

А.А. Кадеев, О.Г. Перфильева

# Домашняя работа по алгебре за 11 класс

к учебнику «Алгебра и начала анализа:  
Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват.  
учреждений / Ш.А. Алимов и др. — 11-е изд. —  
М.: Просвещение, 2003 г.»

*StudyPort.ru*

**VIII Глава.**  
**Производная и ее геометрический смысл**

**§ 44 Производная**

**№ 776.**

$$s(t)=1+3t; \quad v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}. \quad \text{Т.к. } s(t)=1+3t, \text{ то } s(t+h)-s(t)=$$
$$=1+3(t+h)-(1+3t)=1+3t+3h-1-3t=3h, \quad \text{поэтому } v_{cp} = \frac{3h}{h} = 3. \quad \text{Проверим}$$

результат в случаях, приведенных в условии:

$$1) h=4-1=3, \quad s(t+h)=1+3 \cdot 4=13, \quad s(t)=1+3 \cdot 1=4, \quad v_{cp} = \frac{13-4}{3} = 3;$$

$$2) h=1-0,8=0,2, \quad s(t+h)=1+3 \cdot 1=4, \quad s(t)=1+3 \cdot 0,8=3,4, \quad v_{cp} = \frac{4-3,4}{0,2} = \frac{0,6}{0,2} = 3.$$

**№ 777.**

$$1) s(t)=2t; \quad v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{2(t+h)-2t}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

Проверим:  $h=1,2-1=0,2$

$$s(t+h)=2 \cdot 1,2=2,4; \quad s(t)=2 \cdot 1=2; \quad v_{cp} = \frac{2,4-2}{0,2} = \frac{0,4}{0,2} = 2$$

$$2) s(t)=t^2 \quad t=1; \quad (t+h)=1,2;$$

$$v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} =$$

$$=2t+h=2 \cdot 1+(1,2-1)=2,2.$$

**№ 778.**

$$1) s(t)=2t+1;$$

$$a) s(t+h)-s(t)=2(t+h)+1-2t-1=2t+2h+1-2t-1=2h;$$

$$b) v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{2h}{h} = 2; \quad \text{в) } \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2;$$

$$2) s(t)=2-3t;$$

$$a) s(t+h)-s(t)=2-3(t+h)-2+3t=2-3t-3h-2+3t=-3h;$$

$$b) v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = -\frac{3h}{h} = -3; \quad \text{в) } \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3) = -3.$$

**№ 779.**

$$s(t)=0,25t+2$$

$$1) h=8-4=4;$$

$$v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{0,25 \cdot (4+4)+2-0,25 \cdot 4-2}{4} = \frac{2+2-1-2}{4} = 0,25$$

$$2) v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} 0,25 = 0,25.$$

**№ 780.**

1)  $f(x)=3x+2$ ;

a)  $\Delta f=f(x+h)-f(x)=3(x+h)+2-3x-2=3x+3h+2-3x-2=3h$ ;

б)  $\frac{\Delta f}{h} = \frac{3h}{h} = 3$ ;      в)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = 3$ , т.е.  $f'(x)=3$

2)  $f(x)=5x+7$ ;

a)  $\Delta f=f(x+h)-f(x)=5(x+h)+7-5x-7=5x+5h+7-5x-7=5h$ ;

б)  $\frac{\Delta f}{h} = \frac{5h}{h} = 5$ ;      в)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5$ ;

3)  $f(x)=3x^2-5x$ ;

a)  $\Delta f=f(x+h)-f(x)=3(x+h)^2-5(x+h)-3x^2+5x=$   
 $=3x^2+6xh+3h^2-5x-5h-3x^2+5x=6xh+3h^2-5h$ ;

б)  $\frac{\Delta f}{h} = \frac{6xh+3h^2-5h}{h} = 6x+3h-5$ ;      в)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x+3h-5) = 6x-5$ ;

4)  $f(x)=-3x^2+2$ ;

a)  $\Delta f=-3(x+h)^2+2+3x^2-2=-3x^2-6xh-3h^2+2+3x^2-2=-6xh-3h^2$ ;

б)  $\frac{\Delta f}{h} = \frac{-6xh-3h^2}{h} = -6x-3h$ ;      в)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-6x-3h) = -6x$ .

**№ 781.**

1)  $f'(x)=4$ ; 2)  $f'(x)=-7$ ; 3)  $f'(x)=-5$ . (опечатка в ответе задачника).

**№ 782.**

1)  $s(t)=\frac{3}{2}t^2$ ;

a)  $s(t+h)-s(t)=\frac{3}{2}(t+h)^2-\frac{3}{2}t^2=\frac{3}{2}t^2+3th+\frac{3}{2}h^2-\frac{3}{2}t^2=3th+\frac{3}{2}h^2$ ;

б)  $v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{3th+\frac{3}{2}h^2}{h} = 3t+\frac{3}{2}h$ ;

в)  $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} (3t+\frac{3}{2}h) = 3t$ ;

2)  $s(t)=5t^2$ ;

a)  $s(t+h)-s(t)=5(t+h)^2-5t^2=5t^2+10th+5h^2-5t^2=10th+5h^2$ ;

б)  $v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{10th+5h^2}{h} = 10t+5h$ ;

в)  $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} (10t+5h) = 10t$ ;

**№ 783.**

$s(t)=t^2+2$  найдем  $v(t)$ :

a)  $s(t+h)-s(t)=(t+h)^2+2-t^2-2=t^2+2th+h^2+2-t^2-2=2th+h^2$

б)  $v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{2th+h^2}{h} = 2t+h$

$$b) v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} 2t+h=2t$$

$$1) t=5, \quad v(5)=2 \cdot 5=10; \quad 2) t=10, \quad v(10)=2 \cdot 10=20.$$

№ 784.

$$1) \text{ на } [0; 1] \quad v_{cp} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{1,5 - 0}{1} = 1,5;$$

$$2) \text{ на } [1; 2] \quad v_{cp} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{2,5 - 1,5}{1} = 1;$$

$$3) \text{ на } [2; 3] \quad v_{cp} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{3 - 2,5}{1} = 0,5.$$

№ 785.

$$1) \text{ на } [0; 2] \quad v_{cp} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{1 - 2}{2 - 0} = -\frac{1}{2};$$

$$2) \text{ на } [2; 3] \quad v_{cp} = \frac{3 - 1}{3 - 2} = 2; \quad 3) \text{ на } [3; 3,5] \quad v_{cp} = \frac{4 - 3}{3,5 - 3} = 2.$$

№ 786.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3, \text{ т.к. } f(x) = 2x+1, \text{ то:}$$

$$|f(x) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon, \text{ где } |x - 1| < \delta, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. для } \forall \varepsilon \text{ существует}$$

$\delta$  удовлетворяющее определению, значит равенство верно..

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4, \text{ т.к. } f(x) = x^2, \text{ то: } |f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \delta|x + 2|; \quad |x - 2| < \delta;$$

$$\delta|x + 2| = \delta(|x - 2| + 4) \leq \delta(|x - 2| + 4) < \delta^2 + 4\delta = \varepsilon, \text{ возьмем } \delta = 2 + \sqrt{4 + \varepsilon}.$$

## § 45 Производная степенной функции

№ 787.

$$1) (x^6)' = 6x^5; \quad 2) (x^7)' = 7x^6; \quad 3) (x^{11})' = 11x^{10}; \quad 4) (x^{13})' = 13x^{12}$$

№ 788.

$$1) (x^{-2})' = -2x^{-3}; \quad 2) (x^{-3})' = -3x^{-4}; \quad 3) (x^{-4})' = -4x^{-5}; \quad 4) (x^{-7})' = -7x^{-8}.$$

№ 789.

$$1) \left( \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad 3) \left( x^{\frac{2}{7}} \right)' = \frac{2}{7} \cdot x^{-\frac{9}{7}};$$

$$2) \left( \frac{1}{x^3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}; \quad 4) \left( x^{\sqrt{3}} \right)' = \sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3}-1}.$$

(Опечатка в ответе задачника).

№ 790.

$$1) \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}; \quad 2) \left(\frac{1}{x^9}\right)' = (x^{-9})' = -9x^{-10} = -\frac{9}{x^{10}};$$

$$3) \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}};$$

$$4) \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$5) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$$6) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^2}}.$$

(Опечатка в ответе задачника).

№ 791.

- 1)  $((4x-3)^2)' = 2 \cdot (4x-3) \cdot 4 = 8(4x-3);$
- 2)  $((5x+2)^{-3})' = -3(5x+2)^{-4} \cdot 5 = -15(5x+2)^{-4};$
- 3)  $((1-2x)^{-6})' = -6(1-2x)^{-7} \cdot (-2) = 12(1-2x)^{-7};$
- 4)  $((2-5x)^4)' = 4(2-5x)^3 \cdot (-5) = -20(2-5x)^3;$
- 5)  $((2x)^3)' = 3 \cdot (2x)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x)^2 = 24x^2;$
- 6)  $((-5x)^4)' = 4 \cdot (-5x)^3 \cdot (-5) = -20 \cdot (-5x)^3 = 2500x^3;$

№ 792.

$$1) \left(\sqrt[3]{2x+7}\right)' = \left((2x+7)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x+7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}};$$

$$2) \left(\sqrt[4]{7-3x}\right)' = \left((7-3x)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(7-3x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-3) = -\frac{3}{4\sqrt[4]{(7-3x)^3}};$$

$$3) \left(\sqrt[4]{3x}\right)' = \left((3x)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(3x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{27x^3}};$$

$$4) \left(\sqrt[3]{5x}\right)' = \left((5x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(5x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5 = \frac{5}{3\sqrt[3]{25x^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

№ 793.

$$1) f'(x) = (x^6)' = 6x^5;$$

$$f'(x_0) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

$$2) f'(x) = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad f'(x_0) = -\frac{2}{3^3} = -\frac{2}{27}$$

$$3) f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$4) f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$$

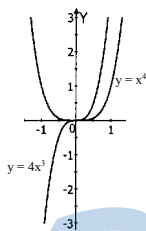
$$5) f'(x) = (\sqrt{5-4x})' = ((5-4x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(5-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$$

$$f'(x_0) = -\frac{2}{\sqrt{5-4 \cdot 1}} = -2$$

$$6) f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)' = \left((3x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 = -\frac{3}{2\sqrt{(3x+1)^3}}$$

$$f'(x_0) = -\frac{3}{2\sqrt{(3 \cdot 1 + 1)^3}} = -\frac{3}{16}$$

№ 794.



№ 795.

1)  $y' = (x^2)' = 2x$ ,  $y'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ ,  $y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $y'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$  — не подходит

2)  $y' = (x^3)' = 3x^2$ ,  $y'(0) = 3 \cdot 0 = 0$ ,  $y'(1) = 3 \cdot 1 = 3$ ,  $y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$  — подходит

3)  $y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   $y'(0)$  не существует, не подходит.

№ 796.

$$1) \left(\frac{1}{(2+3x)^2}\right)' = ((2+3x)^{-2})' = -2(2+3x)^{-3} \cdot 3 = -\frac{6}{(2+3x)^3}$$

$$2) \left(\frac{1}{(3-2x)^3}\right)' = ((3-2x)^{-3})' = -3 \cdot (3-2x)^{-4} \cdot (-2) = \frac{6}{(3-2x)^4}$$

$$3) \left( \sqrt[3]{(3x-2)^2} \right)' = \left( (3x-2)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} (3x-2)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3 = \frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}.$$

$$4) \left( \sqrt[7]{(3-14x)^2} \right)' = \left( (3-14x)^{\frac{2}{7}} \right)' = \frac{2}{7} (3-14x)^{-\frac{5}{7}} \cdot (-14) = \frac{-4}{\sqrt[7]{(3-14x)^5}}.$$

$$5) \left( \frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}} \right)' = \left( (3x-7)^{-\frac{1}{3}} \right)' = -\frac{1}{3} (3x-7)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}}.$$

$$6) \left( \frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}} \right)' = \left( (1-2x)^{-\frac{2}{3}} \right)' = -\frac{2}{3} (1-2x)^{-\frac{5}{3}} \cdot (-2) = \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-2x)^5}}.$$

№ 797.

$$1) f(x)=x^3, \quad f'(x)=3x^2, \quad f'(x)=1 \Rightarrow 3x^2=1; \quad x=\pm \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$2) f(x)=\sqrt[3]{x^2}, \quad f'(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f'(x)=1 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=1,$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \quad x = \frac{8}{27}.$$

№ 798.

$$s(t)=\sqrt{t+1}; \quad v(t)=(s(t))'=(\sqrt{t+1})'=\left((t+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}};$$

$$v(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}.$$

№ 799.

$$1) f(x)=(2x-1)^2;$$

$$f'(x)=2(2x-1) \cdot 2=4(2x-1);$$

$$f(x)=f'(x) \Rightarrow (2x-1)^2=4(2x-1);$$

$$(2x-1)(2x-1-4)=0;$$

$$(2x-1)(2x-5)=0;$$

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ (2x-5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}; \\ x=\frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$\text{либо } 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2};$$

$$2) f(x)=(3x+2)^3;$$

$$f'(x)=3(3x+2)^2 \cdot 3=9(3x+2)^2;$$

$$f(x)=f'(x) \Rightarrow (3x+2)^3=9(3x+2)^2;$$

$$(3x+2)^2(3x+2-9)=0;$$

$$(3x+2)^2(3x-7)=0;$$

$$\begin{cases} 3x+2=0 \\ 3x-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3}; \\ x=\frac{7}{3}; \end{cases}$$

$$\text{либо } 3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3};$$

либо  $(2x-5)=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ ;      либо  $3x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$ .

*StudyPort.ru*



**№ 800.**

а) Очевидно, что это парабола, следовательно, уравнение имеет вид  $y=ax^2+bx+c$   $a>0$ , т.к. ветви параболы направлены вверх.

Вершина параболы имеет абсциссу  $x_b = -\frac{b}{2a}$ , в нашем случае

$$x_b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow y=ax^2+c.$$

Подставим известные точки:

$$1=a \cdot (0)^2+c \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=ax^2+1;$$

$$2=a \cdot (1)^2+1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=x^2+1;$$

б) Очевидно, что это парабола, имеющая уравнение в общем виде  $y=ax^2+by+c$ .

Т.к. ветви параболы направлены вниз, то  $a<0$ .

В общем виде вершина параболы имеет абсциссу  $x_b = -\frac{b}{2a}$ ,

в нашем случае  $x_b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow y=ax^2+c$ .

Зная точки, подставим

$$1=a \cdot (0)^2+c \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=ax^2+1;$$

$$0=a \cdot (1)^2+1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow y=-x^2+1 \Rightarrow y=1-x^2.$$

**№ 801.**

$$y = \sqrt{3x-7}; \quad y' = \left( (3x-7)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}(3x-7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}};$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-7}} = \sqrt{3x-7}; \quad \frac{3}{2} = 3x-7; \quad x = \frac{17}{6}; \quad x = 2\frac{5}{6}.$$

**§ 46 Правила дифференцирования****№ 802.**

$$1) (x^2+x)' = 2x+1;$$

$$2) (x^2-x)' = 2x-1;$$

$$3) (3x^2)' = 3 \cdot 2 \cdot x = 6x;$$

$$4) (-17x^2)' = -17 \cdot 2 \cdot x = -34x;$$

$$5) (-4x^3)' = -4 \cdot 3 \cdot x^2 = -12x^2;$$

$$6) (0,5x^3)' = 1,5x^2;$$

$$7) (13x^2+26)' = 26x;$$

$$8) (8x^2-16)' = 16x.$$

**№ 803.**

$$1) (3x^2-5x+5)' = 6x-5;$$

$$2) (5x^2+6x-7)' = 10x+6;$$

$$3) (x^4+2x^2)' = 4x^3+4x;$$

$$4) (x^3-3x^2)' = 3x^2-6x;$$

$$5) (x^3+5x)' = 3x^2+5;$$

$$6) (-2x^3+18x)' = -6x^2+18;$$

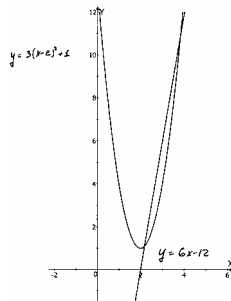
$$7) (2x^3-3x^2+6x+1)' = 6x^2-6x+6;$$

$$8) (-3x^3+2x^2-x-5)' = -9x^2+4x-1.$$

**№ 804.**

$$y=3(x-2)^2+1=3x^2-12x+12+1=3x^2-12x+13;$$

$$y'=6x-12.$$



№ 805.

$$1) \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)' = 2x - \frac{3}{x^4}; \quad 2) \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)' = 3x^2 - \frac{2}{x^3};$$

$$3) \left(2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$4) \left(3\sqrt[6]{x} - 7\sqrt[4]{x}\right)' = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} + 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{13}{4}} = \frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^{13}}}.$$

№ 806.

$$1) f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2; \quad f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2; \quad f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2;$$

$$2) f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2; \quad f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 2 = -2; \quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 12 - 2 = 10;$$

$$3) f'(x) = (-x^3 + x^2)' = -3x^2 + 2x; \quad f'(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0; \quad f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = -2 + 4 = -8;$$

$$4) f'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1; \quad f'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1; \quad f'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

№ 807.

$$1) f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right);$$

$$f'(3) = \left(-\frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^3}\right) = -\frac{5}{27}; \quad f'(1) = -1 - 2 = -3;$$

$$2) f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2};$$

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{9}; \quad f'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};$$

$$3) f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}\right)' = \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} - 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4}\right) = \left(-\frac{3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{6}{x^4}\right)$$

$$f'(3) = -\frac{3}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{2}{27} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{27}; \quad f'(1) = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2};$$

$$4) f'(x) = \left( x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} \right)' = \left( \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \left( -\frac{3}{2} \right) x^{-\frac{5}{2}} \right) = \left( \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{x} \cdot x^2} \right);$$

$$f'(3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{18\sqrt{3}} = \frac{27+1}{6\sqrt{3}} = \frac{28}{6\sqrt{3}} = \frac{14}{3\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{9}; \quad f'(1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

№ 808.

1) не дифференцируема, т.к. при  $x=1$  функция  $y = \frac{2}{x-1}$  не определена

2) не дифференцируема, т.к. при  $x=3$  функция  $y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}$  не определена

$$3) y' = (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

$$y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2} \text{ дифференцируема;}$$

$$4) y' = (\sqrt{5-x})' = \frac{1}{2} \cdot (5-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \frac{-1}{\sqrt{5-x}},$$

$$y'(4) = -\frac{1}{\sqrt{5-4}} = -1 \text{ дифференцируема.}$$

№ 809.

$$1) f(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2; \quad f'(x) = 0; \quad 3x^2 - 2 = 0; \quad x^2 = \frac{2}{3}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$2) f(x) = (-x^2 + 3x + 1)' = -2x + 3; \quad f'(x) = 0; \quad -2x + 3 = 0; \quad x = \frac{3}{2}.$$

$$3) f(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x - 3)' = 6x^2 + 6x - 12; \quad f'(x) = 0; \quad 6x^2 + 6x - 12 = 0; \quad x^2 + x - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 8 = 9; \quad x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2;$$

$$4) f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 7x + 1)' = 3x^2 + 4x - 7; \quad f'(x) = 0; \quad 3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 21 = 25; \quad x_1 = \frac{-2+5}{3} = 1, \quad x_2 = \frac{-2-5}{3} = -\frac{7}{3}.$$

$$5) f'(x) = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2)' = 12x^3 - 12x^2 - 24x; \quad f'(x) = 0;$$

$$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ и } x^2 - x - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 8 = 9; \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad x_3 = \frac{1-3}{2} = -1;$$

$$6) f'(x) = (x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5)' = 4x^3 + 12x^2 - 16x; \quad f'(x) = 0;$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ и } x^2 + 3x - 4 = 0;$$

$$D = 9 + 16 = 25; \quad x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

**№ 810.**

$$1) ((x^2-x)(x^3+x))' = (x^2-x)'(x^3+x) + (x^2-x)(x^3+x)' = (2x-1)(x^3+x) + (x^2-x)(3x^2+1) = 2x^4 + 2x^2 - x^3 - x + 3x^4 + x^2 - 3x^3 - x = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x;$$

$$2) \left( (x+2)\sqrt[3]{x} \right)' = (x+2)' \sqrt[3]{x} + (x+2) \left( \sqrt[3]{x} \right)' = 1 \cdot \sqrt[3]{x} + (x+2) \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x+2}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$3) \left( (x-1)\sqrt{x} \right)' = (x-1)' \sqrt{x} + (x-1) \left( \sqrt{x} \right)' = 1 \cdot \sqrt{x} + (x-1) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}.$$

**№ 811.**

$$1) f'(x) = \left( (x-1)^8(2-x)^7 \right)' = \left( (x-1)^8 \right)' (2-x)^7 + (x-1)^8 \left( (2-x)^7 \right)' = 8(x-1)^7 \cdot (2-x)^7 + (x-1)^8 \cdot 7(2-x)^6 \cdot (-1);$$

$$f'(1) = (1-1)^7(2-1)^7 + (1-1)^8 \cdot 7(2-1)^6(-1) = 0.$$

$$2) f'(x) = \left( (2x-1)^5(x+1)^4 \right)' = \left( (2x-1)^5 \right)' (x+1)^4 + (2x-1)^5 \left( (x+1)^4 \right)' = 5 \cdot 2(2x-1)^4(1+x)^4 + (2x-1)^5 \cdot 4(1+x)^3 = (2x-1)^4(1+x)^3(10x+10x+8x-4) = (2x-1)^4(1+x)^3(18x+6);$$

$$f'(1) = (2-1)^4(1+1)^3(18+6) = 1 \cdot 8 \cdot 24 = 192.$$

$$3) f'(x) = \left( (\sqrt{2-x})(3-2x)^8 \right)' = \left( \sqrt{2-x} \right)' (3-2x)^8 + \sqrt{2-x} \left( (3-2x)^8 \right)' = \frac{1}{2} \cdot (-1)(2-x)^{-\frac{1}{2}}(3-2x)^8 + \sqrt{2-x} \cdot 8 \cdot (3-2x)^7 \cdot (-2);$$

$$f' = \frac{1}{2}(-1)(2-1)^{-\frac{1}{2}}(3-2 \cdot 1)^8 + \sqrt{2-1} \cdot 8(3-2 \cdot 1)^7(-2) = -\frac{33}{2}.$$

$$4) f'(x) = \left( (5x-4)^6 \sqrt{3x-2} \right)' = \left( (5x-4)^6 \right)' \sqrt{3x-2} + (5x-4)^6 \left( \sqrt{3x-2} \right)' = 6 \cdot 5(5x-4)^5 \sqrt{3x-2} + (5x-4)^6 \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} = \frac{3(5x-4)^5}{\sqrt{3x-2}} \left( 10(3x-2) + \frac{(5x-4)}{2} \right) = \frac{3(5x-4)^5}{\sqrt{3x-2}} \cdot \left( \frac{65}{2}x - \frac{44}{2} \right)$$

$$f'(1) = \frac{3(5-4)^5}{\sqrt{3-2}} \cdot \left( \frac{65}{2} - \frac{44}{2} \right) = \frac{63}{2}.$$

**№ 812.**

$$1) y' = (x^3 + 2x^2 - 3x + 4)' = 3x^2 + 4x = 3.$$

Если пересекаются, то точки пересечения удовлетворяют уравнению:  
 $3x^2+4x-3=3x+1$ ,  $3x^2+x-4=0$ ,

$$D=1+48=49 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-1+7}{6} = 1 \\ y_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3} \\ y_2 = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -3 \end{cases}$$

Ответ: Пересекаются.

**№ 813.**

$$\begin{aligned} y' &= \left( (x-3)^5(2+5x)^6 \right)' = \left( (x-3)^5 \right)' (2+5x)^6 + (x-3)^5 \left( (2+5x)^6 \right)' = \\ &= 5(x-3)^4(2+5x)^6 + (x-3)^5 \cdot 6 \cdot 5(2+5x)^5 = \\ &= 5(x-3)^4 \left( (2+5x)^6 + 6(2+5x)^5 \right) = 5(x-3)^4 (2+5x)^5 (2+5x+6) = 5(x-3)^4 (2+5x)^5 (11x-16) \end{aligned}$$

$$y'=0 \Rightarrow 5(x-3)^4(2+5x)^5(11x-16)=0$$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ 2+5x=0 \\ 11x-16=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=3, \quad x_2=-\frac{2}{5}, \quad x_3=\frac{16}{11}$$

**№ 814.**

$$\begin{aligned} 1) \left( \frac{x^5+x^3+x}{x+1} \right)' &= \frac{(x^5+x^3+x)'(x+1) - (x^5+x^3+x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(5x^4+3x^2+1)(x+1) - (x^5+x^3+x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{5x^5+3x^3+x+5x^4+3x^2+1-x^5-x^3-x}{(x+1)^2} = \frac{4x^5+5x^4+2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \left( \frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1} \right)' &= \frac{(\sqrt{x}+x^2+1)'(x-1) - (\sqrt{x}+x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{\left( \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x \right)(x-1) - (\sqrt{x}+x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x} + 2x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x - \sqrt{x} - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{2x^2\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \end{aligned}$$

№ 815.

$$\begin{aligned} 1) f'(x) &= \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}; \\ f'(1) &= \frac{4 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) f'(x) &= \left( \frac{2x^2}{1-7x} \right)' = \frac{(2x^2)'(1-7x) - (2x^2)(1-7x)'}{(1-7x)^2} = \\ &= \frac{4x(1-7x) - 7(2x^2)}{(1-7x)^2} = \frac{4x - 28x^2 + 14x^2}{(1-7x)^2} = \frac{4x - 14x^2}{(1-7x)^2}; \\ f'(1) &= \frac{4-14}{(1-7)^2} = \frac{-10}{36} = -\frac{5}{18}. \end{aligned}$$

№ 816.

$$1) f(g) = g^{\frac{3}{2}} = (1-x)^{\frac{3}{2}}; \quad 2) f(g) = \sqrt{g} = \sqrt{\ln x}.$$

№ 817.

$$1) g = 2x^2 - 7, \quad f(g) = \sqrt{g}; \quad 2) g = (x^2 + 1), \quad f(g) = \sin g.$$

№ 818.

$$\begin{aligned} 1) \left( \frac{x^3 + x^2 + 16}{x} \right)' &= \frac{(x^3 + x^2 + 16)'x - (x^3 + x^2 + 16) \cdot (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{(3x^2 + 2x)x - (x^3 + x^2 + 16) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 + 2x^2 - x^3 - x^2 - 16}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 16}{x^2} \\ 2) \left( \frac{x^{\frac{3}{2}} + 3x + 18}{\sqrt[3]{x}} \right)' &= \frac{(x^{\frac{3}{2}} + 3x + 18)'(\sqrt[3]{x}) - (x^{\frac{3}{2}} + 3x + 18) \cdot (\sqrt[3]{x})'}{\sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \frac{\left( \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3 \right) \sqrt[3]{x} - (x^{\frac{3}{2}} + 3x + 18) \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \frac{\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x\sqrt[3]{x} + 9x - x\sqrt[3]{x} - 3x - 18}{3\sqrt[3]{x^4}} = \\ &= \frac{3x\sqrt[3]{x} + 6x - 18}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{x\sqrt[3]{x} + 2x - 6}{x\sqrt[3]{x}}. \quad (\text{Опечатка в ответе задачника}). \end{aligned}$$

№ 819.

$$1) \left( \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(x^2 - 4)' \sqrt{x} - (x^2 - 4) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} =$$
$$= \frac{2x\sqrt{x} - (x^2 - 4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x^2 - x^2 + 4}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + 4}{2x\sqrt{x}};$$

$$2) \left( \left( \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \left( \sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \right)' = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

(Опечатка в ответе задачника).

№ 820.

$$1) \left( (2x-3)^5 (3x^2+2x+1) \right)' =$$
$$= \left( (2x-3)^5 \right)' (3x^2+2x+1) + (2x-3)^5 (3x^2+2x+1)' =$$
$$= 5 \cdot 2(2x-3)^4 (3x^2+2x+1) + (2x-3)^5 (6x+2) =$$
$$= (2x-3)^4 (30x^2+20x+10+12x^2+4x-18x-6) = (2x-3)^4 (42x^2+6x+4);$$

$$2) \left( (x-1)^4 (x+1)^7 \right)' = \left( (x-1)^4 \right)' (x+1)^7 + (x-1)^4 \left( (x+1)^7 \right)' =$$
$$= 4(x-1)^3 (x+1)^7 + 7(x-1)^4 (x+1)^6 = (x-1)^3 (x+1)^6 (4x+4+7x-7) =$$
$$= (x-1)^3 (x+1)^6 (11x-3);$$

$$3) \left( \sqrt[4]{3x+2} (3x-1)^4 \right)' = \left( \sqrt[4]{3x+2} \right)' (3x-1)^4 + \sqrt[4]{3x+2} \left( (3x-1)^4 \right)' =$$
$$= \frac{3 \cdot (3x-1)^4}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}} + \sqrt[4]{3x+2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot (3x-1)^3 = \frac{3(3x-1)^4 + 48(3x+2)(3x-1)^3}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}} =$$

$$= \frac{(3x-1)^3}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}} (9x-3+144x+96) = \frac{3(3x-1)^3}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}} (51x+31);$$

$$4) \left( \sqrt[3]{2x+1} \cdot (2x-3)^3 \right)' = \left( \sqrt[3]{2x+1} \right)' (2x-3)^3 + \sqrt[3]{2x+1} \left( (2x-3)^3 \right)' =$$
$$= \frac{2(2x-3)^3}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \sqrt[3]{2x+1} \cdot 2 \cdot 3(2x-3)^2 =$$

$$= \frac{2(2x-3)^2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} (2x-3+18x+9) = \frac{2(2x-3)^2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} (20x+6) =$$

$$= \frac{4(2x-3)^2 (10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$$

№ 821.

$$\begin{aligned} 1) \left( \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1} \right)' &= \frac{(2x^2 - 3x + 1)'(x + 1) - (2x^2 - 3x + 1)(x + 1)'}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{(4x - 3)(x + 1) - (2x^2 - 3x + 1)}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{4x^2 + 4x - 3x - 3 - 2x^2 + 3x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 4}{(x + 1)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \left( \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x + 1} \right)' &= \frac{(3x^2 + 2x - 1)'(2x + 1) - (3x^2 + 2x - 1)(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} = \\ &= \frac{(6x + 2)(2x + 1) - 2(3x^2 + 2x - 1)}{(2x + 1)^2} = \\ &= \frac{12x^2 + 6x + 4x + 2 - 6x^2 - 4x + 2}{(2x + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6x + 4}{(2x + 1)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{2-x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-x} &= \frac{(2-x)^2 + (\sqrt{x})^2}{(2-x)\sqrt{x}} = \frac{4-4x+x^2+x}{2\sqrt{x}-x\sqrt{x}} = \frac{x^2-3x+4}{2\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \\ \left( \frac{x^2-3x+4}{2\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \right)' &= \frac{(x^2-3x+4)'(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}) - (x^2-3x+4)(2\sqrt{x}-x\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x}-x\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{(2x-3)(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}) - (x^2-3x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}{(2\sqrt{x}-x\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{4x\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 3x\sqrt{x} - x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - \frac{9}{2}x\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-x\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x}-x\sqrt{x})^2} = \frac{-x^3 + 3x^2 + 6x - 8}{2x\sqrt{x} \cdot (2-x)^2}. \end{aligned}$$

№ 822.

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 1)' = 6x^2 - 6x - 12; \quad f'(0) = 6x^2 - 6x - 12 = 0; \quad x^2 - x - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 8 = 9; \quad x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

№ 823.

$$f'(x) = \left( \frac{2x-1}{x+1} \right)' = \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$



$$= \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2};$$

$$f'(x)=3 \Rightarrow (x+1)^2=1; \quad x^2+x+1=1; \quad x(x+2)=0; \quad x_1=0; \quad x_2=-2.$$

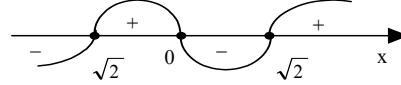
№ 824.

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=(x^2-3x+2)(x-3)=x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6=x^3-6x^2+11x-6$$

$$f'(x)=3x^2-12x+11, \quad f'(x)=11 \Rightarrow 3x^2-12x+11=11; \quad x(3x-12)=0; \quad x_1=0, \quad x_2=4.$$

№ 825.

$$1) f'(x)=4x^3-8x, \quad f'(x)>0, \quad 4x^3-8x>0 \quad 4x(x^2-2)>0$$

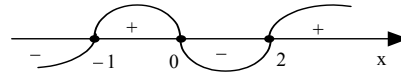


$$x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

$$2) f'(x)=12x^3-12x^2-24x \quad f'(x)>0, \quad 12x(x^2-x-2)>0$$

$$\text{Решим уравнение: } x(x^2-x-2)=0, \quad x=0, \quad x^2-x-2=0, \quad D=1+8=9,$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1,$$

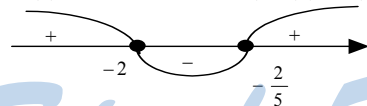


$$x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty).$$

$$3) f'(x) = \left( (x+2)^2 \sqrt{x} \right)' = \left( (x+2)^2 \right)' \sqrt{x} + (x+2)^2 \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= 2(x+2)\sqrt{x} + (x+2)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x+2}{2\sqrt{x}} (4x+x+2) = \frac{(x+2)(5x+2)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)>0 \quad \sqrt{x}>0 \Rightarrow (x+2)(5x+2)>0 \quad x>0$$



$$\text{учитывая, } x>0 \quad x \in (0; +\infty);$$

$$4) f'(x) = \left( (x-3)\sqrt{x} \right)' = (x-3)' \sqrt{x} + (x-3) \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= \sqrt{x} + (x-3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}};$$

$$2\sqrt{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \text{ если } 3x-3 > 0 \quad x > 1.$$

$$\text{Учитывая, что } x > 0, \text{ получим } x \in (1; +\infty).$$

№ 826.

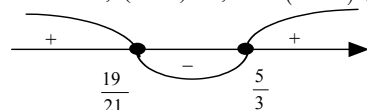
$$1) f'(x) = \left( (5-3x)^4 (3x-1)^3 \right)' = \left( (5-3x)^4 \right)' (3x-1)^3 + (5-3x)^4 \left( (3x-1)^3 \right)' =$$

$$= 4 \cdot (-3) (5-3x)^3 (3x-1)^3 + 3 \cdot 3 (5-3x)^4 (3x-1)^2 =$$

$$= 3(5-3x)^3 (3x-1)^2 (-12x+4+15-9x) = 3(5-3x)^3 (3x-1)^2 (19-21x)$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } 3(5-3x)^3(3x-1)^2(19-21x) < 0.$$

Т.к.  $3 > 0$ ,  $(3x-1)^2 > 0$ , то  $(5-3x)^3(19-21x) < 0$ .



$$\text{Ответ: } x \in \left( \frac{19}{21}; \frac{5}{3} \right).$$

$$\begin{aligned} 2) f'(x) &= ((2x-3)^2(3-2x)^3)' = -(2x-3)^2(2x-3)^3 = -(2x-3)^5 = \\ &= -5 \cdot 2(2x-3)^4 = -10(2x-3)^4, \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } -10(2x-3)^4 < 0 \Rightarrow (2x-3)^4 > 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x \neq \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} 3) f'(x) &= \left( \frac{3x^2-1}{1-2x} \right)' = \frac{(3x^2-1)'(1-2x) - (3x^2-1)(1-2x)'}{(1-2x)^2} = \\ &= \frac{6x(1-2x) + 2(3x^2-1)}{(1-2x)^2} = \frac{6x - 12x^2 + 6x^2 - 2}{(1-2x)^2} = \frac{-6x^2 + 6x - 2}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) < 0$  при  $-2(3x^2-3x+1) < 0$ ,  $3x^2-3x+1 > 0$ . Решим соответствующее уравнение.

$$D = 9 - 12 < 0 - \text{нет решений, следовательно, } f'(x) < 0 \text{ при всех } x, \text{ кроме } \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x \neq \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 4) f'(x) &= \left( \frac{3x^3}{1-3x} \right)' = \frac{(3x^3)'(1-3x) - 3x^3(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{9x^2(1-3x) + 9x^3}{(1-3x)^2} = \\ &= \frac{9x^2 - 27x^3 + 9x^3}{(1-3x)^2} = \frac{9x^2 - 18x^3}{(1-3x)^2}, \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0 \text{ если } 9x^2(1-2x) < 0; \quad (1-2x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } x > \frac{1}{2}.$$

**№ 827.**

$$v(t) = (\varphi(t))' = (0,1t^2 - 0,5t + 0,2)' = 0,2t - 0,5,$$

$$v(20) = 0,2 \cdot 20 - 0,5 = 4 - 0,5 = 3,5.$$

№ 828.

$$v(t)=(s(t))'=(1-t+t^2)'=-1+2t, \quad v(10)=-1+2 \cdot 10=19(\text{м/с}),$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{5 \cdot (19)^2}{2} = 902,5 \text{ Дж.}$$

№ 829.

$$\rho(l)=m'(l)=(2l^2+3l)'=4l+3,$$

$$1) \rho(3)=4 \cdot 3+3=15 \text{ (Г/см);} \quad 2) \rho(25)=4 \cdot 25+3=103 \text{ (Г/см).}$$

№ 830.

При  $x < 2$  и  $x > 3$  подкоренное выражение положительно.

$$f'(x) = \left( (x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (x^2 - 5x + 6)^{-\frac{1}{2}} (2x - 5) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

## § 47 Производные некоторых элементарных функций

№ 831.

$$1) (e^{x+1})' = e^x; \quad 3) \left( e^{2x} + \frac{1}{x} \right)' = (e^{2x})' + \left( \frac{1}{x} \right)' = 2e^{2x} - \frac{1}{x^2};$$

$$2) (e^x + x^2)' = e^x + 2x; \quad 4) (e^{-3x} + \sqrt{x})' = (e^{-3x})' + (\sqrt{x})' = -3e^{-3x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

№ 832.

$$1) (e^{2x+1} + 2x^3)' = (e^{2x+1})' + (2x^3)' = 2e^{2x+1} + 6x^2;$$

$$2) (e^{\frac{1}{2}x-1} - \sqrt{x-1})' = (e^{\frac{1}{2}x-1})' - (\sqrt{x-1})' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}};$$

$$3) \left( e^{0,3x+2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = (e^{0,3x+2})' + \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 0,3e^{0,3x+2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}};$$

$$4) (e^{1-x} + x^{-3})' = (e^{1-x})' + (x^{-3})' = -e^{1-x} - 3x^{-4};$$

$$5) (e^{x^2})' = 2x \cdot e^{x^2}; \quad 6) (e^{2x^3})' = 6x^2 \cdot e^{2x^3};$$

№ 833.

$$1) (2^x + e^x)' = 2^x \ln 2 + e^x$$

$$2) (3^x - x^{-2})' = 3^x \ln 3 + 2x^{-3} \quad (\text{опечатка в ответе задачника})$$

$$3) (e^{2x-x})' = 2e^{2x} - 1; \quad 4) (e^{3x+2x^2})' = 3e^{3x+4x}$$

$$5) (3^{x^2+2})' = (9 \cdot 3^{x^2})' = 18x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3 = 2x \cdot 3^{x^2+2} \cdot \ln 3$$

(Опечатка в ответе задачника).

№ 834.

$$1) (0,5^x + e^{3x})' = 0,5^x \ln 0,5 + 3e^{3x}; \quad 2) (3^x - e^{2x})' = 3^x \ln 3 - 2e^{2x};$$
$$3) (e^{2-x} + \sqrt[3]{x})' = -e^{2-x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad 4) \left(e^{3-x} + \frac{1}{x^4}\right)' = -e^{3-x} - \frac{4}{x^5}.$$

№ 835.

$$1) (2 \ln x + 3^x)' = \frac{2}{x} + 3^x \ln 3; \quad 2) (3 \ln x - 2^x)' = \frac{3}{x} + 2^x \ln 2;$$
$$3) \left(\log_2 x + \frac{1}{2x}\right)' = \frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{2x^2}; \quad 4) (3x^{-3} - \log_3 x)' = -9x^{-4} - \frac{1}{x \ln 3};$$
$$5) \left(\ln(x^2 - 2x)\right)' = \frac{1 \cdot (x^2 - 2x)'}{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x};$$
$$6) \left((3x^2 - 2) \log_3 x\right)' = (3x^2 - 2)' \log_3 x + (3x^2 - 2) (\log_3 x)' =$$
$$= 6x \log_3 x + \frac{3x^2 - 2}{x \ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} + \frac{3x^2 - 2}{x \ln 3} = \frac{3x^2(2 \ln x + 1) - 2}{x \ln 3} =$$
$$= \frac{3x(2 \ln x + 1)}{\ln 3} - \frac{2}{x \ln 3}.$$

№ 836.

$$1) (\sin x + x^2)' = \cos x + 2x; \quad 3) (\cos x + e^x)' = -\sin x + e^x;$$
$$2) (\cos x - 1)' = -\sin x + 0 = -\sin x; \quad 4) (\sin x - 2^x)' = \cos x - 2^x \ln 2.$$

№ 837.

$$1) (\sin(2x-1))' = 2 \cos(2x-1) \quad 3) (\sin(3-x))' = -\cos(3-x);$$
$$2) (\cos(x+2))' = -\sin(x+2) \quad 4) (\cos(x^3))' = 3x^2 \cdot (-\sin(x^3)) = -3x^2 \sin x^3.$$

№ 838.

$$1) \left(\cos\left(\frac{x}{2}-1\right) + e^{3x}\right)' = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}-1\right) + 3e^{3x}$$
$$2) \left(\sin\left(\frac{x}{3}+3\right) + 2^x\right)' = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}+3\right) + 2^x \ln 2$$
$$3) \left(3 \cos 4x - \frac{1}{2x}\right)' = -12 \sin 4x + \frac{1}{2x^2}$$

№ 839.

$$1) \left(\frac{\cos x}{e^x}\right)' = \frac{(\cos x)' e^x - \cos x \cdot (e^x)'}{e^{2x}} =$$
$$= \frac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-\sin x - \cos x}{e^x};$$

$$2) \left( \frac{3^x}{\sin x} \right)' = \frac{(3^x)' \sin x - 3^x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot \sin x - 3^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \sin x - \cos x)}{\sin^2 x};$$

$$3) (\ln x \cdot \cos 3x)' = (\ln x)' \cos 3x + \ln x \cdot (\cos 3x)' = \frac{\cos 3x}{x} + \ln x \cdot 3(-\sin 3x) =$$

$$= \frac{\cos 3x}{x} - 3 \ln x \cdot \sin 3x;$$

$$4) (\log_2 x \cdot \sin 2x)' = (\log_2 x)' \sin 2x + \log_2 x (\sin 2x)' =$$

$$= \frac{1}{x \ln 2} + \sin 2x + \log_2 x \cdot 2 \cos 2x = \frac{\sin 2x}{x \ln 2} + 2 \log_2 x \cos 2x.$$

**№ 840.**

$$1) f'(x) = (e^{2x-4} + 2 \ln x)' = 2e^{2x-4} + \frac{2}{x}, \quad f'(2) = 2e^{2 \cdot 2 - 4} + \frac{2}{2} = 2 + 1 = 3;$$

$$2) f'(x) = (e^{3x-2} - \ln(3x-1))' = 3e^{3x-2} - \frac{3}{3x-1},$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3e^{3 \cdot \frac{2}{3} - 2} - \frac{3}{3 \cdot \frac{2}{3} - 1} = 3 - 3 = 0;$$

$$3) f'(x) = (2^x - \log_2 x)' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 2},$$

$$f'(1) = 2^1 \ln 2 - \frac{1}{1 \cdot \ln 2} = 2 \ln 2 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{2 \ln^2 2 - 1}{\ln 2};$$

$$4) f'(x) = (\log_{0,5} x - 3^x)' = \frac{1}{x \ln 0,5} - 3^x \ln 3,$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 0,5} - 3^1 \ln 3 = \frac{1}{\ln 0,5} - 3 \ln 3.$$

**№ 841.**

$$1) f'(x) = (x - \cos x)' = 1 + \sin x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) f'(x) = \left(\frac{1}{2}x - \sin x\right)' = \frac{1}{2} - \cos x,$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0, \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) f'(x) = (2 \ln(x+3) - x)' = \frac{2}{x+3} - 1 = \frac{2-x-3}{x+3} = \frac{-x-1}{x+3},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -(x+1) = 0, \Rightarrow x = -1;$$

$$4) f'(x) = (\ln(x+1) - 2x)' = \frac{1}{x+1} - 2,$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } \frac{1}{x+1} - 2 = 0, \text{ т.е. } x+1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2};$$

$$5) f'(x) = (x^2 + 2x - 12 \ln x)' = 2x + 2 - \frac{12}{x}, f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 - \frac{12}{x} = 0 \quad x \neq 0,$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0, \quad D = 1 + 24 = 25, \quad x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Т.к.  $x > 0 \Rightarrow x = 2$ .

$$6) f'(x) = (x^2 - 6x - 8 \cdot \ln x)' = 2x - 6 - \frac{8}{x}, f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 - \frac{8}{x} = 0, \quad x \neq 0,$$

$$2x^2 - 6x - 8 = 0; \quad x^2 - 3x - 4 = 0; \quad D = 9 + 16 = 25, \quad x_1 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = -1,$$

$x > 0 \Rightarrow x = 4$ .

