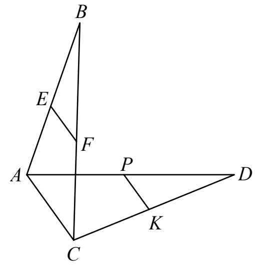
Ответ: 120°.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

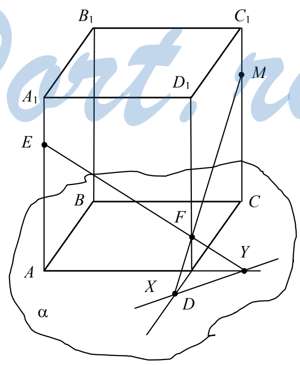
К-1

В-1.

1. Дано: A, C, M, $P \in \alpha$; $B \notin \alpha$.
Построить: $MP \cap ABC$.
Построение:
Проведите прямую AC, а также MP. Точка их пересечения — искомая, т.к. $AC \in ABC$.

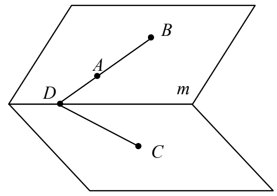


2. Дано: ΔABC и ΔADC — лежат в разных плоскостях, $E \in AB$, $F \in BC$, $EF \parallel ADC$, P и K — середины AD и DC соответственно, $\angle ABC = 40°$, $\angle BCA = 80°$.
Доказать: $EF \parallel PK$.
Найти: $\angle(PK, AB)$, найти их расположение.
Решение:
1) EF и AC лежат в одной плоскости и $EF \parallel ACD \Rightarrow EF \parallel AC$. PK — средняя линия $\Delta ADC \Rightarrow PK \parallel AC \Rightarrow EF \parallel PK$.
2) PK и AB скрещиваются, т.к. $PK \in ADC$, $AB \cap ADC = A \notin PK$ т.к. $AC \parallel PK$, то $\angle(PK, AB) = \angle(AC, AB) = \angle BAC$
$\angle BAC = 180° - 40° - 80° = 60°$.
Ответ: 60°.
3. Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $a \subset \alpha$.
Найти: взаимное расположение a и β.
Решение: Либо пересекаются, либо параллельны, т.к. a с m либо пересекаются, либо параллельны ей.
Ответ: либо пересекаются, либо параллельны.
4.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб,
$E \in AA_1$, $F \in DD_1$, $M \in CC_1$.
Построить: $EFM \cap \alpha$.
Построение:
FM и CD лежат в одной плоскости.
FE и AD лежат в одной плоскости.
$FM \cap CD$ = X, т.к. $CD \in \alpha$, то X $\in \alpha$.
$FE \cap AD$ = У, т.к. $AD \in \alpha$, то У $\in \alpha$.
ХУ искомая прямая.

В-2.



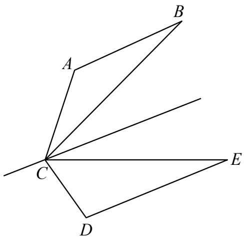
1.

Дано: A, $B \in \alpha$, $C \in \beta$.

Построить: $ABC \cap \alpha$, $ABC \cap \beta$.

Построение:

Пусть $AB \cap m = D$, тогда $BD = ABC \cap \alpha$ и $CD = ABC \cap \beta$.



2.

Дано: ΔABC и ΔDCE лежат в разных плоскостях, $AB \parallel DE$, $F \in CE$, $\angle FED = 60°$, $\angle DFE = 100°$.

Построить: $ABC \cap DCE$.

Найти: взаимное расположение AB и DF; $\angle(AB, DF)$.

Решение:

1) Прямая, проходящая через C параллельно AB и DE.

2) Т.к. $AB \parallel DE$ и $DF \cap DE$, то AB и DF скрещиваются, т.к. $AB \parallel DE$, то $\subset(AB, DF) = \angle FDE$.

$\angle FDE = 180° - 100° - 60° = 20°$

Ответ: 20°.

3.

Дано: $a \parallel \alpha$, $M \in \alpha$, $c \subset \alpha$, $M \notin c$, $M \in b$, $b \parallel a$.

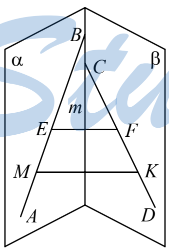
Найти: взаимное расположение b и c.

Решение:

Очевидно, либо пересекаются, либо параллельны, т.к. прямая c может быть как параллельна, так и не параллельна a.

Ответ: либо пересекаются, либо параллельны.

4.



Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $AB \in \alpha$, $CD \in \beta$.

Найти: что нужно изменить в условии, чтобы EF и MK могли быть параллельными.

Решение:

Очевидно, совместить точки B и C в одну, тогда прямые EF и MK будут лежать в одной плоскости и $\Rightarrow$ могут быть параллельны, или если $AB \parallel CD$, то EF и MK могут быть параллельны, т.к. будут лежать в одной плоскости.

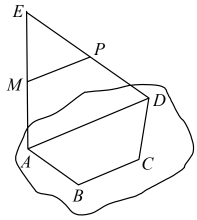
В-3.

1. Дано: A, C, E, $F \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Построить: $EF \cap ABC = ?$

Построение: Проведите AC и EF, пусть они пересекаются в т. $D \Rightarrow$ она искомая.

2.



Дано: трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), ΔAED не лежит с ней в одной плоскости, $M \in AE$, $P \in DE$, $MP \parallel ABC$, $\angle ABC = 110°$.

1) Доказать: $MP \parallel BC$.

2) Найти: взаимное расположение MP и AB, $\angle(MP, AB)$.

Решение: Т.к. $MP \parallel ABC$, MP и AD лежат в одной плоскости, то $MP \parallel AD \Rightarrow MP \parallel BC$. $MP \parallel AD$ и $AD \cap AB \Rightarrow MP$ и AB — скрещиваются и $\angle(MP, AB) = \angle(AD, AB) = 180° - \angle ABC = 70°$.

Ответ: скрещиваются; 70°.

3. Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

Найти: взаимное расположение a и b.

Решение: Могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающимися.

4. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $M \in AA_1$, $P \in D_1D$, $K \in C_1C$.

Построить: $MPK \cap A_1B_1C_1$.

Построение: PK и D_1C_1 лежат в одной плоскости.

PM и A_1D_1 лежат в одной плоскости.

$PM \cap D_1A_1 = X$, т.к. $A_1D_1 \subset A_1B_1C_1 \Rightarrow X \in A_1B_1C_1$.

$PK \cap D_1C_1 = Y$, т.к. $D_1C_1 \subset A_1B_1C_1 \Rightarrow Y \in A_1B_1C_1$.

XY — искомая прямая.

В-4.

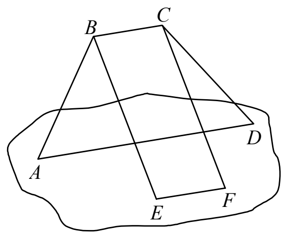
1. Дано: E, F, $\in \beta$, $M \in \alpha$, $\alpha \cap \beta = m$.

Построить: $EMF \cap \alpha$. $EMF \cap \beta$.

Построение:

Пусть $EF \cap m = D \Rightarrow MD = \alpha \cap EMF$, а $DF = \beta \cap EMF$.

2.

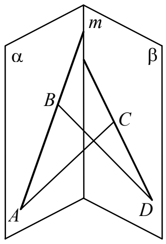


Дано: $ABCD$ — трапеция, ($AD \parallel BC$), $AD \in \alpha$, $BE \parallel CF$, E, $F \in \alpha$, $\angle ABC = 150°$.

1) Доказать: $BCFE$ — параллелограмм.

2) Найти: взаимное расположение EF и AB, $\angle(EF, AB)$.

Решение:
Предположим, EF не параллельна AD, тогда т.к. $BC \parallel AD$, то BE и CF — скрещиваются, а по условию они параллельны $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow EF \parallel AD \Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow BCFE$ — параллелограмм $\Rightarrow EF$ и AB — скрещиваются, а $\angle(EF, DB) = \angle(BC, AB)$; т.к. $\angle ABC = 150°$, то $\angle(BC, AB) = 180°–150° = 30°$, т.к. угол между прямыми лежит в промежутке между 0 и 90°, включая концы.
Ответ: 30°.
3. Дано: $AB \notin \alpha$, $CD \in \alpha$.
Найти: можно ли утверждать, что $ABCD$ — параллелограмм?
Решение: Нет, т.к. параллелограмм — плоская фигура, а отрезки AB и CD могут скрещиваться.
Ответ: нет.

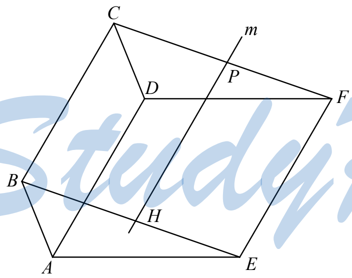


4. Дано: $AB \in \alpha$, $CD \in \beta$, $\alpha \cap \beta = m$.
Найти: что нужно изменить в условии, чтобы AC и BD могли пересекаться.
Решение:.
AC и BD — скрещиваются. Они могут пересекаться, если AB и CD пересекаются или $AB \parallel CD$, тогда AC и BD будут лежать в одной плоскости и также могут пересекаться.
Ответ: либо $AB \parallel CD$, либо $AB \cap CD \neq \varnothing$.

К-2

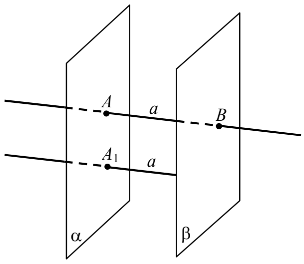
В-1.

1.



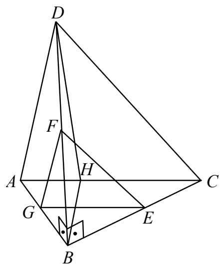
Дано: $ABCD$ и $ADFE$ — параллелограммы, лежащие в разных плоскостях, $m \parallel BC$,
$m \cap ABE = H$, $m \cap CDF = P$.
Доказать: $HPFE$ — параллелограмм.
Доказательство:
$m \parallel BC \Rightarrow HP \parallel BC \Rightarrow HP \parallel AD \Rightarrow$
$\Rightarrow HP \parallel FE$. Т.к. $AB \parallel CD$ и $AE \parallel DF$ и $AB \cap AE$ и $CD \cap DF$, то $ABE \parallel CDF$.
Т.к. $HP \parallel EF$ и они заключены между параллельными плоскостями, то $HP = EF \Rightarrow HPFE$ — параллелограмм.

2.



Дано: $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$,
$a_1 \cap \alpha = A_1$.
Построить: $a_1 \cap \beta$.
Построение:
Проведите AA_1. Проведите $BB_1 \parallel AA_1$, $BB_1 \cap a_1 = B_1 \Rightarrow B_1$ — искомая.

3.



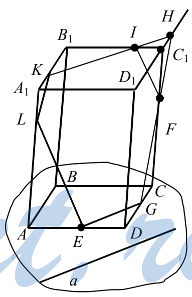
Дано: $DABC$— тетраэдр, $\angle DBA = \angle DBC = 90°$, $DB = 6$, $AB = BC = 8$, $AC = 12$.
Построить: сечение плоскостью, проходящей через середину DB параллельно ADC.
Найти: $S_{сеч.}$
Решение:
Пусть $FD=FB$. Проводим $FE \| DC$, $EG \parallel AC \Rightarrow$ $\Rightarrow$ FEG — искомое сечение. $DB \perp ACB \Rightarrow$ $\Rightarrow DB \perp BH$ $(DH \perp AC) \Rightarrow$ по теореме Пифагора

$$DH = \sqrt{6^2 + (8^2 - 6^2)} = 8 \Rightarrow S(ADC) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(FEG) = \frac{1}{4} S(ADC) = 12.$$

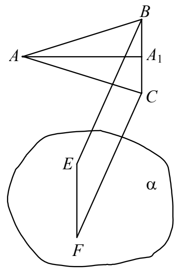
Ответ: 12.

4.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, a — прямая в плоскости ABC, $E \in AD$, $F \in C_1C$.
Построить: сечение плоскостью, проходящей через точки E и F, параллельно прямой a.
Построение:
Т.к. не задано сколько-нибудь конкретного положения точки E и F, а также направления прямой a, возможно несколько видов сечений: от четырехугольников до шестиугольников. Здесь будет разобран самый общий случай шестиугольного сечения.
Проводим $EG \parallel a$, $G \in DC$; GF до пересечения с D_1C_1 в т. H;
$HI \parallel a$ $(HI \cap B_1C_1 = I$, $HI \cap A_1B_1 = K)$; $KL \parallel FG$; $LE \Rightarrow EGFIKL$ — искомое сечение.

В-2.



1.

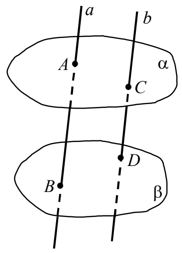
Дано: $\Delta ABC \notin \alpha$, $AA_1 \parallel \alpha$, $BB_1 \parallel \alpha$, AA_1, BB_1 — медианы, $BE \parallel CF$, E, $F \in \alpha$.

Доказать: $ECBF$ — параллелограмм.

Доказательство:

Т.к. $AA_1 \parallel \alpha$, $BB_1 \parallel \alpha$ и $A_1A \cap B_1B$, то $ABC \parallel \alpha \Rightarrow \Rightarrow BE$ и CF — отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями $\Rightarrow BE = CF \Rightarrow BCFE$ — параллелограмм.

2.



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$, $b \cap \alpha = C$, $b \cap \beta = D$.

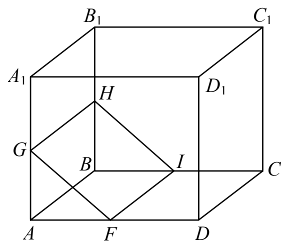
Найти: взаимное расположение прямых a и b.

Решение:

Т.к. AC и BD — скрещиваются, то скрещиваются и AB с CD.

Ответ: скрещиваются.

3.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб со стороной a, F — середина AD. Через F параллельно DA_1B_1 проведено сечение.

Найти: его периметр.

Решение:

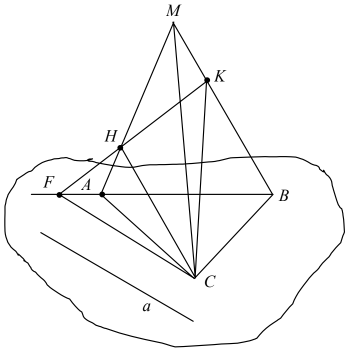
Проводим $FG \parallel A_1D$, $GH \parallel DC$, $HI \parallel FG$, $FI \Rightarrow FGHI$ — искомое сечение.

$$FI = GH = a,\ FG = HI = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = a + a + \sqrt{2}a = 2a + \sqrt{2}a.$$

Ответ: $\sqrt{2}a + 2a$.

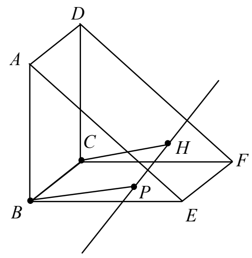
4.



Дано: $MABC$ — тетраэдр,
$K \in MB$, $a \subset ABC$.
Провести: сечение через т. C и K параллельно a.
Построение:
Соединяем CK. Проводим CF параллельно a до пересечения с AB в т. F. $FK \cap AM = H \Rightarrow HKC$ — искомое сечение. Это для случая, если F лежит левее т. A, для случая, когда лежит между A и B или правее т. B, решение аналогичное.

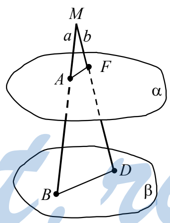
В-3.

1.



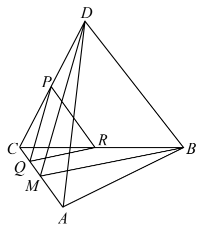
Дано: $ABCD$, $EBCF$ — прямоугольники, лежащие в разных плоскостях, $a \parallel AD$,
$a \cap ABE = P$, $a \cap DCF = H$.
Доказать: $PHCB$ — параллелограмм.
Доказательство:
$AB \parallel DC$, $BE \parallel CF$, $AB \cap BE$, $DC \cap CF \Rightarrow ABE \parallel DCF \Rightarrow PH$ и BC — отрезки двух параллельных прямых (т.к. $PH \parallel AD$ и $AD \parallel BC$, то $PH \parallel BC$), заключенных между параллельными плоскостями $\Rightarrow PH = BC \Rightarrow PHCB$ — параллелограмм.

2.



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \cap b = M$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$,
$b \cap \beta = D$.
Построить: $b \cap \alpha$ — ?
Построение:
Строим $AF \parallel BD$, $AF \cap b = F \Rightarrow F$ — искомая.

3.



Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AM = CM$,
$\angle DBM = 90°$, $DB = 6$, $DM = 10$.
Построить: сечение, проходящее через середину DC, параллельно DMB.
Найти: площадь сечения.

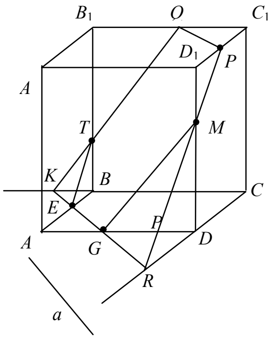
Решение:

$CP = PD$. Проводим $PQ \parallel DM$, $QR \parallel MB$, $RP \Rightarrow PQR$ — искомое сечение.