### № 842.

$$1) f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1, \quad f'(x) > 0 \text{ при } e^x - 1 > 0, \text{ т.е. } e^x > 1$$

или  $e^x > e^0$ , откуда  $x > 0$ ;

$$2) f'(x) = (x \ln 2 - 2^x)' = \ln 2 - 2^x \ln 2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } \ln 2(1 - 2^x) > 0,$$

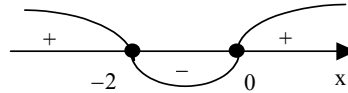
т.к.  $\ln 2 > 0$ , то  $1 - 2^x > 0$  или  $2^x < 1$ ,

$$2^x < 2^0, \text{ откуда } x < 0;$$

$$3) f'(x) = (e^x \cdot x^2)' = e^x \cdot x^2 + 2xe^x,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } e^x(x^2 + 2x) > 0, \quad e^x > 0, \quad x(x+2) > 0$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .



$$4) f'(x) = (e^x \sqrt{x})' = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } e^x \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2x}\right) > 0,$$

т.к.  $e^x \sqrt{x} > 0$ , то  $1 + \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ .  $f'(x) > 0$  и  $x > 0$ . Ответ:  $x > 0$ .



### № 843.

$$1) \left( \sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln \frac{2x+3}{5} \right)' = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2x-1}} + \frac{2 \cdot 5}{5(2x+3)} = \frac{1}{\sqrt{6x-3}} + \frac{2}{2x+3}$$

$$2) \left( \sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2 \ln \frac{2-5x}{3} \right)' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}} - \frac{2 \cdot 3 \cdot (-5)}{(2-5x) \cdot 3} = -\frac{\sqrt{6}}{12\sqrt{1-x}} + \frac{10}{2-5x}$$

$$3) \left( 2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos\frac{1-x}{2} \right)' = 2 \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) e^{\frac{1-x}{3}} + 3 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\sin\frac{1-x}{2} \right) =$$

$$= -\frac{2}{3} e^{\frac{1-x}{3}} + \frac{3}{2} \sin\frac{1-x}{2}.$$

$$4) \left( 3e^{\frac{2-x}{3}} - 2\sin\frac{1+x}{4} \right)' = 3 \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) e^{\frac{2-x}{3}} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cos\frac{1+x}{4} = -e^{\frac{2-x}{3}} - \frac{1}{2} \cos\frac{1+x}{4}.$$

№ 844.

$$1) \left( \sqrt[3]{\frac{3}{2-x}} - 3\cos\frac{x-2}{3} \right)' = \left( \sqrt[3]{3} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{3}} - 3\cos\frac{x-2}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{3} \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot (-1) \cdot (2-x)^{-\frac{4}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{3} \left( -\sin\frac{x-2}{3} \right) = \frac{1}{(2-x)\sqrt[3]{(2-x) \cdot 9}} + \sin\frac{x-2}{3}.$$

$$2) \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}} \right)' = \left( 2 \cdot \left( -\frac{3}{4} \right) (x+2)^{-\frac{7}{4}} - 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{x-4}{5}} \right) =$$

$$= -\frac{3}{2} (x+2)^{-\frac{7}{4}} - e^{\frac{x-4}{5}}.$$

№ 845.

$$1) \left( 0,5^x \cdot \cos 2x \right)' = \left( 0,5^x \right)' \cos 2x + 0,5^x (\cos 2x)' =$$

$$= 0,5^x \ln 0,5 \cos 2x + 0,5^x \cdot 2 \cdot (-\sin 2x) = 0,5^x (\ln 0,5 \cos 2x - 2 \sin 2x).$$

$$2) \left( 5\sqrt{x} \cdot e^{-x} \right)' = 5 \left( (\sqrt{x})' e^{-x} + \sqrt{x} (e^{-x})' \right) =$$

$$= 5 \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} - \sqrt{x} \cdot e^{-x} \right) = 5e^{-x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \frac{5e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}.$$

$$3) \left( e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x) \right)' = \left( e^{3-2x} \right)' \cos(3-2x) + e^{3-2x} (\cos(3-2x))' =$$

$$= -2 e^{3-2x} \cos(3-2x) - 2 e^{3-2x} \cdot (-\sin(3-2x)) =$$

$$= -2e^{3-2x} (\cos(3-2x) - \sin(3-2x)) = 2e^{3-2x} (\sin(3-2x) - \cos(3-2x)).$$

№ 846.

$$1) \left( \ln \sqrt{x-1} \right)' = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2(x-1)}.$$

$$2) \left( e^{\sqrt{3+x}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} e^{\sqrt{3+x}} \text{ (опечатка в ответе задачника).}$$

$$3) \left( \ln(\cos x) \right)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x. \quad 4) \left( \ln(\sin x) \right)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

№ 847.

$$1) (2^{\cos x + 1})' = 2^{\cos x + 1} \cdot \ln 2 \cdot (-\sin x). \quad 2) (0,5^{1 + \sin x})' = 0,5^{1 + \sin x} \cdot \ln 0,5 \cdot \cos x.$$

$$3) (\cos \sqrt[3]{x+2})' = -\sin \sqrt[3]{x+2} \cdot \frac{1}{3} (x+2)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sin \sqrt[3]{x+2}}{3 \sqrt[3]{(x+2)^2}}.$$

$$4) (\sin(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

№ 848.

$$1) (\sqrt{x^2 + 2x - 1})' = \frac{(2x + 2)}{2\sqrt{x^2 + 2x - 1}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

$$2) (\sqrt[3]{\sin x})' = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}. \quad 3) (\sqrt[4]{\cos x})' = \frac{1 \cdot (-\sin x)}{4\sqrt[4]{\cos x}} = -\frac{\sin x}{4\sqrt[4]{\cos x}}.$$

$$4) (\sqrt{\log_2 x})' = \frac{1}{2\sqrt{\log_2 x} \cdot x \ln 2} = \frac{1}{2x \ln 2 \cdot \sqrt{\log_2 x}}$$

№ 849.

$$1) \left( \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(1 + \cos x)' \sin x - (1 + \cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - (1 + \cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$$

$$2) \left( \frac{\sqrt{3x}}{3^x + 1} \right)' = \frac{(\sqrt{3x})'(3^x + 1) - \sqrt{3x}(3^x)'}{(3^x + 1)^2} =$$
$$= \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}(3^x + 1) - \sqrt{3x}(3^x \ln 3)}{(3^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 3^x + 3 - 2 \cdot 3x \cdot 3^x \ln 3}{2\sqrt{3x}(3^x + 1)^2} = \frac{3^{x+1}(1 - 2x \ln 3) + 3}{2\sqrt{3x}(3^x + 1)^2}$$

$$3) \left( \frac{e^{0,5x}}{\cos 2x - 5} \right)' = \frac{(e^{0,5x})'(\cos 2x - 5) - e^{0,5x}(\cos 2x - 5)'}{(\cos 2x - 5)^2} =$$
$$= \frac{0,5e^{0,5x}(\cos 2x - 5) + 2e^{0,5x} \sin 2x}{(\cos 2x - 5)^2} = \frac{0,5e^{0,5x}(\cos 2x - 5 + 4 \sin 2x)}{(\cos 2x - 5)^2}$$

$$4) \left( \frac{5^{2x}}{\sin 3x + 7} \right)' = \frac{(5^{2x})'(\sin 3x + 7) - (5^{2x})(\sin 3x + 7)'}{(\sin 3x + 7)^2} =$$
$$= \frac{2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 (\sin 3x + 7) - 5^{2x} \cdot 3 \cdot \cos 3x}{(\sin 3x + 7)^2} = \frac{5^{2x}(2 \cdot \ln 5 \cdot \sin 3x + 14 \ln 5 - 3 \cos 3x)}{(\sin 3x + 7)^2}$$



№ 850.

$$\begin{aligned} 1) \left( \frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)' &= \frac{(e^x - e^{-x})'x - (e^x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \\ &= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot x - (e^x - e^{-x}) \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot x + e^{-x} \cdot x - e^x + e^{-x}}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + e^{-x}(x+1)}{x^2}; \\ 2) \left( \frac{2^x - \log_2 x}{\ln 2 \cdot x} \right)' &= \frac{(2^x - \log_2 x)' \cdot \ln 2 \cdot x - (2^x - \log_2 x)(\ln 2 \cdot x)'}{x^2 \cdot \ln^2 2} = \\ &= \frac{(2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 2}) \cdot \ln 2 \cdot x - (2^x - \log_2 x) \cdot \ln 2}{\ln^2 2 \cdot x^2} = \frac{x \cdot 2^x \ln 2 - \frac{1}{\ln 2} - 2^x + \log_2 x}{x^2 \cdot \ln^2 2}. \end{aligned}$$

№ 851.

$$\begin{aligned} 1) \left( \frac{\sin x - \cos x}{x} \right)' &= \frac{(\sin x - \cos x)' \cdot x - (\sin x - \cos x) \cdot (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x) \cdot x - (\sin x - \cos x) \cdot 1}{x^2} = \\ &= \frac{\cos x \cdot x + \sin x \cdot x - \sin x + \cos x}{x^2} = \frac{\cos x(x+1) + \sin x(x-1)}{x^2} \\ 2) \left( \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} \right)' &= \left( \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin x - \cos x} \right)' = (\sin x - \cos x)' = \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

№ 852.

$$\begin{aligned} 1) f'(x) &= (5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} \cos 5x)' = \\ &= 5(\cos x + \sin x) + \sqrt{2} \cdot 5 \cdot (-\sin 5x) = 5(\cos x + \sin x - \sqrt{2} \sin 5x) = \\ &= 5 \left( \cos x + \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - \sqrt{2} \sin 5x \right) = \\ &= 5 \left( 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin 5x \right) = 5\sqrt{2} \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin 5x \right) = \\ &= 5\sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4} + 5x}{2} = 10\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{8} - 2x \right) \cos \left( \frac{\pi}{8} + 3x \right) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{ при } \sin \left( \frac{\pi}{8} - 2x \right) \cos \left( \frac{\pi}{8} + 3x \right) = 0,$$

$$\text{Откуда: } \begin{cases} \frac{\pi}{8} - 2x = \pi n \\ \frac{\pi}{8} + 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in Z \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
2) f''(x) &= (1 - 5 \cos 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2x)' = \\
&= 10 \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) - 2 = 10 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2(\cos x + \sin x) - 2 = \\
&= 10\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) + 2(\cos x + \sin x) - 2 = \\
&= 10\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right) + 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 = \\
&= 20\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 12
\end{aligned}$$

$$f'(x)=0, \text{ если } 20\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 12 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = t, 20t^2 + 2\sqrt{2}t - 12 = 0 \text{ или } 10t^2 + \sqrt{2}t - 6 = 0 \quad D = 2 + 240 = 242 = 2 \cdot 121$$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{2} + 11\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad t_2 = \frac{-\sqrt{2} - 11\sqrt{2}}{20} = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} \vee 1; \quad \frac{9 \cdot 2}{25} \vee 1; \quad 18 < 25 \Rightarrow \left| \frac{3\sqrt{2}}{5} \right| < 1$$

$$\text{Следовательно, } -\frac{3\sqrt{2}}{5} > -1. \quad \frac{\pi}{4} - x_1 = \pm \arccos\left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right) + 2\pi n,$$

$$n \in Z \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\frac{\pi}{4} - x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z \Rightarrow x_2 = 2\pi k, \quad k \in Z, \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z$$

№ 853.

$$\begin{aligned}
1) f'(x) &= (e^{2x} \ln(2x-1))' = (e^{2x})' \cdot \ln(2x-1) + e^{2x} (\ln(2x-1))' = \\
&= 2e^{2x} \ln(2x-1) + \frac{2e^{2x}}{2x-1} = 2e^{2x} \left( \ln(2x-1) + \frac{1}{2x-1} \right),
\end{aligned}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow e^{2x} \ln(2x-1)=0, \quad e^{2x}>0, \quad \text{так что } \ln(2x-1)=0, \quad \ln(2x-1)=\ln 1;$$

$$2x-1=1; \quad x=1, \quad f'(1) = 2e^{2 \cdot 1} \left( \ln(2 \cdot 1 - 1) + \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} \right) = 2e^2 \cdot (0+1) = 2e^2.$$

$$2) f'(x) = \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\sin x - \cos x)' \sin x - (\sin x - \cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)\sin x - (\sin x - \cos x)\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin x + \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} \right) = 0$$

Область определения функции  $\sin x \neq 0 \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$1 - \operatorname{ctg} x = 0 \quad \operatorname{ctg} x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Т.к. в  $f'(x)$   $\sin$  входит в квадрате, то  $f'(x)$  во всех точках  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ , будет

иметь одно и то же значение.

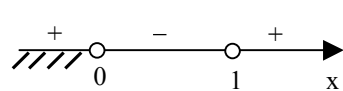
**№ 854.**

$$f'(x) = (x \sin 2x)' = (x)' \sin 2x + x(\sin 2x)' = \sin 2x + 2x \cos 2x$$

$$y(x) = f'(x) + f(x) + 2 = \sin 2x + 2x \cos 2x + x \sin 2x + 2$$

$$y(\pi) = \sin 2\pi + 2\pi \cos 2\pi + \pi \sin 2\pi + 2 = 0 + 2\pi + 0 + 2 = 2(1 + \pi).$$

**№ 855.**



$$1) f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 1; \quad f'(x) > 0,$$

$$\frac{x-1}{x} > 0, \quad x(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (1; +\infty);$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (0; 1);$$



$$2) f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0, \quad \ln x + 1 = 0, \quad \ln x = -1,$$

$$\ln x = \ln e^{-1}, \quad x = e^{-1}.$$

$$f'(x) > 0, \quad \ln x + 1 > 0, \quad \ln x > -1 = \ln e^{-1};$$

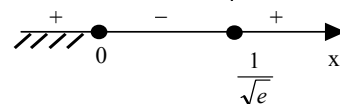
$$x > e^{-1} \quad x \in (e^{-1}; +\infty); \quad f'(x) < 0 \text{ при } x \in (0; e^{-1});$$

$$3) f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \quad x(2 \ln x + 1) = 0 \quad x = 0 \text{ и } \ln x = -\frac{1}{2} = \ln e^{-\frac{1}{2}} \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f'(x) > 0 \quad x(2 \ln x + 1) > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad x > 0$$

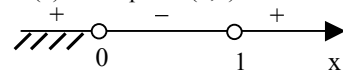


$$4) f'(x) = (x^3 - 3 \ln x)' = 3x^2 - \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = 0, 3x^2 - \frac{3}{x} = 0, 3x^3 - 3 = 0, x^3 = 1, x = 1; f'(x) > 0, 3x^2 - \frac{3}{x} > 0, \frac{3x^3 - 3}{x} > 0$$

$$3x(x^3 - 1) > 0 \text{ при } x \in (1; +\infty);$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (0; 1).$$



**№ 856.**

При  $x < 2$  и  $x > 3$  выражение под знаком логарифма положительно

$$(\ln(x^2 - 5x + 6))' = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot (2x - 5).$$

### § 48 Геометрический смысл производной

**№ 857.**

$$1) k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, x_0 = 2, y_0 = -3, \text{ т.е. } -3 = 1 \cdot 2 + b, b = -5;$$

$$2) k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, x_0 = -3, y_0 = 2, \text{ т.е. } 2 = 1 \cdot (-3) + b, b = 5;$$

$$3) k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, x_0 = 1, y_0 = 1, \text{ т.е. } 1 = -\sqrt{3} \cdot 1 + b, b = 1 + \sqrt{3};$$

$$4) k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_0 = -1, y_0 = -1, \text{ т.е. } -1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-1) + b, b = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$$

1

**№ 858.**

$$1) f'(x) = 3x^2; \quad k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 = 3;$$

$$2) f'(x) = \cos x; \quad k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) f'(x) = \frac{1}{x}; \quad k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$4) f'(x) = e^x; \quad k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = e^{\ln 3} = 3.$$

**№ 859.**

$$1) f'(x) = x^2; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 1^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$2) f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = -\frac{1}{1^2} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4};$$

$$3) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6};$$

$$4) f'(x) = -\frac{9}{x\sqrt{x}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = -\frac{9}{3\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3};$$

$$5) f'(x) = \frac{3}{2} e^{\frac{3x+1}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{3}{2} \sqrt{e} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} \sqrt{e} \right);$$

$$6) f'(x) = \frac{2}{2x+1}; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{5}.$$

**№ 860.**

$$1) f(x_0) = 1^2 + 1 + 1 = 3, \quad f'(x) = 2x + 1, \quad f'(x_0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = 3 + 3(x - 1), \quad y = 3 + 3x - 3, \quad y = 3x;$$

$$2) f(x_0) = 2 - 3 \cdot 2^2 = -10, \quad f'(x) = 1 - 6x, \quad f'(x_0) = 1 - 6 \cdot 2 = -11,$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = -10 - 11(x - 2), \quad y = -10 - 11x + 22, \quad y = 12 - 11x.$$

$$3) f(x_0) = \frac{1}{3}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(x_0) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 3) \quad y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{3} \quad y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3};$$

$$4) f(x_0) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}, \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad f'(x_0) = -\frac{2}{(-2)^3} = \frac{1}{4},$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x + 2) \quad y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4};$$

$$5) f(x_0) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'(x) = \cos x, \quad f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{\pi}{4} \right), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8};$$

$$6) f(x_0) = e^0 = 1, \quad f'(x) = e^x, \quad f'(x_0) = e^0 = 1, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = 1 + 1(x - 0), \quad y = x + 1;$$

$$7) f(x_0) = \ln 1 = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = 0 + 1(x - 1), \quad y = x - 1;$$

$$8) f(x_0) = \sqrt{1} = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2},$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1), \quad y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}(x + 1).$$

**№ 861.**

$$1) f'(x) > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}], f'(x) < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; 0],$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0;$$

рис. а; а)  $f'(x) > 0$ : А, В, Е; б)  $f'(x) < 0$ : D, G; в)  $f'(x) = 0$ : C, F.

рис. б; а)  $f'(x) > 0$ : C, G; б)  $f'(x) < 0$ : А, Е; в)  $f'(x) = 0$ : B, D, F.

**№ 862.**

$$1) f(0) = 0 + \frac{1}{0+1} = 1, f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, f'(0) = 1 - \frac{1}{(0+1)^2} = 0,$$

$$y = 1 + 0 \cdot (x-0), \quad \underline{y=1.}$$

$$2) f(0) = \sin 0 - \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{x+1}, \quad f'(0) = 2\cos 0 - \frac{1}{1} = 1,$$

$$y = 0 + 1 \cdot (x-0), \quad \underline{y=x.}$$

**№ 863.**

$$1) f'(x) = 1 - e^x, f'(0) = 1 - e^0 = 0, \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ;$$

$$2) f'(x) = -\sin x, f'(0) = -\sin 0 = 0, \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ;$$

$$3) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 0 \cdot e^2 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

**№ 864.**

1) а) Абсцисса точки пересечения графиков:

$$8-x = 4\sqrt{x+4}; \quad 64-16x+x^2 = 16x+64; \quad x^2-32x=0; \quad x(x-32)=0$$

$x_1=0$   $x_2=32$  – посторонний корень, т.к.  $8-x \geq 0$ ;  $x=0$ .

б) угол наклона первой касательной в точке  $x=0$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0) = (8-x)' = -1, \quad \alpha_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

в) угол наклона второй касательной:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0) = \frac{4}{2\sqrt{x_0+4}} = \frac{2}{\sqrt{x_0+4}} = \frac{2}{2} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{г) } \beta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

2) а) Абсцисса точки пересечения графиков:

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2; \quad \frac{1}{2}(x^2+2x+1-x^2+2x-1) = 0; \quad 2x=0, \quad \underline{x=0};$$

б) угол наклона первой касательной при  $x=0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot 2(x_0+1) = (x_0+1) = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4};$$

в) угол наклона касательной к  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$  при  $x = 0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot 2(x_0-1) = x_0-1 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{г) } \beta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

3. а) Абсцисса точек пересечения графиков:

$$\ln(1+x) = \ln(1-x) \Rightarrow 1+x=1-x, \quad 2x=0, \quad x=0$$

б) угол наклона касательной к  $y = \ln(1+x)$  при  $x = 0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0) = \frac{1}{1+x_0} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

в) угол наклона касательной к  $y = \ln(1-x)$  при  $x = 0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0) = \frac{-1}{1-x_0} = -1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{г) } \beta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

4) а) Абсцисса точек пересечения :

$$e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x, \quad x=0$$

б) угол наклона касательной к  $y = e^x$  при  $x = 0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0) = e^x = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

в) угол наклона касательной к  $y = e^{-x}$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0) = -e^{-x_0} = -1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{г) } \beta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

№ 865.

1. а) Точка пересечения:  $x^4 = x^6 + 2x^2$ ,  $x^2(x^4 - x^2 + 2) = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,

$D = 1 - 8 < 0 \Rightarrow (0; 0)$  — единственная общая точка

б) Уравнение касательной к  $y = x^4$  в точке  $(0; 0)$ :

$$f(x_0) = 0^4 = 0, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f'(x_0) = 4 \cdot 0^3 = 0, \quad y = 0 + 0(x - 0) = 0, \quad y = 0;$$

в) Уравнение касательной к  $y = x^6 + 2x^2$  в точке  $(0; 0)$ :

$$f(x_0) = 0 + 0 = 0, \quad f'(x) = 6x^5 + 4x, \quad f'(x_0) = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0, \quad y = 0 + 0(x - 0) = 0, \quad y = 0.$$

Общая касательная  $y = 0$ .

2) а) Точка пересечения:  $x^4 = x^3 - 3x^2$ ,  $x^2(x^2 - x + 3) = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,

$D = 1 - 12 < 0 \Rightarrow (0; 0)$  — единственная общая точка;

б) Уравнение касательной к  $y = x^4$  в точке  $(0; 0)$ :

$$f'(x_0) = 0, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f'(x_0) = 0, \quad y = 0 + 0(x - 0) = 0, \quad y = 0;$$

в) Уравнение касательной к  $y = x^3 - 3x^2$  в точке  $(0; 0)$ :

$$f(x_0)=0, f'(x)=3x^2-6x, f'(x_0)=3\cdot 0-6\cdot 0=0, y=0+0(x-0)=0, y=0.$$

Общая касательная:  $y=0$ .

3) а) Точка пересечения:

$$(x+2)^2=2-x^2, x^2+4x+4-2+x^2=0, 2x^2+4x+2=0, x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0 \quad x=-1 \quad (-1; 1) \text{ — единственная общая точка}$$

б) Уравнение касательной к  $y=(x+2)^2$  в точке  $(-1; 1)$ :

$$f(x_0)=1, f'(x)=2(x+2), f'(x_0)=2\cdot(-1+2)=2, y=1+2(x+1)=0, y=2x+3;$$

в) Уравнение касательной к  $y=2-x^2$  в точке  $(-1; 1)$ :

$$f(x_0)=1, f'(x)=-2x, f'(x_0)=-2\cdot(-1)=2, y=1+2(x+1), y=2x+3.$$

Общая касательная:  $y=2x+3$

4) а) Точка пересечения:  $x(2+x)=x(2-x), 2x+x^2-2x+x^2=0, 2x^2=0, x=0$

(0; 0) — единственная общая точка

б) Уравнение касательной к  $y=x(2+x)$  в точке (0; 0):

$$f(x_0)=0, f'(x)=(2+x)+x=2+2x, f'(x_0)=2, y=0+2(x-0)=0, y=2x$$

в) Уравнение касательной к  $y=x(2-x)$  в точке (0; 0):

$$f(x_0)=0, f'(x)=(2-x)-x=2-2x, f'(x_0)=2, y=0+2(x-0), y=2x.$$

Общая касательная:  $y=2x$ .

### № 866.

$$1) k=\operatorname{tg} \alpha=f'(x); f'(x)=e^x-e^{-x}, f'(x)=\frac{3}{2}, \text{ т.е. } e^x-e^{-x}=\frac{3}{2},$$

$2e^{2x}-3e^x-2=0$  это квадратное уравнение относительно  $e^x$ ,  $D=9+16=25$ ;

$$e^x=\frac{3+5}{4}=2 \Rightarrow x=\ln 2, e^x=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}, \text{ но } e^x>0,$$

$$f(\ln 2)=e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}=2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}, \underline{x=\ln 2} \text{ искомая точка: } (\ln 2; 2\frac{1}{2});$$

2)  $k=\operatorname{tg} \alpha=f'(x)$ ;

$$f'(x)=\frac{1\cdot 3}{2\sqrt{3x+1}} \quad f'(x)=\frac{3}{4}, \text{ т.е. } \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{3x+1}=2,$$

$$3x+1=4, x=1 \quad f(1)=\sqrt{3\cdot 1+1}=2 \text{ искомая точка } (1, 2).$$

3)  $k=\operatorname{tg} \alpha=f'(x), f'(x)=2\cos 2x, f'(x)=2$ , тогда  $2\cos 2x=2$ ,

$$\cos 2x=1 \Rightarrow 2x=2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad x=\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \sin(2\pi n)=0,$$

искомая точка:  $(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$ .

4)  $k=\operatorname{tg} \alpha=f'(x), f'(x)=1+\cos x, f'(x)=0$ , т.е.  $1+\cos x=0$ ,

$$\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2\pi n, n \in \mathbb{Z}; f(\pi+2\pi n)=\pi+2\pi n+\sin(\pi+2\pi n)=\pi+2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

искомая точка  $(\pi+2\pi n; \pi+2\pi n), n \in \mathbb{Z}$ .

### № 867.

$$f'(x)=\frac{(x+2)'(x-2)-(x-2)'(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-2}{(x-2)^2}=-\frac{4}{(x-2)^2};$$

$$f'(x)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1, \text{ тогда } -\frac{4}{(x-2)^2}=-1, \text{ откуда } (x-2)^2=4,$$



$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

$x_1 = 0, y_1 = -1; x_2 = 4, y_2 = 3$ ; искомые точки  $(0, -1), (4, 3)$ .

**№ 868.**

Касательные параллельны, значит их углы наклона к Ох равны, т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = g'(x_0),$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1, g'(x) = 6x - 4, 3x^2 - 1 = 6x - 4, 3x^2 - 6x + 3 = 0, 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1,$$

уравнение касательной к  $y(x) = x^3 - x - 1$  при  $x = 1$ :

$$f(x_0) = 1^3 - 1 - 1 = -1, f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2, y = -1 + 2(x-1), y = 2x - 3,$$

уравнение касательной к  $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$  при  $x = 1$ :  $g(x_0) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0,$

$$g'(x) = 6 \cdot 1 - 4 = 2, y = 0 + 2(x-1), y = 2x - 2, \text{ искомые точки } (1, -1) \text{ и } (1, 0).$$

**№ 869.**

$$1) (2x^4 - x^3 + 3x + 4)' = 8x^3 - 3x^2 + 3; 2) (-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1)' = -5x^4 + 6x^2 - 6x;$$

$$3) \left( 6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right)' = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-3} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3};$$

$$4) \left( \frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x} \right)' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} - 8 \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = -\frac{6}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}};$$

$$5) ((2x+3)^8)' = 8 \cdot 2(2x+3)^7 = 16(2x+3)^7;$$

$$6) ((4-3x)^7)' = 7 \cdot (-3) \cdot (4-3x)^6 = -21(4-3x)^6; 7) \left( \sqrt[3]{3x-2} \right)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3x-2)^2}};$$

$$8) \left( \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \right)' = -\frac{1 \cdot (-4)}{2(1-4x)\sqrt{1-4x}} = \frac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}.$$

**№ 870.**

$$1) (e^x - \sin x)' = e^x - \cos x; 2) (\cos x - \ln x)' = -\sin x - \frac{1}{x};$$

$$3) (\sin x - \sqrt[3]{x})' = \cos x - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}; 4) (6x^4 - 9e^x)' = 24x^3 - 9e^x;$$

$$5) \left( \frac{5}{x} + 4e^x \right)' = -\frac{5}{x^2} + 4e^x; 6) \left( \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2} \ln x \right)' = -\frac{3}{3x^4} + \frac{1}{2x} = -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{2x}.$$

**№ 871.**

$$1) (\sin 5x + \cos(2x-3))' = 5\cos 5x - 2\sin(2x-3); 2) (e^{2x} - \ln 3x)' = 2e^{2x} - \frac{1}{x};$$

$$3) (\sin(x-3) - \ln(1-2x))' = \cos(x-3) + \frac{2}{1-2x}; 4) \left( 6\sin \frac{2x}{3} - e^{1-3x} \right)' = 4\cos \frac{2x}{3} + 3e^{1-3x}.$$

**№ 872.**

$$1) (x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x;$$

$$2) (x^3 \ln x)' = 3x^2 \ln x + \frac{x^3}{x} = 3x^2 \ln x + x^2;$$

$$3) (5x e^x)' = 5e^x + 5xe^x; \quad 4) (x \sin 2x)' = \sin 2x + 2x \cos 2x;$$

$$5) (e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x);$$

$$6) (e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x);$$

№ 873.

$$1) \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - (x^3 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2};$$

$$2) \left( \frac{x^2}{x^3 + 1} \right)' = \frac{2x(x^3 + 1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3 + 1)^2};$$

$$3) \left( \frac{\sin x}{x + 1} \right)' = \frac{\cos(x + 1) - \sin x}{(x + 1)^2};$$

$$4) \left( \frac{\ln x}{1 - x} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(1 - x) - \ln x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1 - x + x \ln x}{x(1 - x)^2}.$$

№ 874.

$$1) (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x; \quad 2) (8^{\cos x})' = 8^{\cos x} \ln 8 \cdot (-\sin x) = -8^{\cos x} \ln 8 \cdot \sin x;$$

$$3) (\cos^4 x)' = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4\cos^3 x \sin x; \quad 4) (\ln(x^3))' = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}.$$

№ 875.

$$1) f'(x) = (2x^3 - x^2)' = 6x^2 - 2x, \quad f'(x) = 0, \quad 2x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3},$$

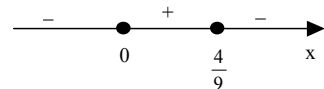
$$f'(x) > 0 \text{ при } x < 0, \quad x > \frac{1}{3}, \quad f'(x) < 0 \text{ при } 0 < x < \frac{1}{3},$$



$$2) f'(x) = (-3x^2 + 2x^2 + 4)' = -9x^2 + 4x,$$

$$f'(x) = 0, \quad x(-9x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{9};$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } 0 < x < \frac{4}{9}, \quad f'(x) < 0 \text{ при } x < 0, \quad x > \frac{4}{9};$$

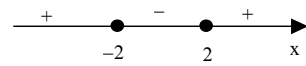


$$3) f'(x) = (x^5 - 5x^3 - 20x)' = 5x^4 - 15x^2 - 20,$$

$$f'(x) = 0, \quad 5(x^4 - 3x^2 - 4) = 0, \quad D = 9 + 16 = 25$$

$$x^2 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad x_{1,2} = \pm 2, \quad x^2 = \frac{3-5}{2} = -1 < 0 \text{ — не существует корней}$$

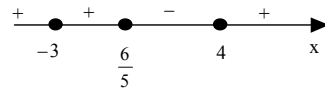
$f'(x) > 0$  при  $x < -2$  и  $x > 2$ ,  $f'(x) < 0$  при  $-2 < x < 2$



$$4) f'(x) = \left( (x+3)^3(x-4)^2 \right)' = 3(x+3)^2(x-4)^2 + 2(x+3)^3(x-4) = \\ = (x+3)^2(x-4)(3x-12+2x+6) = (x+3)^2(x-4)(5x-6),$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = \frac{6}{5}.$$

$f'(x) > 0$  при  $x < -3$ ,  $-3 < x < \frac{6}{5}$ ,  $x > 4$ ,  $f'(x) < 0$  при  $\frac{6}{5} < x < 4$



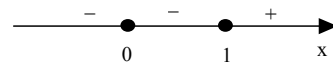
$$5) f'(x) = \left( \frac{3x+1}{x-2} \right)' = \frac{3(x-2) - 3x-1}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2} \quad x \neq 2$$

$f'(x) = 0$  таких  $x$  не существует;  $f'(x) > 0$  таких  $x$  не существует

$f'(x) < 0$  при всех  $x$ , кроме  $x=2$

$$6) f'(x) = \left( x^2 + \frac{2}{x} \right)' = 2x - \frac{2}{x^2}, \quad x \neq 0, \quad f'(x) = 0, \quad 2x^3 - 2 = 0, \quad x^3 = 1, \quad x = 1.$$

$f'(x) > 0$  при  $x > 1$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x < 0$  и  $0 < x < 1$ .



### № 876.

$$1) f(x) = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2x = \cos 2x, \quad f'(x_0) = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$2) f(x) = e^x \ln x, \quad f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}, \quad f'(1) = e^1 \ln 1 + \frac{e^1}{1} = 0 + e = e;$$

$$3) f'(x) = \left( \frac{2 \cos x}{\sin x} \right)' = (2 \operatorname{ctg} x)' = -\frac{2}{\sin^2 x}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = -2 \cdot 2 = -4;$$

$$4) f'(x) = \left( \frac{x}{1+e^x} \right)' = \frac{1+e^x - x \cdot e^x}{(1+e^x)^2}, \quad f'(0) = \frac{1+e^0 - 0 \cdot e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

№ 877.

1)  $y(3)=3^2-2\cdot 3=9-6=3$ ,  $y'(x)=2x-2$ ,  $y'(3)=6-2=4$ ,  $y=3+4(x-3)$ ,  $y=4x-9$ ;

2)  $y(3)=27+9=36$ ,  $y'(x)=3x^2+3$ ,  $y'(3)=27+3=30$ ,  $y=36+30(x-3)$ ,  $y=30x-54$ ;

3)  $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ,  $y'(x)=\cos x$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right), \quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{12};$$

4)  $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ,  $y'(x)=-\sin x$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right), \quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6};$$

№ 878.

$s(4)=0,5\cdot 4^2+3\cdot 4+2=8+12+2=22(\text{m})$ ,  $v(t)=s'(t)=0,5\cdot 2t+3=t+3$ ,  $v(4)=4+3=7(\text{m/c})$ .

№ 879.

1)  $y'=(\cos^2 3x)'=2\cos 3x\cdot 3(-\sin 3x)=-3\sin 6x$ ;

2)  $y=(\sin x \cos x + x)'=\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos 2x + 1$ ;

3)  $y'=((x^3+1)\cos 2x+1)'=3x^2\cdot \cos 2x + (x^3+1)\cdot 2(-\sin 2x) =$   
 $=3x^2\cos 2x - 2(x^3+1)\sin 2x$ ;

4)  $y'=(\sin^2 \frac{x}{2})'=2 \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$ ;

5)  $y'=\left((x+1)\sqrt[3]{x^2}\right)' = \sqrt[3]{x^2} + (x+1) \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3x+2x+1}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{5x+1}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$ ;

6)  $y'=\left(\sqrt[3]{x-1}(x^4-1)\right)' = \frac{x^4-1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \sqrt[3]{x-1} \cdot 4x^3 =$

$$= \frac{x^4-1+12x^3(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{13x^4-12x^3-1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

№ 880.

1)  $y'=\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)' = \frac{-2(-\sin 2x)(1+\cos 2x) - (1-\cos 2x)2(-\sin 2x)}{(1+\cos 2x)^2} =$

$$= \frac{2\sin 2x + 2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x - 2\sin 2x \cos 2x}{(1+\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} = \frac{4\sin 2x}{(2\cos^2 x)^2} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x};$$

$$\begin{aligned} 2) y' &= \left( \frac{\sqrt{4+x}}{x} \right)' = \frac{1 \cdot 4x - 4\sqrt{4+x}}{16x^2} = \frac{4x - 8x - 32}{2 \cdot 16x^2 \sqrt{4+x}} = \\ &= \frac{-4x - 32}{2 \cdot 16x^2 \sqrt{4+x}} = \frac{-x - 8}{8x^2 \sqrt{4+x}}; \end{aligned}$$

*StudyPort.ru*

$$3) y' = \left( \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right)' = \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} = \frac{2x+4-x}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$4) y' = \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}{1 - \sin 2x} = \frac{-2}{1 - \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x - 1}$$

№ 881.

$$1) \left( \log_2(x^3 - x^2 - 1) \right)' = \frac{3x^2 - 2x}{(x^3 - x^2 - 1) \ln 2};$$

$$2) \left( (\log_2 x)^3 \right)' = \frac{3 \cdot (\log_2 x)^2}{x \ln 2} = \frac{3 \ln^2 x}{x \ln^3 2};$$

$$3) (\sin(\log_3 x))' = \frac{\cos(\log_3 x)}{x \ln 3}; \quad 4) (\cos 3^x)' = -\sin 3^x \cdot 3^x \cdot \ln 3.$$

№ 882.

$$y' = (e^{-x})' = -e^{-x} \quad \text{график г)} \quad y = \psi(x);$$

$$y' = (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad \text{график а)} \quad y = f(x);$$

$$y' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x \quad \text{график в)} \quad y = \varphi(x);$$

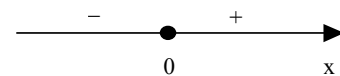
$$y' = (2 \cos x)' = -2 \sin x \quad \text{график б)} \quad y = g(x).$$

№ 883.

$$1) f'(x) = (2^x + 2^{-x})' = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2,$$

$$f'(x) = 0, \quad \ln 2(2^x - 2^{-x}) = 0, \quad \ln 2 \neq 0, \quad 2^x - 2^{-x} = 0, \quad 2^x = 2^{-x} \Rightarrow x = -x, \quad x = 0,$$

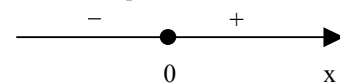
$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > 0; \quad f'(x) < 0 \quad \text{при } x < 0;$$



$$2) f'(x) = (3^{2x} - 2x \ln 3)' = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - 2 \ln 3$$

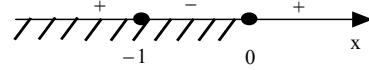
$$f'(x) = 0, \quad \ln 3(3^{2x} - 1) = 0, \quad 2 \ln 3 \neq 0, \quad 3^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow 3^{2x} = 1 \Rightarrow 3^{2x} = 3^0 \Rightarrow 2x = 0, \quad x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > 0; \quad f'(x) < 0 \quad \text{при } x < 0;$$



$$3) f'(x) = (x + \ln 2x)' = 1 + \frac{2}{2x} = 1 + \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad f'(x) = 0, \quad 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -1,$$

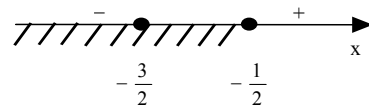
$f'(x) > 0$  при  $x > 0$ ;  $f'(x) < 0$  не существует;



$$4) f'(x) = (x + \ln(2x+1))' = 1 + \frac{2}{2x+1}, \quad 2x+1 > 0$$

$$f'(x) = 0, \quad 1 + \frac{2}{2x+1} = 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{2x+1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

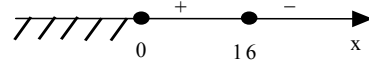
$f'(x) > 0$  при  $x > -\frac{1}{2}$ ;  $f'(x) < 0$  не существует



$$5) f'(x) = (6x - x\sqrt{x})' = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad x > 0,$$

$$f'(x) = 0, \quad 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0, \quad \sqrt{x} = 4, \quad x = 16,$$

$f'(x) > 0$  при  $0 < x < 16$ ;  $f'(x) < 0$  при  $x > 16$ ;



$$6) f'(x) = ((x+1)\sqrt{x+1} - 3x)' = \frac{3}{2}\sqrt{x+1} - 3, \quad x > -1,$$

$$f'(x) = 0, \quad 3\sqrt{x+1} - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = 4, \quad x = 3,$$

$f'(x) > 0$  при  $x > 3$ ;  $f'(x) < 0$  при  $-1 < x < 3$ .



№ 884.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a, \quad f'(x) \geq 0,$$

$$3x^2 + 6x + a \geq 0, \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x, \quad \text{если } \frac{D}{4} = 9 - 3a \leq 0, \quad \text{откуда } 3a \geq 9.$$

Ответ:  $a \geq 3$ .

№ 885.

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x - 1, \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{при всех } x, \quad \text{если } 3ax^2 - 12x - 1 \leq 0,$$

$$\text{т.е. при } \begin{cases} 3a < 0 \\ \frac{D}{4} = 36 + 3a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 3a \leq -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a \leq -12 \end{cases}.$$

Ответ:  $a \leq -12$ .

**№ 886.**

1)  $f'(x) = 2ax + \frac{2}{x^3}$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $ax + \frac{1}{x^3} = 0$ ,  $ax^4 = 1$ ,  $x^4 = -\frac{1}{a}$ ,

уравнение не имеет действительных корней, если  $a \geq 0$ ;

2)  $f'(x) = a - \frac{1}{x^2}$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $a - \frac{1}{x^2} = 0$ ,  $ax^2 = 1$ ,  $x^2 = \frac{1}{a}$ ,

уравнение не имеет действительных корней, если  $a \leq 0$ ;

3)  $f'(x) = 3ax^2 + 6x + 6$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $3ax^2 + 6x + 6 = 0$ ,  $ax^2 + 2x + 2 = 0$ ,

уравнение не имеет действительных корней, если  $\frac{D}{4} = 1 - 2a < 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$ ;

4)  $f'(x) = 3x^2 + 12x + a$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $3x^2 + 12x + a = 0$ ,

уравнение не имеет действительных корней, если

$\frac{D}{4} = 36 - 3a < 0 \Rightarrow 3a > 36$ ,  $a > 12$ .

**№ 887.**

1)  $f'(x) = 7ax^6 + 3x^2$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $7ax^6 + 3x^2 < 0 \Rightarrow x^2(7ax^4 + 3) < 0$ ,  $x^2 > 0$ ,

$7ax^4 - 3 < 0$ ,  $7ax^4 < 3$ ,  $ax^4 < \frac{3}{7}$ ,

если  $a > 0$ ,  $x^4 < \frac{3}{7a}$  — не имеет решений при  $a \geq 0$ ,

если  $a < 0$ ,  $x^4 > \frac{3}{7a}$  — решения существуют.

2)  $f'(x) = 5x^4 + 3ax^2$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $x^2(5x^2 + 3a) < 0$ ,  $x^2 \geq 0 \Rightarrow 5x^2 + 3a < 0 \Rightarrow 5x^2 < -3a$ ,

$x^2 < -\frac{3a}{5}$  — неравенство не имеет действительных корней при  $a \geq 0$ ;

3)  $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+a}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+a}{2\sqrt{x}}$ ,  $f'(x) < 0$ ;  $x > 0$ ,  $\frac{3x+a}{2\sqrt{x}} < 0$ ,

$2\sqrt{x} > 0 \Rightarrow 3x + a < 0 \Rightarrow x < \begin{cases} x < -\frac{a}{3} \\ x > 0 \end{cases}$  — система не имеет решения при  $a \geq 0$ ;

4)  $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $\frac{x^2 - a}{x^2} < 0$ ,

$x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - a < 0 \Rightarrow x^2 < a$  — неравенство не имеет решения при  $a \leq 0$ .

**№ 888.**

1) Точка пересечений графиков:



$$2\sqrt{x} = 2\sqrt{6-x} \Rightarrow x=6-x, 2x=6, x=\frac{6}{2}=3, y'=\frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$y = 2\sqrt{6-x}; y' = -\frac{1}{\sqrt{6-x}}; \operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{6-3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{5\pi}{6},$$

$$\beta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3};$$

2) Точка пересечения графиков:

$$\sqrt{2x+1} = 1 \Rightarrow 2x+1=1 \Rightarrow x=0, y = \sqrt{2x+1}, y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0 + 1}} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$y=1, \quad y'(x)=0, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

**№ 889.**

$$1) y(x_0) = 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad y'(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad y'(x_0) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{3\pi}{2} \right), \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x + \sqrt{2} + \frac{3\pi \cdot \sqrt{2}}{4};$$

$$2) y(x_0) = 2^{-2} - 2^{-4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}, \quad y'(x) = -2^{-x} \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2x} \ln 2,$$

$$y'(x_0) = \ln 2 \cdot (2 \cdot 2^{-4} - 2^{-2}) = \ln 2 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} \ln 2,$$

$$y = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} \ln 2 (x-2), \quad y = -\frac{1}{8} \ln 2 \cdot x + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \ln 2;$$

$$3) y(x_0) = \frac{2+2}{3-2} = 4, \quad y'(x) = \frac{(3-x) + (x+2)}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)^2}, \quad y'(x_0) = \frac{5}{(3-2)^2} = 5,$$

$$y = 4 + 5(x-2), \quad y = 5x - 6;$$

$$4) y(x_0) = e + \ln e = e + 1, \quad y'(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad y'(x_0) = 1 + e^{-1},$$

$$y = e + 1 + \left(1 + \frac{1}{e}\right)(x - e), \quad y = \left(1 + \frac{1}{e}\right)x + 1 - 1 + e - e, \quad y = \frac{(e+1)x}{e}.$$

**№ 890.**

$$y'(x) = x^2 - 5x, \quad y_2' = 6,$$

$$x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0,$$

$$D=25+24=49, \quad x_1=\frac{5+7}{2}=6, \quad x_2=\frac{5-7}{2}=-1;$$

$$1) x=6, y(6)=\frac{216}{3}-\frac{5 \cdot 36}{2}=72-90=-18, y'(6)=36-30=6,$$

$$y=-18+6(x-6), \underline{y=6x-54};$$

$$2) x=-1, y(-1)=\frac{1}{3} \cdot (-1) - \frac{5}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{17}{6},$$

$$y'(-1)=1+5=6, y=-\frac{17}{6}+6(x+1), y=6x+\frac{19}{6}.$$

**№ 891.**

$$y'=-\frac{4}{x^2}, y(1)=4, y'(1)=-4, y=4-4(x-1), y=-4x+8.$$

Касательная пересекается с осями в точках А (0,8) и В(2,0).

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2} OB \cdot OA=\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2=8 \text{ (кв. ед.)}.$$

**№ 892.**

$$y'=-\frac{k}{x^2}, y(x_0)=\frac{k}{x_0}, y'(x_0)=-\frac{k}{x_0^2}, y_{\text{кас}}=\frac{k}{x_0}-\frac{k}{x_0^2}(x-x_0),$$

$$y_{\text{кас}}=-\frac{k}{x_0^2}x+\frac{2k}{x_0};$$

1) Точки пересечения с осями координат: А (0,  $\frac{2k}{x_0}$ ), В(2x<sub>0</sub>,0),

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2} AO \cdot OB=\frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{x_0} \cdot 2x_0=2k \text{ - не зависит от } x_0;$$

2) Подставим точки  $(x_0, \frac{k}{x_0})$  и  $(2x_0, 0)$  в уравнение касательной

$$\frac{k}{x_0}=y=-\frac{k}{x_0^2} \cdot x_0+\frac{2k}{x_0}=\frac{k}{x_0} \text{ - подходит, значит, принадлежит касательной}$$

$$0=y=-\frac{k}{x_0^2} \cdot 2x_0+\frac{2k}{x_0}=0 \text{ - подходит, значит, эта точка принадлежит касательной.}$$

тальной.

**№ 893.**

$$y(1)=1-p, y'(x)=3x^2-p, y'(1)=3-p, y=1-p+(3-p)(x-1),$$

$$y=(3-p)x+1-p-3+p, y=(3-p)x-2.$$

Координаты точки М должны удовлетворять этому уравнению.

$$3=(3-p)=2-2 \Rightarrow 3-p=\frac{5}{2} \Rightarrow p=\frac{1}{2}.$$

№ 894.

$$y' = \frac{4^x \ln 4 - 2^{x+1} \ln 2}{\ln 4} = \frac{4^x \ln 4 - 2^{x+1} \cdot \frac{1}{2} \ln 4}{\ln 4} = 2^{2x} - 2^x$$

$y'=2$ , т.е.  $2^{2x}-2^x=2$ ,  $2^{2x}-2^x-2=0$  — это квадратное уравнение относительно  $2^x$

$$D=1+8=9, \quad 2^x = \frac{1+3}{2} = 2^1, \quad x=1; \quad 2^x = \frac{1-3}{2} - 1 < 0 - \text{нет корней};$$

$$y(1) = \frac{4^1 - 2^2}{\ln 4} = 0.$$

Ответ: искомая точка (1,0).

№ 895.

$$y' = \ln x + 1, \quad x > 0, \quad y' = 0, \quad \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1},$$

$$y(e^{-1}) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{e} = \frac{-1}{e} = -\frac{1}{e}.$$

$$\text{Расстояние от касательной до оси абсцисс: } l = 0 - y = 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

№ 896.

$$\text{Пусть } x_0 - \text{ точка касания, тогда } y(x_0) = 1 + \ln x_0, \quad y'(x) = \frac{1}{x}, \quad y'(x_0) = \frac{1}{x_0},$$

$$y = 1 + \ln x_0 + \frac{1}{x_0} (x - x_0), \quad y = \frac{x}{x_0} + 1 + \ln x_0 - 1, \quad y = \frac{x}{x_0} + \ln x_0.$$

Учитывая, что  $y = ax - 2$ , получаем систему:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{x_0} \\ -2 = \ln x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = e^{-2} \\ a = e^2 \end{cases}.$$

Ответ:  $a = e^2$ .

№ 897.

Пусть  $x_1$  — точка касания графика функции  $f(x)$ , тогда

$$f(x_1) = x_1^2 - 4x_1 + 3, \quad f'(x) = 2x - 4, \quad f'(x_1) = 2x_1 - 4,$$

$$y = x_1^2 - 4x_1 + 3 + (2x_1 - 4)(x - x_1),$$

$$y = (2x_1 - 4)x + x_1^2 - 4x_1 + 3 - 2x_1^2 + 4x_1 \quad y = (2x_1 - 4)x + (3 - x_1^2).$$

Пусть  $x_2$  — точка касания графика функции  $g(x)$

$$g(x_2) = -x_2^2 + 6x_2 - 10, \quad g'(x) = -2x + 6, \quad g'(x_2) = -2x_2 + 6,$$

$$y = -x_2^2 + 6x_2 - 10 + (6 - 2x_2)(x - x_2)$$

$$y = (6 - 2x_2)x - x^2 + 6x_2 - 10 - 6x_2 + 2x_2^2 \quad y = (6 - 2x_2)x + (x_2^2 - 10)$$

Т.к. это одна и та же касательная, то

$$\begin{cases} x_2^2 - 10 = 3 - x_1^2 \\ 2x_1 - 4 = 6 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 10 = 3 - x_1^2 \\ x_1 = 5 - x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ x_2^2 - 10 = 3 - 25 + 10x_2 - x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ x_2^2 - 10x_2 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$x_2^2 - 5x_2 + 6 = 0, D = 25 - 24 = 1, x_2 = \frac{5 \pm 1}{2} = 3, x_2 = 2; x_2 = 3,$$

$y = -1$  и  $y = -6 + 2x$  – две общие касательные.

**№ 898.**

Пусть  $x_1$  – точка касания, тогда  $y(x_1) = x_1^3 - 6$ ,  $y'(x) = 3x^2$ ,  $y'(x_1) = 3x_1^2$ ,  
 $y = x_1^3 - 6 + 3x_1^2(x - x_1)$ ,  $y = 3x_1^2 \cdot x + (-2x_1^3 - 6)$ .

Точки пересечения с осями координат:  $A(0, -2x_1^3 - 6)$ ,  $B\left(\frac{2(x_1^3 + 3)}{3x_1^2}, 0\right)$ ,

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot (-2x_1^3 - 6) \cdot \frac{2(x_1^3 + 3)}{3x_1^2} = -\frac{2}{3x_1^2} (x_1^3 + 3)^2.$$

Но те же рассуждения можно провести для  $x_2$  – второй точки касания.

$$y = 3x_2^2 \cdot x + (-2x_2^3 - 6), S_{\Delta COD} = -\frac{2}{3x_2^2} (x_2^3 + 3)^2.$$

Эти касательные параллельны, так что коэффициенты при  $x$  должны быть равны, т.е.  $3x_1^2 = 3x_2^2$ ,  $x_1^2 = x_2^2$

либо  $x_1 = x_2$  – тогда точки совпадают, но у нас две разные прямые

либо  $x_1 = -x_2$

$$4S_{AOB} = S_{COD}$$

$$\begin{cases} -\frac{4 \cdot 2}{3x_1^2} (x_1^3 + 3) = -\frac{2}{3x_2^2} (x_2^3 + 3)^2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$4(x_1^3 + 3)^2 = (-x_1^3 + 3)^2, \quad 4x_1^6 + 24x_1^3 + 36 = 9 - 6x_1^3 + x_1^6$$

$$3x_1^6 + 30x_1^3 + 27 = 0, \quad x_1^6 + 10x_1^3 + 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 9 = 16, \quad x_1^3 = -5 + 4 = -1, \quad x_1 = -1, \quad x_1^3 = -5 - 4 = -9, \quad x_1 = \sqrt[3]{-9},$$

$$S_{AOB} = \left| -\frac{2}{3 \cdot 1} (-1 + 3)^2 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3},$$

$$S_{AOB} = \left| -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{9^2}} \cdot (-9 + 3)^2 \right| = \frac{2 \cdot 36}{9\sqrt[3]{3}} = \frac{8}{\sqrt[3]{3}}.$$

## IX глава. Применение производной и исследованию функций

### § 49 Возрастание и убывание функции

№ 899.

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}, \quad x \neq 0, \quad f'(x) > 0, \quad 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right) > 0, \quad x^2 > 0,$$

$$x^3 - 1 > 0, \quad x^3 > 1, \quad x > 1 - \text{возрастает}; \quad f'(x) < 0, \quad x < 0, \quad 0 < x < 1 - \text{убывает};$$

№ 900.

1)  $y' = 2x - 1, y' > 0, 2x - 1 > 0, x > \frac{1}{2}$  – возрастает;  $y' < 0, 2x - 1 < 0, x < \frac{1}{2}$  – убывает;

2)  $y' = 10x - 3, y' > 0, 10x - 3 > 0, x > \frac{3}{10}$  – возрастает;

$y' < 0, 10x - 3 < 0, x < \frac{3}{10}$  – убывает;

3)  $y' = 2x + 2, y' > 0, 2x + 2 > 0, x > -1$  – возрастает;

$y' < 0, 2x + 2 < 0, x < -1$  – убывает;

4)  $y' = 2x + 12, y' > 0, 2x + 12 > 0, x > -6$  – возрастает;

$y' < 0, 2x + 12 < 0, x < -6$  – убывает;

5)  $y' = 3x^2 - 3, y' > 0, 3x^2 - 3 > 0, x^2 > 1, x < -1, x > 1$  – возрастает;

$y' < 0, 3x^2 - 3 < 0, x^2 < 1, -1 < x < 1$  – убывает;

6)  $y' = 4x^3 - 4x, y' > 0, 4x(x^2 - 1) > 0$  при  $-1 < x < 0, x > 1$  – возрастает;

$y' < 0, 4x(x^2 - 1) < 0$  при  $x < -1, 0 < x < 1$  – убывает;

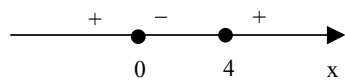
7)  $y' = 6x^2 - 6x - 36, y' > 0, x^2 - x - 6 > 0.$

Решим уравнение  $x^2 - x - 6 = 0$ :  $D = 1 + 24 = 25, x_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3, x_2 = \frac{1 - 5}{2} = -2.$

при  $x < -2, x > 3$  – возрастает;  $y' < 0$  при  $-2 < x < 3$  – убывает;

8)  $y' = 3x^2 - 12x, y' > 0, 3x(x - 4) > 0$  при  $x < 0, x > 4$  – возрастает;

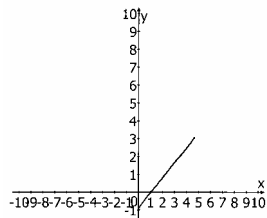
$y' < 0$  при  $0 < x < 4$  – убывает;



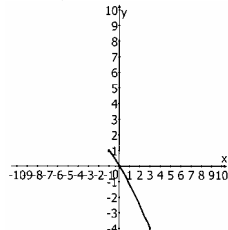
*StudyPort.ru*

№ 901.

а)



б)



№ 902.

1)  $y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$   $x \neq -2$ ,  $y' > 0$ :  $-\frac{1}{(x+2)^2} > 0$  – не выполняется ни при

каких  $x \in \mathbb{R}$ , т.к.  $(x+2)^2 > 0$ ,

$y' < 0$ :  $-\frac{1}{(x+2)^2} < 0$  выполняется при всех  $x \in \mathbb{R}$ , исключая  $x = -2$

функция убывает при  $x < -2$ ,  $x > -2$

2)  $y' = -\frac{2}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ ,

$y' > 0$ ,  $-\frac{2}{x^2} > 0$  не выполняется ни при каких  $x \in \mathbb{R}$ , т.к.  $x^2 > 0$ ,

$y' < 0$ ,  $-\frac{2}{x^2} < 0$  выполняется при всех  $x \in \mathbb{R}$ , исключая  $x = 0$ ,

функция убывает при  $x < 0$ ,  $x > 0$

3)  $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ ,  $x > 3$ ,  $y' > 0$ :  $-\frac{1}{2\sqrt{x-3}} > 0$  не выполняется ни при каких

$x \in \mathbb{R}$ , т.к.  $\sqrt{x-3} > 0$ ;

$y' < 0$ :  $-\frac{1}{2\sqrt{x-3}} < 0$  выполняется при всех  $x > 3$ ,

функция убывает при  $x > 3$ ;

4)  $y' = \frac{3}{2\sqrt{x-5}}$ ,  $x > 5$ ,  $y' > 0$ :  $\frac{3}{2\sqrt{x-5}} > 0$  выполняется при всех  $x > 5$ ,

$y' < 0$ :  $\frac{3}{2\sqrt{x-5}} < 0$  не выполняется ни при каких  $x \in \mathbb{R}$ , т.к.  $\sqrt{x-5} > 0$

функция возрастает при  $x > 5$ .

№ 903.

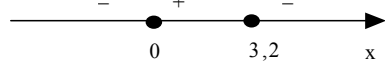
1)  $y' = \frac{3x^2(x^2+3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2+3)^2}$ ,

$$y' > 0: \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2 + 3)^2} > 0 \text{ верно при всех } x \in \mathbb{R};$$

$$y' < 0: \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2 + 3)^2} < 0 \text{ не верно ни при каких } x \in \mathbb{R}.$$

Функция возрастает при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

$$2) y' = \left( \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2} \right)' = \left( -1 + \frac{10}{x} - \frac{16}{x^2} \right)' = -\frac{10}{x^2} + \frac{32}{x^3} = \frac{32 - 10x}{x^3};$$



$y' > 0$  при  $x^3(32 - 10x) > 0$ ,  $0 < x < 3,2$  – возрастает;  $y' > 0$ ,  $x < 0$ ,  $x > 3,2$  – убывает.

$$3) y' = e^{3x} + 3e^{3x}(x-1) = 3e^{3x} \cdot x - 2e^{3x}(3x-2),$$

$$y' > 0: e^{3x}(3x-2) > 0 \Rightarrow e^{3x} > 0 \text{ и } 3x-2 > 0 \Rightarrow \text{при } x > \frac{2}{3} \text{ функция возрастает;}$$

$$y' < 0: e^{3x}(3x-2) < 0 \Rightarrow e^{3x} > 0 \text{ и } 3x-2 < 0 \Rightarrow \text{при } x < \frac{2}{3} \text{ функция убывает;}$$

$$4) y' = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x} \cdot (1-3x)$$

$$y' > 0: e^{-3x}(1-3x) > 0 \Rightarrow e^{-3x} > 0 \text{ и } 1-3x > 0 \Rightarrow \text{при } x < \frac{1}{3} \text{ функция возрастает}$$

$$y' < 0: e^{-3x}(1+3x) < 0 \Rightarrow e^{-3x} > 0 \text{ и } (1-3x) < 0 \Rightarrow \text{при } x > \frac{1}{3} \text{ функция убывает.}$$

#### № 904.

$$1) y' = (2x+3)e^{x^2+3x};$$

$$y' > 0: (2x+3)e^{x^2+3x} > 0 \Rightarrow e^{x^2+3x} > 0 \text{ и } 2x+3 > 0 \Rightarrow \text{при } x > -\frac{3}{2} \text{ — функция}$$

возрастает;

$$y' < 0: (2x+3)e^{x^2+3x} < 0 \Rightarrow e^{x^2+3x} > 0 \text{ и } 2x+3 < 0 \Rightarrow \text{при } x < -\frac{3}{2} \text{ — функция}$$

убывает;

$$2) y' = (2x-1)3^{x^2-x} \ln 3;$$

$$y' > 0: (2x-1)3^{x^2-x} \cdot \ln 3 > 0 \Rightarrow 3^{x^2-x} \ln 3 > 0 \text{ и } 2x-1 > 0 \Rightarrow \text{при } x > \frac{1}{2} \text{ — функ-}$$

ция возрастает;

$$y' < 0: (2x-1)3^{x^2-x} \cdot \ln 3 < 0 \Rightarrow 3^{x^2-x} \ln 3 > 0 \text{ и } 2x-1 < 0 \Rightarrow \text{при } x < \frac{1}{2} \text{ — функ-}$$

ция убывает.

#### № 905.

$$1) y' = 1 - 2\cos 2x, \quad y' > 0: 1 - 2\cos 2x > 0 \Rightarrow \cos 2x < \frac{1}{2},$$



$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} - \text{функция возрастает;}$$

$$y' < 0: 1 - 2\cos 2x < 0 \Rightarrow \cos 2x > \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} - \text{функция убывает;}$$

$$2) y' = 3 - 6\sin 3x, y' > 0: 3 - 6\sin 3x > 0 \Rightarrow \sin 3x < \frac{1}{2};$$

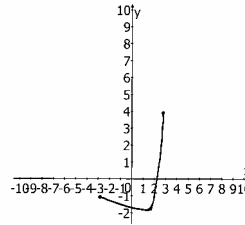
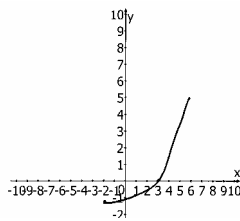
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{13\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} - \text{функция}$$

возрастает;

$$y' < 0: 3 - 6\sin 3x < 0 \Rightarrow \sin 3x > \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} - \text{функция убывает}$$

**№ 906.**



**№ 907.**

$$1) y' = 3x^2 - a \text{ возрастает, значит } y' > 0 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}$$

$$y' > 0, 3x^2 - a > 0, x^2 > \frac{a}{3}, a < 0;$$

$$2) y' = a - \cos x, y' > 0, a - \cos x > 0, \cos x < a, a > 1.$$

**№ 908.**

$$y' = 3x^2 - 4x + a \text{ функция возрастает на } \mathbb{R}, \text{ если } y' > 0 \text{ при всех } x$$

$$3x^2 - 4x + a > 0 \text{ неравенство выполняется при любых } x, \text{ если}$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 3a < 0, a > \frac{4}{3}. \text{ (Опечатка в ответе задачника).}$$

**№ 909.**

$$y' = 3ax^2 + 6x - 2 \text{ функция убывает на } \mathbb{R}, \text{ если } y' < 0 \text{ при всех } x$$

$$3ax^2 + 6x - 2 < 0 \text{ неравенство выполняется при любых } x, \text{ если}$$

$$\begin{cases} 3a < 0 \\ \frac{D}{4} = 9 + 6a < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a < -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ отсюда } a < -\frac{3}{2}.$$

## § 50 Экстремумы функции

**№ 910.**

$$x_{\max_1} = -5, \quad x_{\max_2} = 5; \quad x_{\min_1} = -2, \quad x_{\min_2} = 3.$$

**№ 911.**

$$x_1 = -7, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = -2, \quad x_5 = -1, \quad x_6 = 1, \quad x_7 = 3, \quad x_8 = 4.$$

**№ 912.**

$$1) y' = \left( \frac{x}{2} + \frac{8}{x} \right)' = \frac{1}{2} - \frac{8}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4;$$

$$2) y' = 6x^2 - 30x + 36, y' = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 5x + 6) = 0,$$

$$D = 25 - 24 = 1, \quad x_1 = \frac{5+1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2;$$

$$3) y' = 2e^{2x} - 2e^x, y' = 0, 2e^x(e^x - 1) = 0 \Rightarrow 2e^x > 0 \text{ и } e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0.$$

$$4) y' = \cos x + \sin x, y' = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0,$$

$$\sqrt{2} \left( \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**№ 913.**

$$1) y' = \left( \frac{2}{x} + x \right)' = -\frac{2}{x^2} + 1, \quad \frac{2}{x^2} = 1, \quad x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2};$$

$$2) y' = \left( \frac{x}{2} + \frac{3}{2x} \right)' = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}, y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2x^2} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3};$$

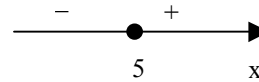
$$3) y' = 2x \cdot e^{x^2-1}, y' = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^{x^2-1} = 0 \Rightarrow e^{x^2-1} > 0 \text{ и } 2x = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$4) y' = 2^{x^2+x} \cdot \ln 2 \cdot (2x+1),$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2^{x^2+x} \cdot \ln 2 \cdot (2x+1) = 0 \Rightarrow 2^{x^2+x} \cdot \ln 2 > 0 \text{ и } 2x+1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

**№ 914.**

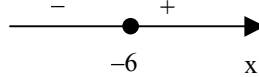
1)  $y' = 4x - 20$        $y' = 0$  при  $x = 5$  – стационарная точка. При переходе через  $x = 5$   $y'$  меняет знак с ‘-’ на ‘+’.



$x = 5$  – точка минимума

2)  $y' = 6x + 36$        $y' = 0$  при  $x = -6$

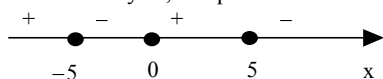
При переходе через  $x = -6$   $y'$  меняет знак с ‘-’ на ‘+’.



Следовательно  $x = -6$  – точка минимума

$$3) y' = \frac{1}{5} - \frac{5}{x^2}, y' = 0, \frac{1}{5} = \frac{5}{x^2}, x \neq 0, x^2 = 25, x = \pm 5.$$

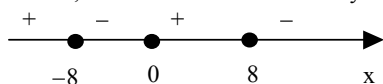
При переходе через точку  $x = -5$   $y'$  меняет знак с '+' на '-', значит  $x = -5$  - точка максимума, а через  $x = 5$  - с '-' на '+', значит  $x = 5$  - точка минимума.



$$4) y' = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{16}, y' = 0, \frac{1}{16} = \frac{4}{x^2}, x \neq 0, x^2 = 64, x = \pm 8.$$

При переходе через точку  $x = -8$

$y'$  меняет знак с '+' на '-', значит  $x = -8$  - точка максимума, а через  $x = 8$  с '-' на '+', значит  $x = 8$  - точка минимума.

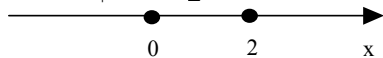


### № 915.

$$1) y' = 3x^2 - 6x, y' = 0, 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2,$$

$x = 0$  - точка максимума;  $x = 2$  - точка минимума;

$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2, y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4;$$



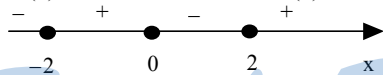
$$2) y' = 4x^3 - 16x, y' = 0, 4x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2,$$

$x = -2$  - точка минимума;

$x = 0$  - точка максимума;  $x = 2$  - точка минимума;

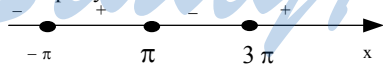
$$f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 + 3 = 16 - 32 + 3 = -13,$$

$$f'(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 3 = 3 \quad f'(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 3 = 16 - 32 + 3 = -13;$$

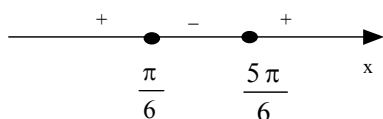


$$3) y' = 1 + \cos x, y' = 0, \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При переходе через  $x = \pi$   $y'$  не меняет знак, значит,  $x = \pi$  не является точкой экстремума.



$$4) y' = -2\sin x + 1, y' = 0, \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} - \text{точка максимума};$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ — точка минимума;}$$

$$y\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$y\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

**№ 916.**

1)  $y' = 2, 2 \neq 0 \Rightarrow$  нет точек экстремума;

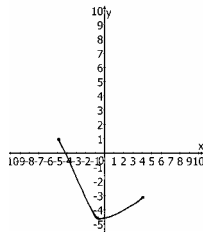
2)  $y' = -5, -5 \neq 0 \Rightarrow$  нет точек экстремума;

3)  $y' = 3x^2 + 2, y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 0 \quad x^2 = -\frac{2}{3}$  — нет точек экстремума;

4)  $y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} \quad x^2 = -2$  — не существует точек экстремума. (Опечатка в ответе задачника).

**№ 917.**

1)



**№ 918.**

1)  $y' = \frac{1 \cdot 6x}{2\sqrt{2-3x^2}}, 2-3x^2=0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, y'=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0;$

2)  $y' = \frac{1(3x^2-3)}{2\sqrt{x^3-3x}}, x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3},$

$y'=0 \Rightarrow 3x^3-3x=0 \Rightarrow 3(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1;$

3)  $y' = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}, x=1$  — точка минимума;

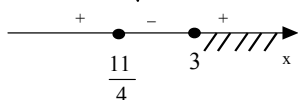
4)  $y'=0,$

$$y' = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases} \quad y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=1 & x_1 = \frac{1}{2} \\ 2x=-1 & x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$x=0$  — также является критической точкой.

№ 919.

$$1) y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}, y' = 0, x < 3, \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{3-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3-x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{11}{4},$$

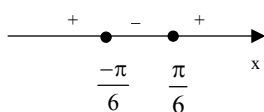


$$x = \frac{11}{4} - \text{точка максимума};$$

$$2) y' = \frac{6 \cdot 1}{7\sqrt{x-1}}, x > 1$$

$y' = 0$  – нет решений

$$3) y' = 1 - 2\cos 2x, y' = 0, \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



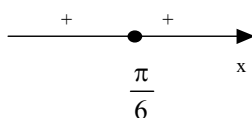
$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n - \text{точки максимума};$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n - \text{точки минимума};$$

$$4) y' = -3\sin 3x - 3,$$

$$y' = 0 \Rightarrow -3(\sin 3x + 1) = 0 \Rightarrow \sin 3x = -1 \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} - \text{стационарная точка.}$$

№ 920.

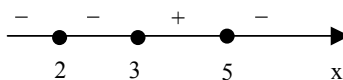
$$1) y' = \frac{-3(2-x)^2(3-x)^2 + 2(3-x)(2-x)^3}{(3-x)^4} =$$

$$= \frac{(2-x)^2(3-x)(-9+3x+4-2x)}{(3-x)^4} = \frac{(2-x)^2(x-5)}{(3-x)^3}$$

$$y' = 0, \frac{(2-x)^2(x-5)}{(3-x)^3} = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

$x = 2$  – стационарная точка;

$x = 5$  – точка максимума;



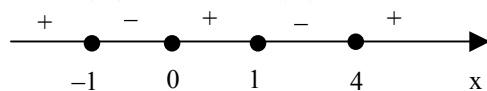
$$y(5) = \frac{(2-5)^3}{(3-5)^3} = \frac{-27}{4} = -\frac{27}{4};$$

$$2) y' = \frac{(3x^2 + 4x)(x-1)^2 - (x^3 + 2x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \quad x \neq 1$$

$$= \frac{(x-1)(3x^3 + x^2 - 4x - 2x^3 - 4x^2)}{(x-1)^4} = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(x-1)^3},$$

$y'=0 \quad x(x^2-3x-4)=0, x=-1$  – точка минимума;  $x=0$  – точка максимума;  
 $x=4$  – точка минимума;

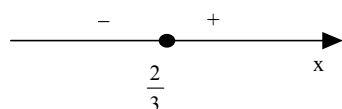
$$y(-1) = \frac{-1+2}{(-2)^2} = \frac{1}{4}, \quad y(0) = \frac{0+0}{(-1)^2} = 0, \quad y(4) = \frac{64+32}{3^2} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3};$$



$$3) y' = e^{3x} + 3(x-1)e^{3x} = e^{3x}(1+3x-3) = e^{3x}(3x-2),$$

$$y'=0, \quad e^{3x}(3x-2)=0 \Rightarrow e^{3x}>0 \text{ и } 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3},$$

$$x=\frac{2}{3} \text{ – точка минимума, } y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot e^2 = -\frac{e^2}{3};$$



$$4) y' = \cos x + \cos 2x, \quad y'=0, \quad \cos x + \cos 2x = 0,$$

$$\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0, \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

$$D=1+8=9, \quad \cos x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ – точка максимума,}$$

$$\text{ма,}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ – точка минимума,}$$

$$y\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 4\pi n\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$y\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{10\pi}{3} + 4\pi n\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}} e^{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} e^{\sqrt{3-x^2}};$$

$$y' = 0 \text{ при } -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} e^{\sqrt{3-x^2}} = 0, \text{ поскольку}$$

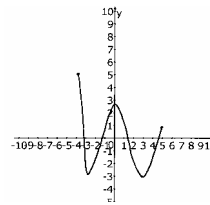
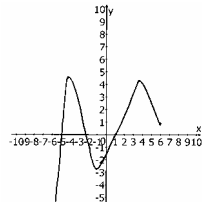
$$e^{\sqrt{3-x^2}} > 0, \text{ ищем } -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} = 0, \text{ откуда } x=0;$$

При переходе через точку 0 производная  $y'$  меняет свой знак на отрицательный, значит,  $x=0$  – точка минимума,  $y(0) = e^{\sqrt{3-0}} = e^{\sqrt{3}}$ ;

$$6). y' = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}; y' = 0 \text{ при } \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}} = 0;$$

$e^x - 1 = 0; e^x = 1; e^x = e^0; x = 0$  при переходе через точку 0 производная  $y'$  меняет свой знак с отрицательного на положительный, значит,  $x=0$  – точка минимума,  $y(0) = \sqrt{e^0 - 0} = 1$ .

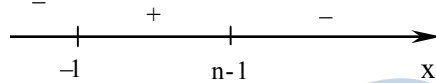
№ 921



№ 922

$$y' = n(x+1)^{n-1} \cdot e^{-x} - (x+1)^n \cdot e^{-x} = (x+1)^{n-1} \cdot e^{-x}(n-x-1),$$

$$y' = 0, (x+1)^{n-1} \cdot e^{-x}(n-x-1) = 0,$$



$$n = 2k,$$

$x = -1$  – точка минимума,  $x = n - 1$  – точка максимума

$$n = 2k + 1, (x+1)^{n-1} = (x+1)^{2k} \geq 0,$$

$x = n - 1$  – точка максимума.

## § 51 Применение производной к построению графиков функции

№ 923

1) область определения:  $-7 \leq x \leq 7$ ,

множество значений:  $-2 \leq f(x) \leq 2$ ;

2)  $y(x) = 0$  при  $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 6$ ;

3) функция возрастает при  $-5 < x < -2, 2 < x < 5$ ,

функция убывает при  $-7 < x < -5, -2 < x < 2, 5 < x < 7$ ;

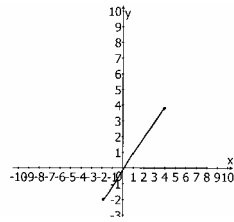
4)  $f(x) > 0$  при  $-7 < x < -6$ ,  $-4 < x < 0$ ,  $4 < x < 6$ ,  
 $f(x) < 0$  при  $-6 < x < -4$ ,  $0 < x < 4$ ,  $6 < x < 7$ ;  
5)  $x_{\max} = -7$ ,  $x_{\max} = -2$ ,  $x_{\max} = 5$ ,  $x_{\min} = -5$ ,  $x_{\min} = 2$ .

*StudyPort.ru*

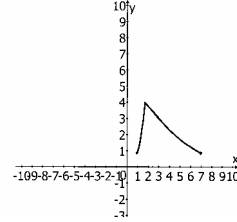


№ 924

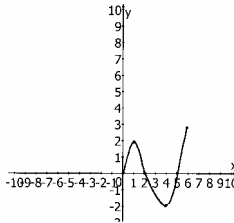
1)



2)



№ 925



№ 926

1)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ;

1. область определения – множество  $\mathbb{R}$ ;      2.  $y' = 3x^2 - 6x$ ;

3.  $y' = 0$ ,  $3x(x - 2) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ;

4.  $y' > 0$ ,  $x < 0$ ,  $x > 2$  – возрастает;  $y' < 0$ ,  $0 < x < 2$  – убывает;

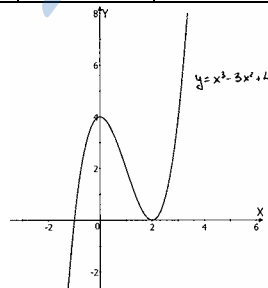
5.  $x = 0$  – точка max, т.к. при переходе через нее меняется знак  $y'$  с «+» на «-».

$y(0) = 4$ ,  $x = 2$  – точка min, т.к. при переходе через нее меняется знак  $y'$

с «-» на «+».

$y(2) = 8 - 12 + 4 = 0$ .

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗






2)  $y = 2 + 3x - x^3$

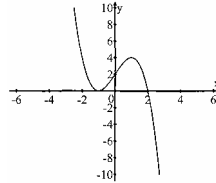
1. область определения – множество R; 2.  $y' = 3 - 3x^2$

3.  $y' = 0 \quad 3(1 - x^2) = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x = 1, \quad x = -1$

4.  $y' > 0; \quad x^2 < 1; \quad -1 < x < 1, \quad y' > 0; \quad x^2 > 1; \quad x < -1; \quad x > 1;$

5.  $x = -1$  – точка минимума  $f(-1) = 2 - 3 + 1 = 0$ ,  
 $x = 1$  – точка максимума  $f(1) = 2 + 3 - 1 = 4$ ;

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$F'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		4		0	



3)  $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$ ;




1. область определения – R; 2.  $y' = -3x^2 + 8x - 4$ ;

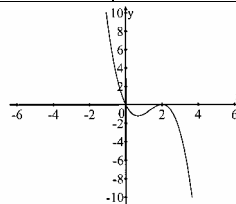
3.  $y' = 0; \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad D = 16 - 12 = 4$ ;

$x_1 = \frac{4+2}{3} = 2, \quad x_2 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$ ;

4.  $y' > 0; \quad 3x^2 - 8x + 4 < 0, \quad \frac{2}{3} < x < 2,$

$y' < 0; \quad 3x^2 - 8x + 4 > 0, \quad \frac{2}{3} < x < 2 \quad x > 2.$

x	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$	2	$x > 2$
$F'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$-\frac{32}{27}$		0	



5.  $x = \frac{2}{3}$  - точка  $\min$   $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{32}{27}$ ,

$x = 2$  - точка  $\max$   $f(2) = -8 + 16 - 8 = 0$ ;

4)  $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ ;

1. область определения -  $\mathbb{R}$ ; 2.  $y' = 3x^2 + 12x + 9$ ;

3.  $y' = 0$ ;  $x^2 + 4x + 3 = 0$ ,  $D = 4 - 3 = 1$ ,  $x_1 = -2 - 1 = -3$ ,  $x_2 = -2 + 1 = -1$ ;

4.  $y' > 0$ ;  $x^2 + 4x + 3 > 0$ ,  $x > -3$ ,  $x > -1$ ,  $y' < 0$ ;  $x^2 + 4x + 3 < 0$ ,  $-3 < x < -1$ ;

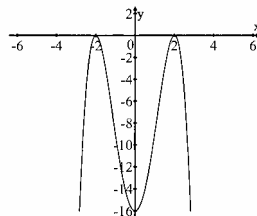
x	$x < -3$	-3	$-3 < x < -1$	-1	$x > -1$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

5.  $x = -3$  - точка  $\max$ ;  $f(-3) = -27 + 54 - 27 = 0$ ,

$x = -1$  - точка  $\min$ ;  $f(-1) = -1 + 6 - 9 = -4$ .

№ 927

1)  $y = x^4 + 8x^2 - 16$



1. область определения -  $\mathbb{R}$ ;

2.  $y' = -4x^3 + 16x$ ;

3.  $y' = 0$ ;  $-4x(x^2 - 4) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$ ;

4.  $y' > 0$ ;  $x(x - 2)(x + 2) < 0$ ,

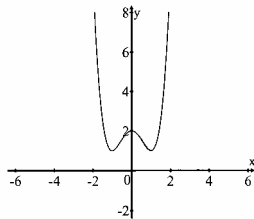
$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & | & & | & & | & \\ -2 & & 0 & & 2 & & \\ \hline x < -2, 0 < x < 2, y' < 0 & x(x-2)(x+2) > 0 & -2 < x < 0 \text{ и } x > 2. \end{array}$

X	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\searrow$

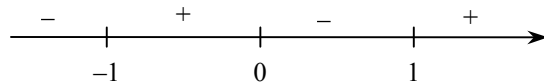
5.  $x = -2$  - точка  $\max$ ;  $f(-2) = -16 + 32 - 16 = 0$ ,

$x = 0$  - точка  $\min$ ,  $f(0) = -16$ ;  $x = 2$  - точка  $\max$ ,  $f(2) = -16 + 32 - 16 = 0$ ;

2)  $y = x^4 - 2x^2 + 2$



1. область определения – R; 2.  $y' = 4x^2 - 4x$ ;  
 3.  $y' = 0$ ;  $4x(x^2 - 1) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ ; 4.  $y' > 0$ ;  $x(x^2 - 1) > 0$

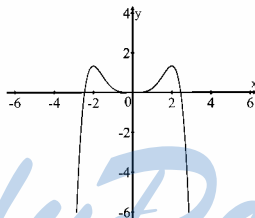


$-1 < x < 0$ ,  $x > 1$ ,  $y' < 0$ ;  $x(x^2 - 1) < 0$   $x < -1$   $0 < x < 1$

X	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘	1	↗

$x = -1$  – точка min,  $f(-1) = 1 - 2 + 2 = 1$ ;  $x = 0$  – точка max,  
 $f(0) = 0 + 0 + 2 = 2$ ;  $x = 1$  – точка min,  $f(1) = 1 - 2 + 2 = 1$

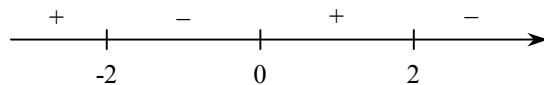
3)  $y = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{24} \cdot x^6$



1. Область определения – R; 2.  $y' = x^3 - \frac{1}{4}x^5$ ;

3.  $y' = 0$ ;  $x^3 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pm 2$ ;

4.  $y' > 0$ ;  $\frac{1}{4}x^3(4 - x^2) > 0$ ,



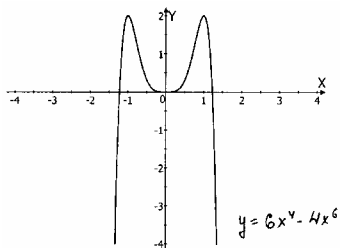
$$x < -2, 0 < x < 2, y' < 0; \frac{1}{4}x^3(4-x^2) < 0, -2 < x < 0, x > 2;$$

X	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		$\frac{4}{3}$		0		$\frac{4}{3}$	

$$5. x = -2 - \text{точка макс}; f(-2) = \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{24} \cdot 64 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3},$$

$$x = 0 - \text{точка мин}; f(0) = 0 + 0 = 0, x = 2 - \text{точка макс}; f(2) = \frac{4}{3};$$

$$4) y = 6x^4 - 4x^6$$



1. Область определения – R

2.  $y(-x) = 6(-x)^4 - 4(-x)^6 = 6x^4 - 4x^6 = y(x)$  – четная, график симметричен относительно Oy. Исследуем на  $(0; +\infty)$

$$3. y' = 24x^3 - 24x^5$$

$$4. y' = 0, 24x^3(1 - x^2) = 0, x = 0, x = \pm 1$$

5.

x	0	(0, 1)	1	(1; +∞)
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	0		2	

$$x = 0 - \text{точка мин } f(0) = 0$$

$$x = \pm 1 - \text{точка макс } f(1) = f(-1) = 6 - 4 = 2$$

№ 928

$$1) y = x^3 - 3x^2 + 2$$

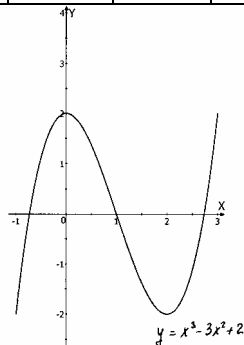
1. Область определения  $[-1; 3]$  – по условию

$$2. y' = 3x^2 - 6x$$

$$3. y' = 0; 3x^2 - 6x = 0, 3x(x - 2) = 0, x = 0, x = 2$$

4.