$S(BMD) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{100 - 36} = 24 \Rightarrow S_{сеч.} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$,

т.к. $\Delta PQR \sim \Delta DMB$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Ответ: 6.



4. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $E \in AB$, $P \in D_1C_1$, a — прямая.

Построить: сечение, проходящее через т. P и E, параллельно прямой a.

Решение:

Проводим: $EG \parallel a$, $G \in AD$.

Проводим: $PQ \parallel a$, $Q \in B_1C_1$.

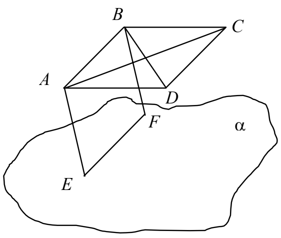
Продляем EG, $EG \cap CD = R$.

$EG \cap BC = K$, $QK \cap BD_1 = T$

$PR \cap DD_1 = M$

$PMGETQ$ — искомое сечение.

В-4.

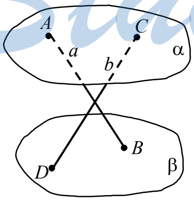


1. Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AC \parallel \alpha$, $BD \parallel \alpha$, $AE \parallel BF$, $E \in \alpha$, $F \in \alpha$.

Доказать: $ABFE$ — параллелограмм.

Доказательство:

Т.к. $AC \parallel \alpha$, $BD \parallel \alpha$ и $AC \cap BD$, то $ABC \parallel \alpha \Rightarrow AE$ и BF — отрезки двух параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями $\Rightarrow AE = BF \Rightarrow ABFE$ — параллелограмм. Ч.т.д.



2.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$, $b \cap \alpha = C$, $b \cap \beta = D$.

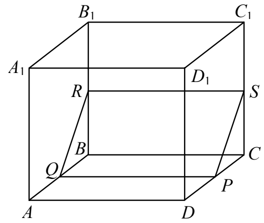
Найти: взаимное расположение a и b.

Решение:

Т.к. AC не параллельна BD, то AB и CD лежат в разных плоскостях $\Rightarrow$ они скрещиваются.

Ответ: скрещиваются.

3.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед с прямоугольными гранями, $AD = 4$, $DC = 8$, $C_1C = 6$, $DP = PC$.

Построить: сечение, проходящее через т. P, параллельное AB_1C_1.

Найти: его периметр.

Решение:

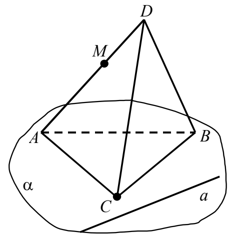
Проводим $PQ \parallel AD$, $QR \parallel AB_1$, $RS \parallel AD$, и SP.

Очевидно, $PQRS$ — искомое сечение.

$$P = 2 \cdot 4 + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 8 + 2 \cdot \sqrt{25} = 18.$$

Ответ: 18.

4.



Дано: $DABC$ — тетраэдр. $M \in AD$,

$a \subset (ABC) = \alpha$.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и M параллельно прямой a.

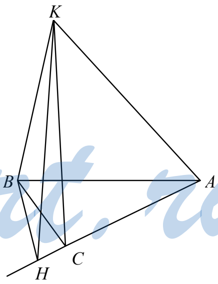
Построение $CF \parallel a$, $F \in AB$.

$FM \cap DB = G_1 \Rightarrow GMC$ — искомое сечение.

К-3

В-1.

1.



Дано: $KABC$ — тетраэдр, $KB \perp ABC$,

$KB = 5\sqrt{6}$, $AC = BC = 10$, $\angle BAC = 30°$.

Найти: Р(K, AC).

Решение:

$\angle C = 120° \Rightarrow AB^2 = 2AC^2(1 - \cos 120°) =$

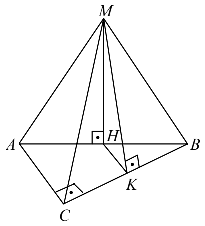
$= 200\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 300 \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$.

$KH \perp AC \Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow BH =$

$= AB \cdot \sin 30° = 5\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow KH = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25(6+3)} = 15$.

Ответ: 15.

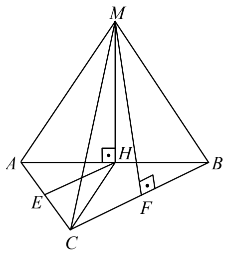


2.
Дано: $MABC$ — тетраэдр, $AC = CB = 4$,
$\angle C = 90°$, $MA = MB = MC$, р$(M, ABC) = 2\sqrt{3}$.
Доказать: $AMB \perp ABC$.
Найти: $\angle(BMC, ABC)$, $\angle(MC, ABC)$.
Решение:
Т.к. M равноудалена от вершин, то она проецируется в центр описанной окружности, т.е. в середину AB. Пусть это будет т. H, тогда MHC — линейный угол двугранного угла между ABC и $AMB \Rightarrow$ они перпендикулярны. Пусть $HK \perp CB$ $\Rightarrow MK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

$$HK = \frac{1}{2}AC = 2 \Rightarrow \angle MKH = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} = 60° = \angle(BMC, ABC)$$

$$\angle(MC, ABC) = \angle MCH = \operatorname{arctg}\frac{MH}{HC} = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $60°$, $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

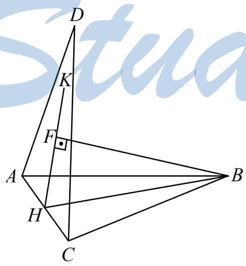


3. Дано: $MABC$ — тетраэдр, $AC = CB = 4$,
$\angle C = 90°$, $MA = MB = MC$, р$(M, ABC) = 2\sqrt{3}$.
Найти: р(E, BMC), где E — середина AC.
Решение:
р$(E, BMC) = HF \cdot \sin\angle(ABC, BMC) =$

$= EC \cdot \sin\angle(ABC, BMC) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

В-2.



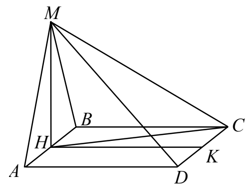
1. Дано: ΔABC, $AC = BC = 8$, $\alpha \subset AC$,
р$(\alpha, B) = 4$, $\angle ABC = 22°30'$.
Найти: $\angle(ABC< \alpha)$.
Решение: Проведем $BH \perp AC$ и $HK \perp AC$, $K \in \alpha$. Опустим $BF \perp HK$, $F \in HK$. По теореме о трех перпендикулярах $FB \perp AC \Rightarrow BF \perp \alpha \Rightarrow BF = 4$.
$\angle C = 180° - 22°30' - 22°30' = 135° \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 135° = 32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow BH = \frac{2S}{8} = \frac{32\sqrt{2}}{8} \ \Rightarrow BH = 4\sqrt{2} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FHB = \arcsin\frac{BF}{BH} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°.$ Ответ: 45°.

2.



Дано: $ABCD$ — квадрат, $AB = 4$ см,
$AMB \perp ABC$, $AM = MB = 2\sqrt{6}$ см.
Доказать: $BC \perp AM$.
Найти: $\angle(MC, ABC)$.
Решение:
Проведем $MH \perp AB \Rightarrow MH \perp ABC$ (т.к. $MH \perp BC$) $\Rightarrow AM \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Ч.т.д.

$MH \perp CH$. $CH = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

$S(AMB) = \sqrt{(2\sqrt{6}+2)(2\sqrt{6}-2)\cdot 2\cdot 2} = 2\sqrt{24-4} = 4\sqrt{5} \ \Rightarrow$

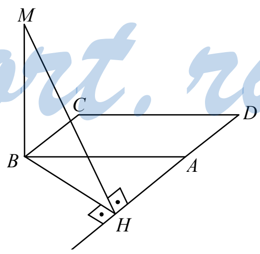
$\Rightarrow MH = \frac{2S}{AB} = 2\sqrt{5} \ \Rightarrow \angle MCH = \mathrm{arctg}\frac{MH}{CH} = \mathrm{arctg}1 = 45°.$

Ответ: 45°.

3. Дано: $ABCD$ — квадрат, $AB = 4$ см, $AMB \perp ABC$,
$AM = MB = 2\sqrt{6}$ см.
Найти: р(A, DMC).
Решение: ΔABC — равнобедренный $\Rightarrow \Delta MDC$ — равнобедренный. $MK \perp DC$. $HF \perp MK \Rightarrow HF \perp MDC$ по теореме о трех перпендикулярах $\Rightarrow$ р(A, MDC) = HF. $MK = \sqrt{20+16} = 6$.

$HF = \frac{2S(MKH)}{MK} = \frac{2\sqrt{5}\cdot 4}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$. Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ см.

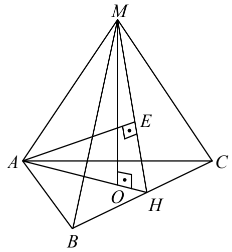
В-3.