X	-1	(-1; 0)	0	(0; 2)	2	(2; 3)	3
y'	+	+	0	-	0	+	+
y	-2	↗	2	↘	-2	↗	2
			max		min		



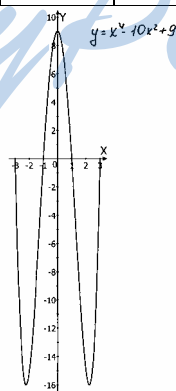
2)  $y = x^4 - 10x^2 + 9$  на  $[-3, 3]$ ;

1. Область определения  $[-3, 3]$ ;

2.  $y' = 4x^3 - 20x$ ;

3.  $y' = 4x(x^2 - 5) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pm\sqrt{5}$ ;

x	-3	$(-3; -\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}; 0)$	0	$(0; \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}; 3)$	3
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	0	↘	-16	↗	9	↘	-16	↗	0
			min		max		min		



№ 929

$x_{\max} = -3, 4; x_{\min} = -6, 1, 6.$





№ 930

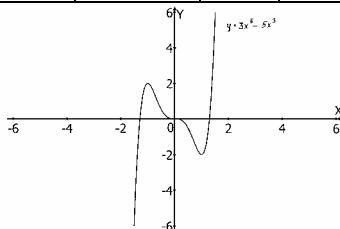
1)  $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$

1. Область определения – R

2.  $y' = 15x^2 - 15x^4$

$y' = 0; 15x^2(1 - x^2) = 0, x = 0, x = \pm 1$

X	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$y'$	-	0	+	0	+	0	-
$y$		0		2		4	
		min				max	







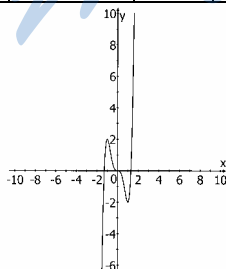
2)  $y = 3x^5 - 5x^3$

1. Область определения – IR

2.  $y' = 15x^4 - 15x^2$

$y' = 0; 15x^2(x^2 - 1) = 0, x = 0, x = \pm 1$

X	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$y'$	+	0	-	0	-	0	+
$y$		2		0		-2	
		max				min	

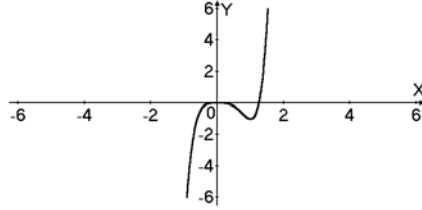


3)  $y = 4x^5 - 5x^4$

1. Область определения – IR; 2.  $y' = 20x^4 - 20x^3$

$$y' = 0; 20x^3(x-1) = 0, x = 0, x = 1$$

x	$x < 0$	0	$0 < x < 8$	1	$x > 1$
$y'$	+	0	-	0	+
y		0		-1	
		max		min	



$$4) y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x;$$

1. Область определения – R;

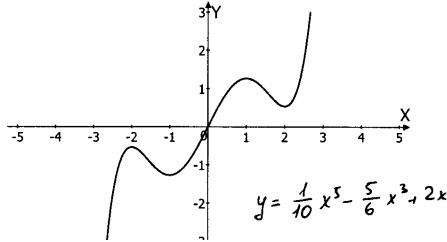
$$2. y' = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 2, y' = 0; x^4 - 5x^2 + 4 = 0, D = 25 - 16 = 9,$$

$$x^2 = \frac{5+3}{2} = 4, x = \pm 2, x^2 = \frac{5-3}{2} = 1, x = \pm 1,$$

$$y(-x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x = -y(x) \text{ - нечетная функция, симметричная}$$

относительно 0. Продолжим рассуждение на  $(0; +\infty)$

x	0	(0;1)	1	(1;2)	2	(2;+\infty)
$y'$	0	+	0	-	0	+
y	0		$\frac{19}{15}$		$\frac{8}{15}$	
			max		min	





№ 931

1)  $y = 3x + \frac{1}{3x}$ ;

1. Область определения – R при  $x \neq 0$

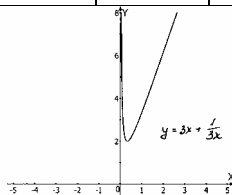
2.  $y(-x) = -3x - \frac{1}{3x} = -y(x)$  - функция нечетная, график симметричен

относительно 0. Рассмотрим его на  $(0; +\infty)$

3.  $y' = 3 - \frac{1}{3x^2}$ ;

4.  $y' = 0$ ;  $9x^2 - 1 = 0$ ,  $x = \pm \frac{1}{3}$ ;

x	$(0; \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}; +\infty)$
$y'$	-	0	+
y	↘	2	↗
		min	



*StudyPort.ru*

2)  $y = \frac{4}{x} - x$ ;

1. Область определения  $x \neq 0$ ;

2.  $y(-x) = -\frac{4}{x} + x = -y(x)$  - функция нечетна и ее график симметричен

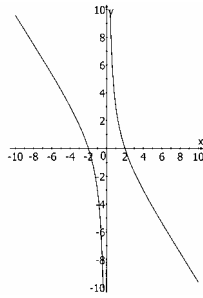
относительно 0. Рассмотрим его на  $(0; +\infty)$ ;

3.  $y' = -\frac{4}{x^2} - 1$ ; 4.  $y' = 0$   $4 + x^2 = 0$  – не существует стационарных точек;

5. пересечение с 0х:  $0 = \frac{4}{x} - x$ ;  $x^2 = 4$ ,  $x = \pm 2$ ;

6. если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \rightarrow -x$ , если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \rightarrow \infty$ ;

7.  $y > 0$ ,  $\frac{4-x^2}{x} > 0$  при  $0 < x < 2$ ;



3)  $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

1. Область определения  $x > 0$ ; 2.  $y' = 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ;

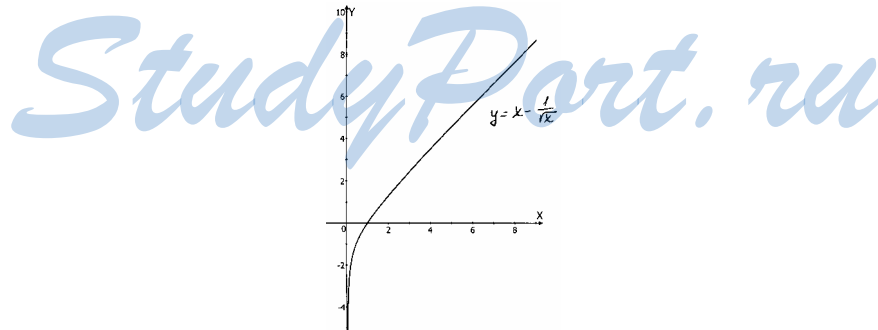
3.  $y' = 0$ ;  $1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$   $2x\sqrt{x} + 1 = 0$ ,

$\sqrt{x^3} = -\frac{1}{2}$  — нет стационарных точек;

4.  $y = 0$  при  $x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$   $\sqrt{x^3} = 1$ ,  $x = 1$ ;

5. если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \rightarrow -\infty$ , если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \rightarrow x$ ;

6.  $y > 0$ ;  $x - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$   $\sqrt{x^3} > 1$ ,  $x > 1$ ;


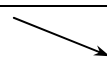


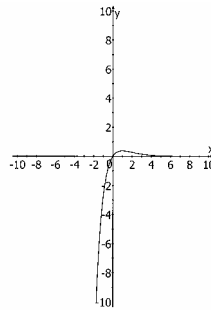
№ 932

1)  $y = xe^{-x}$

1. Область определения  $\mathbb{R}$ ; 2.  $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ ;

3.  $y' = 0$ ;  $e^{-x}(1-x) = 0$ ,  $e^{-x} > 0$ ,  $x = 1$ ,  $y' > 0$ ;  $1-x > 0$ ,  $x < 1$ ;

X	$x < 1$	1	$x > 1$
$y'$	+	0	-
Y		$\frac{1}{e}$	

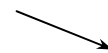
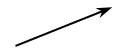


2)  $y = xe^x$

1. Область определения  $\mathbb{R}$ ;

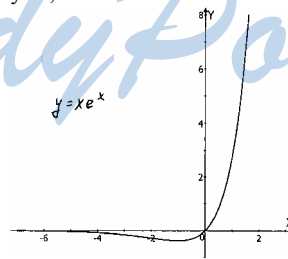
2.  $y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$ ;

3.  $y' = 0$ ;  $e^x(1+x) = 0$ ,  $x = -1$ ;

X	$x < -1$	-1	$x > -1$
$y'$	-	0	+
Y		$-\frac{1}{e}$	
		min	

$x = -1$  – точка минимума;

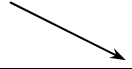
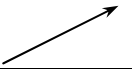
*StudyPort.ru*

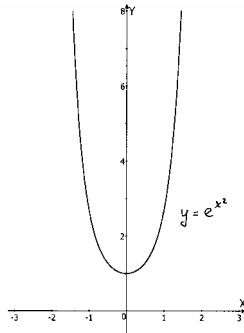


3)  $y = e^{-x^2}$ ;

1. Область определения  $\mathbb{R}$ ;

2.  $y' = 2xe^{-x^2}$ ; 3.  $y' = 0$ ;  $2xe^{-x^2} = 0$ ,  $x = 0$ ;

X	$x < 0$	0	$x > 0$
$y'$	-	0	+
Y		1	





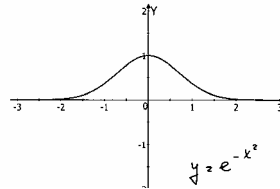
4)  $y = e^{-x^2}$

1. Область определения – R:

2.  $y' = -2x \cdot e^{-x^2}$

3.  $y' = 0$ ;  $-2x \cdot e^{-x^2} = 0$ ,  $x = 0$

X	$x < 0$	0	$x > 0$
$y'$	+	0	-
Y		1	
		max	



№ 933

1)  $y = \frac{x^2}{x-2}$

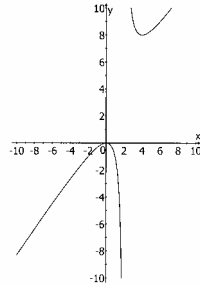
1. Область определения:  $x \neq 2$

2.  $y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

3.  $y' = 0$  при  $\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$

1)

X	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$y'$	+	0	-		-	0	+
Y	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	8	$\nearrow$
		max				min	



$$2) y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x} = -x + 3 - \frac{1}{x};$$

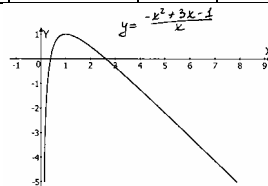
1. Область определения  $x \neq 0$ ;

$$2. y' = -1 + \frac{1}{x^2};$$

$$3. y' = 0; \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0, x = \pm 1, y = 0; x^2 - 3x + 1 = 0, D = 9 - 4 = 5,$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

X	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'$	-	0	+		+	0	-
Y	$\searrow$	5	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$
		min				max	



$$3) y = \frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2} = \frac{4+x-2x^2}{x^2-4x+4}; \quad 1. \text{ Область определения } x \neq 2;$$

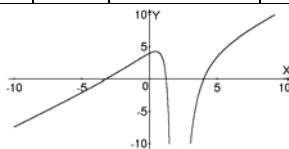
$$2. y' = \frac{(1-4x)(x^2-4x+4) - 2(x-2)(4+x-2x^2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x-4x^2-2+8x-8-2x+4x^2}{(x-2)^3} = \frac{7x-10}{(x-2)^3};$$

$$3. y' = 0; \quad \frac{7x-10}{(x-2)^3} = 0 \quad x = \frac{10}{7};$$

$$4. y = 0; \quad 4+x-2x^2 = 0, \quad 2x^2-x-4 = 0, \quad D = 1+32 = 33, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4};$$

X	$(-\infty; \frac{10}{7})$	$\frac{10}{7}$	$(\frac{10}{7}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-		+
Y		$\frac{33}{8}$			
		max			



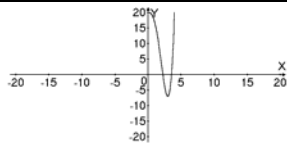
#### № 934

1) Рассмотрим график функции  $y = x^4 - 4x^3 + 20$ . Его пересечение с  $y = 0$  даст количество действительных корней исходного уравнения

1 Область определения R: 2.  $y' = 4x^3 - 12x^2$ ;

3.  $y' = 0$ ;  $4x^2(x-3) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$

X	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	-	0	-	0	+
Y		20		-7	
				min	



Ответ: два корня.

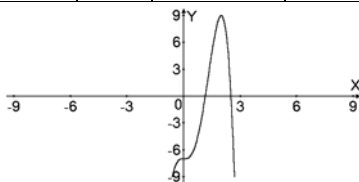
2)  $y = 8x^3 - 3x^4 - 7 = 0$

1. Область определения R:

2.  $y' = 24x^2 - 12x^3$

3.  $y' = 0; \quad 12x^2(2-x) = 0, \quad x = 0, x = 2$

X	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	+	0	-
Y		-7		9	
				max	



Ответ: два корня.

**№ 935**

$y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3};$

1) Область определения  $x \neq 1$ ;

2)  $y' = \frac{3x^2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 4)}{(x-1)^6} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3 + 12}{(x-1)^4} = \frac{3(4-x^2)}{(x-1)^4}$

3)  $y' = 0, \quad \frac{3(4-x^2)}{(x-1)^4} = 0, \quad x = \pm 2;$

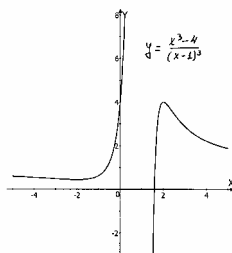
4)

X	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	$(3; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	-	0	+	+	0	-
Y		$\frac{4}{9}$			4	
		min			max	

5)  $y = 0, \quad x^3 = 4, \quad x = \sqrt[3]{4}, \quad x = 0, \quad y = 4;$

6)  $\frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x-1)^3} = 1 + \frac{3x^2 - 3x - 3}{(x-1)^3},$

$x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow 1.$  Т.к.  $(0,9) > 0 \quad y(1,1) < 0$ , то слева от  $x = 0 \quad y \rightarrow +\infty$ , а справа растёт от  $-\infty$



7) Рассмотрим график;

$c < \frac{4}{9}$  имеем один корень;  $c = \frac{4}{9}$  два корня;

$\frac{4}{9} < c < 1$  три корня;  $c = 1$  два корня;  $1 < c < 4$  три корня;

$c = 4$  два корня;  $c > 4$  один корень.

## § 52 Наибольшее и наименьшее значения функции

### № 936

а) $x_{\text{экстр}} = -3; 0$	$U_{\text{наиб}} = 2$	$U_{\text{наим}} = -3$
б) $x_{\text{экстр}} = 0$	$U_{\text{наиб}} = 3$	$U_{\text{наим}} = -3$
в) $x_{\text{экстр}} = -2; 2$	$U_{\text{наиб}} = 3$	$U_{\text{наим}} = -3$
г) $x_{\text{экстр}} = -2; 1$	$U_{\text{наиб}} = 4$	$U_{\text{наим}} = -2$

### № 937

1)  $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$  на  $[-4; 3]$ ;

1.  $y(-4) = 2 \cdot (-64) + 3 \cdot 16 - 36 \cdot (-4) = 64$ ,

$y(3) = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 - 36 \cdot 3 = -27$ ;

2.  $y' = 6x^2 + 6x - 36$ ,  $y' = 0$ ;  $x^2 + x - 6 = 0$ ,  $D = 1 + 24 = 25$ ,

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ ,  $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$ ;

3.  $2 \in [-4; 3]$ ,  $-3 \in [-4; 3]$ ,  $y(-3) = 2 \cdot (-27) + 3 \cdot 9 - 36(-3) = 81$ ,

$y(2) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 36 \cdot 2 = -44$ ,

$\max_{[-4;3]} y(x) = y(-3) = 81$ ,  $\min_{[-4;3]} y(x) = y(2) = -44$ ;

2) на  $[-2; 1]$ ;

а)  $f(-2) = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 - 36(-2) = 68$ ,  $f(1) = 2 + 3 - 36 = -31$ ;

б)  $2 \notin [-2; 1]$ ,  $-3 \notin [-2; 1]$ , значит  $\max_{[-2;1]} f(x) = 68$ ,  $\min_{[-2;1]} f(x) = -31$ .

### № 938

1)  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$  на  $[-3; 2]$ ;

1.  $f(-3) = 81 - 8 \cdot 9 + 5 = 14$ ,  $f(2) = 16 - 8 \cdot 4 + 5 = -11$ ;

2.  $f'(x) = 4x^3 - 16x$ ,  $f'(x) = 0$ ;  $4x(x^2 - 4) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pm 2$ ;

3.  $D \in [-3; 2]$ ,  $-2 \in [-3; 2]$ ,  $2 \in [-3; 2]$ ,  $f(0) = 5$ ,  $f(-2) = -11$ ,  $f(2) = -11$ ,



$$\max_{[-3;2]} f(-3)=14, \quad \min_{[-3;2]} f(x)=f(2)=f(-2)=-11;$$

$$2) f(x)=x+\frac{1}{x}, \quad \left[-2;-\frac{1}{2}\right];$$

$$1. f(-2)=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2};$$

$$2. f'(x)=1-\frac{1}{x^2}, \quad f'(x)=0, \quad x^2-1=0, \quad x=\pm 1;$$

$$3. -1 \in \left[-2;-\frac{1}{2}\right] \quad 1 \notin \left[-2;-\frac{1}{2}\right], \quad f(-1)=-1-1=-2,$$

$$\max_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(-1)=-2, \quad \min_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(-2)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\frac{1}{2};$$

$$3) f(x)=\sin x + \cos x \quad \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right];$$

$$1. f(\pi)=\sin\pi + \cos\pi=0-1=-1, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2}=-1+0=-1;$$

$$2. f'(x)=\cos x - \sin x, \quad f'(x)=0; \quad \cos x - \sin x=0, \quad \cos x \neq 0,$$

$$1 - \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3. \frac{5\pi}{4} \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2},$$

$$\max_{\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f(\pi)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1, \quad \min_{\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}.$$

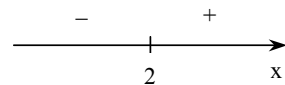
№ 939

$$1) f(x)=x^2 + \frac{16}{x^2}, \quad x > 0;$$

$$1. \text{ Область определения: } x > 0, \quad f'(x)=2x - \frac{32}{x^3},$$

$$f'(x)=0; \quad \frac{2x^4-32}{x^3}=0, \quad 2(x^4-16)=0, \quad x=\pm 2;$$

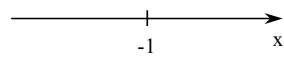
$$2 \in (0; +\infty) \quad -2 \notin (0; +\infty), \quad x=2 - \text{ точка минимума, } f(2)=4 + \frac{16}{4}=8;$$



2)  $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ ,  $x < 0$ . Область определения  $x < 0$ ;

1.  $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 2x$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $-\frac{2(1+x^3)}{x^2} = 0$ ,  $x^3 = -1$ ,  $x = -1$ ,

$-1 \in (-\infty; 0)$



$f(-1) = -\frac{2}{1} - 1 = -3$ ,  $x = -1$  – точка максимума,

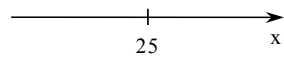
$\max_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1) = -3$ .

**№ 940**

Пусть одно число  $x$ , тогда второе  $(50 - x)$ . Надо найти наименьшее значение суммы их кубов, т.е.:  $f(x) = x^3 + (50 - x)^3$ ,

$f'(x) = 3x^2 - 3(50 - x)^2 = 3x^2 - 7500 + 300x - 3x^2 = 300x - 7500$ ,  $f'(x) = 0$ ,

$300x - 7500 = 0 \Rightarrow x = 25$ ,



$x = 25$  – точка минимума,  $x = 25$ ;  $(50 - x) = 25$ ,  $50 = 25 + 25$ .

**№ 941**

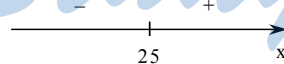
Пусть одно число  $x$ , тогда второе  $\left(\frac{625}{x}\right)$ , но числа эти такие, что сумма

их квадратов наименьшая

$f(x) = x^2 + \left(\frac{625}{x}\right)^2$ ,  $x < 0$ ,

$f'(x) = 2x - \frac{2 \cdot 625^2}{x^3}$ ,  $f'(x) = 0$ ;  $2x - \frac{2 \cdot 625^2}{x^3} = 0$ ,

$2x^4 - 2 \cdot 625^2 = 0$ ,  $x = \pm 25$ ,  $x = 25 \in (0; +\infty)$ ,  $x = -25 \notin (0; +\infty)$ ,



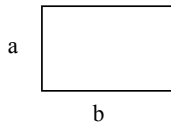
$x = 25$  – точка минимума, значит  $x = 25$ ,  $\frac{625}{x} = 25$ .

Ответ:  $625 = 25 \cdot 25$

**№ 942**

Пусть стороны прямоугольника равны  $a$  и  $b$ , тогда  $p = 2(a + b)$ . Положим,  $a = x$ , тогда  $x > 0$

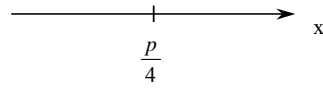
$b = \frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - x$ .



Площадь этого прямоугольника находим как:

$$S = f(x) = a \cdot b = x \cdot \left(\frac{p}{2} - x\right) \text{ — найдем max этой функции.}$$

$$f'(x) = \frac{p}{2} - x - x = \frac{p}{2} - 2x, \quad f'(x) = 0; \quad \frac{p-4x}{2} = 0 \quad x = \frac{p}{4},$$



точка  $x = \frac{p}{4}$  — точка max, значит, прямоугольник имеет стороны

$$a = \frac{p}{4} \quad b = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4} \text{ — это квадрат.}$$

#### № 943

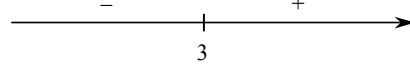
Пусть стороны прямоугольника равны  $a$  и  $b$ .

$$S = 9 = a \cdot b.$$

$$\text{Пусть } a = x, \text{ тогда } b = \frac{9}{x}, \quad p = f(x) = 2(a+b) = 2\left(x + \frac{9}{x}\right) \quad x > 0.$$

$$\text{Найдем минимум этой функции } f'(x) = 2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right),$$

$$f'(x) = 0; \quad 2\left(\frac{x^2 - 9}{x^2}\right) = 0, \quad x = \pm 3,$$



$$3 \in (0; +\infty) \quad -3 \notin (0; +\infty)$$

$$x = 3 \text{ — точка min; } a = 3, \quad b = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: Это квадрат со стороной 3.

#### № 944

$$1) f(x) = \ln x - x, \quad \left[\frac{1}{2}; 3\right], \quad x > 0; \quad 1. \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 0, \quad f(3) = \ln 3 - 3 < 0;$$

$$2. \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad f'(x) = 0; \quad \frac{1-x}{x} = 0, \quad x = 1; \quad 3. \quad 1 \in \left[\frac{1}{2}; 3\right], \quad f(1) = \ln 1 - 1 = -1.$$

Выясним, что больше. Допустим,  $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(3)$

$$\ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} > \ln 3 - 3, \quad \ln \frac{1}{2} - \ln 3 > -\frac{5}{2}, \quad \ln \frac{1}{6} > \ln e^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{e^{5/2}}$$

$e^{5/2} > 6$  — что верно

Допустим  $f(3) < f(1)$ , т.е.  $\ln 3 - 3 > -1$ ,  $\ln 3 > 2$ ,  $\ln 3 > \ln e^2$ ,  
 $3 > e^2$  – не верно, значит  $f(1) > f(3)$ .

Допустим  $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$ , т.е.  $\ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} > -1$ ,  $\ln \frac{1}{2} > \ln e^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{e}}$ ,

$\sqrt{e} > 2$ ,  $e > 4$  – не верно, значит  $f(1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

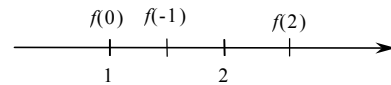
Итак,  $\max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} f(x) = f(1) = -1$ ,  $\min_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} f(x) = f(3) = \ln 3 - 3$ ;

2)  $f(x) = x + e^{-x}$ ,  $[-1; 2]$ ;

1.  $f(-1) = -1 + e = e - 1 < 2$ ,  $2 < e < 3$ ,  $1 < e - 1 < 2$ ,  $f(2) = 2 + \frac{1}{e^2} > 2$ ;

2.  $f'(x) = 1 - e^{-x}$ ,  $f'(x) = 0$ ;  $1 - e^{-x} = 0$ ,  $e^{-x} = 1 = e^0$ ,  $x = 0$ ,  $f(0) = 0 + e^0 = 1$ ,

$\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2 + \frac{1}{e^2}$ ,  $\min_{[-1; 2]} f(x) = f(0) = 1$ ;



3)  $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$ ,  $[0; \pi]$ ;

1.  $f(0) = 2\cos 0 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$ ,  $f(\pi) = 2\cos \pi - \cos 2\pi = -2 - 1 = -3$ ;

2.  $f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x$ ,  $f'(x) = 0$ ;  $-2\sin x(1 - 2\cos x) = 0$ ,

$\sin x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\cos x = +\frac{1}{2}$   $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

3.  $0 \in [0; \pi]$ ,  $\pi \in [0; \pi]$ ,  $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ ,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} = +1 + \frac{1}{2} = +\frac{3}{2}$ ,

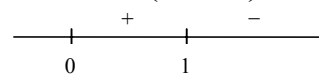
$\max_{[0; \pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ ,  $\min_{[0; \pi]} f(x) = f(\pi) = -3$ .

№ 945

1)  $f(x) = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ ,  $x > 0$ ;

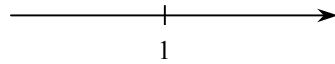
1.  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ,

$f'(x) = 0$ ;  $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = 0$   $\frac{1-x}{\sqrt{x}} = 0$ ,  $x = 1$



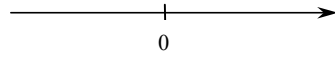
$x = 1$  – точка max,  $f(1) = 3 - 1 = 2$ ;

2.  $f(x) = 3x - 2x\sqrt{x}$ ,  $x > 0$ ,  $f'(x) = 3 - 3\sqrt{x}$ ,  
 $f'(x) = 0$ ;  $3(1 - \sqrt{x}) = 0$ ,  $\sqrt{x} = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 1$ , точка max.  
 3.  $1 \in (0; +\infty)$ ,  $f(1) = 3 - 2 = 1$ .



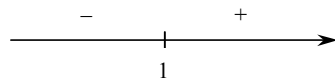
**№ 946**

1)  $f(x) = e^{3x} - 3x$  на  $(-1; 1)$ ,  $f'(x) = 3e^{3x} - 3$ ,  
 $f'(x) = 0$ ,  $3(e^{3x} - 1) = 0$ ,  $e^{3x} = 1 - e^0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 0$  – точка min,  $0 \in (-1; 1)$ ,  
 $f(0) = e^{3 \cdot 0} - 3 \cdot 3 = 1$ ;



2)  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  на  $(0; 2)$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $\frac{x-1}{x^2} = 0$ ,

$x = 1$ ,  $x = 1$  – точка min,  $1 \in (0; 2)$ ,  $f(1) = \frac{1}{1} + \ln 1 = 1$ .

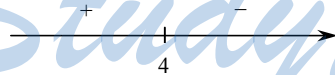


**№ 947**

1)  $f(x) = x^4\sqrt{5-x}$  на  $(0; 5)$ ,  
 $f'(x) = 4\sqrt{5-x} + \frac{x \cdot (-1)}{4\sqrt{(5-x)^3}} = \frac{4(5-x) - x}{4\sqrt{(5-x)^3}} = \frac{20-5x}{4\sqrt{(5-x)^3}}$ ,

$f'(x) = 0$ ,  $\frac{20-5x}{4\sqrt{(5-x)^3}} = 0$ ,  $x = 4$ ,  $x = 4$  – точка max,  $4 \in (0; 5)$ ,

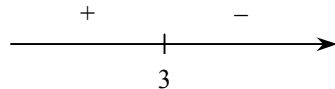
$f(4) = 4 \cdot \sqrt[4]{5-4} = 4$ ;



2)  $f(x) = x^3\sqrt{4-x}$ ,  $(0; 4)$ ,  $f'(x) = 3\sqrt{4-x} + \frac{x \cdot (-1)}{3\sqrt{(4-x)^2}} = \frac{12-4x}{3\sqrt{(4-x)^2}}$ ,

$f'(x) = 0$ ,  $\frac{12-4x}{3\sqrt{(4-x)^2}} = 0$ ,  $x = 3$ ,  $x = 3$  – точка max,  $3 \in (0; 4)$ ,

$f(3) = 3 \cdot \sqrt[3]{4-3} = 3$ ;

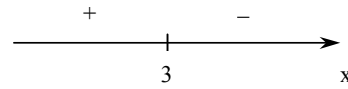


$$3) f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}, (0; 1),$$

$$f'(x) = \frac{1(2x(1-x) + x^2 \cdot (-1))}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}} = \frac{2x - 3x^2}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}} = \frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}}$$

$$f'(x) = 0, \frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}} = 0, x = \frac{2}{3}, x = \frac{2}{3} - \text{точка макс.}, \frac{2}{3} \in (0; 1),$$

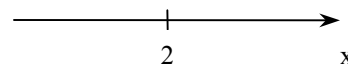
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3};$$



$$4) f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 5}, (-1; 5), f'(x) = \frac{1 \cdot (2x - 4)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 5)^2}},$$

$$f'(x) = 0; \frac{2x - 4}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 5)^2}} = 0, x = 2, x = 2 - \text{точка мин.}, 2 \in (-1; 5),$$

$$f(2) = \sqrt[3]{4 - 8 + 5} = 1.$$



#### № 948

Пусть мы вырежем квадраты со стороны  $x$ , тогда высота и есть  $x$ . Запишем в таком случае объем

$$f(x) = V = (a - 2x)(a - 2x) \cdot x = (a - 2x)^2 \cdot x = a^2x - 4a^2x + 4x^3$$

$$f'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2;$$

$$f'(x) = 0: 12x^2 - 8ax + a^2 = 0, D = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2,$$

$$x_1 = \frac{4a + 2a}{12} = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{4a - 2a}{12} = \frac{a}{6},$$

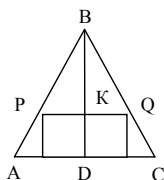
$$f\left(\frac{a}{2}\right) = (a - a)(a - a) \cdot \frac{a}{2} = 0,$$

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - \frac{a}{3}\right)\left(a - \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{a}{6} = \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27},$$

$$\max f(x) = f\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}.$$

Ответ: высота коробки должна быть  $\frac{a}{6}$ .

№ 949



Пусть  $BK = x$ , тогда высота треугольника  $BD = a + x$ .  
 Найдем основание  $AC$ . Треугольники  $ABC$  и  $PQB$  – подобны с коэффициентом  $\frac{x+a}{x}$ , значит  $\frac{AC}{PQ} = \frac{x+a}{x}$ ,

$$AC = \frac{(x+a) \cdot PQ}{x} = \frac{(x+a) \cdot a}{x}.$$

Площадь:

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \frac{(x+a)a}{x} \cdot (a+x) = \frac{(x+a)^2 \cdot a}{2x},$$

$$f'(x) = \frac{2}{a} \cdot \left( x + 2a + \frac{a^2}{x} \right)' = \frac{2}{a} \left( 1 - \frac{a^2}{x^2} \right),$$

$$f'(x) = 0; \quad \frac{2}{a} \left( \frac{x^2 - a^2}{x^2} \right) = 0, \quad x = \pm a, \quad x > 0, \quad x = a,$$

$$f(a) = \frac{(a+a)^2 \cdot a}{2a} = 2a^2.$$

Ответ: наименьшая площадь при  $BK = a$ .

№ 950

$y = 3 - x^2$  – график этой функции симметричен относительно  $oy$ , значит, вершины прямоугольника будут иметь координаты

$B = (-x, y)$ ;  $A = (-x, 0)$ ;  $C = (x, y)$ ;  $D = (x, 0)$ .

Основание прямоугольника равно  $2x$  ( $x > 0$ ) и высота  $y$ , значит, площадь:

$$f(x) = S = 2x \cdot y = 2x \cdot (3 - x^2), \quad x \in (0; 3),$$

$$f'(x) = 2(3 - x^2) + 2x \cdot (-2x) = 6 - 2x^2 - 4x^2 = 6(1 - x^2),$$

$$f'(x) = 0; \quad 6(1 - x^2) = 0, \quad x = \pm 1, \quad 1 \in (0; 3) \quad -1 \notin (0; 3),$$

$$f(1) = 2 \cdot 1(3 - 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: наибольшая площадь прямоугольника равна 4.

№ 951

Пусть это точка  $B$  с координатами  $(x, x^2)$ .

Тогда расстояние до точки  $A$ :  $\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_B)^2} = \rho$  или

$$\rho = f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}, \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (4x^3 - 4)}{2\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}},$$

$$f'(x) = 0; \quad \frac{4x^3 - 4}{2\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}} = 0,$$

$x^3 = 1, \quad x = 1, \quad x = 1$  — точка минимума,  $y = 1^2 = 1$ .  
 Ответ: (1; 1) — ближайшая к точке А.

**№ 952**

Пусть  $a$  — ширина доски,  $\varphi$  — угол,  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Тогда площадь поперечного сечения желоба:

$$S(\varphi) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot a(a \cos \varphi) \sin \varphi\right) + a(a \cdot \cos \varphi),$$

$$S(\varphi) = a^2\left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \cos \varphi\right).$$

Найдем максимум этой функции:

$$S'(x) = a^2\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\varphi - \cos \varphi\right),$$

$$S' = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi - \sin \varphi = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \varphi - \sin \varphi = 0.$$

Обозначим  $\sin \varphi = t$ ;

$$2t^2 + t - 1 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(-1)}}{2 \cdot 2}; \quad t_1 = -1; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

при  $t = -1$ :  $\sin \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3}{2}\pi$  — посторонний корень.

при  $t = \frac{1}{2}$ :  $\sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ , и угол наклона боковых досок к основанию:  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$ .

Ответ:  $\frac{2}{3}\pi$ .

**§ 53 Выпуклость графика функции, точки перегиба**

**№ 953**

$$1) f''(x) = (x^2 \cos x)'' = (2x \cos x - x^2 \sin x)' = (2x \cos x)' - (x^2 \sin x)' = 2 \cos x - 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x = \cos x(2 - x^2) - 4x \sin x;$$

$$2) f''(x) = (x^3 \sin x)'' = (3x^2 \sin x + x^3 \cos x)' = 3(x^2 \sin x)' + (x^3 \cos x)' = 6x \sin x + 3x^2 \cos x + 3x^2 \cos x - x^3 \sin x = \sin x(6x - x^3) + 6x^2 \cos x;$$



$$3) f''(x) = (x^5 + 2x^3 - x^2 + 2)'' = (5x^4 + 6x^2 - 2x)' = 20x^3 + 12x - 2;$$

$$4) f''(x) = (x^4 - 3x^3 + 5x + 6)'' = (4x^3 - 9x^2 + 5)' = 12x^2 - 18x.$$

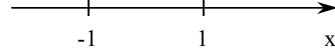
### № 954

$$1) f''(x) = ((x+1)^4)'' = (4(x+1)^3)' = 12(x+1)^2,$$

$f''(x) > 0$  при всех  $x \neq -1$ , значит, функция при всех  $x \neq -1$  выпукла вниз

$$2) f''(x) = (x^4 - 6x^2 + 4)'' = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12,$$

$$f'' > 0, \quad 12(x^2 - 1) > 0, \quad (x-1)(x+2) > 0,$$



при  $x < -1$  и  $x > 1$ , на этих промежутках функция выпукла вниз.

$f''(x) < 0$  при  $-1 < x < 1$ , на этом промежутке выпукла вверх;

$$3) f''(x) = ((x^2 - 3x + 2)e^x)'' = ((2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 2)e^x)' =$$

$$= (e^x(x^2 - x - 1))' = e^x(x^2 - x - 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x - 2)$$

$$f''(x) > 0, \quad x^2 + x - 2 > 0,$$



$$D = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2,$$

при  $x < -2$  и  $x > 1$  – функция выпукла вниз,

$f''(x) < 0$  при  $-2 < x < 1$  – функция выпукла вверх;

$$4) f''(x) = (x^3 - 6x \ln x)'' = (3x^2 - 6 \ln x - 6)' = \left(6x - \frac{6}{x}\right), \quad x > 0,$$

$$f''(x) > 0, \quad 6\left(x - \frac{1}{x}\right) > 0, \quad 6\frac{(x^2 - 1)}{x} > 0, \quad \frac{6(x-1)(x+1)}{x} > 0,$$

при  $x > 1$  – функция выпукла вниз,

$f''(x) < 0$  при  $0 < x < 1$  – функция выпукла вверх.

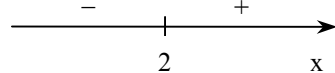
### № 955

$$1) f''(x) = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x, \quad f''(x) = 0, \quad -\pi < x < \pi,$$

$$-\cos x = 0, \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \quad x = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2};$$

$$2) f''(x) = (x^5 - 80x^2)'' = (5x^4 - 160x)' = 20x^3 - 160,$$

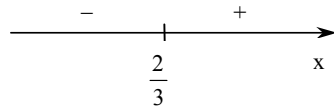
$$f''(x) = 0, \quad 20(x^3 - 8) = 0, \quad x = 2.$$



При переходе через  $x = 2$   $f''(x)$  меняет знак, значит,  $x = 2$  – точка перегиба;

$$3) f''(x) = (12x^3 - 24x^2 + 12x)'' = (36x^2 - 48x + 12)' = 72x - 48$$

$$f''(x) = 0, \quad 24(3x - 2) = 0, \quad x = \frac{2}{3},$$



при переходе через  $x = \frac{2}{3}$  знак  $f'(x)$  меняется, значит, это точка перегиба

$$4) f''(x) = \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)' = (\cos x - \cos 2x)' =$$

$$= -\sin x + 2 \sin 2x = 2 \sin 2x - \sin x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f''(x) = 0,$$

$$\sin x(4 \cos x - 1) = 0, \quad \sin x = 0 \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \pi n \notin (-\pi; \pi),$$

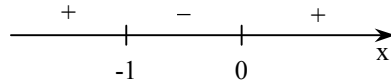
$$\cos x = \frac{1}{4}, \quad x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{4} \text{ — являются точками перегиба.}$$

### Упражнения к главе IX.

№ 956

$$1) y' = (2x^3 + 3x^2 - 2)' = 6x^2 + 6x, \quad y' > 0, \quad 6x(x+1) > 0,$$



при  $x < -1$ ,  $x > 0$  — возрастает;  $y' < 0$  при  $-1 < x < 0$  — убывает;

$$2) y' = \left( \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5 \right)' = 2x^2 - 2x - 4,$$

$$y' > 0, \quad 2x^2 - 2x - 4 > 0, \quad x^2 - x - 2 > 0, \quad D = 1 + 8 = 9,$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1,$$



при  $x < -1$ ,  $x > 2$  функция возрастает;  $y' < 0$ ,  $x^2 - x - 2 < 0$ ,  
при  $-1 < x < 2$  — убывает;

$$3) y' = \left( \frac{3}{x} - 1 \right)' = -\frac{3}{x^2}; \quad x \neq 0$$

$y' < 0$  при всех  $x$ , но  $x \neq 0 \Rightarrow$  значит, функция убывает при  $x < 0$  и  $x > 0$ ;

$$4) y' = \left( \frac{2}{x-3} \right)' = \frac{-2}{(x-3)^2}; \quad x \neq 3,$$

$y' < 0$  при  $x < 3$  и  $x > 3$  и убывает на этих промежутках.

№ 957

1)  $y' = (x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1)' = 4x^3 - 12x^2 - 16x, y' = 0, 4x(x^2 - 3x - 4) = 0;$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}, D = 9 + 16 = 25, x_1 = \frac{3+5}{2} = 4, x_2 = \frac{3-5}{2} = -1,$$

$x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 0;$

2)  $y'(4x^4 - 2x^2 + 3)' = 16x^3 - 4x, y' = 0, 4x(4x^2 - 1) = 0,$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}.$$

3)  $y' = \left(\frac{x}{3} + \frac{12}{x}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{12}{x^2}; x \neq 0, y' = 0, \frac{x^2 - 36}{3x^2} = 0,$

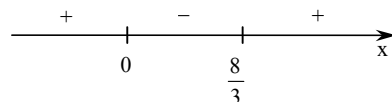
$x^2 - 36 = 0, x = \pm 6;$

4)  $y' = (\cos 2x + 2\cos x)' = -2\sin 2x - 2\sin x, y' = 0, -2\sin x(2\cos x + 1) = 0,$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pm 2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$$

№ 958

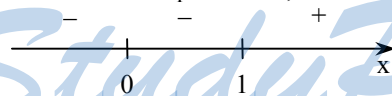
1)  $y' = (x^3 - 4x^2)' = 3x^2 - 8x, y' = 0, x(3x - 8) = 0, x_1 = 0; x_2 = \frac{8}{3},$



$x = 0$  – точка max.,  $x = \frac{8}{3}$  – точка min.;

2)  $y' = (3x^4 - 4x^3)' = 12x^3 - 12x^2, y' = 0, 12x^2(x - 1) = 0, x_1 = 0; x_2 = 1,$

$x = 0$  – стационарная точка,  $x = 1$  – точка min.

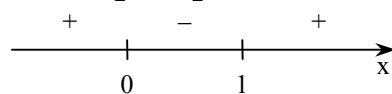


№ 959

1)  $y' = \left(x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 3\right)' = 5x^4 - 5x, y' = 0, 5x(x^3 - 1) = 0, x_1 = 0; x_2 = 1,$

$x = 0$  – точка max.,  $f(0) = 0 - 0 + 3 = 3, x = 1$  – точка min.,

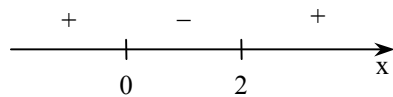
$f(1) = 1 - \frac{5}{2} + 3 = \frac{3}{2};$



$$2) y' = \left( \frac{1}{5}x^5 - 4x^2 - 3 \right)' = x^4 - 8x, \quad y' = 0, \quad x(x^3 - 8) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2,$$

$x = 0$  – точка max.,  $f(0) = 0 - 0 - 3 = -3$ ,  $x = 2$  – точка min.,

$$f(2) = \frac{32}{5} - 16 - 3 = -\frac{63}{5}.$$

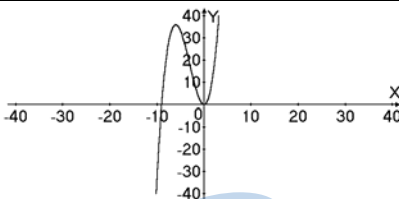


№ 960

$$1) y = \frac{x^3}{3} + 3x^2.$$

Область определения –  $\mathbb{R}$ ,  $y' = x^2 + 6x$ ,  $y' = 0$ ,  $x(x + 6) = 0$ ,  
 $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -6$  – стационарные точки

x	$x < -6$	-6	$-6 < x < 0$	0	$x > 0$
y'	+	0	-	0	+
y				0	
		max		min	

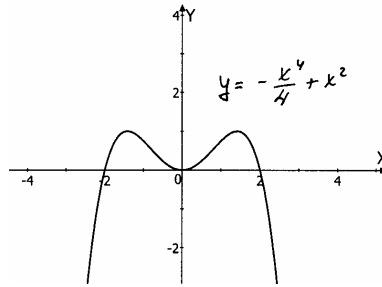


$$2) y = -\frac{x^4}{4} + x^2.$$

Область определения –  $\mathbb{R}$ ,

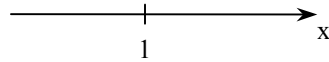
$$y' = -x^3 + 2x, \quad y' = 0, \quad x(2 - x^2) = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \pm\sqrt{2}$$

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
y'	+	0	-	0	+	0	-
y		1		0		1	
		max		min		max	

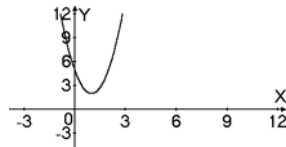


№ 961

1)  $y = 3x^2 - 6x + 5$  на  $[0; 3]$ . Область определения  $[0; 3]$ ,  
 $y' = 6x - 6$ ,  $y' = 0$ ,  $6(x - 1) = 0$ ,  $x = 1$



x	0	(0; 1)	1	(1; 3)	3
y'		-	0	+	
y	5	↘	2	↗	14



2)  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$  на  $[-2; 4]$ .

Область определения  $[-2; 4]$ ,

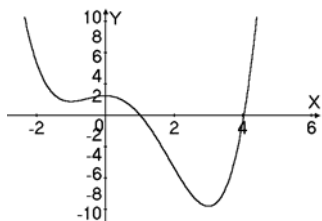
$y' = x^3 - 2x^2 - 3x$ ,  $y' = 0$ ,  $x(x^2 - 2x - 3) = 0$ ,

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$D = 1 + 3 = 4,$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 0.$$

x	-2	(-2; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; 3)	3	(3; 4)	4
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$\frac{16}{3}$	↘	$\frac{17}{12}$	↗	2	↘	$-\frac{37}{4}$	↗	$-\frac{2}{3}$
			min		max		min		



**№ 962**

1)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  на  $[-2; 2]$ ,  $f(-2) = -8 - 6 \cdot 4 + 9 = -23$ ,  
 $f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 9 = -7$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 12x$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $3x(x - 4) = 0$   
 $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 4$ ,  $0 \in [-2; 2]$ ;  $4 \notin [-2; 2]$ ,  $f(0) = 9$ ,  
 $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(0) = 9$ ,  $\min_{[-2; 2]} f(x) = f(-2) = -23$ ;

2)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$   $[-4; 0]$ ,  $f(-4) = -64 + 6 \cdot 16 + 9 \cdot (-4) = -4$ ,  $f(0) = 0$ ,  
 $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$   $f'(x) = 0$ ,  $3(x^2 + 4x + 3) = 0$ ,  $D/4 = 4 - 3 = 1$ ,  
 $x_1 = -3$ ;  $x_2 = -1$ ,  $-3 \in [-4; 0]$ ;  $-1 \in [-4; 0]$ ,  $f(-1) = -1 + 6 - 9 = -4$ ,  
 $f(-3) = -27 + 6 \cdot 9 - 9 \cdot 3 = 0$ ,  
 $\min_{[-4; 0]} f(x) = f(-4) = f(-1) = -4$ ,  $\max_{[-4; 0]} f(x) = f(-3) = f(0) = 0$ ;

3)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$   $[-4; 3]$ ,  $f(-4) = 256 - 2 \cdot 16 + 3 = 227$ ,  
 $f(3) = 81 - 9 + 3 = 75$ ,  $f'(x) = 4x^3 - 4x$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $4x(x^2 - 1) = 0$ ,  
 $x_1 = 0$ ;  $x_{2,3} = \pm 1$ ,  $-1 \in [-4; 3]$ ;  $1 \in [-4; 3]$ ;  $0 \in [-4; 3]$ ,  
 $f(-1) = f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$ ,  $f(0) = 0 + 0 + 3 = 3$ ,  
 $\min_{[-4; 3]} f(x) = f(-1) = f(1) = 2$ ,  $\max_{[-4; 3]} f(x) = f(-4) = 227$ ;

4)  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$   $[-3; 2]$ ,  $f(-3) = 81 - 8 \cdot 9 + 5 = 14$ ,  
 $f(2) = 16 - 8 \cdot 4 + 5 = -11$ ,  $f'(x) = 4x^3 - 16x$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $4x(x^2 - 4) = 0$ ,  
 $x_1 = 0$ ;  $x_{2,3} = \pm 2$ ,  $0 \in [-3; 2]$ ;  $2 \in [-3; 2]$ ;  $-2 \in [-3; 2]$ ,  
 $f(0) = 0 + 0 + 5 = 5$ ,  $f(-2) = f(2) = -11$ ,  
 $\min_{[-3; 2]} f(x) = f(-2) = f(2) = -11$ ,  $\max_{[-3; 2]} f(x) = f(-3) = 14$ .