1. Дано: $ABCD$ — ромб, $AB = 4$ см,
$BM \perp ABC$, $BM = 2\sqrt{3}$ см, $\angle ADC = 150°$.
Найти: $\rho(M, AD)$.
Решение:
Проводим $BH \perp AD \Rightarrow MH \perp AD$ (по ТТП), $MH = \rho(M, AD)$

$S = 4\cdot 4\cdot \sin 150° = 8 \Rightarrow BH = \frac{S}{AD} = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{12+4} = 4.$

Ответ: 4 см.



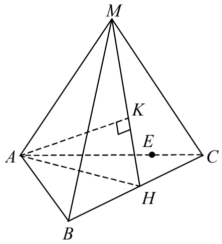
2.
Дано: ΔABC — правильный, AB=4 см, M равноудалена от его сторон, $\rho(M, ABC)$=2 см.
Доказать: $AMO \perp BMC$.
Найти: $\angle(BMC, ABC)$, $\angle(MC, ABC)$.
Решение:
$AH \perp BC \Rightarrow MH \perp BC \Rightarrow CB \perp AMO \Rightarrow$
$\Rightarrow AMO \perp BMC$. Ч.т.д.

$$MH = MB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}MH = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MHA = \operatorname{arctg}\frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = 60° = \angle(BMC, ABC).$$

$$CO = \frac{CH}{\cos 30°} = \frac{4}{\sqrt{3}}; \quad \angle MCO = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{4} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

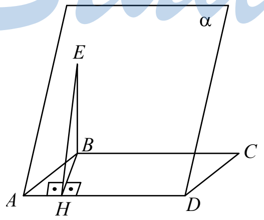
Ответ: $60°$, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.



3.
Дано: ΔABC — правильный, AB=4 см, M равноудалена от его сторон, $\rho\,(M, ABC) = 2$ см, $E \in AC$, $AE : EC = 2 : 1$.
Найти: $\rho\,(E, BMC)$.
Решение:
Проведем $AK \perp MH \Rightarrow AK = AH \cdot \sin\angle MHA =$
$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$

Очевидно, $AK = \rho\,(A, BMC) = 3\rho\,(E, BMC) \Rightarrow \rho\,(E, BMC) = 1$.
Ответ: 1 см.

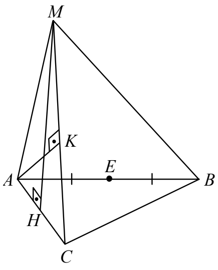
В-4.



1. Дано: $ABCD$ — ромб, $AB = 12$ см, $\angle BCD = 30°$, $\alpha \supset AD$, $\rho\,(\alpha, BC) = 3\sqrt{3}$ см.
Найти: $\angle(\alpha, ABC)$.
Решение:
$BH \perp AD$. $S = 12 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 72 \Rightarrow$
$\Rightarrow BH = \frac{S}{AD} = 6.$

Строим $(BHE) \perp \alpha$ и (ABC) $(E \in \alpha) \Rightarrow BE = 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EHB = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{6} = 60°$. Ответ: 60°.



2. Дано: ΔABC, $AC = BC = 3$ см, $\angle C = 90°$, $AMC \perp ABC$, $AM = MC = \sqrt{6}$ см.

Доказать: $MC \perp BC$.

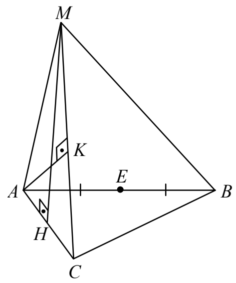
Найти: $\angle(MB, ABC)$.

Решение:

Т.к. $MAC \perp ACB$, то прямая MC проецируется на прямую $AC \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $MC \perp CB$. Ч.т.д. $MH \perp AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle MBH = \arcsin\frac{MH}{MB} = \arcsin\frac{\sqrt{6-\frac{9}{4}}}{\sqrt{9+6}} = \arcsin\frac{1}{2} = 30°.$$

Ответ: 30°.



3. Дано: ΔABC, $AC = BC = 3$ см, $\angle C = 90°$, $AMC \perp ABC$, $AM = MC = \sqrt{6}$ см, E — середина AB.

Найти: $\rho(E, BMC)$.

Решение: $\rho(A, BMC) = AK$, $AK \perp MC$,

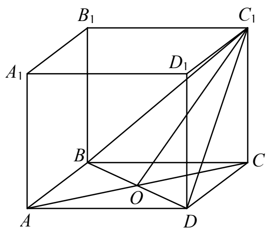
$$AK = \frac{3\cdot\sqrt{6-\frac{9}{4}}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

Т.к. E — середина AB, то $\rho(E, BMC) = \frac{1}{2}\rho(A, BMC) = \frac{3\sqrt{10}}{8}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{8}$ см.

К-4

В-1.



1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 60°$, $AB = a$, $\angle(BCD, BC_1D) = 60°$.

Найти: $S_{полн.}$.

Решение:

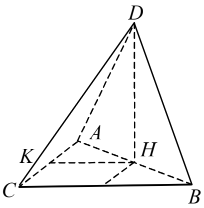
Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба, тогда

$$\angle(BCD, BC_1D) = \angle C_1OC = 60° \Rightarrow C_1C = OC \cdot \mathrm{tg}60° = \frac{1}{2}AC \cdot \mathrm{tg}60° =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos120°} \cdot \mathrm{tg}60° = \frac{1}{2}a\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} \cdot \mathrm{tg}60° = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \frac{3a}{2} \Rightarrow S_{\text{полн.}} = 4 \cdot \frac{3a}{2} \cdot a + 2 \cdot a^2\sin60° = 6a^2 + \sqrt{3}\,a^2.$$

Ответ: $6a^2 + \sqrt{3}\,a^2$.



2.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, высота равна 5, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, $CB = 10$, боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение:

Т.к. ребра равнонаклонены, то D проецируется в центр описанной окружности, т.е. в середину AB. Пусть это будет т. H.

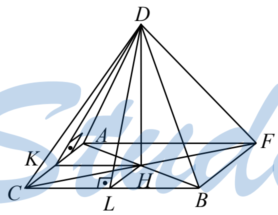
$AB = 20$, $AC = 10\sqrt{3}$. $HK \perp AC$, $HL \perp BC$.

$HK = AH \cdot \sin30° = 5$; $HL = HB \cdot \sin60° = 5\sqrt{3}$.

$DK = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$; $DL = \sqrt{25+75} = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(5 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 10\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2}) = 25(4 + \sqrt{6}).$$

Ответ: $25(4 + \sqrt{6})$.



3.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, высота равна 5, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, $CB = 10$, боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания.

Найти: $\angle(AC, DB)$.

Решение:

Достроим нашу пирамиду до пирамиды $DACBF$, $ACBF$ — прямоугольник.

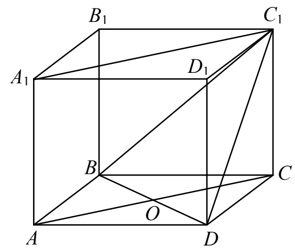
$DB = \sqrt{25+100} = 5\sqrt{5}$;

$$\cos\angle DBF = \frac{\frac{1}{2}BF}{DB} = \frac{\frac{1}{2}AC}{DB} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

В-2.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAD$=60°, AD=3 см, AB= 5 см, $\angle(BC_1D, ABC)$=60°, $S(ABC_1D_1)$=63 см^2.

Найти: $S_{\text{полн.}}$.

Решение:

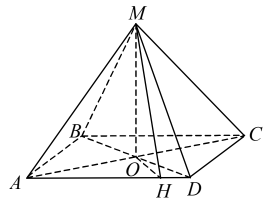
AA_1C_1C — прямоугольник, т.к. параллелепипед прямой.

$AC = \sqrt{25+9-2\cdot 5\cdot 3\cos 120^\circ} = 7 \Rightarrow AA_1 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{полн.}} = 2\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 5\cdot 3\sin 60^\circ = 3(48+5\sqrt{3})$.

Ответ: $3(48+5\sqrt{3})$.

2.



Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, AC=8, BD=6, все двугранные углы при основании равны, высота равна 1.

Найти: $S_{\text{полн.}}$.

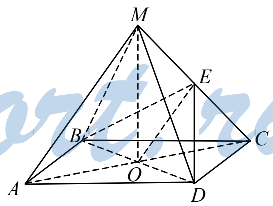
Решение:

Т.к. все двугранные углы при основании равны, то M проецируется в центр вписанной окружности, т.е. в т. $O = AC \cap BD$. $AD = 5$. $OH \perp AD \Rightarrow AD \perp MH$.

$$OH = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{AO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow MH = \sqrt{1+\frac{144}{25}} = \frac{13}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{полн.}} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{13}{5}\cdot 5 = 50.$$

Ответ: 50.



3. Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $AC = 8$, $BD = 6$, все двугранные углы при основании равны, высота равна 1.