**№ 963**

Пусть сторона прямоугольника равна  $x$ , тогда другая сторона равна

$$\left(\frac{p}{2} - x\right).$$

Тогда диагональ вычислим как:  $l = f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$ .

Исследуем эту функцию на  $\min$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} - px + x^2}\right)' = \left(\sqrt{2x^2 + \frac{p^2}{4} - px}\right)'$$

$$= \frac{1 \cdot (4x - p)}{2\sqrt{2x^2 + \frac{p^2}{4} - px}}, f'(x) = 0, \frac{4x - p}{2\sqrt{2x^2 + \frac{p^2}{4} - px}} = 0, 4x - p = 0,$$

$x = \frac{p}{4}$ , вторая сторона  $\frac{p}{2} - x = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$  — значит, это квадрат со стороной  $p/4$ , ч.т.д.

#### № 964

Пусть  $x$  — одна из равных сторон, значит другая тоже  $x$  и основание  $(p-2x)$ , тогда высота равна:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{p-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{p^2}{4} + px - x^2} = \frac{\sqrt{-p^2 + 4px}}{2},$$

тогда площадь вычислим как:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot (p-2x) \cdot \frac{\sqrt{-p^2 + 4px}}{2} = \frac{(p-2x)\sqrt{-p^2 + 4px}}{4},$$

$$S'(x) = \frac{1}{4} \left( -2\sqrt{-p^2 + 4px} + \frac{(p-2x) \cdot 4p}{2\sqrt{4px - p^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{4px - p^2}} (4p^2 - 16px + 4p^2 - 8xp) = \frac{4p^2 - 12xp}{4\sqrt{4px - p^2}},$$

$$S'(x) = 0, \frac{4p(p-3x)}{2\sqrt{4px - p^2}} = 0, x = \frac{p}{3}, x = \frac{p}{3} \text{ — точка макс.},$$

$$\text{основание } p - 2x = p - \frac{2p}{3} = \frac{p}{3}.$$

Это равносторонний треугольник.

#### № 965

Пусть сторона квадрата равна  $x$  и высота  $h$ , тогда площадь поверхности равна:  $p = 2(x^2 + xh + xh) = 600, x^2 + 2xh = 300, h = \frac{300 - x^2}{2x}$ .

Найдем объем:

$$V = f(x) = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot \frac{300 - x^2}{2x} = 150x - \frac{x^3}{2}.$$

$$\text{Найдем максимум функции } V = f(x): f'(x) = 150 - \frac{3}{2}x^2,$$

$$f'(x) = 0, \frac{3}{2}x^2 = 150, x^2 = 100, x = \pm 10, \text{ но } x > 0 \text{ (по условию),}$$

$$h = \frac{300 - 100}{20} = 10, \text{ значит это куб.}$$

**№ 966**

$$y' = \left( \frac{9}{5}x^5 - \frac{7}{3}x^3 + 7x + 12,5 \right)' = 9x^4 - 7x^2 + 7,$$

$y' = 0$ ,  $9x^4 - 7x^2 + 7 = 0$ ;  $D = 49 - 252 < 0$ , значит  $9x^4 - 7x^2 + 7 > 0$  и  $y' > 0$  при всех  $x \in R$ , следовательно функция возрастает на всей области определения, ч.т.д.

**№ 967**

$y' = (x + 2x\sqrt{x})' = 1 + 3\sqrt{x}$ ,  $1 + 3\sqrt{x} > 0$ , т.к.  $\sqrt{x} > 0$ , следовательно  $y' > 0$  при любых  $x \in R$ , и значит, функция возрастает на всей области определения, ч.т.д.

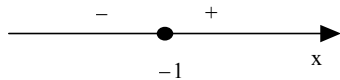
**№ 968**

1)  $y' = (x \ln x)' = \ln x + 1$ ,  $y' = 0$ ,  $\ln x + 1 = 0$ ,  $\ln x = -1$ ,  $\ln x = \ln e^{-1}$ ,

$x = \frac{1}{e}$  – точка min;

2)  $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$ ,  $y' = 0$ ,  $e^x(1+x) = 0$ ,  $x = -1$ ,

$x = -1$  – точка min.



$$3) y' = \left( \frac{25}{7-x} - \frac{9}{3-x} \right)' = \left( \frac{75 - 25x - 63 + 9x}{(7-x)(3-x)} \right)' = \left( \frac{12 - 16x}{x^2 - 10x + 21} \right)'$$

$$= \frac{-16(x^2 - 10x + 21) - (12 - 16x)(2x - 10)}{(x^2 - 10x + 21)^2} =$$

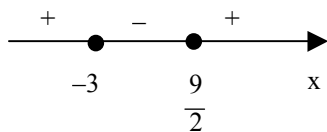
$$= \frac{16x^2 + 160x - 336 - 24x + 120 + 32x^2 - 160x}{(x^2 - 10x + 21)^2} = \frac{16x^2 - 24x - 216}{(x^2 - 10x + 21)^2},$$

$y' = 0$ ,  $\frac{(2x^2 - 3x - 27)}{x^2 - 10x + 21} = 0$ ;  $x^2 - 10x + 21 \neq 0 \Rightarrow (x-3)(x-7) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 3, x \neq 7$ ,  $2x^2 - 3x - 27 = 0$ ,  $D = 9 + 216 = 225$ ,

$x_1 = \frac{3+15}{4} = \frac{9}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3-15}{4} = -3$ ,

$x = -3$  точка max.,  $x = \frac{9}{2}$  точка min.





№ 969

рис 148 а)

1) возрастает  $x \in (x_3, x_5) \cup (x_7, x_8)$ ; убывает  $x \in (x_1, x_3) \cup (x_5, x_7)$ ;

2)  $x_{\max} = x_1, x_5$ ;  $x_{\min} = x_3, x_7$ ; 3)  $x_2, x_4, x_6, x_8$ ;

рис 148 б)

1) возрастает  $x \in (-10, -8) \cup (-4, -2) \cup (0, 4) \cup (6, 7)$ ;

убывает  $x \in (-8, -4) \cup (-2, 0) \cup (4, 6)$ ;

2)  $x_{\max} = -8; -2; 4$ ;  $x_{\min} = -4; 0; 6$ ; 3)  $-10; -6; -3; -1; 2; 5; 7$ .

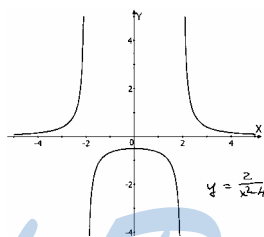
№ 970

1)  $y = \frac{2}{x^2 - 4}$

а) Область определения  $x \neq \pm 2$

б)  $y' = \left( \frac{2}{x^2 - 4} \right)' = -\frac{2x}{(x^2 - 4)^2}$ ,  $y' = 0$ ,  $-\frac{2x}{(x^2 - 4)^2} = 0$ ;  $x = 0$ ;

$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 0)$	$0$	$(0; 2)$	$2$	$(2; +\infty)$
$y'$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
$y$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$



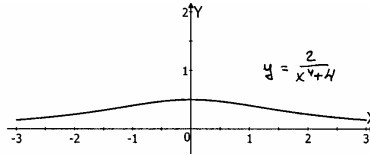
2)  $y = \frac{2}{x^2 + 4}$

а) Область определения  $\mathbb{R}$ :

б)  $y'(x) = \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 4)^2}$ ;

в)  $y'(x) = 0$ ,  $\frac{-4x}{(x^2 + 4)^2} = 0$ ,  $x = 0$ ;

$x$	$(-\infty; -0)$	$0$	$(0; +\infty)$
$y'$	+	0	-
$y$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ max	$\searrow$



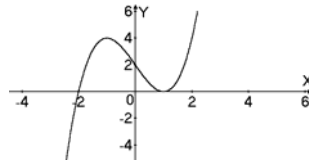
3)  $y = (x-1)^2(x+2)$

а) Область определения  $\mathbb{R}$ :

б)  $y' = (x-1)^2(x+2) + (x-1) \cdot 2(x+1) = (x-1)(2x+4+x-1) = (x-1)(3x+3) = 3(x-1)(x+1)$ ;

в)  $y' = 0, 3 \cdot (x-1)(x+1) = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$ .

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\nearrow$	$4$ max	$\searrow$	$0$ min	$\nearrow$



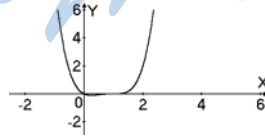
4)  $y = x(x-1)^3$

а) Область определения:  $\mathbb{R}$

б)  $y' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$

в)  $y' = 0, (x-1)^2 \cdot (4x-1) = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$

$x$	$(-\infty; \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$\searrow$	$-\frac{27}{256}$ min	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$



**№ 971**

1)  $f(x) = 2\sin x + \sin 2x; x \in [0; \frac{3\pi}{2}]$ ;

а) Область определения  $[0; \frac{3\pi}{2}]$ ; б)  $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$ ;

$$b) f'(x)=0, \quad 2\cos x+2\cos 2x=0; 4\cos^2 x+2\cos x-2=0, \quad 2\cos^2 x+\cos x-1=0;$$

$$D=1+8=9; \cos x \frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}, \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x \frac{-1-3}{4}=-1, \quad x=\pi+2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f(0)=2\sin 0+\sin 0=0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}+\sin 3\pi=-2+0=-2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$f(\pi)=2\sin\pi+\sin 2\pi=0+0=0,$$

$$\min_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]}(f(x))=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2; \quad \max_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]}(f(x))=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$2) f(x)=2\cos x+\sin 2x; x \in [0; \pi]; a) f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x,$$

$$f'(x)=0, -2\sin x+2(1-2\sin^2 x)=0, 2\sin^2 x+\sin x-1=0, \quad D=1+8=9,$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} & x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi], \quad \frac{\pi}{6} \in [0; \pi] \\ \sin x = \frac{-1-3}{4} = -1 & x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \notin [0; \pi] \end{cases}$$

$$b) f(0)=2\cos 0+\sin 0=2+0=2, \quad f(\pi)=2\cos \pi+\sin \pi=-2+0=-2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\min_{[0; \pi]}(f(x))=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad \max_{[0; \pi]}(f(x))=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

№ 972

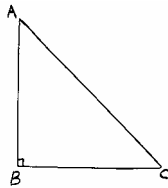
$$1) v(t)=s'(t)=(6t^2-t^3)'=12t-3t^2$$

2) найдем наибольшее значение  $v(t)$

$$v'(t)=12-6t; \quad v'(t)=0, \quad 12-6t=0, \quad t=2, \quad t=2 - \text{точка max.},$$

$$v(2)=24-12=12.$$

№ 973



Пусть  $BC=x, AC=l-x$ , тогда

$$AB = \sqrt{(l-x)^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - 2xl},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{l^2 - 2xl}.$$

Найдем наибольшее значение  $S_{ABC}$ .

$$S'(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{l^2 - 2xl} + \frac{1 \cdot (-2l)x}{2\sqrt{l^2 - 2xl}} \right) = \frac{l^2 - 2xl - lx}{2\sqrt{l^2 - 2xl}} = \frac{l^2 - 3lx}{2\sqrt{l^2 - 2xl}},$$

$$S'(x) = 0, \quad \frac{l^2 - 3lx}{2\sqrt{l^2 - 2xl}} = 0, \quad x = \frac{l}{3}, \quad x = \frac{l}{3} - \text{точка макс.},$$

$$AC = l - \frac{l}{3} = \frac{2l}{3}, \quad AB = \sqrt{\frac{4l^2}{9} - \frac{l^2}{9}} = \frac{\sqrt{3}l}{3}.$$

№ 974

Пусть  $AC = x$ , тогда  $CB = 40 - x$ .

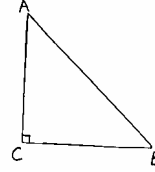
Тогда площадь найдем по формуле:

$$S(x) = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} x(40 - x) = 20x - \frac{x^2}{2}$$

Исследуем  $S(x)$  на макс.

$S'(x) = 20 - x$ ;  $S' = 0$ ,  $20 - x = 0$ ,  $x = 20$ ,  $x = 20$  – точка макс.  $AC = 20$ ,

$CB = 40 - 20 = 20$ . Это равнобедренный прямоугольный треугольник.



№ 975

Пусть  $AB = x = CD$  и  $BC = y = AD$ , тогда

$$BD = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha},$$

$$\text{и } AC = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha}$$

$$AC + BD = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha} = a$$

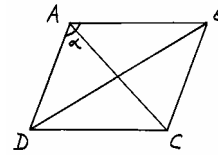
$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha - 2\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 \cos^2 \alpha}$$

$$a^4 - 4(x^2 + y^2)a^2 + 4(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 + y^2)^2 - 16x^2y^2 \cos^2 \alpha,$$

$$a^4 - 4(x^2 + y^2)a^2 + 16x^2y^2 \cos^2 \alpha = 0, \quad 4(x^2 + y^2) = a^2 + 16 \frac{x^2y^2 \cos^2 \alpha}{a^2}.$$

Величина  $2(x^2 + y^2)$  зависит от параметра  $\alpha$ .

$$\min 4(x^2 + y^2) = a^2 \text{ при } \cos^2 \alpha = 0 \quad \alpha = 90^\circ. \text{ Тогда } 2(x^2 + y^2) = \frac{a^2}{2}.$$



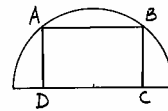
№ 976

Пусть  $AB = x$ , тогда  $AD = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ ,

$$S = AD \cdot AB = 2x\sqrt{R^2 - x^2} = 2x\sqrt{R^2x^2 - x^4}.$$

Исследуем  $S$  на макс при  $x \in [0; R]$ .

$$S' = \frac{2(2R^2x - 4x^3)}{2\sqrt{R^2x^2 - x^4}}; \quad S' = 0, \quad \frac{2R^2x - 4x^3}{\sqrt{R^2x^2 - x^4}} = 0,$$



$$2x(R^2 - 2x^2) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{R^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad -\frac{R}{\sqrt{2}} \notin [0; R],$$

$x = 0$  – точка min.,  $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$  – точка max.,

$$AD = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R, \quad S = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}R = R^2.$$

### № 977

Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} h \cdot S'_{\text{осн.}}$ ;  $h = 12$  – постоянная, поэтому объем зависит только от площади основания. Найдем ее max.

Пусть один катет основания  $x$ , тогда другой  $\sqrt{16 - x^2}$ . Тогда площадь

$$S(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16x^2 - x^4}; \quad x \in [0; 4]$$

$$S'(x) = \frac{1(32x - 4x^3)}{4\sqrt{16x^2 - x^4}} = \frac{8x - x^3}{\sqrt{16x^2 - x^4}}; \quad S'(x) = 0,$$

$$\frac{8x - x^3}{\sqrt{16x^2 - x^4}} = 0, \quad x(8 - x^2) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{2} \notin [0; 4],$$

$x = 0$  – точка min.,  $x = 2\sqrt{2}$  – точка max.,  $S(2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{16 \cdot 8 - 64} = \frac{8}{2} = 4$ ,

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 4 = 16.$$

### № 978

Пусть радиус окружности в основании цилиндра  $r = x$ , тогда высота

$h = \left(\frac{R}{2} - 2x\right)$ . Объем равен  $V = h \cdot S_{\text{осн.}} = h \cdot \pi r^2$ .  $x \in [0; p]$ ,

$$V(x) = \left(\frac{p}{2} - 2x\right) \cdot \pi \cdot x^2 = \frac{p\pi x^2 - 4\pi x^3}{2}.$$

Иследуем  $V(x)$  на max.  $V'(x) = \frac{1}{2} (2p\pi x - 12\pi x^2) = p\pi x - 6\pi x^2$

$$V'(x) = 0, \quad x\pi(p - 6x) = 0, \quad \begin{cases} x\pi = 0 \\ p - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{p}{6}$$

$x = 0$  – точка min.,  $x = \frac{p}{6}$  – точка max.,

$$V\left(\frac{p}{6}\right) = \frac{p\pi \cdot \frac{p^2}{36} - 4 \cdot \pi \cdot \frac{p^3}{216}}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 216} (6p^3 - 4p^3) = \frac{\pi p^3}{216}.$$

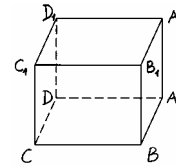
№ 979

$$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{2}; \quad \frac{AD}{5} = \frac{AB}{2} = k, \quad AD = 5k, \quad AB = 2k,$$

$$S_{\text{поверх}} = AD \cdot AB + 2S_{AA_1B_1B} + 2S_{AA_1D_1D} =$$

$$= 10k^2 + 2AA_1(5k + 2k) = 2S, \quad AA_1 = \frac{2S - 10k^2}{14k},$$

$$V = 10k^2 \cdot \frac{2S - 10k^2}{14k} = \frac{5}{7}(2Sk - 10k^3).$$



Иследуем  $V$  на макс.,  $V' = \frac{5}{7}(2S - 30k^2)$ ;  $V' = 0$ ,  $\frac{5}{7}(2S - 30k^2) = 0$ ,

$$k = \pm \sqrt{\frac{S}{15}}, \quad k = \sqrt{\frac{S}{15}} \text{ - точка макс.}, \quad k = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{15}}; \quad AD = \frac{5 \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{5}{3}}S, \quad AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{15}}.$$

№ 980

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

а) Область определения:  $x^2 + 3x + 2 \neq 0$ ;  $D = 9 - 8 = 1$ ,

$$x \neq \frac{-3+1}{2} = -1, \quad x \neq \frac{-3-1}{2} = -2;$$

$$\text{б) } y' = \frac{(2x-3)(x^2+3x+2) - (x^2-3x+2)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 4x - 3x^2 - 9x - 6 - 2x^3 + 6x^2 - 4x - 3x^2 + 9x - 6}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - 6x^2 - 12}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{6(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2},$$

$$y' = 0, \quad \frac{6(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2} = 0, \quad x^2 - 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2},$$

$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	$-1$	$(-1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$y'$	$+$	$\nexists$	$+$	$0$	$-$	$\nexists$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$x = -\sqrt{2}$  - точка min.,  $x = \sqrt{2}$  - точка max.

№ 981

1)  $y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$ ;

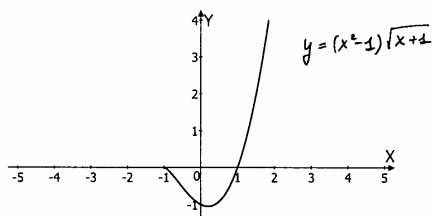
а) Область определения  $x > -1$ .

б)  $y' = 2x\sqrt{x+1} + \frac{(x^2-1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x^2 + 4x + x^2 - 1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x+1}}$ ;

в)  $y' = 0, \frac{5x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x+1}} = 0, 5x^2 + 4x - 1 = 0,$

$D/4 = 4 + 5 = 9; x_1 = \frac{-2+3}{5} = \frac{1}{5}, x = \frac{-2-3}{5} = -1$

$x$	-1	$(-1; \frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5}; +\infty)$
$y'$	$\frac{0}{0}$	-	0	+
$y$	0	$\searrow$	$\frac{24\sqrt{30}}{125}$ min	$\nearrow$



2)  $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$ ;

а)  $D(y) = \mathbb{R}$ ; б)  $y = 0$  при  $x = 0, x = -\frac{1}{3}$ ;

в)  $y' = (|x|)' \sqrt[3]{1+3x} + \frac{|x| \cdot 3}{3\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$ ,

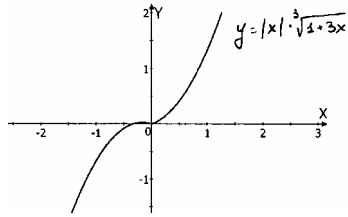
$x > 0 \quad y' = \sqrt[3]{1+3x} + \frac{x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = \frac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$ ,

$y' = 0, \frac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = 0, x = -\frac{1}{4}$ , но  $x > 0$ . Не подходит.

$x < 0 \quad y' = -\sqrt[3]{1+3x} + \frac{(-x)}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = -\frac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$ ,

$y' = 0, -\frac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = 0 \quad x = -\frac{1}{4}$  — точка max.

$x$	$(-\infty; -\frac{1}{4})$	$-\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{4}; 0)$	$0$	$(0; +\infty)$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$\neq$	$+$
$y$	$\nearrow$	$\frac{1}{4\sqrt{4}}$ max	$\searrow$	$0$ min	$\nearrow$



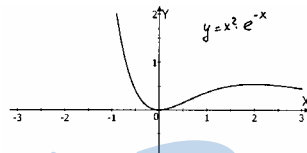
3)  $y = x^2 e^{-x}$

a) Область определения:  $\mathbb{R}$

б)  $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

в)  $y' = 0, e^{-x}(2x - x^2) = 0, x = 0, x = 2$

$x$	$(-\infty; 0)$	$0$	$(0; 2)$	$2$	$(2; +\infty)$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$\searrow$	$0$ min	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ max	$\searrow$



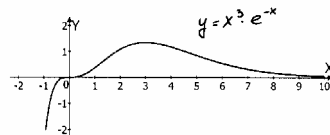
4)  $y = x^3 e^{-x}$

a)  $D(y) = \mathbb{R}$

б)  $y' = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3)$

в)  $y' = 0, e^{-x} \cdot x^2(3 - x) = 0, x = 0, x = 3$

$x$	$(-\infty; 0)$	$0$	$(0; 3)$	$3$	$(3; +\infty)$
$y'$	$+$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$ max	$\searrow$





№ 982

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$F \cos \alpha = k(mg - F \cdot \sin \alpha)$$

$$F(\alpha) = \frac{mg}{\cos \alpha + k \sin \alpha};$$

Найдем  $\min F(\alpha)$ :  $F'(\alpha) = \frac{-mg}{(\cos \alpha + k \sin \alpha)^2} \cdot (-\sin \alpha + k \cos \alpha)$

$$F'(\alpha) = 0, \quad -\sin \alpha + k \cos \alpha = 0, \quad k \cos \alpha = \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = k, \quad \alpha = \operatorname{arctg} k$$

Ответ:  $\alpha = \operatorname{arctg} k$ .

*StudyPort.ru*

## Х глава.

### § 54 Первообразная

№ 983

1)  $F'(x) = \frac{6x^5}{6} = x^5 = f(x) \Rightarrow F(x)$  является первообр.  $f(x)$  на  $\mathbb{R}$ ;

2)  $F'(x) = \frac{5x^4}{5} + 0 = x^4 = f(x) \Rightarrow F(x)$  является первообр.  $f(x)$  на  $\mathbb{R}$ .

№ 984

1)  $F'(x) = \frac{2 \cdot (-1)}{x^2} = -\frac{2}{x^2} = f(x)$ ; 2)  $F'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$ ;

$F(x)$  является первообр.  $f(x)$  при  $x > 0$ .

№ 985

1)  $\frac{x^5}{5}$  - первообр.  $x^4$ , т.к.  $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$ , значит, все первообразные имеют

вид  $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$ ;

2)  $F(x) = \frac{x^4}{4}$  - первообр., т.к.  $F'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x)$ .

Общий вид:  $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$ .

3)  $F(x) = -\frac{x^{-2}}{2}$  - первообр., т.к.  $F'(x) = \frac{-2x^{-3}}{-2} = x^{-3} = f(x)$ .

Общий вид:  $F(x) = -\frac{x^{-2}}{2} + C$ .

4)  $F(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$  - первообр., т.к.  $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} = f(x)$ .

Общий вид:  $F(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C$ .

№ 986

1) Все первообр. функции  $f(x) = x$  находятся по формуле:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C, \text{ т.к. } F'(x) = f(x).$$

Найдем число  $C$ , подставив точку  $(-1; 3)$ :

$$3 = \frac{1}{2} + C, \quad C = \frac{5}{2}, \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2};$$

$$2) \text{ Для функции } f(x) = \sqrt{x} \text{ первообр. имеют вид: } F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Чтобы найти  $C$ , подставим точку  $(9, 10)$ :

$$10 = \frac{2}{3} \cdot 27 + C, \quad C = -8, \quad F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8.$$

**№ 987**

$$1) F'(x) = \left( 3e^{\frac{x}{3}} \right)' = 3 \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}} = f(x) - \text{сущ. при } x \in \mathbb{R};$$

$$2) F'(x) = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x = f(x) - \text{сущ. при } x \in \mathbb{R}.$$

**№ 988**

1)  $f(x) = 2x^5 - 3x^2$ . По таблице интегрирования:

$$F(x) = \frac{2 \cdot x^6}{6} - \frac{3 \cdot x^3}{3} = \frac{x^6}{3} - x^3.$$

$$2) f(x) = 5x^4 + 2x^3, \text{ тогда } F(x) = \frac{5 \cdot x^5}{5} + \frac{2 \cdot x^4}{4} = x^5 + \frac{x^4}{2}.$$

$$3) f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}, \text{ тогда } F(x) = 2 \ln x + \frac{3 \cdot x^{-1}}{-1} = 2 \ln x - \frac{3}{x}.$$

$$4) f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}, \text{ тогда } F(x) = \frac{2 \cdot x^{-2}}{-2} - 3 \ln x = -\frac{1}{x^2} - 3 \ln x.$$

$$5) f(x) = 6x^2 - 4x + 3, \text{ тогда } F(x) = \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{3x}{1} = 2x^3 - 2x^2 + 3x.$$

$$6) f(x) = 4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}, \text{ тогда } F(x) = \frac{4 \cdot x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{6 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{4}{3}} - 4x\sqrt{x}.$$

**№ 989**

$$1) f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x, \text{ тогда } F(x) = 3 \sin x - 4(-\cos x) = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

$$2) f(x) = 5 \sin x + 2 \cos x, \text{ тогда } F(x) = 5 \cdot (-\cos x) + 2 \cdot \sin x = 2 \sin x - 5 \cos x.$$

$$3) f(x) = e^x - 2 \cos x, \text{ тогда } F(x) = e^x - 2 \sin x.$$

$$4) f(x) = 3e^x - \sin x, \text{ тогда } F(x) = 3e^x - 1 \cdot (-\cos x) = 3e^x + \cos x.$$

$$5) f(x) = 5 - e^{-x} + 3 \cos x, \text{ тогда } F(x) = 5x - (-1)e^{-x} + 3 \sin x = 5x + e^{-x} + 3 \sin x$$

$$6) f(x) = 1 + 3e^x - 4 \cos x, \text{ тогда } F(x) = x + 3e^x - 4 \sin x.$$

$$7) f(x) = 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{6 \cdot x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2 \ln x + 3e^x = \frac{9}{2} x \sqrt[3]{x} - 2 \ln x + 3e^3, x > 0.$$

$$8) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3 \ln x - 2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = 8\sqrt{x} + 3 \ln x + 2e^{-x}, x > 0.$$

**№ 990**

$$1) f(x) = (x+1)^4, \text{ тогда } F(x) = \frac{(x+1)^5}{5}.$$

$$2) f(x) = (x-2)^3, \text{ тогда } F(x) = \frac{(x-2)^4}{4}.$$

$$3) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}, \text{ тогда } F(x) = \frac{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{x-2}, \quad x > 2.$$

$$4) f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}, \text{ тогда } F(x) = \frac{3 \cdot (x+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} \sqrt[3]{(x+3)^2}.$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x-1} + 4 \cos(x+2), \text{ тогда } F(x) = \ln(x-1) + 4 \sin(x+2), \quad x > 1.$$

$$6) f(x) = \frac{3}{x-3} - 2 \sin(x-1), \text{ тогда}$$

$$F(x) = 3 \ln(x-3) - 2(-\cos(x-1)) = 3 \ln(x-3) + 2 \cos(x-1), x > 3.$$

**№ 991**

$$1) f(x) = \sin(2x+3), \text{ тогда } F(x) = \frac{1}{2}(-\cos(2x+3)) + C = -\frac{\cos(2x+3)}{2} + C.$$

$$2) f(x) = \cos(3x+4), \text{ тогда } F(x) = +\frac{1}{3} \sin(3x+4) + C.$$

$$3) f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right), \text{ тогда } F(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C.$$

$$4) f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + 5\right), \text{ тогда } F(x) = -4 \cos\left(\frac{x}{4} + 5\right) + C.$$

$$5) f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}, \text{ тогда } F(x) = 2e^{\frac{x+1}{2}} + C.$$

6)  $f(x) = e^{3x-5}$ , тогда  $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x-5} + C$ .

7)  $f(x) = \frac{1}{2x}$ , тогда  $F(x) = \frac{1}{2} \ln x + C$ .

8)  $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ , тогда  $F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$ .

**№ 992**

1)  $f(x) = 2x + 3$ ,  $M(1; 2)$ ; а)  $F(x) = \frac{2x^2}{2} + 3x + C$ ;

б)  $2 = 1 + 3 + C$ ,  $C = -2$ , значит  $F(x) = x^2 + 3x - 2$ ;

2)  $f(x) = 4x - 1$ ,  $M(-1; 3)$ ; а)  $F(x) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C = 2x^2 - x + C$

б)  $3 = 2 + 1 + C$ ,  $C = 0$ , значит  $F(x) = 2x^2 - x$

3)  $f(x) = \sin 2x$ ,  $M(\frac{\pi}{2}; 5)$ ; а)  $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

б)  $5 = -\frac{1}{2} \cdot \cos \pi + C = \frac{1}{2} + C$ ,  $C = \frac{9}{2}$ , значит  $F(x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

4)  $f(x) = \cos 3x$ ,  $M(0; 0)$ ; а)  $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$

б)  $0 = \frac{1}{3} \sin 0 + C = 0 + C$ ,  $C = 0$ , значит  $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ .

**№ 993**

1)  $f(x) = e^{2x} - \cos 3x$ , тогда  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{3} \sin 3x$ ;

2)  $f(x) = e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$ , тогда  $F(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2} \cos 2x$ ;

3)  $f(x) = 2\sin \frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$ , тогда  $F(x) = -10\cos \frac{x}{5} - \frac{5}{2} e^{2x+\frac{1}{3}}$ ;

4)  $f(x) = 3\cos \frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$ , тогда  $F(x) = 21\sin \frac{x}{7} + \frac{2}{3} e^{3x-\frac{1}{2}}$ ;

5)  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$ , тогда

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}} - \frac{4}{4} \cos(4x+2) = \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2);$$

$$6) f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{4 \cdot (3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot 3} - \frac{3 \cdot \ln(2x-5)}{2} = \frac{8}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{3}{2} \ln(2x-5).$$

№ 994

$$1) f(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{2x^5}{5} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{5} x^5 - x^4 + \frac{x^2}{2} \right);$$

$$2) f(x) = \frac{6x^3 - 3x + 2}{5}, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{1}{5} \left( \frac{6x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{3}{2} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 2x \right);$$

$$3) f(x) = x - 3 + 2x^2 - 6x = 2x^2 - 5x - 3, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 3x = \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 - 3x;$$

$$4) f(x) = 4x + 6x^2 - 6 - 9x = 6x^2 - 5x - 6, \text{ тогда}$$

$$F(x) = \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x = 2x^3 - \frac{5}{2} x^2 - 6x.$$

№ 995

$$1) f(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}, \text{ тогда } F(x) = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x}.$$

$$2) f(x) = 3x^3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}, \text{ тогда } F(x) = \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{7} x^2 \sqrt{x} - \frac{3}{2} x \sqrt[3]{x}.$$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}, \text{ тогда } F(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{4x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + 6 \sqrt[3]{x^2};$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}, \text{ тогда } F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 6 \sqrt{x}.$$

**№ 996**

1)  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ , тогда  $F(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x$ ;

2)  $f(x) = \sin(x-3x) = -\sin 2x$ , тогда  $F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$ .

**№ 997**

$$y = f(x) = 2\sin 5x + 3\cos \frac{x}{2}, \quad F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

тогда  $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + 6\sin \frac{x}{2} + C$

$$0 = -\frac{2}{5} \cos \frac{5\pi}{3} + 6\sin \frac{\pi}{6} + C = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} + C = -\frac{1}{5} + 3 + C, \quad C = -\frac{14}{5},$$

$$F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + 6\sin \frac{x}{2} - \frac{14}{5}.$$

**№ 998**

1)  $f(x) = 1 + \frac{3}{x-3}$ , тогда  $F(x) = x + 3 \ln(x-3)$ ;

2)  $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2}$ ,  $x \neq 1, x \neq -2$ ; тогда  $F(x) = \ln(x+2)$ ;

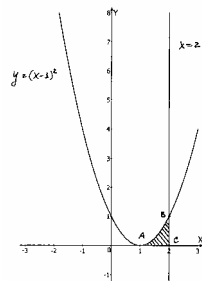
3)  $f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ , тогда  $F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) = \frac{2x + \sin 2x}{4}$ ;

4)  $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\sin 8x - \sin 2x)$ , тогда

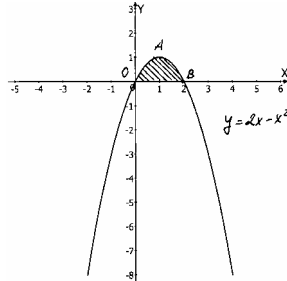
$$F(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) = \frac{4 \cos 2x - \cos 8x}{16}.$$

**§ 56 Площадь криволинейной трапеции и интеграл****№ 999**

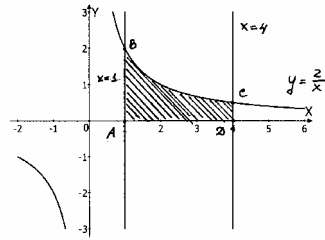
1)



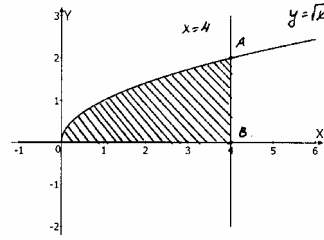
2)



3)

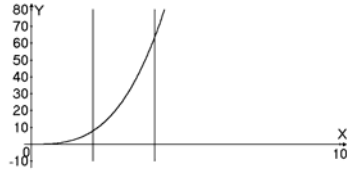


4)



№ 1000

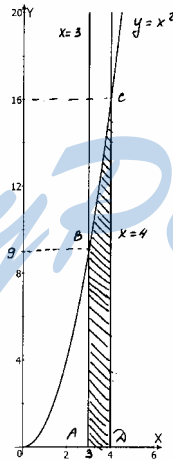
1)



$ABCD$  – искомая трапеция;  $S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

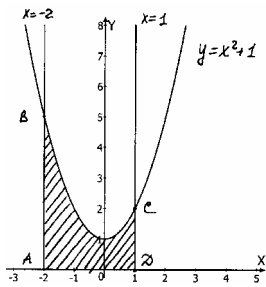
$$S_{ABCD} = \int_2^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_2^4 = \frac{(4)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} = 64 - 4 = 60 \text{ (кв. ед.)}$$

2)



$$S_{ABCD} = \int_3^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_3^4 = \frac{1}{3}((4)^3 - (3)^3) = \frac{1}{3}(64 - 27) = \frac{37}{3}.$$





3)

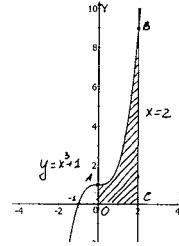
$ABCD$  – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 = 6$$

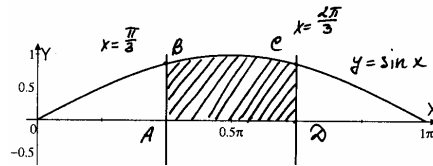
4)

$ABCD$  – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_0^2 (x^3 + 1) dx = \left. \frac{x^4}{4} + x \right|_0^2 = \frac{16}{4} + 2 = 6;$$



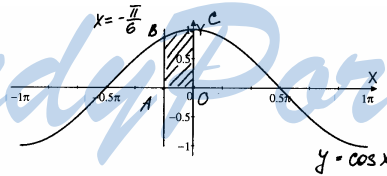
5)



$ABCD$  – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

6)

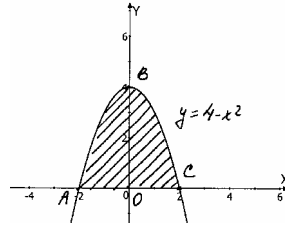


$ABCD$  – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0 = 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

**№ 1001**

1)  $y = 4 - x^2$



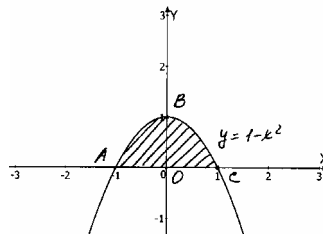
$ABC$  – искомая трапеция

a)  $4 - x^2 = 0, x = \pm 2, a = -2, b = 2$

б)  $S_{ABC} = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$

$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3};$

2)  $y = 1 - x^2$

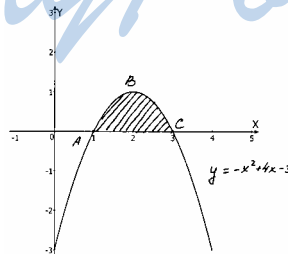


$ABC$  – искомая трапеция

a)  $1 - x^2 = 0, x = \pm 1, a = -1, b = 1$

б)  $S_{ABC} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

3)  $y = -x^2 + 4x - 3$



$ABC$  – искомая трапеция

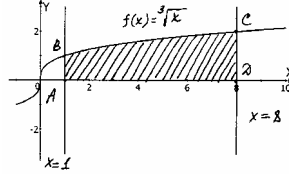
a)  $-x^2 + 4x - 3 = 0, x^2 - 4x + 3 = 0, D/4 = 4 - 3 = 1$

$x_1 = 3, x_2 = 1, a = 1, b = 3$

$$6) S_{ABC} = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left. -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right|_1^3 = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1\frac{1}{3}$$

**№ 1002**

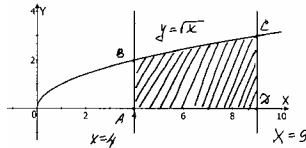
1)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 8$



$ABCD$  – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \left. \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} \right|_1^8 = \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$$

2)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 4$ ,  $b = 9$

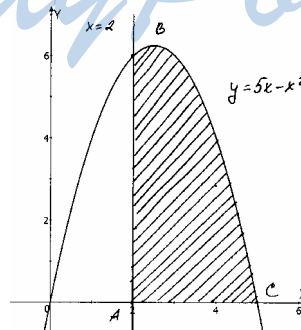


$ABCD$  – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_4^9 \sqrt{x} dx = \left. \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right|_4^9 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$$

**№ 1003**

1)  $b = 2$ ,  $f(x) = 5x - x^2$ ,  $2 \leq x \leq 5$



а)  $5x - x^2 = 0, x(5 - x) = 0, x = 0, x = 5$

б)  $ABC$  – искомая трапеция

в)  $S_{ABC} = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left. \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} - 0 + \frac{8}{3} =$   
 $= \frac{125}{6} + \frac{16}{6} - \frac{60}{6} = \frac{27}{2} = 13 \frac{1}{2}$

2)  $b = 3, f(x) = x^2 + 2x$

а)  $x^2 + 2x = 0, x = 0, x = -2$

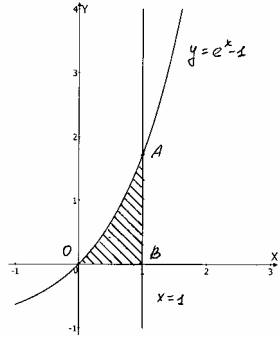
б)  $OAB$  – искомая трапеция

в)  $S_{OAB} = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 \right|_0^3 = 9 + 9 = 18.$

3)  $b = 1, f(x) = e^x - 1$

а)  $e^x - 1 = 0, e^x = e^0, x = 0$

б)  $OAB$  – искомая трапеция



в)  $S_{OAB} = \int_0^1 (e^x - 1) dx = \left. e^x - x \right|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$

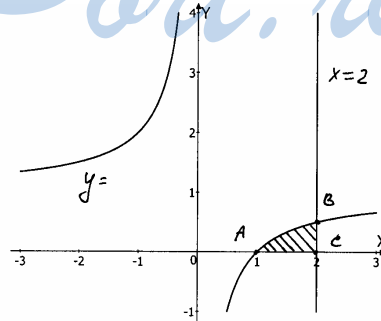
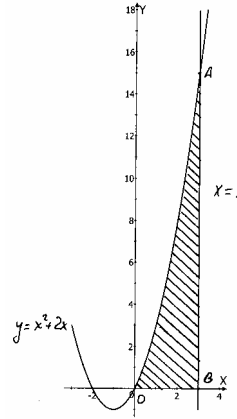
4)  $b = 2, f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

а)  $1 - \frac{1}{x} = 0, x = 0$

б)  $ABC$  – искомая трапеция

в)

$S_{ABC} = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \left. x - \ln|x| \right|_1^2 =$   
 $= 2 - \ln 2 - 1 + 0 = 1 - \ln 2$



## § 57 Вычисление интегралов

### № 1004

$$\begin{aligned}
 1) \int_0^1 x dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}; \quad 2) \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9 - 0 = 9; \\
 3) \int_{-1}^2 3x^2 dx &= x^3 \Big|_{-1}^2 = 8 + 1 = 9; \quad 4) \int_{-2}^3 2x dx = x^2 \Big|_{-2}^3 = 9 - 4 = 5; \\
 5) \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \Big|_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; \quad 6) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}; \\
 7) \int_1^4 \sqrt{x} dx &= \frac{2x\sqrt{x}}{3} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}; \\
 8) \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \Big|_4^9 = 2(3-2) = 2.
 \end{aligned}$$

### № 1005

$$\begin{aligned}
 1) \int_1^e \frac{1}{x} dx &= \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1; \quad 2) \int_0^{\ln 2} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1; \\
 3) \int_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx &= \sin x \Big|_{-\pi}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0; \\
 4) \int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_{-2\pi}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-2\pi) = 1 + 1 = 2; \\
 5) \int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{-2\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}(1+1) = -1; \\
 6) \int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx &= \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_{-3\pi}^0 = \frac{1}{3}(0-0) = 0.
 \end{aligned}$$

### № 1006

$$\begin{aligned}
 1) \int_{-3}^2 (2x-3) dx &= x^2 - 3x \Big|_{-3}^2 = 4 - 6 - 9 - 9 = -20; \\
 2) \int_{-2}^{-1} (5-4x) dx &= 5x - 2x^2 \Big|_{-2}^{-1} = -5 - 2 + 10 + 8 = 11; \\
 3) \int_{-1}^2 (1-3x^2) dx &= x - x^3 \Big|_{-1}^2 = 2 - 8 + 1 - 1 = -6; \\
 4) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx &= \frac{x^3}{3} + x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2\frac{2}{3};
 \end{aligned}$$

$$5) \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx = (x^3 - 2x^2 + 5x) \Big|_0^2 = 8 - 8 + 10 = 10.$$

**№ 1007**

$$1) \int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{3x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 = \left( \frac{x^2}{2} - 2x\sqrt{x} \right) \Big|_0^4 = 8 - 16 = -8;$$

$$2) \int_1^9 \left( 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = x^2 - 6\sqrt{x} \Big|_1^9 = 81 - 18 - 1 + 6 = 68;$$

$$3) \int_0^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (e^6 - 1); \quad 4) \int_1^3 2e^{2x} dx = e^{2x} \Big|_1^3 = e^6 - e^2.$$

(Опечатка в ответе задачника).