Найти: $\angle(BMC, DMC)$.

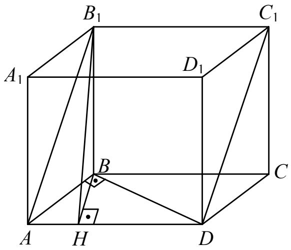
Решение:

$OE \perp MC$. $MC = \sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$.

Тогда из ΔMOC: $OE = \dfrac{OC\cdot MO}{MC} = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle OED = \dfrac{9\sqrt{17}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(BMC, DMC) = \angle BED = 2\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{17}}{4}$. Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{17}}{4}$.

В-3.



1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — параллелограмм, $AB \perp BD$, $AB = 3$ см, $BD = 4$ см, $\angle(AB_1C_1, ABC) = 45°$.

Найти: $S_{\text{полн.}}$.

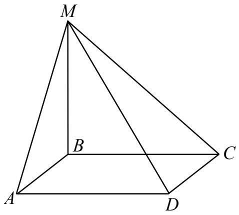
Решение: $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow BH = \frac{12}{5}$ $(BH \perp AD)$.

Т.к. $\angle(AB_1C_1; ABC) = 45°$, то $BH = BB_1 = \frac{12}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{полн.}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot 12 = 62{,}4.$

Ответ: 62,4 см^2.



2. Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — квадрат, $AB = 12$, высота равна 5, $MBA \perp ABC$, $MBC \perp ABC$.

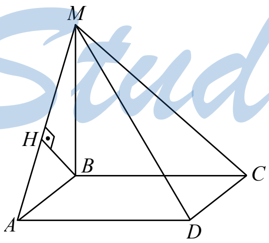
Найти: $S_{\text{полн.}}$.

Решение:

Т.к. $MBC \perp ABC$ и $MBA \perp ABC$, то $MB \perp ABC \Rightarrow MA \perp AD$ и $MC \perp CD$ (по теореме о трех перпендикулярах) $\Rightarrow S_{\text{полн.}} = 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 +$

$+ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 + \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 12^2} \cdot 12 + \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 12^2} \cdot 12 = 360.$

Ответ: 360.



3.

Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — квадрат, $AB = 12$, $MB = 5$, $MBA \perp ABC$, $MBC \perp ABC$.

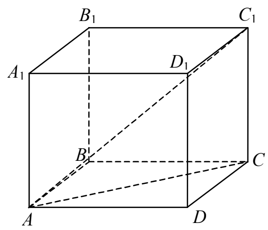
Найти: р(BC, MD).

Решение: $BH \perp MA \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $BH \perp MAD \Rightarrow BH \perp MD$ и $BH \perp BC \Rightarrow$ ищем BH.

$BH = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$. Ответ: $\frac{60}{13}$.

В-4.

1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAD = 30°$, $AD = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\angle(AC_1, ABC) = 45°$.

Найти: $S_{бок.}$.

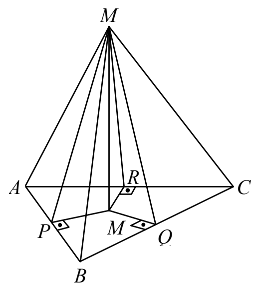
Решение:

$$AC = \sqrt{4+12-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 150°} = \sqrt{16+8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle(AC_1, ABC) = \angle C_1AC = 45°$ и параллелепипед прямой, то $AC = C_1C = 2\sqrt{7} \Rightarrow S_{бок.} = 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7} + 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{7} = 8\sqrt{7}(1+\sqrt{3})$.

Ответ: $8\sqrt{7}(1+\sqrt{3})$.

2.



Дано: $MABC$ — пирамида, высота равна $3\sqrt{5}$ см, $\angle ACB = 90°$, $AC = 8$ см, CB=6 см, боковые грани равнонаклонены к плоскости основания.

Найти: $S_{полн.}$.

Решение:

Т.к. боковые грани равнонаклонены к плоскости основания, то т. M проецируется в центр вписанной окружности, пусть ее радиус равен r, тогда $r = \frac{2S}{P} = \frac{6\cdot 8}{6+8+10} = \frac{48}{24} = 2$.

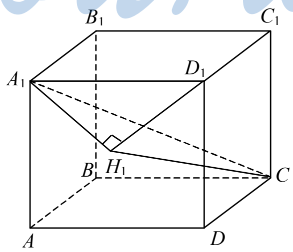
Строим $MR \perp AC$, $MQ \perp CB$, $MP \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow MP = \sqrt{45+4} = 7$; $MQ = \sqrt{45+4} = 7$; $MR = \sqrt{45+4} = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{полн.} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 7 = 24 + 21 + 28 + 35 = 108.$

Ответ: 108 см^2.

3.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAD = 30°$, $AD = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\angle(AC_1, ABC) = 45°$.

Найти: $\angle(A_1C; DD_1C_1C)$.

Решение: $A_1H_1 \perp D_1C_1$.

$$A_1H_1 = \frac{S}{D_1C_1} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

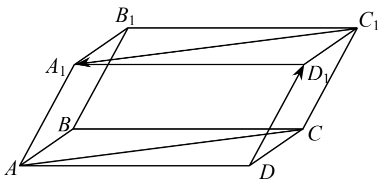
$$H_1C_1 = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{28-3} = 5 \Rightarrow CH_1 = \sqrt{25+28} = \sqrt{53} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle(A_1C, DD_1C_1C) = \angle A_1CH_1 = \operatorname{arctg}\frac{A_1H_1}{H_1C} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{53}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{53}}$.

К-5

В-1.



1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Изобразить векторы, равные:

1) $\overline{AC_1} + \overline{DA_1} + \overline{B_1B} + \overline{BA}$;

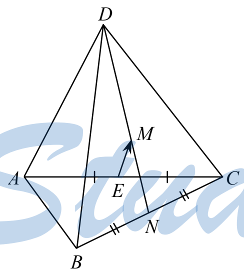
2) $\overline{BA} - \overline{B_1C_1}$

Решение:

1) $\overline{AC_1} + \overline{DA_1} + \overline{B_1B} + \overline{BA} = \overline{AC_1} + \overline{DA_1} + \overline{B_1A} = \overline{B_1C_1} + \overline{DA_1} =$

$= \overline{A_1D_1} + \overline{DA_1} = \overline{DD_1}$.

2) $\overline{BA} - \overline{B_1C_1} = \overline{B_1A_1} - \overline{B_1C_1} = \overline{C_1A_1}$.



2.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, M — точка пересечения медиан ΔBDC, E — середина AC.

Разложить $\overline{EM}$ по $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

Решение: DN — медиана $BDC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{EM} = \overline{EN} + \overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{DN} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{6}(\overline{DB} + \overline{DC}) =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{6}(\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{DA} + \overline{AC}) = \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AD}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AD}$.

3. Дано: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — неколлинеарны;
$\overline{m} = p\overline{a} + q\overline{b} + 8\overline{c}$, $\overline{h} = \overline{a} + 8\overline{b} + q\overline{c}$

Найти: p, q: $\overline{m} = \lambda\overline{h}$.

Решение:

$p = \lambda$, $q = p\lambda$, $8 = q\lambda \Rightarrow q = \lambda^2 \Rightarrow 8 = \lambda^3 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow p = 2$, $q = 4$.

Ответ: $p = 2$, $q = 4$.

4. Дано: $DABC$ — тетраэдр, M — середина AD, H — середина BC.

Доказать: AB, HM, DC параллельны одной плоскости.

Решение:

Надо доказать, что векторы $\overline{HM}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ — компланарны.

$$\overline{HM} = \overline{DM} - \overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{DA} - \frac{1}{2}\overline{DC} - \frac{1}{2}\overline{DB} \qquad 1)$$

$$\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{DB} - \overline{DA} + \overline{DC} \qquad 2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ $\overline{HM} = -\frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{DC}$. Ч.т.д.

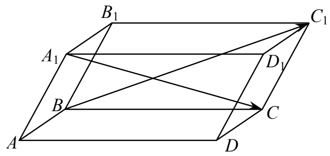
В-2.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Изобразить векторы, равные:

1) $\overline{B_1C_1} + \overline{AB} + \overline{CC_1} + \overline{B_1A}$;

2) $\overline{DC} - \overline{CB_1}$



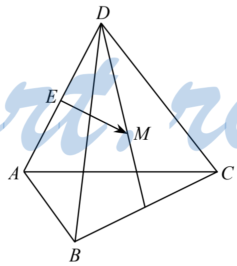
Решение:

1) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

2) $\overline{DC} - \overline{CB_1} = \overline{DC} - \overline{DA_1} = \overline{A_1C}$.

2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, E — середина AD, M — точка пересечения медиан ΔBDC.

Разложить $\overline{EM}$ по векторам: $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.