**№ 1008**

$$1) \int_{-2}^1 x(x+3)(2x-1) dx = \int_{-2}^1 (x^2 + 3x)(2x-1) dx = \int_{-2}^1 (2x^3 + 5x^2 - 3x) dx = \left. \frac{1}{2}x^4 + \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right|_{-2}^1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2} - 8 + \frac{40}{3} + 6 = -3 + 15 = 12;$$

$$2) \int_{-1}^0 (x+1)(x^2-2) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 - 2x - 2) dx = \left. \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x \right|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 - 2 = -1 + \frac{1}{12} = -\frac{11}{12};$$

$$3) \int_1^2 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int_1^2 \left( x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \right|_1^2 = \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + 1 = \frac{11}{6} + 3 = 4\frac{5}{6};$$

$$4) \int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2} \left( 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left( \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right) dx = \left. \left( -\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right|_{-2}^{-1} = 4 + 4 - 2 - 1 = 5.$$

**№ 1009**

$$1) \int_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 \left( 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \left. \left( \frac{5x\sqrt[3]{x^2}}{\frac{5}{3}} - \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\frac{3}{3}} \right) \right|_1^2 = \left. \left( 3x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x^2} \right) \right|_1^2 = 6\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} - 3 + 3 = 3\sqrt[3]{4};$$

$$2) \int_1^3 \left( \frac{3x-1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^3 \left( 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left( \frac{3x\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \Big|_1^3 =$$

$$= 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \Big|_1^3 = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 + 2 = 4\sqrt{3};$$

$$3) \int_2^7 \frac{4}{2\sqrt{x+2}} dx = \frac{4 \cdot \sqrt{x+2}}{\frac{1}{2}} \Big|_2^7 = 8\sqrt{x+2} \Big|_2^7 = 24 - 16 = 8.$$

**№ 1010**

$$1) \int_1^2 \frac{3}{2x-1} dx = \frac{3 \ln(2x-1)}{2} \Big|_1^2 = \frac{3 \ln 3}{2} - 0 = \frac{3 \ln 3}{2};$$

$$2) \int_0^1 \frac{4}{3x+2} dx = \frac{4 \ln(3x+2)}{3} \Big|_0^1 = \frac{4 \ln 5}{3} - \frac{4 \ln 2}{3} = \frac{4}{3} \ln \frac{5}{2};$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) dx = -\frac{1}{2} \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \left( -2 \cos \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

**№ 1011**

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} + 0 = \pi.$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$4) \int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \int_0^{\pi} (1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi} 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{4 - 1 + \cos 4x}{4} dx = \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4} \right) dx = \frac{3}{4} x + \frac{\sin 4x}{16} \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4} + 0 - 0 - 0 = \frac{3\pi}{4};$$

$$5) \int_0^3 x^2 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 \sqrt{x^5 + x^4} dx = \frac{2}{3} (x^5 + x^4) \sqrt{x^5 + x^4} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} (3^5 + 3^4) \sqrt{2} = 3888$$

$$6) \int_3^4 \frac{x^4 - 4x + 5}{x-2} dx = \int_3^4 \left( x-2 + \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x-2) \Big|_3^4 = 8 - 8 + \ln 2 - \frac{9}{2} + 6 - \ln 1 = \ln 2 + \frac{3}{2}.$$

№ 1012

$$\int_1^b (b-4x) dx = bx - 2x^2 \Big|_1^b = b^2 - 2b^2 - b + 2 =$$

$$= -b^2 - b + 2; \quad -b^2 - b + 2 \geq 6 - 5b$$

$$b^2 - 4b + 4 \leq 0 \Rightarrow (b-2)^2 \leq 0, \text{ это возможно только при } b = 2.$$

### § 58 Вычисление площадей с помощью интегралов

№ 1013

$$a) S = \int_{-1}^1 (x^2 + 4) dx = \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 4 = 8\frac{2}{3};$$

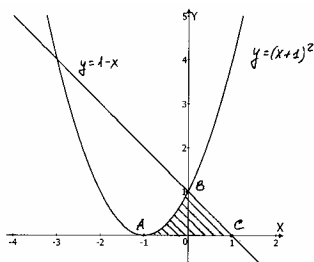
$$б) S = \int_0^1 (\sqrt{x} + 1) dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + x \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3};$$

$$в) S = \int_1^4 \frac{2}{x} dx = 2 \ln x \Big|_1^4 = 2 \ln 4 - 0 = 2 \ln 4.$$

№ 1014

1)  $ABC$  – искомая фигура,

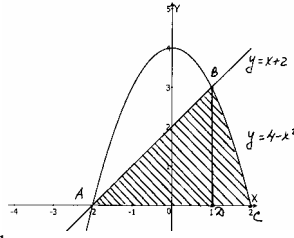
$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{OBC} = \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^1 (x-1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6};$$





2)  $ABC$  – искомая фигура

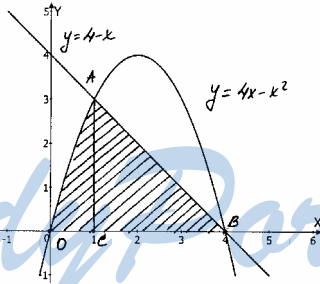
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} = \int_{-2}^1 (x+2)dx + \int_1^2 (4-x^2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^1 + 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2 - (2-4) + 8 - \frac{8}{3} - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2} + 2 + \frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}.$$



3)  $OAB$  – искомая фигура

$$4x - x^2 = 4 - x, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \quad x_1 = 4, x_2 = 1$$

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = \int_0^1 (4x - x^2)dx + \int_1^4 (4 - x)dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 4x - \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = 2 - \frac{1}{3} + 16 - 8 - 4 + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{6};$$

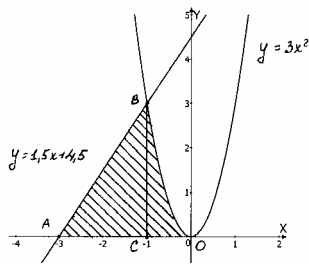


$$4) 3x^2 = 1,5x + 4,5, \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -1$$

$ABO$  – искомая фигура

$$S_{ABO} = S_{ABC} + S_{CBO} = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right)dx + \int_{-1}^0 3x^2 dx = \frac{3x^2}{4} + \frac{9}{2}x \Big|_{-3}^{-1} + x^3 \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - \frac{27}{4} + \frac{27}{4} + 1 = -6 + 9 + 1 = 4$$

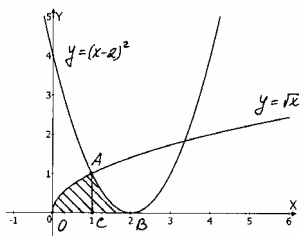


№ 1015

1)  $\sqrt{x} = (x-2)^2$ ,  $x = 1$

$OAB$  – искомая фигура

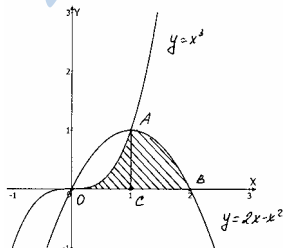
$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 + \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 1;$$



2)  $OAB$  – искомая фигура;  $x^3 = 2x - x^2$

$x_1=0$ ,  $x^2 + x - 2 = 0$ ,  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = 1$

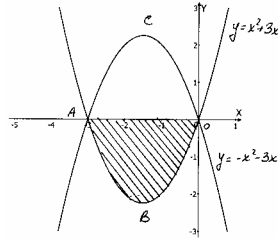
$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 - \frac{25}{12} = \frac{11}{12}$$



№ 1016

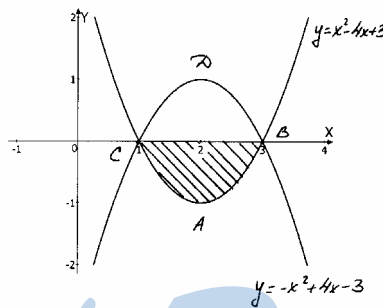
1)  $ABO$  – искомая фигура;  $x^2 + 3x = 0$ ,  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -3$

$$S_{ABO} = S_{ACO} = \int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \Big|_{-3}^0 = -9 + \frac{27}{2} = 4,5$$



2)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;  $D/4 = 4 - 3 = 1$ ,  $x = 3$ ,  $x = 1$

$$S_{CAB} = S_{CDB} = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \Big|_1^3 = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1\frac{1}{3}$$



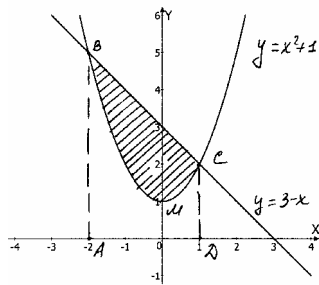
№ 1017

1)  $y = x^2 + 1$ ;  $y = 3 - x$

$$x^2 + 1 = 3 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

$BCM$  – искомая фигура

$$S_{BCM} = S_{ABCD} - S_{ABMCD} = \int_{-2}^1 (3-x) dx - \int_{-2}^1 (x^2+1) dx = 3x - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^1 = 3 - \frac{1}{2} + 6 + 2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{8}{3} - 2 = 4\frac{1}{2}$$



2)  $y = (x + 2)^2$ ;  $y = x + 2$

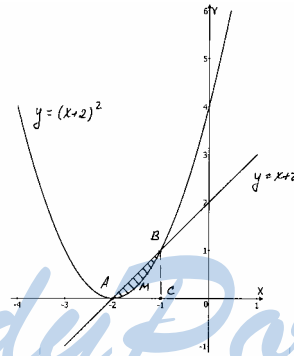
$ABM$  – искомая фигура

$$x^2 + 4x + 4 = x + 2, \quad x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -1$$

$$S_{AMB} = S_{ABC} - S_{AMC} = \int_{-2}^{-1} (x + 2) dx - \int_{-2}^{-1} (x + 2)^2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^{-1} -$$

$$- \left( \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right) \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - 2 - 2 + 4 + \frac{1}{3} - 2 + 4 - \frac{8}{3} + 8 - 8 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{7}{3} = \frac{1}{6}$$



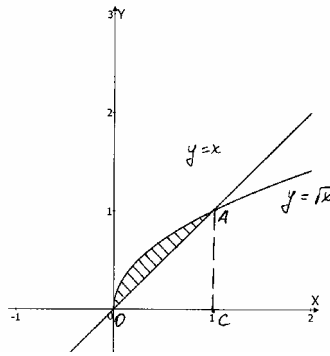
3)  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = x$

$OMA$  – искомая фигура

$$\sqrt{x} = x, \quad x > 0$$

$$x^2 - x = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1$$

$$S_{OMA} = S_{OMAC} - S_{OAC} = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



№ 1018

$$1) y = 6x^2; \quad y = (x-3)(x-4); \quad y = 0$$

$$6x^2 = (x-3)(x-4), \quad 6x^2 = x^2 - 7x + 12$$

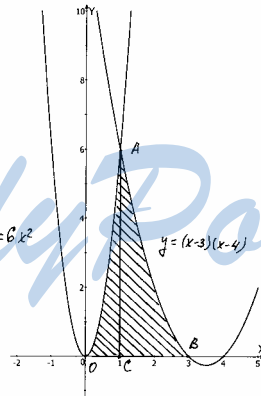
$$5x^2 + 7x - 12 = 0; \quad D = 49 + 240 = 17^2$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2,4$$

$DAB$  – искомая фигура

$$S_{AOB} = S_{AOC} + S_{CAB} = \int_0^1 6x^2 dx + \int_1^3 (x^2 - 7x + 12) dx = 2x^3 \Big|_0^1 +$$

$$+ \left( \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 12x \right) \Big|_1^3 = 2 + 9 - \frac{63}{2} + 36 - \frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 12 = 35 - 28 - \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$$



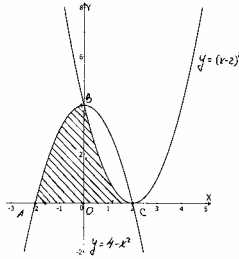
$$2) y = 4 - x^2, \quad y = (x-2)^2, \quad y = 0$$

$$a) 4 - x^2 = x^2 - 4x + 4; \quad 2x^2 - 4x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

$$b) 4 - x^2 = 0; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

$ABMC$  – искомая фигура

$$S_{ABMC} = S_{ABO} + S_{OBMC} = \int_{-2}^0 (4-x^2) dx + \int_0^2 (x-2)^2 dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 + \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = 0 + 8 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - 0 = 8$$

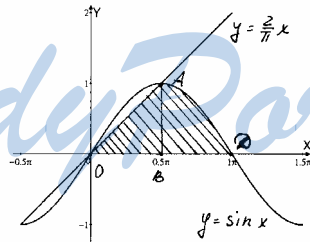


**№ 1019**

1) Найдем уравнение прямой: общий вид:  $y = kx + b$ , подставим точки:

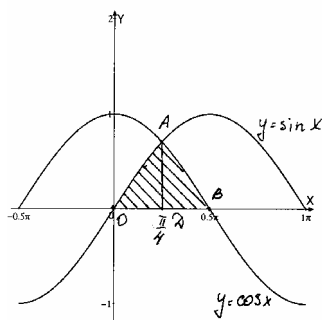
$$(0; 0); \quad 0 = k \cdot 0 + b \quad b = 0, \quad \left( \frac{\pi}{2}; 1 \right); \quad 1 = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = \frac{2}{\pi}, \quad y = \frac{2}{\pi} x,$$

$$S_{OAD} = S_{OAB} + S_{BAD} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4} + 1 + 0 = \frac{\pi}{4} + 1$$



2)  $OAB$  – искомая фигура

$$S_{OAB} = S_{OAD} + S_{DAB} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$



**№ 1020**

$$1) \quad y = 6x - x^2; \quad y = x + 4$$

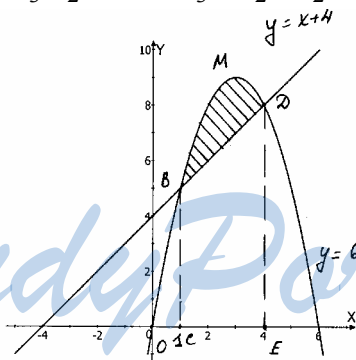
$$6x - x^2 = x + 4, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

*BMD* – искомая площадь

$$S_{BMD} = S_{CMF} - S_{CBDF} = \int_1^4 (6x - x^2) dx - \int_1^4 (x + 4) dx =$$

$$= \int_1^4 (6x - x^2 - x - 4) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \Big|_1^4 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = 28 - \frac{63}{3} - 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

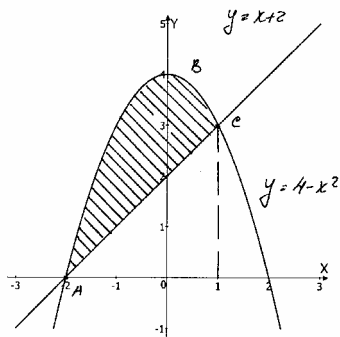


$$2) \quad y = 4 - x; \quad y = x + 2$$

$$4 - x^2 = x + 2, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

$$S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{ACD} = \int_{-2}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-2}^1 (x + 2) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$



**№ 1021**

1)  $y = 2 - x^2$ ;  $y = -x$   
 $2 - x^2 = -x$ ,  $x^2 - x - 2 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = -1$

$BCD$  – искомая фигура

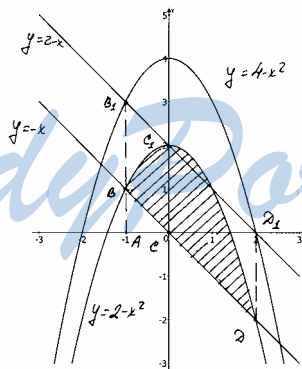
Перенесем ее на вектор  $(0; 2)$ , тогда функции примут вид:

$y = 4 - x^2$  и  $y = 2 - x$

$$S_{B_1C_1D_1} = S_{BCD} = S_{AB_1C_1D_1} - S_{AB_1D_1} = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^2 (2 - x) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$



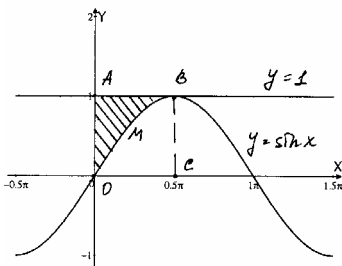
2)  $y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = \sin x$ ;  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$ABO$  – искомая фигура



$$S_{ABO} = S_{OABC} - S_{OBC} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$



### № 1022

1) Найдем прямую  $y = kx + b$

$$(0; -3); \quad -3 = k \cdot 0 + b, b = -3; \quad (1; 0); \quad 0 = k - 3, \quad k = -3, \quad y = 3x - 3$$

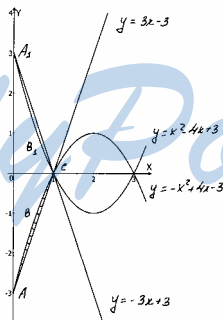
$$-x^2 + 4x - 3 = 3x - 3, \quad x^2 - x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$ABC$  – искомая фигура

Рассмотрим симметричную ей фигуру  $A_1B_1C_1$ .

$$S_{A_1B_1C} = S_{ABC} = S_{OA_1C_1} - S_{OA_1B_1C} = \int_0^1 (-3x + 3) dx - \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{6}$$



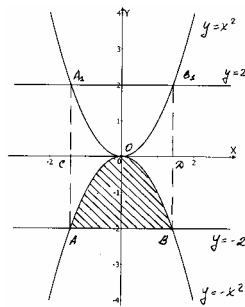
2)  $y = -x^2, \quad y = -2, \quad -x^2 = -2, x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}$

$AOB$  – искомая фигура

Рассмотрим симметричную ей фигуру  $A_1OB_1$ .

$$S_{AOB} = S_{A_1OB_1} = S_{OA_1BD} - S_{CA_1OB_1D} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx =$$

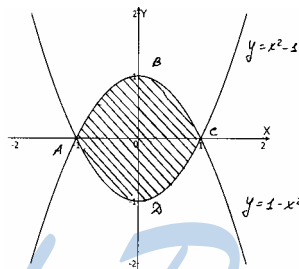
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$



3)  $y = 1 - x^2$ ;  $y = x^2 - 1$ ,  $1 - x^2 = x^2 - 1$ ,  $2x^2 = 2$ ,  $x = \pm 1$   
 $ABCD$  – искомая фигура,  $S_{ABC} = S_{ADC}$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 2S_{ABC} = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= 2 \left( 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \frac{2}{3}$$



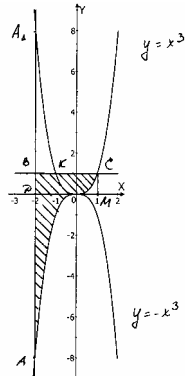
4)  $y = x^3$ ;  $y = 1$ ;  $x = -2$   
 $ABCO$  – искомая фигура,  
 $S_{ABCO} = S_{DBCO} + S_{ADO}$ ;  $S_{DBCO} = S_{DBKO} + S_{KOC}$ ;  $S_{DBKO} = 2 \cdot 1$ ;

$$S_{KOC} = S_{OKCM} - S_{OCM} = 1 \cdot 1 - \int_0^1 x^3 dx = 1 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Теперь рассмотрим фигуру, симметричную  $ADO - A_1DO$ :

$$S_{ADO} = S_{A_1DO} = \int_{-2}^0 -x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 = 0 + \frac{16}{4} = 4$$

$$S_{ABCO} = 2 + \frac{3}{4} + 4 = 6 \frac{3}{4}.$$



**№ 1023**

1)  $y = x^2 + 10$ ;  $(0; 1)$ .

Уравнение касательной  $y = kx + b$

$(0; 1)$ ;  $1 = k \cdot 0 + b$ ,  $b = 1$ ,  $y = kx + 1$

$y = f(x_0) + k(x - x_0)$ , где  $x_0$  – точка касания

$y = x_0^2 + 10 + kx - kx_0$ , значит:  $kx + 1 = x_0^2 + 10 + kx - kx_0$

$x_0^2 - kx_0 + 9 = 0$ , но  $k = f'(x_0) = 2x_0$

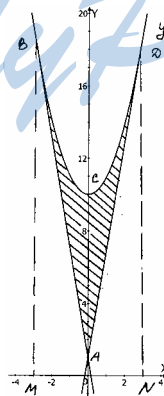
$x_0^2 - 2x_0^2 + 9 = 0$   $9 - x_0^2 = 0$   $x_0 = \pm 3$

Т.е.  $k = \pm 6$   $y = 6x + 1$   $y = -6x + 1$

$ABCD$  – искомая фигура.

$$S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 2(S_{OCDN} - S_{OADN}) = 2 \left( \int_0^3 (x^2 + 10) dx - \int_0^3 (6x + 1) dx \right) =$$

$$= 2 \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx = 2 \left( \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \Big|_0^3 \right) = 2(9 - 27 + 27) = 18.$$



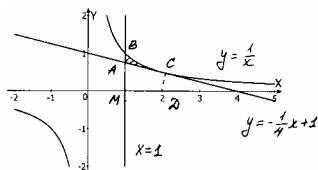
2)  $y = \frac{1}{x}$ ;  $x = 1$ , и касат.  $x_0 = 2$

$y(x_0) = \frac{1}{2}$ ,  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ,  $y'(x_0) = -\frac{1}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2)$ ,  $y = -\frac{1}{4}x + 1$ ;

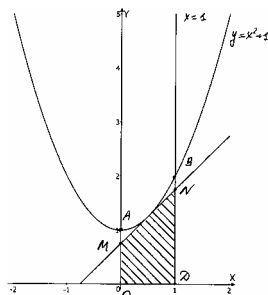
$ABC$  – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{MBCD} - S_{MACD} = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4}x + 1\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - 1\right) dx =$$

$$= \ln x + \frac{x^2}{8} - x \Big|_1^2 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 2 - 0 - \frac{1}{8} + 1 = \ln 2 - 1 + \frac{3}{8} = \ln 2 - \frac{5}{8}.$$



№ 1024



$y = x^2 + 1$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$

1) Уравнение касательной:  $y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ ,  $y = y_0 + 2x_0(x - x_0)$ ,

$y = 2x_0 \cdot x + x_0^2 - 2x_0^2 + 1$ ,  $y = 2x_0 \cdot x - x_0^2 + 1$ ;

2)  $OMND$  – искомая трапеция

$$S_{OMND} = \int_0^1 (2x_0x - x_0^2 + 1) dx = x_0x^2 - x_0^2x + x \Big|_0^1 = x_0 - x_0^2 + 1 - 0$$

Найдем наибольшее значение функции на  $(0; 1)$ .

$f(x) = -x^2 + x + 1$ ,  $f'(x) = -2x + 1$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $2x - 1 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,

$x = \frac{1}{2}$  – точка макс.,  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $y_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 1\frac{1}{4}$ .

Ответ:  $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ .

**§ 59 Применение производной и интеграла  
к решению практических задач**

**№ 1025**

$v(t) = s'(t)$ ,  $s$  – первообразная  $v(t)$

$$1) s(t) = \int_0^4 (3t^2 + 1) dt = t^3 + t \Big|_0^4 = 64 + 4 = 68;$$

$$2) s(t) = \int_1^3 (2t^2 + t) dt = \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \Big|_1^3 = 18 + \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 18 + 4 - \frac{2}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

**№ 1026**

$$1) v(t) = 0, \quad 4t - t^2 = 0, \quad t = 0, \quad t = 4;$$

$$2) s(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_0^4 (4t - t^2) dt = 2t^2 - \frac{t^3}{3} \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} - 0 = 10\frac{2}{3}.$$

**№ 1027**

$$1) y = 3x - 2x^2 + C; \quad 2) y = 2x^3 - 4x^2 + x + C; \quad 3) y = \frac{3}{2}e^{2x} + C;$$

$$4) y = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + C = 2 \sin 2x + C.$$

$$5) y = 3 \cdot (-\cos x) + C = -3 \cos x + C; \quad 6) y = \sin x + \cos x + C.$$

**№ 1028**

$$1) y = -\cos x + C; \quad -\cos 0 + C = 0, \quad C = 1, \quad y = -\cos x + 1$$

$$2) y = 2 \sin x + C; \quad 2 \sin \pi + C = 1, \quad C = 1, \quad y = 2 \sin x + 1$$

$$3) y = x^3 + 2x^2 - x + C; \quad 1 + 2 - 1 + C = -2, \quad C = -4; \quad y = x^3 + 2x^2 - x - 4$$

$$4) y = 2x + x^2 - x^3 + C; \quad -2 + 1 + 1 + C = 2, \quad C = 2; \quad y = 2x + x^2 - x^3 + 2$$

$$5) y = e^x + C; \quad e + C = 1, \quad C = 1 - e, \quad y = e^x + 1 - e$$

$$6) y = -e^{-x} + C; \quad -1 + C = 2, \quad C = 3, \quad y = -e^{-x} + 3.$$

**№ 1029**

$$y' = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x; \quad y'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x;$$

$$y'' + \omega^2 y = -C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x + \omega^2 C_1 \cos \omega x + \omega^2 C_2 \sin \omega x = 0;$$

$0 = 0$  – верно при любых  $C_1$  и  $C_2$ .

**№ 1030**

$$\text{Скорость распада } m'(t) = \frac{0,001 \text{ г}}{10 \text{ л}} = 0,0001$$

$$m'(t) = k m(t) \text{ решение } m(t) = m_0 e^{-kt}$$

$$\text{В нашем случае } m'(t) = 0,0001 \text{ и } m_0 = 1, \quad t = 10, \quad m(t) = 0,999, \quad 0,999 = 1 \cdot e^{-10k}$$

$$e^{-10k} = 0,999, \quad -10k = \ln 0,999, \quad k = -\frac{\ln 0,999}{10}, \quad 0,5 = 1 \cdot e^{-\frac{\ln 0,999}{10} t},$$

$$\frac{\ln 0,999}{10} \cdot t = \ln 0,5, \quad t = \frac{10 \ln 0,5}{\ln 0,999}, \quad t \approx 6928.$$

**№ 1031**

$$F = kx; \quad k = \frac{F}{x} = \frac{2}{0,01} = 200, \quad F = 200x$$

$$A = \int_0^{0,03} 200x dx = 100x^2 \Big|_0^{0,03} = 0,09 - 0 = 0,09 \text{ Дж.}$$

**№ 1032**

$$F = kx, \quad k = \frac{F}{x} = \frac{3}{0,01} = 300, \quad F = 300x$$

$$A = \int_0^{0,08} 300x dx = 150x^2 \Big|_0^{0,08} = 0,96 \text{ Дж.}$$

**Упражнения к главе X****№ 1033**

1)  $f(x) = \cos x$ , тогда  $F(x) = \sin x + C$

(0; -2):  $-2 = \sin 0 + C, \quad C = -2; \quad F(x) = \sin x - 2$

2)  $f(x) = \sin x$ , тогда  $F(x) = -\cos x + C$

$(-\pi; 0): \quad 0 = -\cos(-\pi) + C, \quad C = -1; \quad F(x) = -\cos x - 1.$

3)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , тогда  $F(x) = 2\sqrt{x} + C$

(4; 5):  $5 = 2\sqrt{4} + C, \quad C = 1; \quad F(x) = 2\sqrt{x} + 1$

4)  $f(x) = e^x$ , тогда  $F(x) = e^x + C$

(0; 2):  $2 = 1 + C, \quad C = 1; \quad F(x) = e^x + 1.$

5)  $f(x) = 3x^2 + 1$ , тогда  $F(x) = x^3 + x + C$

(1; -2):  $-2 = 1 + 1 + C, \quad C = -4; \quad F(x) = x^3 + x - 4$

6)  $f(x) = 2 - 2x$ , тогда  $F(x) = 2x - x^2 + C$

(2; 3):  $3 = 4 - 4 + C, \quad C = 3; \quad F(x) = 2x - x^2 + 3.$

**№ 1034**

1)  $\int_{-1}^2 2x dx = 2x^2 \Big|_{-1}^2 = 4 + 2 = 6$ ; 2)  $\int_{-2}^2 (3-x) dx = 3x - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 6 - 2 + 6 + 2 = 12$ ;

3)  $\int_1^3 (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_1^3 = 9 - 9 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$ ;

4)  $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2) dx = x^2 - x^3 \Big|_{-1}^1 = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$ ;

5)  $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} (16 - 1) = \frac{45}{4} = 11 \frac{1}{4}$ ;

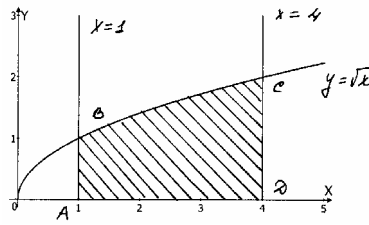
6)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ; 7)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

№ 1035

1)  $y = \sqrt{x}$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = 0$

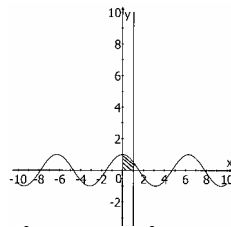
$ABCD$  – искомая фигура

$$S_{ABCD} = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$



2)  $y = \cos x$   $x = 0$   $x = \frac{\pi}{3}$   $y = 0$ ;  $OABC$  – искомая фигура;

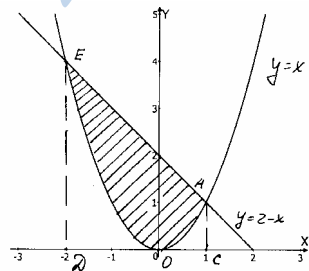
$$S_{OABC} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



3)  $y = x^2$ ;  $y = 2 - x$ ,  $x^2 = 2 - x$ ,  $x^2 + x - 2 = 0$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,  
 $EOA$  – искомая фигура

$$S_{EOA} = S_{DEAC} - S_{EDOAC} = \int_{-2}^1 (2-x) dx - \int_{-2}^1 x^2 dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4 \frac{1}{2}$$



$$4) \quad y = 2x^2; \quad y = 0,5x + 1,5; \quad 2x^2 = 0,5x + 1,5,$$

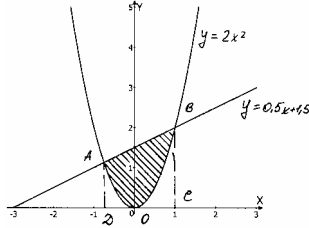
$$4x^2 - x - 3 = 0; \quad D = 1 + 48 = 49, \quad x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{3}{4},$$

$AOB$  – искомая фигура,

$$S_{AOB} = S_{DABC} - S_{DAOBC} = \int_{-\frac{3}{4}}^1 \left( \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-\frac{3}{4}}^1 2x^2 dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^1 \left( -2x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} \Big|_{-\frac{3}{4}}^1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} -$$

$$-\left( \frac{2 \cdot 27}{3 \cdot 64} + \frac{9}{16 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) = \frac{13}{12} + \frac{45}{64} = 1 \frac{151}{192}.$$



### № 1036

$$1) \quad \int_0^1 (5x^4 - 8x^3) dx = x^5 - 2x^4 \Big|_0^1 = 1 - 2 = -1;$$

$$2) \quad \int_{-1}^2 (6x^3 - 5x) dx = \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 \Big|_{-1}^2 = 24 - 10 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 15$$

(опечатка в ответе задачника)

$$3) \quad \int_1^4 \sqrt{x} \left( 3 - \frac{7}{x} \right) dx = \int_1^4 \left( 3\sqrt{x} - \frac{7}{\sqrt{x}} \right) dx = 2x\sqrt{x} - 14\sqrt{x} \Big|_1^4 =$$

$$= 16 - 28 - 2 + 14 = 0;$$

$$4) \quad \int_1^8 4\sqrt[3]{x} \left( 1 - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^8 \left( 4\sqrt[3]{x} - \frac{16}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = 3x\sqrt[3]{x} - 48\sqrt[3]{x} \Big|_1^8 =$$

$$= 48 - 96 - 3 + 48 = -3;$$

$$5) \quad \int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3};$$

$$6) \quad \int_2^6 \sqrt{2x-3} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(2x-3)^3} \cdot \frac{1}{2} \Big|_2^6 = \frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3} \Big|_2^6 = 9 - \frac{1}{3} = 8 \frac{2}{3}.$$



**№ 1037**

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4};$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx = -\frac{1}{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3} \left( \cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = \\ = -\frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6};$$

$$3) \int_1^3 3 \sin(3x - 6) dx = -1 \cdot \cos(3x - 6) \Big|_1^3 = -\cos(+3) + \cos(-3) = \\ = -\cos 3 + \cos 3 = 0;$$

$$4) \int_0^3 8 \cos(4x - 12) dx = 2 \sin(4x - 12) \Big|_0^3 = 2(\sin 0 - \sin(-12)) = \\ = 2(0 + \sin 12) = 2 \sin 12.$$

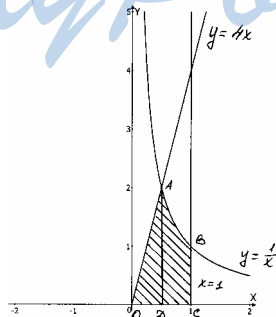
**№ 1038**

$$1) y = \frac{1}{x}; \quad y = 4x; \quad x = 1; \quad y = 0, \quad \frac{1}{x} = 4x, \quad 4x^2 = 1, \quad x = \pm \frac{1}{2}.$$

$OABC$  – искомая фигура

$$S_{OABC} = S_{OAD} + S_{DABC} = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx = 2x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln|x| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

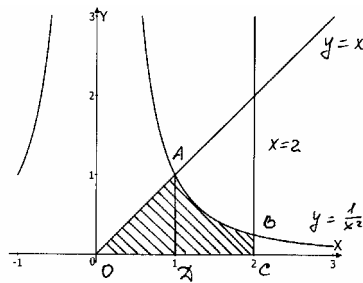
$$= \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2};$$



$$2) y = \frac{1}{x^2}; \quad y = x; \quad x = 2; \quad y = 0; \quad \frac{1}{x^2} = x, \quad x^3 = 1, \quad x = 1.$$

$OABC$  – искомая фигура

$$S_{OABC} = S_{OAD} + S_{DABC} = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

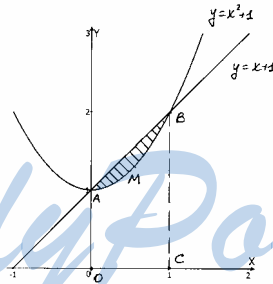


$$3) y = x^2 + 1; \quad y = x + 1, \quad x^2 + 1 = x + 1, \quad x^2 - x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$AMB$  – искомая фигура

$$S_{AMB} = S_{OABC} - S_{OAMBC} = \int_0^1 (x+1) dx - \int_0^1 (x^2+1) dx = \int_0^1 (x+1-x^2-1) dx =$$

$$= \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$



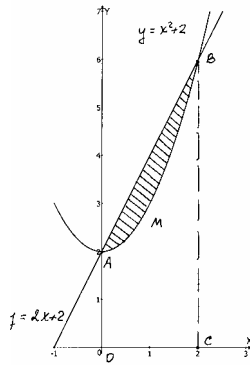
$$4) y = x^2 + 2; \quad y = 2x + 2$$

$$x^2 + 2 = 2x + 2, \quad x^2 - 2x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

$AMB$  – искомая фигура

$$S_{AMB} = S_{OABC} - S_{OAMBC} = \int_0^2 (2x+2) dx - \int_0^2 (x^2+2) dx =$$

$$= \int_0^2 (2x-x^2) dx = x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = 1 \frac{1}{3}.$$



№ 1039

$$1) \quad y = x^2 - 6x + 9; \quad y = x^2 + 4x + 4; \quad y = 0$$

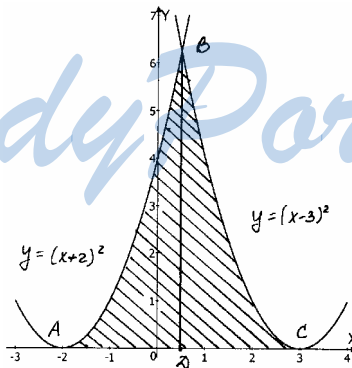
$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 4x + 4, \quad 10x = 5, \quad x = \frac{1}{2}$$

$ABC$  – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (x+2)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 (x-3)^2 dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \Big|_{-2}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \Big|_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{8}{3} - 8 + 8 + 9 - 27 + 27 - \frac{1}{24} + \frac{3}{4} - \frac{9}{2} =$$

$$= 11 - 4 + \frac{3}{4} + \frac{8}{3} = 7 + \frac{41}{12} = 10 \frac{5}{12}$$



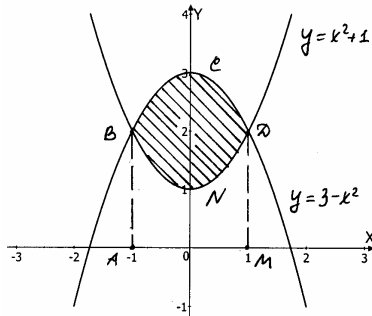
$$2) \quad y = x^2 + 1; \quad y = 3 - x^2$$

$$x^2 + 1 = 3 - x^2, \quad 2x^2 = 2, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

$BCDN$  – искомая фигура

$$S_{BCDN} = S_{ABCDM} - S_{ABNDM} = \int_{-1}^1 (3 - x^2) dx - \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx =$$

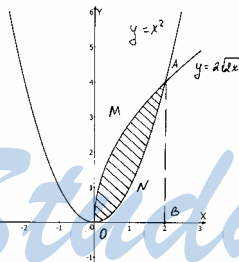
$$= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.$$



3)  $y = x^2$ ;  $y = 2\sqrt{2x}$ ,  $x^2 = 2\sqrt{2x}$ ,  $x^4 = 8x$ ,  $x(x^3 - 8) = 0$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  
 $OMAN$  – искомая фигура

$$S_{OMAN} = S_{OMAB} - S_{ONAB} = \int_0^2 2\sqrt{2x} dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (2\sqrt{2x} - x^2) dx =$$

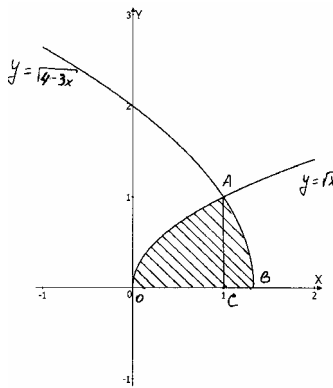
$$= \frac{4}{3} 2x\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$



4)  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = \sqrt{4-3x}$ ;  $y = 0$   
 $\sqrt{x} = \sqrt{4-3x}$ ,  $x = 4-3x$ ,  $4x = 4$ ,  $x = 1$   
 $OAB$  – искомая фигура

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \sqrt{4-3x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 + \frac{2}{3} (4-3x) \times$$

$$\times \frac{1}{3} \Big|_1^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$

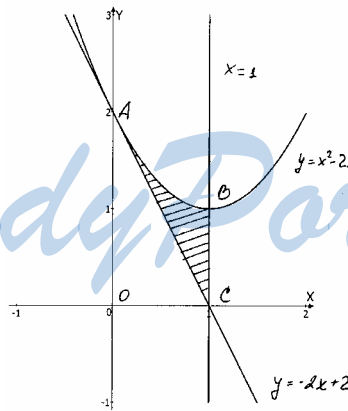


**№ 1040**

1)  $y = x^2 - 2x + 2$ ;  $x = 1$ , точка пересечения параболы с  $Oy$   
 $x = 0$ ;  $y = 0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$ ;  $(0; 2)$   
 $y(0) = 2$ ;  $y' = 2x - 2$ ,  $y'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$ ,  $y = 2 - 2(x - 0)$ ,  $y = -2x + 2$ ,  
 $ABC$  – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC} = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2) dx - \int_0^1 (-2x + 2) dx = \int_0^1 (x^2) dx =$$

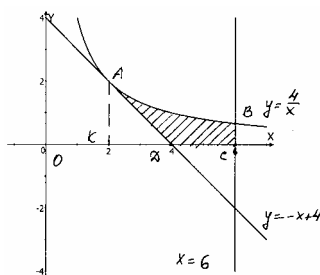
$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



2)  $y = \frac{4}{x}$ ;  $x_0 = 2$ ;  $y = 0$ ;  $x = 6$ ,  $y(2) = 2$ ,  $y' = -\frac{4}{x^2}$ ,  $y'(2) = -\frac{4}{4} = -1$ ,  
 $y = 2 - (x - 2)$   $y = -x + 4$ ,  $DABC$  – искомая фигура;

$$S_{DABC} = S_{KABC} - S_{KAD} = \int_2^6 \frac{4}{x} dx - \int_2^6 (-x+4) dx = 4 \ln x \Big|_2^6 + \frac{x^2}{2} - 4x \Big|_2^6 =$$

$$= 4 \ln 6 - 4 \ln 2 + 8 - 16 - 2 + 8 = 4 \ln 3 - 2$$



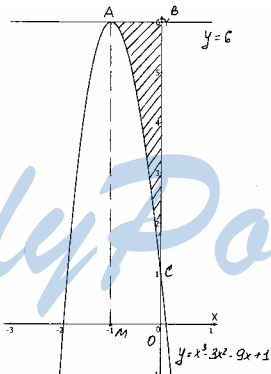
**№ 1041**

1)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 6$ ;  $x < 0$   
 $ABC$  – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{MABO} - S_{MACO} = \int_{-1}^0 6 dx - \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2 - 9x + 1) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^3 + 3x^2 + 9x + 5) dx = -\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{9x^2}{2} + 5x \Big|_{-1}^0 =$$

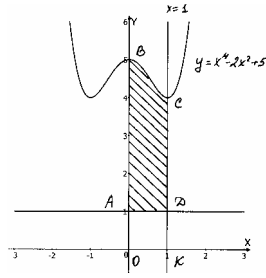
$$= \frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{2} + 5 = 6 - \frac{17}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$



2)  $y = x^4 - 2x^2 + 5$ ;  $y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$   
 $ABCD$  – искомая фигура

$$S_{ABCD} = S_{OBCK} - S_{OADK} = \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 5) dx - \int_0^1 1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 4) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + 4x \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 4 = 4 - \frac{7}{15} = 3\frac{8}{15}$$



№ 1042

$y = x^2 + px$  – парабола, ветви направлены вверх. Вершина  $\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4}\right)$ ,

пересечение с осями:  $(-p; 0)$  и  $(0; 0)$ . Рассмотрим два случая.

а)  $p > 0$ .  $y = kx + 1$  проходит через  $(0; 1)$

$$x^2 + px = kx + 1, \quad x^2 + (p - k)x - 1 = 0, \quad D = (p - k)^2 + 4$$

Точки пересечения:

$$x_1 = \frac{k - p - \sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{k - p + \sqrt{D}}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} (kx + 1) dx - \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + px) dx = k \frac{x^2}{2} + x \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{x^3}{3} - p \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \\ &= (k - p) \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^3}{3} + x \Big|_{x_1}^{x_2} = (k - p) \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} + x^2 - (k - p) \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} - x^2 = \\ &= -\frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \left(\frac{k - p}{2}\right)(x_2^2 - x_1^2) + (x_2 - x_1), \text{ но } x_2 - x_1 = \sqrt{D} \end{aligned}$$

$$x_2^2 - x_1^2 = \frac{1}{4} \left( (k - p + \sqrt{D})^2 - (k - p - \sqrt{D})^2 \right) = (k - p) \sqrt{D}$$

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \frac{1}{4} \sqrt{D} \left( (k - p + \sqrt{D})^2 + (k - p)^2 - \right.$$

$$\left. - D + (k - p - \sqrt{D})^2 \right) = \frac{1}{4} \sqrt{D} (2(k - p)^2 + 2D + (k - p)^2 - D) =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{D} (3(k - p)^2 + D)$$

$$S = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{D} (3(k - p)^2 + D) + \left(\frac{k - p}{2}\right) (k - p) \sqrt{D} + \sqrt{D} =$$

$$= \sqrt{D} \left( -\frac{1}{4} (k - p)^2 - \frac{1}{12} D + \frac{1}{2} (k - p)^2 + 1 \right) = \sqrt{D} \left( \frac{1}{4} (k - p)^2 - \frac{1}{12} D + 1 \right)$$

т.к.  $D = (p - k)^2 + 4$ , то

$$S = \sqrt{(p-k)^2 + 4} \cdot \left( \frac{1}{4}(k-p)^2 - \frac{1}{12}(k-p)^2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \sqrt{(p-k)^2 + 4} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{6}(k-p)^2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6} \sqrt{(p-k)^2 + 4} \cdot ((k-p)^2 + 4).$$

Найдем наименьшее  $S(k)$

Пусть  $(p-k)^2 + 4 = t$ ,  $S(t) = \frac{1}{6} t \sqrt{t}$ ,  $t \in [4; +\infty)$ ,  $S(t)$  – возрастающая

функция, поэтому наше значение достигается при  $t=4$ ,  $(p-k)^2 = 0$ ,  $p = k$ ;  
 б)  $p < 0$  – этот случай симметричен а). Все выкладки те же и ответ:  $k = p$ .

### Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа.

№ 1043  $0,025 \cdot 3,2 = \frac{1}{40} \cdot \frac{32}{10} = \frac{8}{100} = 0,08.$

№ 1044  $0,42 \cdot x = 12,6$ ,  $x = \frac{12,6}{0,42} = \frac{126 \cdot 100}{10 \cdot 42} = \frac{18 \cdot 10}{1 \cdot 6} = 30.$

№ 1045  $x = \frac{1,3}{39} \cdot 100 = \frac{13 \cdot 100}{10 \cdot 39} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}(\%).$

№ 1046  $x = \frac{46,6}{11,65} \cdot 100 = \frac{466 \cdot 100 \cdot 100}{10 \cdot 1165} = \frac{2 \cdot 1000}{5} = 400(\%).$

№ 1047  $1,75 \cdot x = 78,75$ ,  $x = \frac{78,75}{1,75} = \frac{7875 \cdot 100}{100 \cdot 175} = 45.$

№ 1048  $x = 1,8 \cdot 7,5 = \frac{9}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{27}{2} = 13,5.$

№ 1049

$x$  – исходная цена

1) понизили на 24%;  $x_1 = (x - 0,24x) = 0,76x$

2) снизили на 50%;  $x_2 = (x_1 - 0,5x_1) = 0,5x_1 = 0,5 \cdot 0,76x = 0,38x$

$x - x_2 = x - 0,38x = 0,62x$

Цена уменьшилась на 62%.

№ 1050

цинк  $x = 18$  кг, олово  $y = 6$  кг, медь  $z = 36$  кг

$$\% \text{ цинка} = \frac{x}{x+y+z} \cdot 100\% = \frac{18}{18+6+36} \cdot 100\% = 30\%$$

$$\% \text{ олова} = \frac{y}{x+y+z} \cdot 100\% = \frac{6}{18+6+36} \cdot 100\% = 10\%$$



$$\% \text{ меди} = \frac{z}{x+y+z} \cdot 100\% = \frac{36}{60} = 60\% .$$

Ответ: цинк – 30%, олово – 10%, медь – 60%.

**№ 1051**

Пусть  $x$  – стоимость товара,  $y$  – стоимость перевозки. Тогда из условий

следует, что: 
$$\begin{cases} x + y = 3942 \\ 0,08x = y \end{cases}, \quad \begin{cases} 1,08x = 3942 \\ y = 0,08x \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3650 \\ y = 292 \end{cases} . \quad \text{Ответ: } 3650 \text{ р.}$$

**№ 1052**

Пусть  $h = 5$  см – высота,  $S = 4$  см<sup>2</sup> – площадь основания.

$$V_1 = \frac{1}{3}h \cdot S, \quad V_2 = \frac{1}{3}h_2 \cdot S_2, \quad h_2 = 1,1h, \quad S_2 = 1,1S$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 1,1h \cdot 1,1S = 1,21 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot S = 1,21V_1$$

$$(V_2 - V_1) \cdot 100\% = (1,21 - 1)V_1 \cdot 100\% = 21\% .$$

Ответ: объем увеличится на 21%.

**№ 1053**

Пусть  $x$  – искомое число, тогда

$$x = a \cdot 72 + 68$$

$$\frac{x}{12} = \frac{a \cdot 72}{12} + \frac{68}{12} = \frac{6a \cdot 12}{12} + \frac{5 \cdot 12}{12} + 8 = \frac{12(6a + 5)}{12} + 8$$

Ответ: Остаток: 8.

**№ 1054**

Пусть эти числа  $x$  и  $y$ . Тогда:

$$\begin{cases} x + y = 1100 \\ 0,06x = 0,05y \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 1100 \\ y = \frac{5}{6}x \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{11}{6}x = 1100 \\ x = \frac{5}{6}y \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 600 \\ x = 500 \end{cases}$$

Ответ: Наибольшее – 600.

**№ 1055**

За первый год он получит прибыль  $0,03 \cdot 600 = 18$  (р.). На счету будет  $600 + 18 = 618$  р. В конце второго года он получит:  $1,03 \cdot 618 = 636,54$  (р.), а за третий –  $1,03 \cdot 636,54 = 655,64$  (р.).

**№ 1056**

За год он получил бы  $0,02 \cdot 500 = 10$  р., а за месяц он получил

$\frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{5}{6}$  р. Он снял 100 р., на счете осталось  $400 \frac{5}{6}$  р. Через год он получил  $1,02 \cdot 400 \frac{5}{6} = 408,85$  р.

**№ 1057**

$$1) 23,276 : 2,3 - 3,6 \cdot (17,2 \cdot 0,125 + 0,005 : 0,1) + 6,25 \cdot 3,2$$

Выполним по действиям.

$$a) 23,276 : 2,3 = \frac{23276 \cdot 10}{1000 \cdot 23} = \frac{1012}{100} = 10,12;$$

$$b) 17,2 \cdot 0,125 + 0,005 : 0,1 = \frac{172 \cdot 1}{10 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 10}{1000 \cdot 1} = \frac{43}{20} + \frac{5}{100} = \frac{440}{200} = 2,2;$$

$$в) 3,6 \cdot 2) = \frac{36}{10} \cdot \frac{22}{10} = \frac{792}{100} = 7,92; \quad r) 6,25 \cdot 3,2 = \frac{625}{100} \cdot \frac{32}{10} = \frac{2000}{100} = 20;$$

$$д) 1) - 3) + 4) = 10,12 - 7,92 + 20 = 22,2.$$

$$2) 9,25 \cdot 1,04 - (6,372 : 0,6 + 1,125 \cdot 0,8) : 1,2 + 0,16 \cdot 6,25$$

Выполним по действиям.

$$a) 9,25 \cdot 1,04 = \frac{925}{100} \cdot \frac{104}{100} = \frac{9620}{1000} = 9,62;$$

$$б) 6,372 : 0,6 + 1,125 \cdot 0,8 = \frac{6372 \cdot 10}{1000 \cdot 6} + \frac{9 \cdot 8}{8 \cdot 10} = \frac{1062}{100} + \frac{9}{10} = \frac{1152}{100} = 11,52;$$

$$в) 2) : 1,2 = \frac{1152 \cdot 10}{100 \cdot 12} = \frac{96}{10} = 9,6; \quad r) 0,16 \cdot 6,25 = \frac{16 \cdot 625}{100 \cdot 100} = \frac{1000}{1000} = 1;$$

$$д) 1) - 3) + 4) = 9,62 - 9,6 + 1 = 1,02.$$

**№ 1058**

$$1) \frac{\left(28 : 1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3} : 22 + 1\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{4} + 14 : 1\frac{1}{2}\right) \cdot 3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2} - 9\frac{3}{4}}. \text{ Выполним по действиям.}$$

$$a) 28 : 1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3} : 22 + 1\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{4} + 14 : 1\frac{1}{2} = \frac{28 \cdot 4}{7} + \frac{22 \cdot 1}{3 \cdot 22} + \frac{5 \cdot 39}{3 \cdot 4} + \frac{14 \cdot 2}{3} = 16 + \frac{1}{3} + \frac{65}{4} + \frac{28}{3} = 16 + \frac{29}{3} + \frac{65}{4} = 16 + \frac{116 + 195}{12} = 16 + \frac{311}{12} = 41\frac{11}{12} = \frac{503}{12};$$

$$б) 1) \cdot 3\frac{1}{7} = \frac{503 \cdot 22}{12 \cdot 7} = \frac{5533}{42}; \quad в) 10\frac{1}{2} - 9\frac{3}{4} = \frac{21}{2} - \frac{39}{4} = \frac{3}{4};$$

$$r) \frac{2)}{3)} = \frac{5533 \cdot 4}{42 \cdot 3} = \frac{11066}{63}.$$

$$2) \left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 0,108)$$

Выполним по действиям.

$$a) \left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 = (0,5 - 0,375) : 0,125 = 0,125 : 0,125 = 1;$$

$$б) \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 0,108) = \left(\frac{10-7}{12}\right) : 0,25 = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 1;$$

$$в) 1) + 2) = 1 + 1 = 2.$$

**№ 1059**

$$1) 10 : \frac{1}{8} = x : 1\frac{1}{4}, \quad x = 10 : \frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 5}{4} = 100;$$

$$2) x : 0,75 = 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{2}, \quad x = 0,75 \cdot 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 19 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 29} = \frac{57}{116};$$

(опечатка в ответе задачника)

$$3) \frac{x}{15} = \frac{1,456}{1,05}, \quad x = \frac{15 \cdot 1,456}{1,05} = 20,8.$$

**№ 1060**

$$\left(\frac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}\right) \left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}}\right) - 183\sqrt{5}$$

Выполним по действиям.

$$1) \frac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} = 15 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{125} = 15 \cdot 5\sqrt{5} = 75\sqrt{5};$$

$$2) 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[4]{49} = 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot 7 = 14;$$

$$3) 1) - 2) = 75\sqrt{5} - 14; \quad 4) \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{81} + \sqrt{9 \cdot 5} = 3 + 3\sqrt{5};$$

$$5) 3) \cdot 4) = (75\sqrt{5} - 14)(3 + 3\sqrt{5}) = 225\sqrt{5} + 1125 - 42 - 42\sqrt{5} = 1083 + 183\sqrt{5}$$

$$6) 5) - 183\sqrt{5} = 1083 + 183\sqrt{5} - 183\sqrt{5} = 1083.$$

**№ 1061**

$$1) \log_{27} 729 = \log_{27} 27^2 = 2.$$

$$2) \log_9 729 = \log_9 27^2 = \log_9 (9 \cdot 3)^2 = 3.$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} 729 = \log_{\frac{1}{3}} 3^6 = 6 \log_{\frac{1}{3}} 3 = 6 \cdot (-1) = -6.$$

**№ 1062**

$$1) \log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64} = \log_{2^{-4}} (2^6)^{\frac{1}{5}} = \log_{2^{-4}} 2^{\frac{6}{5}} = \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \log_2 2 = -\frac{3}{10} = -0,3$$

$$2) \log_8 \log_4 \log_2 16 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0.$$

**№ 1063**

$$1) \left( 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^{\sqrt{8}} = 2^{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{4}} = 2^2 = 4.$$

$$2) \left( 2^{\sqrt{27}} \right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3} = 2^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - 3} = 2^{9-3} = 2^6 = 64.$$

**№ 1064**

$$1) \log_3 \frac{9}{\sqrt[5]{3}} + \log_6 \sqrt[5]{36} = \log_3 3^{2-\frac{1}{5}} + \log_6 6^{\frac{2}{5}} = \frac{9}{5} + \frac{2}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}.$$

$$2) 16^{0,5 \log_4 10 + 1} = (4^2)^{0,5 \log_4 10} \cdot 16 = 4^{\log_4 10} \cdot 16 = 10 \cdot 16 = 160.$$

**№ 1065**

$$1) 2,5^{\frac{1}{7}} \quad 2,5^{0,5}.$$

Основания равны, значит будем сравнивать показатели степеней.

$f(x) = 2,5^x$  – функция возрастающая, т.к.  $2,5 > 1$ .

$$x_2 > x_1, \quad f(x_2) > f(x_1); \quad \frac{1}{7} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2,5^{\frac{1}{7}} < 2,5^{\frac{1}{2}};$$

$$2) 0,2^{\frac{2}{3}} \quad 0,2^{\frac{3}{4}}, \quad f(x) = 0,2^x \text{ – убывает, т.к. } 0,2 < 1, \quad x_2 > x_1 \quad f(x_2) < f(x_1)$$

$$\text{Сравним } \frac{2}{3} \text{ и } \frac{3}{4}, \text{ или } \frac{8}{12} \text{ и } \frac{9}{12}. \quad \frac{8}{12} < \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow 0,2^{\frac{2}{3}} > 0,2^{\frac{3}{4}}.$$

$$3) \log_{3,1} \sqrt{10} \quad \log_{3,1} 3$$

Функция  $\log_{3,1} x$  – возрастающая, т.к.  $3,1 > 1$ .

$$\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \log_{3,1} \sqrt{10} > \log_{3,1} 3$$

$$4) \log_{0,3} \frac{4}{5} \quad \log_{0,3} \frac{3}{4}, \quad f(x) = \log_{0,3} x \text{ – убывает, т.к. } 0,3 < 1,$$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20} > \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \log_{0,3} \frac{4}{5} < \log_{0,3} \frac{3}{4}.$$

**№ 1066**

$$1) a^{\frac{1}{5}} > 1 \Rightarrow a > 1; \quad 2) a^{-1,3} > 1 \Rightarrow \frac{1}{a \cdot \sqrt[10]{a^3}} > 1 \Rightarrow a < 1, \quad a \in (0; 1);$$

$$3) a^{-3,1} < 1 \Rightarrow a^{3,1} > 1 \Rightarrow a > 1; \quad 4) a^{2,7} < 1 \Rightarrow a \in (0; 1);$$

$$5) \log_a 0,2 > 0 \Rightarrow \log_a 0,2 > \log_a 1 \Rightarrow a < 1;$$

$$6) \log_a 1,3 > 0 \Rightarrow \log_a 1,3 > \log_a 1 \Rightarrow a > 1.$$

**№ 1067**

$$1) \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad 4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}} = 2^{2\log_2 3} \cdot 4^{\log_4 \frac{5}{11}} = 9 \cdot \frac{5}{11} = \frac{45}{11}$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 18 = \frac{2178}{121} > \frac{2025}{121} = \left(\frac{45}{11}\right)^2, \quad \sqrt{18} > 4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}};$$

$$2) \sqrt[3]{18}, \quad \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5} = (6^{-1})^{\log_6 2 - \log_6 5}, \quad 6^{-\log_6 \frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2},$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^3 = 18 = \frac{144}{8} > \frac{125}{8} = \left(\frac{5}{2}\right)^3, \quad \sqrt[3]{18} > \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}.$$

**№ 1068**

$$1) \lg 50 = \lg(5 \cdot 10) = \lg 10 + \lg 5 = 1 + \lg 5$$

$$0 = \lg 1 < \lg 5 < \lg 10 = 1, \text{ значит } 1 < 1 + \lg 5 < 2, \quad \lg 50 = 1 + \lg 5;$$

$$2) \log_2 10 = \log_2(2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5,$$

$$2 = \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 = 3, \quad 3 < 1 + \log_2 5 < 4.$$

**№ 1069**

$$1) 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{9} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{3} - \frac{1 \cdot 2\sqrt{5}}{2} + 3 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} -$$

$$-\frac{4 \cdot 5\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{6 - 5} - \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} -$$

$$-\frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6 - 2} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{2} = 0.$$

**№ 1070**

$$1) \sqrt{a^4(9a^2 - 6a + 1)} = a^2 \sqrt{(3a - 1)^2} = a^2 |3a - 1|$$

$$2) \sqrt{b^2(4b^4 + 4b^2 + 1)} = |b| \sqrt{(2b^2 + 1)^2} = |b|(2b^2 + 1).$$

**№ 1071**

$$1) \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{6 - 5} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{5});$$

$$3) \frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}} = \frac{12(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{10-7} = 4(\sqrt{10}+\sqrt{7});$$

$$4) \frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-3} = \sqrt{11}-\sqrt{3}.$$

**№ 1072**

$$1) \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{5}}; \quad 2) \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{3}{\sqrt{6}}; \quad 3) \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} = \frac{7-5}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}.$$

**№ 1073**

$$1) x = 0,444..., \quad 10x = 4,4..., \quad 10x - x = 4,4... - 0,4..., \quad 9x = 4, \quad x = \frac{4}{9};$$

$$2) x = 2,77... \quad 10x = 27,77..., \quad 9x = 25, \quad x = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9};$$

$$3) x = 0,2121... \quad 100x = 21,21..., \quad 99x = 21, \quad x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33};$$

$$4) x = 1,36... \quad 100x = 136,36..., \quad 99x = 135, \quad x = \frac{135}{99} = \frac{15}{11} = 1\frac{4}{11};$$

$$5) x = 0,35..., \quad 10x = 3,5..., \quad 100x = 35,35..., \quad 90x = 32, \quad x = \frac{32}{90};$$

$$6) x = 0,213..., \quad 100x = 21,3... \quad 1000x = 213,3..., \\ 900x = 192, \quad x = \frac{192}{900} = \frac{32}{150} = \frac{16}{75}.$$

**№ 1074**

$$1) \begin{array}{r} -50 \overline{) 6} \\ \underline{48} \phantom{0,833...} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array} \quad \frac{5}{6} = 0,8(3)$$

$$2) \begin{array}{r} 2 \frac{1}{9} \\ \underline{-1,0} \overline{) 9} \\ 9 \phantom{0,11...} \\ \underline{-9} \\ 10 \end{array} \quad 2\frac{1}{9} = 2,(1)$$

$$3) \begin{array}{r} -1,0 \overline{) 7} \\ \underline{7} \phantom{0,1428571...} \\ -30 \\ \underline{28} \\ -20 \\ \underline{14} \end{array} \quad \frac{1}{7} = 0,(142857)$$

$$\begin{array}{r} -60 \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-35} \\ 50 \\ \underline{-49} \\ 10 \end{array}$$

$$4) \quad 5 \frac{2}{11} \quad \frac{-20 \overline{) 11}}{11 \quad 0,181\dots} \quad 5 \frac{2}{11} = 5, (18)$$

$$\frac{-90}{\underline{-80}} \\ 20$$

№ 1075

1) нет; 2) да, например  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ; 3)  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$  – нет.

№ 1076

$a, b \in \mathbb{N}$   $\sqrt{ab}$  – рациональное, значит,  $ab = k^2$ ,  $a = \frac{k^2}{b}$ ,

$$\frac{a}{b} = \frac{k^2}{b \cdot b} = \frac{k^2}{b^2}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{k^2}{b^2}} = \frac{k}{b} \text{ – рациональное число, ч.т.д.}$$

№ 1077

$a$  – рац.  $b$  – иррац.

$a = a_0, a_1 \dots a_k$   $a_0, a_1 \dots a_k$  – цифры;  $b = b_0, b_1 \dots b_k, b_{k+1}$   
 $a \cdot b = (a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}) (b_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + \dots + b_k \cdot 10^{-k} + b_{k+1} \cdot 10^{-k-1}) = a_0 b_0 + \dots + a_0 b_k \cdot 10^{-k} + a_0 b_{k+1} \cdot 10^{-k-1} + \dots$  – иррац.

$a + b = (a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}) + (b_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + \dots + b_k \cdot 10^{-k} + b_{k+1} \cdot 10^{-k-1}) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot 10^{-1} + \dots + (a_k + b_k) \cdot 10^{-k} + b_{k+1} \cdot 10^{-k-1} + \dots$  – иррац.

$\frac{a}{b} = \frac{a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}}{b_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \dots + b_k \cdot 10^{-k}}$  – очевидно, что оно

иррационально, а т.к.  $\frac{b}{a} = \frac{1}{(a/b)}$ , то это тоже является иррац., ч.т.д.

№ 1078

1)  $[1; 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}]$ ,  $[3\sqrt{3} + 4; 15]$ ,  $1 < 3\sqrt{3} + 4$ ,  $15 > 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$ ,  
 $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$ ,  $3\sqrt{3} + 4$ .

Возведем в квадрат.

$18 + 28 + 12\sqrt{14}$ ,  $27 + 16 + 24\sqrt{3}$ ,  $3 + 12\sqrt{14}$ ,  $24\sqrt{3}$ .

Сравним  $12\sqrt{14}$  и  $24\sqrt{3}$ . Возведем в квадрат.

$2016 > 1728 \Rightarrow$  отрезки имеют общую точку.

$$2) (0, \sqrt{27} + \sqrt{6}), (\sqrt{48} - 1, 10), 0 < \sqrt{48} - 1, \sqrt{27} + \sqrt{6} < 6 + 3 = 9 < 10.$$

Сравним  $\sqrt{27} + \sqrt{6}$ ,  $\sqrt{48} - 1$ .

$$\text{Возведем в квадрат } 27 + 6 + 2\sqrt{162}, 48 + 1 - 2\sqrt{48}, 18\sqrt{2}, 16 - 8\sqrt{3} > 0.$$

$$\text{Еще раз возведем в квадрат } 648, 256 + 192 - 256\sqrt{3}, 200 > -256\sqrt{3}.$$

Имеют общие точки.

$$3) [2; 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6}] \text{ и } (3\sqrt{2} + \sqrt{22}; 11), 2 < 3\sqrt{2} + \sqrt{22}, 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6} < 11.$$

Сравним  $2\sqrt{5} + 2\sqrt{6}$  и  $3\sqrt{2} + \sqrt{22}$ .

$$\text{Возведем в квадрат } 20 + 24 + 8\sqrt{30}, 18 + 22 + 6\sqrt{44}, 4 + 8\sqrt{30}, 12\sqrt{11}.$$

Возведем в квадрат  $8\sqrt{30}$  и  $12\sqrt{11}$ .

$1920 > 1584 \Rightarrow$  имеют общие точки.

$$4) [1; 1 + \sqrt{3}] \text{ и } \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1}; 4\right), 1 < \frac{2}{\sqrt{3} - 1}, 1 + \sqrt{3} < 4.$$

Сравним  $1 + \sqrt{3}$  и  $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$ . Умножим оба на  $\sqrt{3} - 1 > 0$ .

$(3 - 1) = 2$  – но одно отрезок, другой – интервал. Значит, не имеют.

### № 1079

$$a < b$$

1) Пусть  $a$  имеет координаты  $(a, 0)$ , а  $b - (b, 0)$ . Тогда середина отрезка

$[a, b]$  имеет координаты  $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ . Точка  $\frac{a+b}{2}$  имеет координаты

$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ , или  $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$  – т.е. она совпадает с серединой.

2) Допустим, эта точка не лежит в этом отрезке, тогда либо

$\frac{a+bc}{1+c} > b$ ,  $a + bc > b + bc$ ,  $a > b$  – противоречие, либо  $\frac{a+bc}{1+c} < a$ ,  
 $a+bc < a+ac$ ,  $bc < ac$ ,  $b < a$  – противоречие, значит, она лежит внутри этого отрезка.

### № 1080

$$1) S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^{\circ} = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a + a + a).$$

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} a \cdot r, r = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3a} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}, d = 2r = 2\sqrt{3};$$

$$2) \frac{9}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{9}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{a \cdot 4} = \frac{9}{16},$$



$$\cos \alpha = -2 \sin^2 \alpha = 1 - \frac{2 \cdot 81}{256} = \frac{94}{256} = \frac{47}{128}, \quad \alpha = \arccos \frac{47}{128} \approx 68,46^\circ.$$

**№ 1081**

$$\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{120}{l}, \quad l = \frac{120}{\operatorname{tg} 54^\circ} \approx 87,2.$$

**№ 1082**

$$l = x + y, \quad \frac{x}{\sin 22^\circ} = \frac{130}{\sin 68^\circ}, \quad x = \frac{130 \sin \left( \frac{\pi}{2} - 68^\circ \right)}{\sin 68^\circ} = 130 \operatorname{ctg} 68^\circ$$

$$\frac{y}{\sin(90^\circ - 46^\circ)} = \frac{130}{\sin 46^\circ}, \quad y = \frac{130 \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} = 130 \operatorname{ctg} 46^\circ$$

$$l = 130 (\operatorname{ctg} 68^\circ + \operatorname{ctg} 46^\circ) \approx 178 \text{ (m)}.$$

**№ 1083**

$$1) \cos \alpha = \frac{8}{10}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{8}{10} \right)^2} = \frac{6}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 8} = \frac{6}{8}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{8}{6}$$

$$2) \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5 \cdot 13}{13 \cdot 12} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = 2,4 = \frac{12}{5}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{144}{25}}} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$$

$$4) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{49}{576}}} = \frac{24}{25},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{24}{25} \right)^2} = \frac{7}{25}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}.$$

**№ 1084**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

**№ 1085**

$$\begin{aligned} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos 690^\circ - \cos \frac{19\pi}{3} &= \sin \left( 4\pi - \frac{\pi}{3} \right) + \cos(720^\circ - 30^\circ) - \\ &- \cos \left( 6\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} + \cos 30^\circ - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**№ 1086**

$$\begin{aligned} 1) \ 2\arctg 1 - 3\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}; \\ 2) \ 8\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 6\arctg \sqrt{3} &= 8 \cdot \frac{\pi}{4} + 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi + 2\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

**№ 1087**

$$\begin{aligned} 1) \ \sin \left( 2\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2) \ \operatorname{tg}(2\arctg 3), \quad \arctg 3 = x, \quad \operatorname{tg} x = 3 \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 9} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

**№ 1088**

$$\begin{aligned} 1) \ \log_4 \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}; \\ 2) \ \log_{10} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} &= \log_{10} 1 = 0; \\ 3) \ \log_8 \sin \frac{3\pi}{4} &= \frac{1}{3} \log_2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6}; \\ 4) \ \log_2 \cos \frac{\pi}{3} &= \log_2 \frac{1}{2} = -1; \\ 5) \ \log_3 1 - \log_4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \log_5 \cos 0 &= 0 - \log_4 1 \log_5 1 = 0. \end{aligned}$$

**№ 1089**

$$\begin{aligned} 1) \ \operatorname{ctg}(\arctg \sqrt{3}) &= \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 2) \ \operatorname{ctg}(\arctg 1) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1; \\ 3) \ \sin(\arctg(-\sqrt{3})) &= \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) \ \sin \left( \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \\ 5) \ \cos(\arctg 1) &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 6) \ \cos(\arctg(-\sqrt{3})) = \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**№ 1090**

$$1) \cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

По определению арккосинус числа  $\sqrt{2}/2$  - это такое число  $\alpha$ ,  $-0 \leq \alpha \leq \pi$ , косинус которого равен  $\sqrt{2}/2$ . В нашем случае  $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ , далее

$$\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2) \sin(5\arccos 0)$$

По определению арккосинус числа 0 - это такое число  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , косинус которого равен 0. В нашем случае  $\alpha = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ , далее

$$\sin(5\arccos 0) = \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

**№ 1091**

1)  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$  при  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ , т.е.  $|\sin \alpha| \neq |\cos \alpha|$ , знаменатель данного выражения отличен от 0 и выражение имеет смысл, далее

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{-2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ тогда } -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \text{ по}$$

условию, тогда  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16} - 1} = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{16}{7}\right) = -\frac{12}{7}$ , итак, вы-

ражение  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$  при  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$  равняется  $-\frac{12}{7}$ ;

$$2) \sin \alpha \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Возведем обе части выражения  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$  в квадрат, получим

$$(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2, \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{9},$$

$$1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{9}, \text{ откуда } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{4}{9}, \text{ таким образом}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{4}{9}.$$

№ 1092

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{a+2}{a-2} \left( \frac{2a^2 - a - 3}{a^2 + 5a + 6} : \frac{2a-3}{a-2} \right) = \frac{a+2}{a-2} \left( \frac{2(a+1)(a-3/2)}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{a-2}{2a-3} \right) = \\
 & = \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{2(a+1)(a-3/2)}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{a-2}{2(a-3/2)} = \frac{a+1}{a+3} \\
 2) \quad & \left( 2 + \frac{1}{b} \right) : \frac{8b^2 + 8b + 2}{b^2 - 4b} \cdot \frac{2b+1}{b} = \frac{2b+1}{b} \cdot \frac{b(b-4)}{2(2b+1)^2} \cdot \frac{2b+1}{b} = \frac{(b-4)}{2b}
 \end{aligned}$$

№ 1093

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^3}{a^4-1} = \\
 & = \frac{a}{(a-1)(a+1)} + \frac{a^2+a-1}{a^2(a-1)+(a-1)} + \frac{a^2-a-1}{a^2(a+1)+(a+1)} - \\
 & - \frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \frac{a}{(a-1)(a+1)} + \frac{a^2+a-1}{(a-1)(a^2+1)} + \\
 & + \frac{a^2-a-1}{(a+1)(a^2+1)} - \frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \\
 & + \frac{a^2-a-1}{(a+1)(a^2+1)} - \frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \\
 & = \frac{a(a^2+1) + (a^2+a-1)(a+1) + (a^2-a-1)(a-1) - 2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}
 \end{aligned}$$

Преобразуем числитель полученной дроби  
 $a(a^2+1) + (a^2+a-1)(a+1) + (a^2-a-1)(a-1) - 2a^3 = a^3 + a + a^3 + a^2 + a^2 + a - a - 1 + a^3 -$   
 $- a^2 - a^2 + a - a + 1 - 2a^3 = a^3 + a$ , тогда дробь примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^3+a}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \frac{a(a^2+1)}{(a^2-1)(a^2+1)} = \frac{a}{a^2-1} \\
 2) \quad & \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{(a+1)^2+a+1} - \frac{2}{a+3} = \\
 & = \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{2a}{(a+1)(a+3)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{2}{a+3} = \\
 & = \frac{1 \cdot (a+1) + 2a(a+2) + 1 \cdot (a+3) - 2(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \\
 & = \frac{a+1+2a^2+4a+a+3-2a^2-6a-4}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{0}{(a+1)(a+2)(a+3)} = 0
 \end{aligned}$$

№ 1094

$$1) \frac{1}{4+4\sqrt{a}} - \frac{1}{2-2a} + \frac{1}{4-4\sqrt{a}} = \frac{4-4\sqrt{a}+4+4\sqrt{a}}{(4+4\sqrt{a})(4-4\sqrt{a})} - \frac{1}{2-2a} =$$

$$\frac{8}{16-16a} - \frac{1}{2-2a} = \frac{1}{2-2a} - \frac{1}{2-2a} = 0$$

$$2) \frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a} = \frac{\sqrt{2}(a-1)+(a-1)}{\sqrt{2}(a-1)+2(a-1)} = \frac{(a-1)(\sqrt{2}+1)}{(a-1)(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

№ 1095

$$1) \left(1 + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) \text{ при } a=5, x=4$$

Преобразуем данное выражение:

$$\left(1 + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) = 1 - \frac{a-x}{a+x} = \frac{a+x-a+x}{a+x} = \frac{2x}{a+x}$$

при  $a=5, x=4$  полученное выражение примет вид:  $\frac{2 \cdot 4}{5+4} = \frac{8}{9}$ ;

$$2) \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \text{ при } a=3, x=\sqrt{5}$$

Преобразуем данное выражение:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{(a + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - x^2})^2}{(a - \sqrt{a^2 - x^2})(a + \sqrt{a^2 - x^2})} =$$

$$= \frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2) - a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2} - (a^2 - x^2)}{a^2 - (a^2 - x^2)} =$$

$$= \frac{4a\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}; \text{ при } a=3, x=\sqrt{5} \text{ полученное выражение примет вид:}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{12\sqrt{9-5}}{5} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

№ 1096

$$1) \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}} \cdot \left( \frac{x^{1/2}}{1-x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}-x} \right) = \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}} \cdot \left( \frac{x^{1/2}}{1-x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}(1-x^{1/2})} \right) =$$

$$= \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}} \cdot \frac{x-1}{x^{1/2}(1-x^{1/2})} = \frac{x-1}{1-x} = -1$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{m+2m^{1/2}+1}{2m^{1/2}} \cdot \left( \frac{2m^{1/2}}{m^{1/2}-1} - \frac{4m^{1/2}}{m-1} \right) &= \frac{(m^{1/2}+1)^2}{2m^{1/2}} \cdot \left( \frac{2m^{1/2}(m^{1/2}+1) - 4m^{1/2}}{m-1} \right) = \\ &= \frac{(m^{1/2}+1)^2}{2m^{1/2}} \cdot \frac{2m - 4m^{1/2} + 2m^{1/2}}{m-1} = \frac{(m^{1/2}+1)^2}{2m^{1/2}} \cdot \frac{2m - 2m^{1/2}}{m-1} = m^{1/2} + 1 \end{aligned}$$

№ 1097

$$1) 6n \cdot \sqrt{\frac{m}{2n}} \cdot \sqrt{18mn} = 6n \cdot 3 \sqrt{\frac{m \cdot 2mn}{2n}} = 18mn;$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{a-1}{a^{3/4}+a^{1/2}} \cdot \frac{a^{1/2}+a^{1/4}}{a^{1/2}+1} \cdot a^{1/4} &= \frac{a-1}{a^{1/2}(a^{1/4}+1)} \cdot \frac{a^{1/4}(a^{1/4}+1)}{a^{1/2}+1} \cdot a^{1/4} = \\ &= \frac{(a^{1/2}+1)(a^{1/2}-1)}{a^{1/2}(a^{1/4}+1)} \cdot \frac{a^{1/4}(a^{1/4}+1)}{a^{1/2}+1} \cdot a^{1/4} = a^{1/2} - 1. \end{aligned}$$

№ 1098

$$\begin{aligned} 1) \left( \frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{a} \right) \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} &= \frac{a\sqrt{a}-1+a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a-1} = \\ \frac{a-1+\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a-1} &= \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a-1} = \sqrt{a}+1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \left( \frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}} - \sqrt{b} \right) \cdot \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} &= \frac{1+b\sqrt{b}-\sqrt{b}-b}{1+\sqrt{b}} \cdot \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} = \\ &= \frac{(1-b)-\sqrt{b}(1-b)}{1+\sqrt{b}} \cdot \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} = \frac{(1-b)(1-\sqrt{b})}{1+\sqrt{b}} \cdot \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} = 1-\sqrt{b}. \end{aligned}$$

№ 1099

$$\frac{a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1}}{a^{-5/3}b^2 - b^{-5/3}a^{-2}} - a^{1/3}b^{1/3} = \frac{a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1} - a^{-4/3}b^{-5/3} + a^{-5/3}b^{-4/3}}{a^{-5/3}b^{-2} - b^{-5/3}a^{-2}} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a^{-1}b^{-2} + a^{-5/3}b^{-4/3} - \left( a^{-2}b^{-1} + a^{-4/3}b^{-5/3} \right)}{a^{-5/3}b^{-2} - b^{-5/3}a^{-2}} = \\
& \frac{a^{-5/3}b^{-2} \left( a^{2/3} + b^{2/3} \right) - b^{-5/3}a^{-2} \left( a^{2/3} + b^{2/3} \right)}{a^{-5/3}b^{-2} - b^{-5/3}a^{-2}} = \\
& \frac{\left( a^{2/3} + b^{2/3} \right) \cdot \left( a^{-5/3}b^{-2} - b^{-5/3}a^{-2} \right)}{a^{-5/3}b^{-2} - b^{-5/3}a^{-2}} = a^{2/3} + b^{2/3}.
\end{aligned}$$

№ 1100

$$\begin{aligned}
1) & \left( \frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a^2 + ab}} - \frac{\sqrt{ab + b^2}}{\sqrt{ab + b}} \right)^{-2} - \frac{\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3}}{2ab} = \\
& = \left( \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right)^{-2} - \frac{\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3}}{2ab} = \\
& = \left( \frac{a+b+2\sqrt{ab}-a-b}{\sqrt{a+b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right)^{-2} - \frac{\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3}}{2ab} = \\
& = \left( \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right)^{-2} - \frac{\sqrt{ab}(a+b)}{2ab} = \\
& = \frac{(a+b)(a+2\sqrt{ab}+b)}{4ab} - \frac{\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3}}{2ab} = \\
& = \frac{a^2 + 2a\sqrt{ab} + ab + ab + 2b\sqrt{ab} + b^2 - 2a\sqrt{ab} - 2b\sqrt{ab}}{4ab} = \frac{(a+b)^2}{4ab}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) & (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{2 \left( a^{-1/2} + b^{-1/2} \right)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} = \\
& \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \cdot \frac{a+b}{ab} + \frac{2 \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} = \\
& = \frac{a+b}{ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + \frac{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{1}{ab}
\end{aligned}$$

№ 1101

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{9a - 25a^{-1}}{3a^{1/2} - 5a^{-1/2}} - \frac{a + 7 + 10a^{-1}}{a^{1/2} + 2a^{-1/2}} \right)^4 = \\
 & = \left( \frac{\left( 3a^{1/2} - 5a^{-1/2} \right) \left( 3a^{1/2} + 5a^{-1/2} \right)}{3a^{1/2} - 5a^{-1/2}} - \frac{a + 7 + 10a^{-1}}{a^{1/2} + 2a^{-1/2}} \right)^4 = \\
 & = \left( \frac{3a + 5 + 6 + 10a^{-1} - a - 7 - 10a^{-1}}{a^{-1/2}(a + 2)} \right)^4 = \left( \frac{2a + 4}{a^{-1/2}(a + 2)} \right)^4 = \\
 & = \left( \frac{2(a + 2)}{a^{-1/2}(a + 2)} \right)^4 = \left( 2a^{1/2} \right)^4 = 16a^2.
 \end{aligned}$$

№ 1102

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4} - 9\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} - \frac{9}{\sqrt{b}}} \right)^{-2} - (b^2 + 18b + 81)^{0.5} = \\
 & = \left( \frac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}(b-9)} + \frac{\sqrt{b}}{b-9} \right)^{-2} - \sqrt{(b+9)^2} = \left( \frac{3 + \sqrt{b}}{b-9} \right)^{-2} - (b+9) = \\
 & = \left( \frac{b-9}{3 + \sqrt{b}} \right)^2 - (b+9) = \frac{b^2 - 18b + 81 - 9b - 6b\sqrt{b} - b^2 - 81 - 54\sqrt{b} - 9b}{9 + 6\sqrt{b} + b} = \\
 & = \frac{-54\sqrt{b} - 36b - 6b\sqrt{b}}{9 + 6\sqrt{b} + b} = \frac{-6\sqrt{b}(9 + 6\sqrt{b} + b)}{9 + 6\sqrt{b} + b} = -6\sqrt{b}.
 \end{aligned}$$

№ 1103

$$\begin{aligned}
 1) & \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} : \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \\
 2) & (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha) - 1 / (\sin \alpha \cos \alpha) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\
 & = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2.
 \end{aligned}$$



**№ 1104**

$$\frac{1 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad \text{Преобразуем левую часть данного}$$

$$\begin{aligned} \text{тождества: } \frac{1 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} &= \frac{1 - 1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = -2 \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha (\sin^2 \alpha - 1)} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \text{таким образом, левая и правая части} \end{aligned}$$

тождества совпадают, следовательно, тождество доказано.

**№ 1105**

$$\begin{aligned} 1) \sin^2(\alpha + 8\pi) + \cos^2(\alpha + 10\pi) &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \\ 2) \cos^2(\alpha + 6\pi) + \cos^2(\alpha - 4\pi) &= \cos^2(\alpha + 3 \cdot 2\pi) + \cos^2(2 \cdot 2\pi - \alpha) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

**№ 1106**

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\alpha}{2(1 - 2 \cos^2 \alpha)} + \frac{\sin \alpha \cos(\pi - \alpha)}{1 - 2 \sin^2 \alpha} &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \\ &= -\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

**№ 1107**

$$\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} - \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = -\sin x - \cos x$$

Преобразуем левую часть данного тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - \sin^2 x - \sin^3 x}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - (\cos^3 x + \sin^3 x)}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cdot \cos x)}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1 + \sin x \cdot \cos x)}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x(1 + \sin x) - (1 + \sin x))}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} = -\sin x - \cos x, \end{aligned}$$

таким образом правая и левая части тождества совпадают, ч.т.д.

**№ 1108**

$$\begin{aligned} 1) 1 + \cos \alpha + \sin \alpha &= (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & 1 - \cos \alpha - \sin \alpha = (10 \cos \alpha) - \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\
& = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right); \\
3) \quad & 3 - 4 \sin^2 \alpha = 3 - 4(1 - \cos^2 \alpha) = 3 - 4 + 4 \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 1 = (2 \cos \alpha - 1)(2 \cos \alpha + 1); \\
4) \quad & 1 - 4 \cos^2 \alpha = (1 - 2 \cos \alpha)(1 + 2 \cos \alpha).
\end{aligned}$$

**№ 1109**

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$1) \quad \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Рассмотрим правую часть:

$$\begin{aligned}
4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{(\alpha + \beta)}{2} \right) = \\
&= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\
&= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\
&= 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = \\
&= \sin \beta (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha (1 - \cos \beta) = \sin \beta - \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha \cos \beta = \\
&= \sin \beta + \sin \alpha - (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = \\
&= \sin \beta + \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta) = \sin \beta + \sin \alpha - \cos \left( \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) = \\
&= \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma
\end{aligned}$$

2) Рассмотрим левую часть:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin 2\gamma = \\
&= 2 \sin(\pi - \gamma) \cos(\alpha - \beta) + \sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 2\beta) + 2 \sin \gamma \cos \gamma = \\
&= 2 \sin \gamma (\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma) = 2 \sin \gamma \cdot 2 \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2} = \\
&= 2 \sin \gamma \cdot 2 \cos \frac{\pi - 2\beta}{2} \cos \frac{\pi - 2\beta - 2\gamma}{2} = \\
&= 4 \sin \gamma \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \right) = 4 \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.
\end{aligned}$$

**№ 1110**

$$\operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$1) \quad \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha \sin \alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель данного выражения на  $\cos^2 \alpha \neq 0$  (последнее выполняется вследствие  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ),

$$\frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{3 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{tg^2 \alpha + tg \alpha}{1 + 3tg \alpha}, \text{ при } tg \alpha = 2 \text{ выражение примет вид:}$$

$$\frac{2^2 + 2}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{6}{7};$$

2)  $\frac{2 - \sin^2 \alpha}{3 + \cos^2 \alpha}$ . Разделим числитель и знаменатель данного выражения на

$$\cos^2 \alpha \neq 0, \text{ получим: } \frac{\frac{2}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{3}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{2 + 2tg^2 \alpha - tg^2 \alpha}{3 + 3tg^2 \alpha + 1} = \frac{2 + tg^2 \alpha}{4 + 3tg^2 \alpha};$$

при  $tg \alpha = 2$  выражение примет вид:  $\frac{2 + 2^2}{4 + 3 \cdot 2^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

### № 1111

$tg \alpha + ctg \alpha = 3$ ,  $tg^2 \alpha + ctg^2 \alpha = (tg \alpha + ctg \alpha)^2 - 2$ , тогда при  $tg \alpha + ctg \alpha = 3$  выражение примет вид:  $3^2 - 2 = 7$ .