Решение:

$$\overline{EM} = \overline{ED} + \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{DB} + \overline{DC}) =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{3}(\overline{AB} - \overline{AD} + \overline{AC} - \overline{AD}) =$$

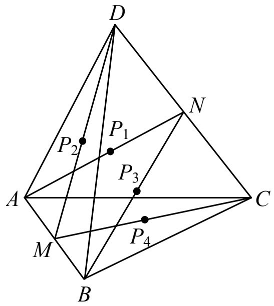
$$= -\frac{1}{6}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}.$$ Ответ: $-\frac{1}{6}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$.

3. Дано: $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{h} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{p} = 8\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$.

Доказать: $\overline{m}$, $\overline{h}$, $\overline{p}$ — компланарны.

Доказательство:

$2\overline{m} = 2\overline{a} + 2\overline{b} - 2\overline{c}$; $3\overline{h} = 6\overline{a} - 3\overline{b} + 3\overline{c} \Rightarrow \overline{p} = 2\overline{m} + 3\overline{h}$. Ч.т.д.



4. Дано: $DABC$ — тетраэдр, M — середина AB, N — середина DC.

Доказать: середины отрезков MC, MD, NA, NB являются вершинами параллелограмма.

Доказательство:

Пусть точки P_1, P_2, P_3 и P_4 — середины соответственно NA, MD, NB и MC. Выберем в пространстве произвольную точку $O \Rightarrow$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{OD} - \overline{OA} - \overline{ON}) = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{ND}) \quad 1)$$

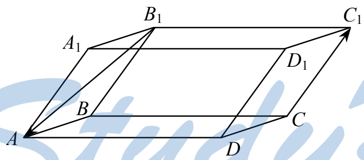
$$\overline{P_3P_4} = \overline{OP_3} - \overline{OP_4} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{ON} - \overline{OM} - \overline{OC}) = \frac{1}{2}(\overline{MB} + \overline{CN}) \quad 2)$$

Но $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{ND} = \overline{CN}$, тогда из (1) и (2) $\Rightarrow$

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_3P_4} \Rightarrow P_1P_2P_3P_4$ — параллелограмм.

Точки P_1, P_2, P_3, P_4 не лежат на одной прямой, т.к. точки P_2 и P_4 лежат в плоскости MDC, а прямая P_1P_3 — пересекает эту плоскость. Ч.т.д.

В-3.



1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Изобразить векторы, равные:

1) $\overline{BC} + \overline{C_1D_1} + \overline{B_1B} + \overline{D_1A_1}$;

2) $\overline{D_1C_1} - \overline{A_1B}$.

Решение:

1) $\overline{BC} + \overline{C_1D_1} + \overline{B_1B} + \overline{D_1A_1} = \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1A_1} + \overline{B_1B} =$

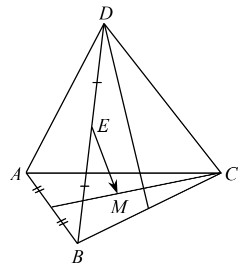
$= \overline{B_1D_1} + \overline{D_1A_1} + \overline{B_1B} = \overline{B_1A_1} + \overline{B_1B} = \overline{B_1A}$.

2) $\overline{D_1C_1} - \overline{A_1B} = \overline{D_1C_1} - \overline{D_1C} = \overline{CC_1}$.

2.

Дано: $DABC$ — тетраэдр, E — середина DB, M — точка пересечения медиан ΔABC.

Разложить $\overline{EM}$ по векторам: $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$.



Решение:

$$\overline{EM} = \overline{EB} + \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{DB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}) =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{DB} + \frac{1}{3}(\overline{DA} - \overline{DB} + \overline{DC} - \overline{DB}) = \frac{1}{3}\overline{DA} - \frac{1}{6}\overline{DB} + \frac{1}{3}\overline{DC}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\overline{DA} - \frac{1}{6}\overline{DB} + \frac{1}{3}\overline{DC}$.

3. Дано: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ неколлинеарны, $\overline{m} = k\overline{a} + k^2\overline{b} + 2\overline{c}$ компланарен $\overline{n} = \overline{a} + k\overline{b} + \overline{c}$.

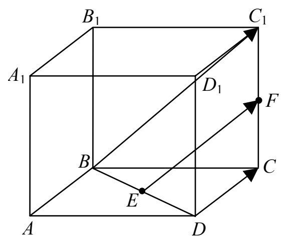
Найти: k.

Решение: $\overline{m} = \lambda\overline{n} \Rightarrow \begin{cases} k = \lambda \\ k^2 = k\lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ k = 2 \end{cases}$

Ответ: 2.

4. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, E — середина BD, F — середина C_1C.

Доказать: BC_1, EF, DC — параллельны одной плоскости.



Доказательство:

Пусть $\overline{AD} = \overline{e_1}$, $\overline{AB} = \overline{e_2}$, $\overline{AA_1} = \overline{e_3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})$, $\overline{DC} = \overline{e_2}$;

$\overline{BC_1} = \overline{e_1} + \overline{e_3} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{BC_1} \Rightarrow$ они компланарны. Ч.т.д.

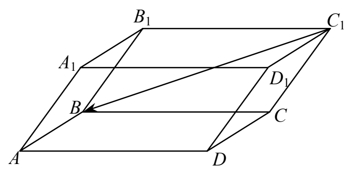
В-4.

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Изобразить векторы, равные:

1) $\overline{AB} + \overline{B_1B} + \overline{CD} + \overline{DA}$;

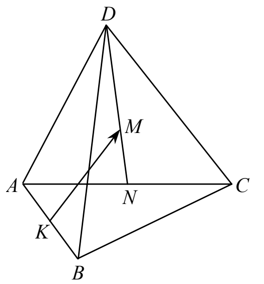
2) $\overline{DB} - \overline{AB_1}$.



Решение:

1) $\overline{AB}+\overline{B_1B}+\overline{CD}+\overline{DA}=\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{B_1B}=\overline{CB}+\overline{B_1B}=\overline{C_1B_1}+\overline{B_1B}=\overline{C_1B}$

2) $\overline{DB}-\overline{AB_1}=\overline{DB}-\overline{DC_1}=\overline{C_1B}$.



2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, точка M — точка пересечения медиан ΔACD, K — середина $\overline{AB}$.

Разложить $\overline{KM}$ по векторам $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$.

Решение:

$$\overline{KM}=\overline{KN}+\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{BC}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{DA}+\overline{DC})=$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BC}-\frac{1}{6}(\overline{BA}-\overline{BD}+\overline{BC}-\overline{BD})=$$

$=\frac{1}{3}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{BD}-\frac{1}{6}\overline{BA}$. Ответ: $-\frac{1}{6}\overline{BA}+\frac{1}{3}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{BD}$.

3. Дано: $\overline{m}=\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$, $\overline{n}=2\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$, $\overline{p}=3\overline{a}-4\overline{b}-5\overline{c}$.

Доказать: $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ — компланарны.

Доказательство:

Очевидно, $\overline{p}=2\overline{n}-\overline{m}$ $\Rightarrow$ они компланарны. Ч.т.д.

4. Дано: $ABCD$ — параллелограмм и $A_1B_1C_1D$ — произвольный четырехугольник в пространстве.

Доказать: точки пересечения медиан ΔA_1BB_1, ΔB_1CC_1, ΔC_1DD_1, ΔA_1AD_1 являются вершинами параллелограмма.

Доказательство:

Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения медиан треугольников соответственно A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1, A_1AD_1. Выберем в пространстве т. O, тогда

$$\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=\frac{1}{3}(\overline{OB_1}+\overline{OC_1}+\overline{OC})-\frac{1}{3}(\overline{OB_1}+\overline{OA_1}+\overline{OB})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{A_1C_1}+\overline{BC}). \qquad 1)$$

$$\overline{M_4M_3}=\overline{OM_3}-\overline{OM_4}=\frac{1}{3}(\overline{OD}+\overline{OC_1}+\overline{OD_1})-\frac{1}{3}(\overline{OA_1}+\overline{OA}+\overline{OD_1})=$$

$$=\frac{1}{3}(\overline{A_1C_1}+\overline{AD}). \qquad 2)$$

Т.к. $ABCD$ — параллелограмм, то $\overline{BC}=\overline{AD}$ $\Rightarrow$ из (1) и (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\overline{M_1M_2}=\overline{M_4M_3}$ $\Rightarrow$ $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм. Ч.т.д.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

МД-1

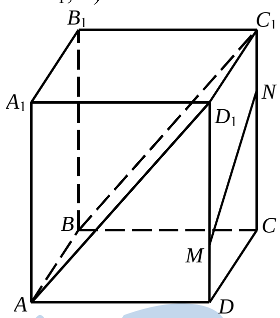
В-1.

1. В каком случае три точки в пространстве не определяют положение плоскости, проходящей через эти точки?
Решение:
Если лежат на одной прямой.

2. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?
Решение:
Нет.

3. Точка M не лежит на прямой a. Через точку M проводятся прямые, пересекающие прямую a. Лежат ли эти прямые в одной плоскости?
Решение:
Да.

4. Каково взаимное положение прямых:
1) AD_1 и MN; 2) AD_1 и BC_1; 3) MN и DC?

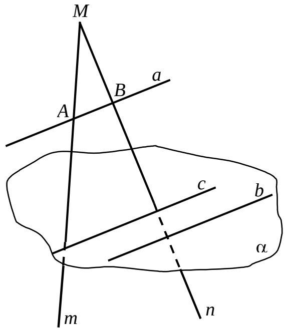


Решение:
1) скрещиваются; 2) параллельны; 3) пересекаются.

5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b пересекаться?
Решение:
Да.

6. Прямая a параллельна плоскости α. Существуют ли на плоскости α прямые, не параллельные a? Если да, то каково их взаимное положение?
Решение:
Да, скрещиваются.

7. Прямые m и n пересекаются в точке M, $A \in m$, $B \in n$, b лежит в плоскости α, $a \parallel b$. Каково взаимное положение прямых b и c?



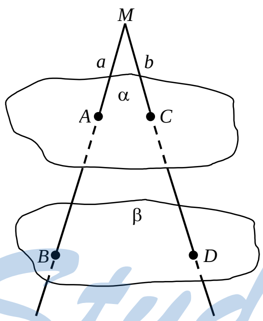
Решение: Параллельны.

8. Даны треугольник ABC и плоскость α, $AB \parallel \alpha$, $AC \parallel \alpha$. Каково взаимное положение прямой BC и плоскости α?

Решение:

Параллельны.

9. Плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскости α в точках A и C, а β — в точках B и D, $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{MC}{MD}$.



Решение:

т.к. $\Delta MAC \sim \Delta MBD$, то $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$;

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA}{MA + AB} = \frac{1}{1 + \frac{AB}{AM}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{2}{5}.$$

10. Плоскость α пересекает только боковые ребра параллелепипеда. Определить вид сечения.

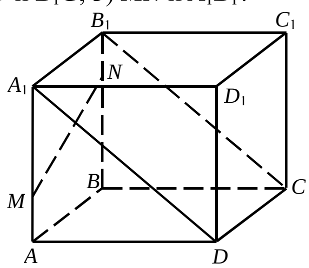
Решение: Параллелограмм.

В-2.

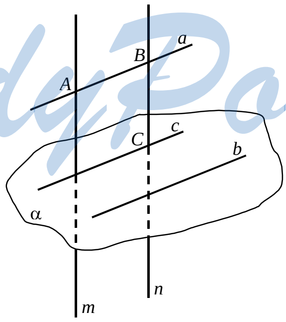
1. Что можно сказать о взаимном положении двух плоскостей, имеющих три общие точки, не лежащие на одной прямой?

Решение: Совпадают.

2. Могут ли две различные плоскости иметь только две общие точки?
Решение: Нет.
3. Прямые a и b пересекаются в точке M. Прямая c, не проходящая через точку M, пересекает прямые a и b. Лежат ли все эти прямые в одной плоскости?
Решение: Да.
4. Каково взаимное положение прямых:
1) A_1D и MN; 2) A_1D и B_1C; 3) MN и A_1B_1?



Решение:
1) скрещиваются; 2) параллельны; 3) пересекаются.
5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b быть параллельными?
Решение: Да.
6. Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой? Если нет, то каково их взаимное положение?
Решение: Нет, могут пересекаться или скрещиваться.
7. Прямые m и n параллельны. Точки A и B соответственно принадлежат прямым m и n; b лежит в плоскости α, $a \parallel b$. Каково взаимное положение прямых b и c?



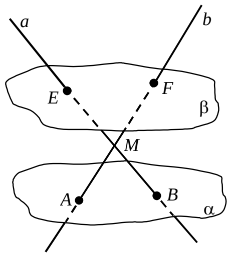
Решение: Параллельны.

8. Даны четырехугольник $ABCD$ и плоскость α. Его диагонали AC и BD параллельны плоскости α. Каково взаимное положение AB и плоскости α?

Решение:

Параллельны.

9. Плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α соответственно в точках B и A, а плоскость β — в точках E и F, $\frac{EM}{MF} = \frac{2}{5}$. Найдите отношение $\frac{MB}{MA}$.



Решение: 2 : 5.

10. Плоскость α проходит через диагональ основания параллелепипеда и середину одной из сторон верхнего основания. Определите вид сечения.

Решение: Трапеция.

МД-2

В-1.

1. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $D \in \alpha$, $B \in \alpha$, $AB = CD$. Каково взаимное положение прямой AC и плоскости α?

Решение: Параллельны.

2. К плоскости проведены две равные наклонные. Равны ли их проекции?

Решение:

Нет, если не равны углы наклона наклонных к плоскости.

3. Точка M равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника, катеты которого 6 см и 8 см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно 12 см. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

Решение:

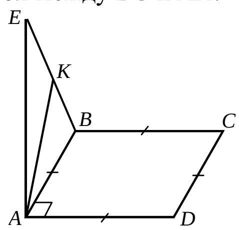
M проецируется в середину гипотенузы, равной 10 $\Rightarrow$

$\Rightarrow MA = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$

4. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной a. Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно ... .
Решение:

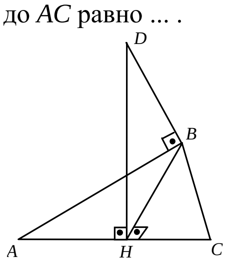
$\frac{\sqrt{2}}{2}a$ — половина диагонали основания.

5. $ABCD$ — квадрат. AE перпендикулярно плоскости квадрата, $K \in EB$. Чему равен угол между BC и AK?



Решение: 90° по теореме о трех перпендикулярах.

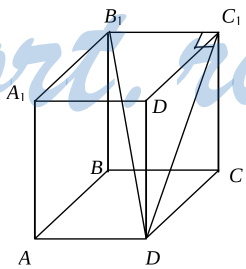
6. В треугольнике ABC $AB = 10$, $\angle A = 30°$, $BD \perp ABC$, $BD = 12$. Расстояние от точки D до AC равно ... .



Решение: BH — высота, $DB \perp BH$, т.к. $DB \perp (ABC)$

$$DH^2 = \sqrt{BD^2 + BH^2} = \sqrt{BD^2 + (AB\sin\angle A)^2} = \sqrt{12^2 + (10\sin 30°)^2} = 13.$$

7. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной 4. Диагональ параллелепипеда равна 8. Угол между диагональю и боковой гранью равен ... .



Решение: Искомый угол — $\angle B_1DC_1$,

$$\sin\angle B_1DC_1 = \frac{B_1C_1}{B_1D} = \frac{4}{8} \Rightarrow \angle B_1DC_1 =$$

$$= \arcsin\frac{4}{8} = 30°$$

8. Точка *M* равноудалена от всех сторон квадрата *ABCD*, сторона которого равна 8 см. Расстояние от точки *M* до плоскости квадрата равно 4 см. Угол между плоскостью *MCD* и плоскостью квадрата равен ... .
Решение: 45°.

9. Прямая *a* и плоскость α перпендикулярны плоскости β. Каково взаимное положение прямой *a* и плоскости α?
Решение:
Параллельны.

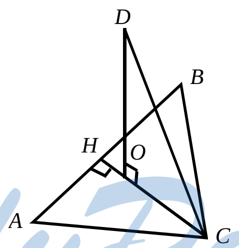
10. Треугольник *MAB* и квадрат *ABCD* имеют общую сторону *AB*, и их плоскости взаимно перпендикулярны. Угол *MAD* равен ... .
Решение: 90°, по ТПП.

В-2.

1. $AB \perp \alpha$, $CD \parallel AB$ ($B \in \alpha$, $D \in \alpha$), $E \in \alpha$, $\angle ECD = 40°$.
Тогда $\angle CED$ равен ... .
Решение: 50°.

2. Две наклонные, проведенные к плоскости, имеют равные проекции. Равны ли сами наклонные?
Решение: Нет.

3. Точка *D* равноудалена от всех вершин правильного треугольника и находится на расстоянии 3 см от его плоскости. Высота треугольника равна 6 см. расстояние от точки *D* до вершины треугольника равно ... .

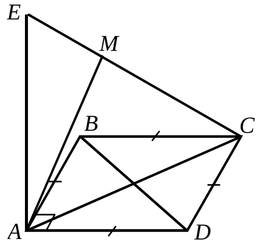


Решение: $CO = \frac{2}{3}CH$ т.к. CH — медиана,

$$DC = \sqrt{DO^2 + OC^2} = \sqrt{DO^2 + \left(\frac{2}{3}CH\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot 6\right)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

4. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной *a*. Расстояние между скрещивающимися диагоналями противоположных граней параллелепипеда равно ... .
Решение: *a*.

5. $ABCD$ — квадрат. AE перпендикулярно плоскости квадрата, $M \in EC$. Угол между BD и AM равен ... .
Решение: 90°, по ТПП.



6. В треугольнике ABC AB = 16 см, $\angle A$ = 30°, BK перпендикулярно к плоскости треугольника. Найдите BK, если расстояние от точки K до AC равно 17 см.
Решение:
$\sqrt{(17)^2 - (16 \cdot \sin 30°)^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = 3 \cdot 5 = 15.$

7. В прямоугольном параллелепипеде основанием служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 10 см и составляет с плоскостью боковой грани угол 60°. Найдите сторону основания.
Решение: (См. рис. В-1 задача 7.) $B_1C_1 = B_1D\sin\angle B_1DC_1 \Rightarrow$ сторона равна $10\sin 60° = 5\sqrt{3}$.

8. Точка D равноудалена от всех сторон правильного треугольника ABC. Расстояние от точки D до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 4. Угол между плоскостью CDB и плоскостью треугольника равен ... .
Решение:
Радиус вписанной окружности равен $\frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} = 60°$.

9. Две плоскости перпендикулярны к третьей. Лини пересечения этих плоскостей с третьей плоскостью параллельны. Каково взаимное положение этих плоскостей?
Решение:
Параллельны.

10. Прямоугольный треугольник ACB ($\angle C$ = 90°) и треугольник CMB имеют общую сторону BC. Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны. Угол ACM равен ... .
Решение: 90°.

МД-3

В-1.

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4 см, а боковое ребро 5 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через ребро AA_1 и вершину C.

Решение: $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = \sqrt{2}AB \cdot AA_1 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 = 20\sqrt{2}$.

2. В правильной треугольной призме сторона основания равна 3 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60°. Площадь боковой поверхности призмы равна ... .

Решение: $S_{бок.} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \mathrm{tg}60° = 27\sqrt{3}$.

3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны 4 см. Найдите площадь каждой из наклонных боковых граней.

Решение: $4 \cdot 4 = 16$.

4. В наклонной треугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит правильный треугольник со стороной, равной a. Боковое ребро равно b, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$. Площадь грани CC_1B_1B равна ... .

Решение: ab.

5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 10 см. Площади двух боковых граней равны 30 см^2 и 40 см^2, угол между ними прямой. Площадь боковой поверхности призмы равна ... .

Решение: $30 + 40 + 50 = 120$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде угол между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равен ... .

Решение: 90°.

7. В правильной четырехугольной пирамиде угол между противоположными боковыми гранями равен 40°. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

Решение: $\frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$.

8. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 8 см, и противоположным этой стороне углом в 150°. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Высота пирамиды равна ... .

Решение: $\dfrac{8}{2\sin 150°} = \dfrac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8$.

9. Основанием пирамиды служит трапеция, основания которой равны 2 см и 8 см. Боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания. Высота одной из боковых граней равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение: $\frac{1}{2}(8 + 2) \cdot 10 \cdot 2 = 100$.

10. В пирамиде *MABCD* основанием служит квадрат со стороной, равной *a*. Грань *MAB* — правильный треугольник, плоскость которой перпендикулярна к плоскости основания. Площади граней *MAD* и *MBC* равны ... .

Решение: $S(MAD) = \frac{1}{2}a \cdot a$. $S(MBC) = S(MAD) = \frac{a^2}{2}$.

В-2.

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3 см, а боковое ребро 4 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через сторону основания *AD* и вершину C_1.

Решение: $3 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15$.

2. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 4 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 45°. Площадь боковой поверхности призмы равна ... .

Решение: $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны между собой. Площадь наклонной боковой грани равна 25 см^2. Длина ребра параллелепипеда равна ... .

Решение: 5.

4. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат со стороной, равной *a*. Боковое ребро равно *b*. Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания. Площадь диагонального сечения BB_1D_1D равна ... .

Решение: $AA_1 \perp BD$ по ТТП. $S_{DB_1D_1D} = BD \cdot AA_1 = \sqrt{2}ab$.

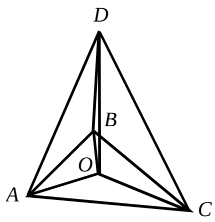
5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 5 см. Площади двух боковых граней равны 20 см^2, угол между ними 60°. Площадь боковой поверхности призмы равна ... .

Решение: 60.

6. В правильной треугольной пирамиде угол между скрещивающимися ребрами равен ... .
Решение: 90°.

7. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 50°. Угол между противоположными боковыми гранями пирамиды равен ... .
Решение: (180 – 50°·2) = 80°.

8. В пирамиде основанием служит треугольник со стороной, равной 6 см и противолежащим углом 30°. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Длина бокового ребра равна ... .



Решение:
О — центр описанной окружности.

$$AO = \frac{AC}{2\sin\angle B},\ AD = \frac{AO}{\cos\angle BAO} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\dfrac{6}{2\cdot\sin 30^\circ}}{\cos 60^\circ} = \frac{\dfrac{6}{2\cdot\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}} = 12.$$

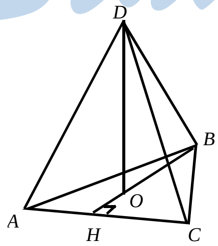
9. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны которой равны 2 см и 4 см. Боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания. Высота одной из боковых граней равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение: $5\cdot\frac{1}{2}(4+2)\cdot 2 = 30$.

10. Основанием пирамиды *MABCD* служит квадрат со стороной 6 см. Ребро *MB* перпендикулярно к плоскости основания. Равные боковые ребра равны 8 см. Площадь наклонных боковых граней равна ... .
Решение: 24.

МД-4

В-1.



1.
DABC — правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна $\sqrt{3}$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите: $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}|$.
Решение:

$$DB=\frac{BO}{\cos\angle DBO}=\frac{2}{3}\frac{BC\cdot\cos\angle HBC}{\cos\angle DBO}=\ \left|\overline{DA}+\overline{CB}+\overline{AC}\right|=\left|\overline{DB}\right|$$

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите: $|\overrightarrow{DC_1}-\overrightarrow{DA_1}|$.

Решение: $\sqrt{2}$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, A_1C пересекает B_1D в точке M, $\overrightarrow{B_1D}=x\overrightarrow{DM}$. Найдите x.

Решение: –2.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Укажите какой-нибудь вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, который был бы компланарен с векторами AB_1 и AC.

Решение: AC_1.

5. $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$.

Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?

Решение:

Нет, т.к. $c\in(ABD)$, т.е. $A_1B_1C_1D$ лежат в одной плоскости.

6. $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{n}=2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{k}=3\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

Укажите тройку компланарных векторов.

Решение: $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Найдите: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$.

Решение: $\overrightarrow{BD_1}$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, D_1C пересекает C_1D в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

9. $PABCD$ — пирамида, $ABCD$ — параллелограмм, $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{PD}=\vec{x}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение: $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$.

10. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ отрезок DO — высота. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Решение: $\overline{DO}=\overline{DC}+\overline{CO}=\overline{DC}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})=$

$=\overline{DC}+\frac{1}{3}(\overline{DA}-\overline{DC})+\frac{1}{3}(\overline{DB}-\overline{DC})=\frac{1}{3}\left(\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}\right)$.

В-2.

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90°$), $AC = 6$, $BC = 8$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найдите: $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CB}|$.

Решение: $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AM}\right|$,

$$AM = \frac{AB}{2\cos 60°} = \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{2\cos 60°} = \frac{5}{\cos 60°} = 10 .$$

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, точка E — середина A_1C_1.

Найдите: $|\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB_1}|$.

Решение: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, A_1C пересекает B_1D в точке M, $\overrightarrow{A_1C} = x\overrightarrow{CM}$. Найдите x.

Решение: –2.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E и F — середины AD и CD соответственно. Будут ли быть компланарны векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{DD_1}$?

Решение: Да.

5. $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Укажите тройку компланарных векторов.

Решение: $\vec{m}$, $\vec{p}$, $\vec{k}$.

6. $\overrightarrow{AC} \neq x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. При всех x и y $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не являются коллинеарными. Могут ли пересекаться прямые AC и BD?

Решение: Нет.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Найдите: $\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C}$.

Решение: $\overrightarrow{C_1A}$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, AB_1 пересекает A_1B в точке E. Выразите вектор $\overrightarrow{DE}$ через векторы $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{DA}$.

Решение: $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DA})$.

9. В пирамиде *EABCD* основанием служит параллелограмм *ABCD*, $\overrightarrow{EB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{EC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{p}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{y}$. Выразите вектор $\vec{y}$ через векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

Решение: $\vec{y} = \vec{p} + \vec{m} - \vec{n}$.

10. В тетраэдре *DABC* отрезки *DE* и *CF* — медианы грани *BDC*, *DE* пересекает *CF* в точке *O*. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Решение: $3\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.