### № 1112

1)  $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \frac{tg \frac{\pi}{4} + tg \alpha}{1 - tg \frac{\pi}{4} tg \alpha} =$

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 0;$$

2)  $tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = ctg^2 \alpha - \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} =$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 + \sin 2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 + \sin 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha (1 + \sin 2\alpha)}.$$

### № 1113

1)  $\frac{tg \alpha + tg \beta}{ctg \alpha + ctg \beta} = \frac{tg \alpha + tg \beta}{\frac{1}{tg \alpha} + \frac{1}{tg \beta}} = tg \alpha tg \beta$

2)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \\
& = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha} = \\
& = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha} = 2tg\alpha; \\
4) \quad & \frac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \\
& = \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}ctg\alpha.
\end{aligned}$$

№ 1114

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{1 - tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}} = \\
& = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha. \\
2) \quad & \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = tg\alpha.
\end{aligned}$$

№ 1115

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{tg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{1 + \frac{1}{tg^2\alpha}} = \frac{tg^4\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{tg^4\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{1} = \sin^2\alpha \, tg^2\alpha. \\
2) \quad & \frac{1 + ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha} = \frac{1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \\
3) \quad & \frac{tg\alpha - tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta} = \\
& = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)} = \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta - \alpha + \beta) + \sin(2\alpha - 2\beta) - \sin(-2\beta) - \sin 2\alpha)}{\frac{1}{2}(\sin(-2\beta) + \sin 2\alpha + \sin(\alpha + \beta - \alpha - \beta) + \sin(2\alpha + 2\beta))} = \\
&= \frac{\sin(2\alpha - 2\beta) + \sin 2\beta - \sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + 2\beta) - \sin 2\beta + \sin 2\alpha} = \\
&= \frac{2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha - 2\beta) - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha + 2\beta) + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos(\alpha - 2\beta) - \cos\alpha}{\cos(\alpha + 2\beta) + \cos\alpha} = \\
&= \frac{-2\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(-\beta)}{2\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\beta \\
4) (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 &= \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

№ 1116

$$\begin{aligned}
1) \frac{1 + \cos 2\alpha}{2\cos\alpha} &= \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha} = \cos\alpha; \\
2) \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} &= \frac{\sin\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha + \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}; \\
3) \frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} &= \frac{\sin 3\alpha + (\sin\alpha + \sin 5\alpha)}{\cos 3\alpha + (\cos\alpha + \cos 5\alpha)} = \\
&= \frac{\sin 3\alpha + 2\sin 3\alpha \cos 2\alpha}{\cos 3\alpha + 2\cos 3\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)}{\cos 3\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)} = \operatorname{tg} 3\alpha; \\
4) \frac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha} &= \frac{2\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\
&= \frac{2\sin 2\alpha(1 + \cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha.
\end{aligned}$$

№ 1117

$$\begin{aligned}
1) \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\sin(-\alpha) - \sin(2,5\pi + \alpha)} &= \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\alpha}{\sin(-\alpha) - \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \\
&= \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin(-\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{-\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\sin\alpha + \cos\alpha) \\
2) \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\cos(-\alpha) - \cos(2,5\pi + \alpha)} &= \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{\cos\alpha - \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \\
&= \frac{-(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\cos\alpha + \sin\alpha} = -(\sin\alpha + \cos\alpha).
\end{aligned}$$

**№ 1118**

$$1) \frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha + \pi)} = 2$$

Преобразуем левую часть данного тождества:

$$\frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha + \pi)} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2,$$

следовательно, тождество выполняется.

$$2) \frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{1 + \sin(-\alpha)} = 1 + \cos(\alpha - 90^\circ)$$

Преобразуем левую часть:  $\frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{1 + \sin(-\alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = 1 + \sin \alpha$

Преобразуем правую часть тождества:  $1 + \cos(\alpha - 90^\circ) = 1 + \cos(90^\circ - \alpha) = 1 + \sin \alpha$

Правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

**№ 1119**

$$\begin{aligned} & \frac{5 \cos x - 3 \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)} - \frac{\sin 2x - 8 \sin^2 x}{\cos 2x} = \\ & = \frac{5 \cos x - 3 \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\sin 2x - 4(1 - \cos 2x)}{\cos 2x} = \\ & = \frac{(5 \cos x - 3 \sin x)(\cos x + \sin x) - 2 \sin x \cos x + 8 \sin^2 x}{\cos 2x} = \\ & = \frac{5 \cos^2 x + 5 \cos x \sin x - 3 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 8 \sin^2 x}{\cos 2x} = \\ & = \frac{5(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos 2x} = \frac{5}{\cos 2x}. \end{aligned}$$

**№ 1120**

$$\begin{aligned} & \sin(x - 2\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \\ & = -\sin x \sin x + (-\operatorname{tg} x)(-\operatorname{ctg} x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x. \end{aligned}$$

**№ 1121**

$$\begin{aligned} 1) & \cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = \cos^2(\alpha + 2\beta) + (-\cos^2(\alpha - 2\beta)) = \cos^2(\alpha + 2\beta) - \\ & - \cos^2(\alpha - 2\beta) = (\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(\alpha - 2\beta))(\cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha - 2\beta)) = \\ & = (-2 \sin \alpha \cdot \sin 2\beta) \cdot (2 \cos \alpha \cos 2\beta) = -\sin 2\alpha \sin 4\beta \\ 2) & \sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = \sin^2(\alpha + 2\beta) - \cos^2(\alpha - 2\beta) = (\sin(\alpha + 2\beta) - \\ & - \cos(\alpha - 2\beta))(\sin(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha - 2\beta)) = (\sin \alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta) \\ & \cdot (\sin \alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \cos 2\beta + \sin \alpha \sin 2\beta) = (\sin \alpha (\cos 2\beta - \sin 2\beta) - \\ & - \cos \alpha (\cos 2\beta - \sin 2\beta)) \cdot (\sin \alpha (\cos 2\beta + \sin 2\beta) + \cos \alpha (\cos 2\beta + \sin 2\beta)) = \\ & = (\sin \alpha - \cos \alpha)(\cos 2\beta - \sin 2\beta)(\cos 2\beta + \sin 2\beta)(\sin \alpha + \cos 2\beta) = \\ & = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) = -\cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta. \end{aligned}$$

№ 1122

$$1) \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha \sin \alpha} = \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha)} = -2 \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha} = -2;$$

$$2) \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{1 + \cos 2\alpha + 2\cos \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha + 1 + \cos 2\alpha - 1} =$$

$$\frac{2\cos \alpha(\cos \alpha + \cos 2\alpha)}{\cos \alpha + \cos 2\alpha} = 2\cos \alpha.$$

№ 1123

$$1) \frac{4\sin^2 \alpha - \sin^2 2\alpha}{4 - 4\sin^2 \alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{4\sin^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{4\sin^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)}{4\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

$$2) \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \left( \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 : \left( \operatorname{tg}^2 \alpha - \left( \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}^4 \alpha - 1(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 - 4\operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}^4 \alpha - 1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{tg}^6 \alpha - 4\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3\operatorname{tg}^4 \alpha + 2\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^6 \alpha - 2\operatorname{tg}^4 \alpha - 3\operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{3(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1/3)}{\operatorname{tg}^2 \alpha(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)} = \frac{3\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)} =$$

$$= \frac{\frac{3\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 3 \right)} = \frac{3\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \left( \frac{\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)} =$$

$$= \frac{-\cos^2 \alpha(\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha)}{-\sin^2 \alpha(3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

№ 1124

$$1) \frac{\sqrt{2} - \cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} - \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x \right)}{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{2} - 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{1 + \cos x + \sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x + \cos x} &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin x - \cos x + \sin x}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x) + \cos x(\cos x + \sin x)}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos x} = 1 + \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

№ 1125

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

При  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$  выражение примет вид:  $\frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{16}{4} = 1\frac{5}{7}.$

№ 1126

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\pi}{8}, \quad \frac{2 - 3\sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 - 2\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - (\sin \alpha + 2\cos \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \sin \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2\cos \alpha \sin \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

При  $\alpha = -\frac{\pi}{8}$  выражение примет вид:  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}.$

№ 1127

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad \text{Преобразуем левую часть:}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta} = \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} + \operatorname{tg} \beta \right) : \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} - \operatorname{tg} \beta \right) =$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \right) \cdot \left( \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \right) = \\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\beta)}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \\
&= \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \Rightarrow \text{тождество выполняется.}
\end{aligned}$$

**№ 1128**

1)  $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ . Преобразуем правую часть:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 + \sin\alpha,$$

правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

2)  $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ . Преобразуем правую часть:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \sin\alpha,$$

права часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

**№ 1129**

1)  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\alpha$

Преобразуем левую часть:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha,$$

правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

2)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha$ . Преобразуем левую часть:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha,$$

следовательно, тождество выполняется.

**№ 1130**

1)  $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$ . Преобразуем левую часть:

$$\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1} = \sin\alpha, \text{ следовательно, тождество выполняется.}$$

2)  $\frac{ctg\alpha - tg\alpha}{ctg\alpha + tg\alpha} = \cos 2\alpha$ . Преобразуем левую часть, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \cos 2\alpha.$$

**№ 1131**

$(1 + \cos \alpha)tg \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$ . Преобразуем левую часть выражения:

$$(1 + \cos \alpha)tg \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = 2 \cos(\alpha/2) \cdot \sin(\alpha/2) = \sin \alpha, \text{ следовательно,}$$

тождество выполняется.

**№ 1132**

1)  $1 - tg^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$ . Преобразуем левую часть:

$$1 - tg^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \text{ следовательно, тождество}$$

выполняется;

2)  $1 - ctg^2 \alpha = \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$ . Преобразуем левую часть:

$$1 - ctg^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \text{ следовательно, тождество выпол-}$$

няется.

**№ 1133**

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha &= 4 \cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 4 \cos \alpha \left( \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

следовательно, тождество выполняется.

**№ 1134**

1)  $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - tg \alpha}{1 + tg \alpha}$ . Преобразуем левую часть:

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - tg \alpha}{1 + tg \alpha}$$

$$2) \frac{1}{4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 + \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Преобразуем левую часть:  $\frac{1}{4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha.$

Преобразуем правую часть, получим:

$$1 + \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2\operatorname{tg} \alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha, \text{ правая часть равна}$$

левой, следовательно, тождество верно.

$$3) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}. \text{ Преобразуем левую часть:}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Преобразуем правую часть:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

$$4) \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Преобразуем левую часть:  $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}.$

Преобразим правую часть:

$$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4})^2}{(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha)^2} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}.$$

Правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

### № 1135

$$1) 4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x. \text{ Преобразуем левую часть:}$$

$$4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4\sin x \cdot \frac{1}{2} \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\sin x \cdot \cos 2x - 2\sin x \cdot \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin x \cdot \cos 2x + \frac{2}{2}\sin x =$$

$$= 2\sin x \cdot \cos 2x + \sin x = \sin x(2\cos 2x + 1) = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 3x,$$

следовательно, тождество выполняется;

$$2) \cos 3x \cos 6x \cos 12x = \frac{\sin 24x}{8\sin 3x}$$

Умножим обе части тождества на  $8\sin 3x$  и докажем равносильное тождество  $8\cos 3x \cdot \sin 3x \cdot \cos 6x \cdot \cos 12x = \sin 24x$  (1)

Преобразуем левую часть:  $8\cos 3x \cdot \sin 3x \cdot \cos 6x \cdot \cos 12x =$   
 $= 4\sin 6x \cdot \cos 6x \cdot \cos 12x = 2\sin 12x \cdot \cos 12x = \sin 24x$ , следовательно, тождество (1), как и исходное, выполняется.

**№ 1136**

1)  $\frac{3x-16}{12} + 1 = \frac{x+6}{4} - \frac{x+3}{6}$ ,  $3x-16+12=3x+18-2x-6$ ,  $2x=16$ ,  $x=8$ ;

2)  $\frac{5}{3}(x-7) - 3x - \frac{6(x-8)}{7} = -\left(x + \frac{43}{3}\right)$ ,  $35(x-7) - 63x - 18(x-8) = -21x - 301$ ,  
 $35x - 245 - 63x - 18x + 144 = -21x - 301$ ,  $-25x = -200$ ,  $x=8$ .

**№ 1137**

$a(x-3) + 8 = 13(x+2)$ . Если  $x=0$ , то  $a(0-3) + 8 = 13(0+2)$ ;  
 $-3a + 8 = 0 + 26$ ,  $-3a = 18$ ,  $a = -6$ .

**№ 1138**

$1 - b(x+4) = 2(x-8)$ . Если  $x=1$ , то  $1 - b(1+4) = 2(1-8)$ ,  
 $1 - 5b = -14$ ,  $-5b = -15$ ,  $b=3$ .

**№ 1139**

1)  $x(x+1) - (x+2)(x+3) + 9 = x(x+4) - (x+5)(x+2)$ ,  
 $x^2 + x - x^2 - 3x - 2x - 6 + 9 = x^2 + 4x - x^2 - 2x - 5x - 10$ ,  $-x = -13$ ,  $x=13$ ;  
 2)  $2(x+3)(x+1) + 8 = (2x+1)(x+5)$ ,  $2x^2 + 2x + 6x + 6 + 8 = 2x^2 + 10x + x + 5$ ,  $-3x = -9$ ,  $x=3$ .

**№ 1140**

1)  $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{4}{x^2-9}$ ,  $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-3} - \frac{4}{(x-3)(x+3)} = 0$ ,  
 $\frac{3(x-3) - 2(x+3) - 4}{(x-3)(x+3)} = 0$ ,  $\frac{x-13}{(x-3)(x+3)} = 0$ .

Знаменатель дроби не равен 0, следовательно,  $x-13=0$ , т.е.  $x=13$ ;

2)  $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x-4} = \frac{11}{x^2+6x+8}$ ,  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ,  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{1} = 3 \pm 1$ ,

$x_1=2$ ,  $x_2=4$ , следовательно  $x=2$ ,  $x=4$  решениями не являются, т.к. обращают в 0 знаменатели дробей.

$\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x-4} - \frac{11}{(x-2)(x-4)} = 0$ ,  $\frac{5x-20+2x-4-11}{(x-2)(x-4)} = 0$ ,

$\frac{7x-35}{(x-2)(x-4)} = 0$ , что равносильно системе,  $\begin{cases} 7x-35=0 \\ (x-2)(x-4) \neq 0 \end{cases}$ ,  $x=5$ .

**№ 1141**

1)  $(a-b)x = a^2 + (a+b)x$ ,  $ax - bx = a^2 + ax + bx$ ,  $-2bx = a^2$ ,  $x = -\frac{a^2}{2b}$ ;

2)  $a^2x = a + b + b^2x$ ,  $x(a^2 - b^2) = a + b$ ,  $x = \frac{a+b}{a^2 - b^2}$ ,  $x = \frac{1}{a-b}$ .

**№ 1142**

$$1) x^2 - 2x - 15 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{1} = 1 \pm 4, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -3;$$

$$2) 3x^2 + 4x - 4 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}, \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -2.$$

**№ 1143**

$$1) (x-3)(x-2) = 6(x-3), \quad (x-3)(x-2-6) = 0, \quad (x-3)(x-8) = 0, \\ x = 3, \quad x = 8;$$

$$2) x^2 - \frac{11x}{6} + \frac{1}{2} = 0, \quad 6x^2 - 11x + 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12}, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

**№ 1144**

$$1) \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 0, \quad \frac{x(x-1)+x(x+1)}{x^2-1} = 0, \quad \text{что равносильно системе:}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + x^2 + x = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}, \quad x = 0;$$

$$2) \frac{3x^2}{3x-1} - 2 = \frac{2x+1}{3x+1}, \quad \frac{3x^2(3x+1) - 2(3x-1)(3x+1) - (2x+1)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)} = 0,$$

$$\frac{9x^3 + 3x^2 - 18x^2 + 2 - 6x^2 + 2x - 3x + 1}{(3x-1)(3x+1)} = 0,$$

$$\frac{9x^3 - 21x^2 - x + 3}{(3x-1)(3x+1)} = 0, \quad \text{что равносильно системе:}$$

$$\begin{cases} 9x^3 - 21x^2 - x + 3 = 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x^2(3x-7) - (x+3) = 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{Решений нет.}$$

**№ 1145**

$$1) \frac{3x-1}{x+2} - \frac{7}{2+x} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} + \frac{18}{2-x}, \quad \frac{3x-1-7}{x+2} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} - \frac{18}{x-2},$$

$$\frac{3x-8}{x+1} = \frac{7x^2-28-18(x+2)}{x^2-4}, \quad \frac{7x^2-28-18x-36}{x^2-4} - \frac{(3x-8)(x-2)}{x^2-4} = 0,$$

$$\frac{7x^2-18x-64-3x^2+6x+8x-16}{x^2-4} = 0, \quad \text{что равносильно системе:}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 80 = 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases}.$$

Решим первое уравнение системы:  $x^2 - x - 20 = 0$ ,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 20}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}, \quad x_1 = 5, x_2 = -4.$$

$$2) \frac{x+1}{x+3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2-x}{3-x}, \quad \frac{(x+1)(x-3) - 12 + (2-x)(x+3)}{x^2-9} = 0,$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + x - 3 - 12 + 2x + 6 - x^2 - 3x = 0 \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -3x - 9 = 0 \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -3 \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases}.$$

Ответ: решений нет

**№ 1146**

$$\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}, \quad \frac{2(x+1) - (x^2-x+1) - 2x+1}{x^3+1} = 0,$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 = 0 \\ (x+1)(x^2-x+1) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1, x = 2 \\ (x+1)(x^2-x+1) \neq 0 \end{cases}.$$

Решением системы является  $x = 2$ .

**№ 1147**

$$1) x - 4 + \frac{1}{x} = 0.$$

При  $x \neq 0$  умножим обе части уравнения на  $x$ :  $x^2 - 4x + 1 = 0$ ,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-1}}{1} = 2 \pm \sqrt{3};$$

$$2) \frac{4x^2}{x+2} - \frac{10}{x+2} + 4 = 0, \quad \frac{4x^2 - 10 + 4x + 8}{x+2} = 0, \quad \begin{cases} 4x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}, \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

**№ 1148**

$$1) x^4 - 11x^2 + 30 = 0.$$

Пусть  $x^2 = y$ , тогда уравнение примет вид:  $y^2 - 11y + 30 = 0$ ,

$$y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2}, \quad y_1 = 6, y_2 = 5, \text{ но } y = x^2, \text{ т.е.}$$

$$x^2 = 6, \quad x = \pm\sqrt{6}; \quad x^2 = 5, \quad x = \pm\sqrt{5}. \quad \text{Ответ: } x = \pm\sqrt{5}, \quad x = \pm\sqrt{6}.$$

$$2) 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0.$$

Пусть  $x^2 = y$ , тогда уравнение примет вид:  $2y^2 - 5y + 2 = 0$ ,

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}, \quad y_1 = \frac{8}{4} = 2, \quad y_2 = \frac{1}{4}, \text{ но } y = x^2, \text{ т.е.}$$

$$x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2} \text{ и } x^2 = \frac{1}{4}, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Ответ: } x = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**№ 1149**

1)  $2x^2 + 4x^{-1} + 3 = 0$ .

Пусть  $x^{-1} = y$ , тогда уравнение примет вид:  $2y^2 + 4y + 3 = 0$ ,

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-6}}{2}; \quad D < 0, \text{ корней нет;}$$

2)  $(x^2 - x)^2 + 12 = 8(x^2 - x)$

Пусть  $x^2 - x = y$ , тогда уравнение примет вид:  $y^2 + 12 = 8y$ ,  $y^2 - 8y + 12 = 0$ ,

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{1} = 4 \pm 2, \quad y_1 = 6, y_2 = 2, \text{ но } y = x^2 - x, \text{ т.е.}$$

$$x^2 - x - 6 = 0, \quad x_1 = 3, x_2 = -2 \text{ и } x^2 - x - 2 = 0, \quad x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Ответ:  $x_1 = 3, x_{2/3} = \pm 2, x_4 = -1$ .**№ 1150**

1)  $x^2 + ax - b^2 + \frac{a^2}{4} = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)}}{2} = \frac{-a \pm 2b}{2}.$

Ответ:  $x_{1,2} = \frac{-a \pm 2b}{2}.$

2)  $\frac{2x}{2x-a} - \frac{x}{2x+a} = \frac{5a^2}{4x^2 - a^2}, \quad \frac{2x(2x+a) - x(2x-a) - 5a^2}{4x^2 - a^2} = 0,$

$$\frac{4x^2 + 2ax - 2x^2 + ax - 5a^2}{4x^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{2x^2 + 3ax - 5a^2}{4x^2 - a^2} = 0, \text{ что равносильно системе:}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3ax - 5a^2 = 0, & 2x^2 + 3ax - 5a^2 = 0, \\ (2x-a)(2x+a) \neq 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 40a^2}}{4} = \frac{-3a \pm 7a}{4}, \quad x_1 = a, \quad x_2 = \frac{5}{2}a.$$

**№ 1151**

$ax^2 + bx + c$ . При  $a \neq 0, a > 0, b^2 = 4ac$  трехчлен  $ax^2 + bx + c$  является квадратом двучлена.

**№ 1152**

$$ax^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{b^2 - b^2 + 4a^2}{4a^2} = 1, \quad \text{следова-}$$

тельно,  $x_1, x_2$  – взаимно обратные числа.

**№ 1153**

1)  $|2x - 3| = 7$ ;

а) если  $2x - 3 \geq 0$ , то  $2x - 3 = 7$ ,  $2x = 10$ ,  $x = 5$ ;

б) если  $2x - 3 < 0$ , то  $2x - 3 = -7$ ,  $2x = -4$ ,  $x = -2$ .

2)  $|x + 6| = 2x$ ;

а) если  $x + 6 \geq 0$ , то  $x + 6 = 2x$ ,  $x = 6$ ;

б) если  $x + 6 < 0$ , то  $x + 6 = -2x$ ,  $x = -2$ , но тогда  $x + 6 < 0$  не выполняется

Ответ:  $x = 6$ .

3)  $2x - 7 = |x - 4|$ ;

а) если  $x - 4 \geq 0$ , то  $2x - 7 = x - 4$ ,  $x = 3$ , но тогда  $x - 4 \geq 0$  не выполняется;

б) если  $x - 4 < 0$ , то  $2x - 7 = -x + 4$ ,  $3x = 11$ ,  $x = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ .

**№ 1154**

1)  $|6 - 2x| = 3x + 1$ ;

а) если  $6 - 2x \geq 0$ , то  $6 - 2x = 3x + 1$ ,  $x = 1$ ;

б) если  $6 - 2x < 0$ , то  $2x - 6 = 3x + 1$ ,  $x = -7$ , но тогда  $6 - 2x < 0$  не выполняется. Ответ:  $x = 1$ .

2)  $2|x - 2| = |x| - 1$

Рассмотрим уравнение на промежутках:

$$\begin{array}{c} | \\ \hline 0 \qquad \qquad 2 \\ \hline \end{array}$$

а)  $x < 0$ , тогда  $2(2 - x) = -x - 1$ ,  $4 - 2x = -x - 1$ ,

$x = 5$ , но  $x < 0 \Rightarrow x = 5$  не является решением;

б)  $0 \leq x < 2$ , тогда  $2(2 - x) = x - 1$ ,  $4 - 2x = x - 1$ ,  $x = \frac{5}{3}$ ;

в)  $x \geq 2$ ,  $2(x - 2) = x - 1$ ,  $2x - 4 = x - 1$ ,  $x = 3$ . Ответ:  $x = 3$ ,  $x = 1\frac{2}{3}$ .

**№ 1155**

$|x^2 - 3x - 6| = 2x$ .

Найдем корни трехчлена:  $x^2 - 3x - 6 = 0$ ,  $D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 33$ ,

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$ ,

$$\begin{array}{c} | \\ \hline \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \quad - \quad \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \\ \hline \end{array}$$

1)  $x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$ ,

тогда уравнение примет вид:  $x^2 - 3x - 6 = 2x$ ;  $x^2 - 5x - 6 = 0$ ,

$x_1 = 6$ ,  $x_2 = -1 \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[3 + \frac{\sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$ ;



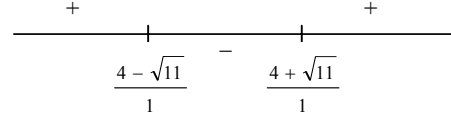
$$2) x \in \left( \frac{3-\sqrt{33}}{2}; \frac{3+\sqrt{33}}{2} \right), -x^2+3x+6=2x, -x^2+x+6=0, x^2-x-6=0, x_1=3, x_2=-2, -2 \in \left( \frac{3-\sqrt{33}}{2}; \frac{3+\sqrt{33}}{2} \right). \text{ Наименьший корень } x = 3.$$

**№ 1156**

$$|x^2 - 8x + 5| = 2x$$

Найдем корни трехчлена:  $x^2 - 8x + 5 = 0$ .  $D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 44$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{44}}{2 \cdot 1} = 4 \pm \sqrt{11}.$$



$$1) x \in (-\infty; 4 - \sqrt{11}] \cup [4 + \sqrt{11}; +\infty), x^2 - 8x + 5 = 2x, x^2 - 10x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-5}}{1} = 5 \pm \sqrt{20} \in Q;$$

$$2) x \in (4 - \sqrt{11}; 4 + \sqrt{11}), -x^2 + 8x - 5 = 2x, -x^2 + 6x - 5 = 0, x^2 - 6x + 5 = 0, x_1 = 5, x_2 = 1. \text{ Наибольший рациональный корень } x = 5.$$

**№ 1157**

$$1) \sqrt{2x+7} = x+2,$$

$$\begin{cases} 2x+7 = (x+2)^2; \\ x+2 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x+7 = x^2+4x+4; \\ x \geq -2 \end{cases}; \begin{cases} x^2+2x-3=0; \\ x \geq -2 \end{cases}; \begin{cases} x_1=1, x_2=-3; \\ x \geq -2 \end{cases}.$$

Ответ:  $x = 1$

$$2) x = 2 - \sqrt{2x-5}, \sqrt{2x-5} = 2-x$$

$$\begin{cases} 2x-5 = (2-x)^2; \\ 2-x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x-5 = 4-4x+x^2; \\ x \leq 2 \end{cases}; \begin{cases} x^2-6x+9=0; \\ x \leq 2 \end{cases}; \begin{cases} x=3; \\ x \leq 2 \end{cases}; \begin{cases} x=3; \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

Ответ: корней нет.

**№ 1158**

$$1) 3^{x-7} = 81, 3^{x-7} = 3^4, x-7=4, x=11;$$

$$2) 2^{x^2-5x+6,5} = \sqrt{2}, 2^{x^2-5x+6,5} = 2^{1/2}, x^2-5x+6,5=0,5, x^2-5x+6=0, x_1+x_2=5, x_1 \cdot x_2=6, x_1=2, x_2=3;$$

$$3) \left( \frac{1}{4} \cdot 4^x \right)^x = 2^{2x+6}, (4^{-1} \cdot 4^x)^x = 2^{2x+6}, (4^{x-1})^x = 4^{x+3},$$

$$4^{x^2-x} = 4^{x+3}, x^2-x=x+3, x^2-2x-3=0, x_1=-1, x_2=3.$$

**№ 1159**

- 1)  $9^{5x} - 9^{5x-1} = 8$ ,  $9^{5x}(1 - 9^{-1}) = 8$ ,  $9^{5x} \cdot \frac{8}{9} = 8$ ,  $9^{5x} = 9$ ,  $5x = 1$ ,  $x = 1/5$ ;  
 2)  $2^{x+4} - 2^x = 120$ ,  $2^x(16 - 1) = 120$ ,  $2^x = 8$ ,  $x = 3$ .

**№ 1160**

1)  $5^{2x+5} \cdot 7^{3x+1} = 35^{1/2(5x+6)}$ ,  $5^{2x+5} \cdot 7^{3x+1} = 5^{2,5x+3} \cdot 7^{2,5x+3}$ ,  
 $\frac{5^{2,5x+3} \cdot 7^{2,5x+3}}{5^{2x+5} \cdot 7^{3x+1}} = 1$ ,  $5^{0,5x-2} \cdot 7^{-0,5x+2} = 1$ ,  $\frac{5^{0,5x}}{25} \cdot 7^{-0,5x} \cdot 49 = 1$ ,

$$\frac{5^{0,5x}}{7^{0,5x}} = \frac{25}{49}, \left(\frac{5}{7}\right)^{0,5x} = \left(\frac{5}{7}\right)^2, 0,5x = 2, x = 4;$$

2)  $0,2^{x^2} \cdot 5^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$ ,  $5^{-x^2} \cdot 5^{2x+2} = 5^{-6}$ ,  $5^{-x^2+2x+2} = 5^{-6}$ ,

$$-x^2 + 2x + 2 = -6, -x^2 + 2x + 8 = 0, x^2 - 2x - 8 = 0, x_1 = 4, x_2 = -2.$$

**№ 1161**

1)  $2,4^{3-2x} = 2,4^{3x-2}$ ,  $3 - 2x = 3x - 2$ ,  $5 = 5x$ ,  $x = 1$ ;

2)  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$ ,  $x = -x + 2$ ,  $2x = 2$ ,  $x = 1$ ;

3)  $\frac{1}{\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$ ,  $\left(\frac{1}{8}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x}$ ,

$$\frac{3}{2} = -4x, x = -\frac{3}{8}.$$

**№ 1162**

1)  $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$ ,  $\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^x \cdot \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$ ,  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x} = \frac{2}{3}$ ,

$$2x + 3 - 3x = 1, -x = -2, x = 2;$$

2)  $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^x} = 216$ ,  $2^{x/3} \cdot 3^{x/3} = 6^3$ ,  $(6)^{x/3} = 6^3$ ,  $x/3 = 3$ ,  $x = 9$ .

**№ 1163**

1)  $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155$ ,  $5^x(5 + 1 + 5^{-1}) = 155$ ,  $5^x \left(\frac{25 + 5 + 1}{5}\right) = 155$ ,

$$5^x = 25, 5^x = 5^2, x = 2;$$

2)  $3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{2x-2} = 1$ ,  $3^{2x}(1 - 2 \cdot 3^{-1} - 2 \cdot 3^{-2}) = 1$ ,

$$3^{2x} \left(\frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 2}{9}\right) = 1, 3^{2x} = 9, 3^{2x} = 3^2, x = 1.$$

3)  $7^x - 7^{x-1} = 6$ ,  $7^x(1 - 7^{-1}) = 6$ ,  $7^x = 7$ ,  $x = 1$ ;

4)  $3^{x+2} + 3^x = 10$ ,  $3^x(3^2 + 1) = 10$ ,  $3^x = 1$ ,  $x = 0$ .

**№ 1164**

1)  $3^{2x} - 3^x = 72$ ,  $3^{2x} - 3^x = 3^4 - 3^2$ ,  $3^x(3^x - 1) = 3^2(3^2 - 1)$ ,  $x = 2$ ;  
 2)  $4^x - 2^{x+1} = 48$ ,  $2^{2x} - 2^{x+1} = 48$ ,  $2^x(2^x - 2^1) = 2^3(2^3 - 2^1)$ ,  $x = 3$ .

**№ 1165**

1)  $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$ .

Пусть  $\log_2 x = a$ , тогда уравнение примет вид:  $a^2 - 3a + 2 = 0$ ,  
 $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , т.е.  $\log_2 x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $\log_2 x = 2$ ,  $x = 4$ .

Ответ:  $x = 2$ ,  $x = 4$

2)  $(\log_3 x)^2 + 5 = 2\log_3 x^3$ ,  $(\log_3 x)^2 + 5 - 6\log_3 x = 0$ ,  $\log_3 x = a$ ,  
 $a^2 + 5 - 6a = 0$ ,  $a^2 - 6a + 5 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ , т.е.  $\log_3 x = 1$ ,  $x = 3$ ,  
 $\log_3 x = 5$ ,  $\log_3 x = \log_3 3^5$ ,  $x = 3^5 = 243$

Ответ:  $x = 3$ ,  $x = 243$ .

**№ 1166**

1)  $\ln \frac{2}{x+1} = \ln(x+2)$ ,  $\ln 2 - \ln(x+1) = \ln(x+2)$ ,  $\ln \frac{2}{x+1} - \ln(x+2) = 0$ ,

$\ln \left( \frac{2}{(x+1)(x+2)} \right) = \ln 1$ ,  $\frac{2}{(x+1)(x+2)} = 1$ ,  $2 = x^2 + 3x + 2$ ,  $x^2 + 3x = 0$ ,

$x = 0$ ,  $x = -3$ , при  $x = -3$   $\ln(x+2)$  не определен.

Ответ:  $x = 0$

2)  $\log_3 \sqrt{3x-6} - \log_3 \sqrt{x-3} = 1$ ,  $\log_3 \left( \frac{\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x-3}} \right) = \log_3 3$ ,  $\frac{\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x-3}} = 3$ ,

$3x - 6 = 3^2(x - 3)$ ,  $3x - 6 = 9x - 27$ ,  $21 = 6x$ ,  $x = 3,5$ .

**№ 1167**

1)  $\lg \left( \frac{1}{2} + x \right) = \lg \frac{1}{2} - \lg x$ ,  $\lg \left( \frac{1}{2} + x \right) = \lg \frac{1}{2x}$ ,  $\lg \left( \left( \frac{1}{2} + x \right) 2x \right) = \lg 1$ ,

$\left( \frac{1}{2} + x \right) 2x = 1$ ,  $x + 2x^2 = 1$ ,  $2x^2 - x - 1 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,

при  $x = -1$   $\lg x$  не определен.

Ответ:  $x = \frac{1}{2}$

2)  $2\lg x = -\lg \frac{1}{6-x^2}$ ,  $\lg x^2 + \lg \frac{1}{6-x^2} = 0$ ,

$$\begin{cases} \lg \frac{x^2}{6-x^2} = \lg 1 \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2}{6-x^2} = 6-x^2 \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 = 6-x^2 \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} x = \sqrt{3}.$$

**№ 1168**

$$1) \log_2(2x - 18) + \log_2(x - 9) = 5, \log_2(2x - 18)(x - 9) = \log_2 2^5,$$

$$\begin{cases} (2x - 18)(x - 9) = 2^5, & 2x^2 - 18x - 18x + 162 - 32 = 0, \\ 2x - 18 > 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 36x + 130 = 0, x^2 - 18x + 65 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 65}}{1} = 9 \pm 4, \begin{cases} x_1 = 13, & x_2 = 5. \\ x > 9 \end{cases} \text{ Ответ: } x = 13$$

$$2) \lg(x^2 + 19) - \lg(x + 1) = 1, \lg((x^2 + 19) : (x + 1)) = \lg 10,$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 19}{x + 1} = 10 & \begin{cases} x^2 + 19 = 10x + 10 \\ x > -1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0 \\ x > -1 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 9 \\ x > -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $x = 1, x = 9$ .

**№ 1169**

$$1) 5^{\log_3 x^2} - 6 \cdot 5^{\log_3 x} + 5 = 0.$$

Пусть  $\log_3 x = a$ , тогда уравнение примет вид:  $5^{2a} - 6 \cdot 5^a + 5 = 0$ ,

$$(5^a)^2 - 6 \cdot 5^a + 5 = 0, 5^a = 1, a = 0 = \log_3 x, x = 1, 5^a = 5, a = 1 = \log_3 x, x = 3.$$

Ответ:  $x = 1, x = 3$ .

$$2) 25^{\log_3 x} - 4 \cdot 5^{\log_3 x + 1} = 125, (5^{\log_3 x})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5^{\log_3 x} = 125.$$

Пусть  $5^{\log_3 x} = a$ , тогда уравнение примет вид:  $a^2 - 20a - 125 = 0$ ,

$$a_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 125}}{1} = 10 \pm 15, a_1 = 25, a = -5; a_2 \text{ не является решением,}$$

т.к.  $5^{\log_3 x} \neq -5 < 0, 5^{\log_3 x} = 25, \log_3 x = 2, x = 9$ . Ответ:  $x = 9$ .

**№ 1170**

$$1) x^{\lg x} = 10.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию  $x$ :

$$\log_x x^{\lg x} = \log_x 10, \lg x = \frac{1}{\lg x}, \lg^2 x = 1, x = 0, \text{ но } x > 0, \text{ следовательно, решений нет.}$$

$$2) x^{\log_3 x} = 9x.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по  $x$ :  $\log_x x^{\log_3 x} = \log_x 9x$ ,

$$\log_3 x = \log_x x + \log_x 9, \log_3 x = 1 + 2\log_x 3, \log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3 x},$$

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0, \log_3 x = -1, x = 3^{-1}, \log_3 x = 2, x = 9. \text{ Ответ: } x = \frac{1}{3}, x = 9.$$

$$3) x^{\lg x} - 1 = 10(1 - x^{-\lg x}), x^{\lg x} - 1 = 10 - 10x^{-\lg x}, x^{\lg x} + 10^{-\lg x} - 11 = 0.$$

Пусть  $\lg x = y$ , тогда  $x = 10^y$  и уравнение примет вид:

$$(10^y)^y + 10 \cdot (10^y)^{-y} - 11 = 0, 10^{y^2} + \frac{10}{y^2} - 11 = 0.$$

Пусть  $10^{y^2} = z$ , тогда уравнение примет вид:  $z + \frac{10}{z} - 11 = 0$ , при  $z \neq 0$ ,

$z^2 - 11z + 10 = 0$ ,  $z_1 = 10$ ,  $z_2 = 1$ , тогда  $10^{y^2} = 10$ ,  $y = \pm 1$  и  $10^{y^2} = 1$ ,  $y = 0$ ,  
тогда  $x = 10^{\pm 1}$ ,  $x = 10^0$  (заметим, что  $x > 0$ ). Ответ:  $x = 1$ ,  $x = 10$ ,  $x = 0, 1$ .

$$4) x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$$

Заметим, что  $x = 1$  – решение, далее  $(x^{\sqrt{x}})^2 = x^x$ ;  $x^{2\sqrt{x}} = x^x$ , пусть

$\sqrt{x} = y$ ,  $x = y^2$ , и уравнение примет вид:  $(y^{2y})^2 = (y^2)^{y^2}$ ;  $2y = y^2$ ,  
 $y^2 - 2y = 0$ ,  $y(y - 2) = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ , тогда  $x = 0$ ,  $x = 4$ , но  $0^0$  не определен.  
Ответ:  $x = 1$ ,  $x = 4$ .

### № 1171

$$1) 7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0, \quad 7 \cdot (2^{x^2})^2 - 9 \cdot 2^{x^2} \cdot 7^{x^2} + 2 \cdot (7^{x^2})^2 = 0,$$

$$7 \left( \frac{2^{x^2}}{7^{x^2}} \right) - 9 \left( \frac{2^{x^2}}{7^{x^2}} \right) + 2 = 0.$$

Пусть  $\left( \frac{2}{7} \right)^{x^2} = a$ , тогда уравнение примет вид:  $7a^2 - 9a + 2 = 0$

$$a_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{14} = \frac{9 \pm 5}{14}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{2}{7}, \quad \text{тогда}$$

$$a) \left( \frac{2}{7} \right)^{x^2} = 1, \text{ т.е. } x = 0; \quad б) \left( \frac{2}{7} \right)^{x^2} = \frac{2}{7}, \text{ т.е. } x = \pm 1. \quad \text{Ответ: } x = 0, x = \pm 1.$$

$$2) 5^{x+4} + 3 \cdot 4^{x+3} = 4^{x+4} + 4 \cdot 5^{x+3}, \quad 5^4 5^x + 3 \cdot 4^3 \cdot 4^x = 4^4 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^3 \cdot 5^x,$$

$$625 \cdot 5^x + 192 \cdot 4^x = 256 \cdot 4^x + 5 \cdot 100 \cdot 5^x,$$

$$625 + 192 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^x = 256 \left( \frac{4}{5} \right)^x + 100 \cdot 5, \quad 64 \left( \frac{4}{5} \right)^x = 125; \quad \left( \frac{4}{5} \right)^x = \left( \frac{4}{5} \right)^{-3}.$$

### № 1172

$$1) \log_4(2 + \sqrt{x+3}) = 1, \quad \log_4(2 + \sqrt{x+3}) = \log_4 4,$$

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{x+3} = 4 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 = 4 \\ x \geq -3 \end{cases}, \quad x = 1.$$

$$2) \log_{1/3} \sqrt{x^2 - 2x} = -1/2, \quad \log_{1/3} \sqrt{x^2 - 2x} = \log_{1/3} \left( \frac{1}{3} \right)^{-1/2},$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = (\sqrt{3})^2 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1; x_2 = 3 \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \quad x = -1, x = 3.$$

$$3) \frac{1}{2} \log_3(x+1) = \log_3 \sqrt{x+4} - 2 \log_3 \sqrt{2},$$

$$\log_3(x+1)^{1/2} = \log_3 \sqrt{x+4} - \log_3 2, \quad \log_3(x+1)^{1/2} = \log_3 \frac{\sqrt{x+4}}{2},$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{x+4}}{2} \\ x+1 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \begin{cases} x+1 = \frac{x}{4} + 1 \\ x > -1 \\ x > -4 \end{cases} \begin{cases} 4x+4-x-4=0 \\ x > -1 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x > -1 \end{cases} \quad x=0$$

### № 1173

$$1) x^{1+\lg x} = 10x,$$

Прологарифмируем по основанию  $x$ :  $\log_x x^{1+\lg x} = \log_x 10x$ ,

$$1 + \lg x = 1 + \log_x 10, \quad 1 + \lg x = 1 + \frac{1}{\lg x}, \quad \lg^2 x = 1; \quad \lg x = \pm 1, \quad x = 10, x = 0, 1.$$

$$2) x^{\lg x} = 100x.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию  $x$ :

$$\log_x x^{\lg x} = \log_x 100x, \quad \lg x = \log_x 100 + 1, \quad \lg x = 2 \lg_x 10 + 1,$$

$$\lg x = \frac{2}{\lg x} + 1, \quad \lg^2 x = 2 + \lg x, \quad \lg^2 x - \lg x - 2 = 0;$$

$$1) \lg x = -1, \quad x = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad 2) \lg x = 2, \quad x = 10^2 = 100.$$

$$3) \log_2(17 - 2^x) + \log_2(2^x + 15) = 8,$$

$$\begin{cases} \log_2((17 - 2^x)(2^x + 15)) = \log_2 2^8 \\ 17 - 2^x > 0 \\ 2^x + 15 > 0 \end{cases}, \quad (17 - 2^x)(2^x + 15) = 2^8,$$

$$17 \cdot 2^x + 17 \cdot 15 - 2^{2x} - 15 \cdot 2^x = 256, \quad 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

Пусть  $2^x = a$ , тогда уравнение примет вид:

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a - 1)^2 = 0, \quad a = 1, \quad \text{т.е. } 2^x = 1, \quad x = 0, \quad \begin{cases} x = 0 \\ 17 - 2^x > 0 \\ 2^x + 15 > 0 \end{cases} \quad x = 0.$$

$$4) \log_2(3 + 2^x) + \log_2(5 - 2^x) = 4,$$

$$\begin{cases} \log_2(3 + 2^x)(5 - 2^x) = 4 \\ 3 + 2^x > 0 \\ 5 - 2^x > 0 \end{cases}, \quad (3 + 2^x)(5 - 2^x) = 16, \quad 15 - 3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{2x} = 16,$$

$$-2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 1 = 0, \quad 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0; \quad (2^x - 1)^2, \quad 2^x = 1; \quad x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3 + 2^x > 0 \\ 5 - 2^x > 0 \end{cases} \quad x = 0.$$

**№ 1174**

Ответ: не могут

$m, n, k$  – действительные числа

$$x^2 - (m+n)x + mn - k^2 = 0; \quad D = b^2 - 4ac = (m+n)^2 - 4(mn - k^2) = m^2 + 2mn + n^2 - 4mn + 4k^2 = m^2 + n^2 - 2mn + 4k^2 = (m-n)^2 + 4k^2 \geq 0.$$

**№ 1175**

$$1) z^2 + 4z + 19 = 0, \quad z_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 19}}{1} = -2 \pm i\sqrt{15};$$

$$2) z^2 - 2z + 3 = 0, \quad z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3}}{1} = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

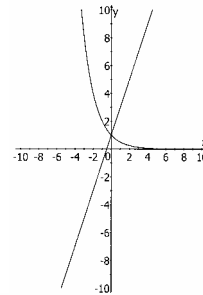
**№ 1176**

$$1) 0,5^x = 2x + 1.$$

Построим графики функций

$$y = 0,5^x \text{ и } y = 2x + 1:$$

Очевидно, графики функций пересекаются в точке  $(0,1)$ , т.е.  $x = 0$

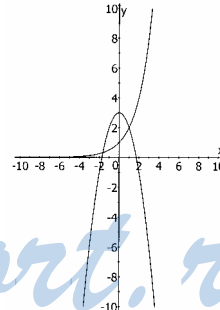


$$2) 2^x = 3 - x^2$$

Построим графики функций

$$y = 2^x \text{ и } y = 3 - x^2:$$

$$x_1 \approx \frac{3}{2}, \quad x_2 \approx -1,8$$

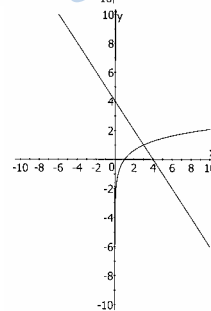


$$3) \log_3 x = 4 - x$$

Построим графики функций

$$y = \log_3 x \text{ и } y = 4 - x:$$

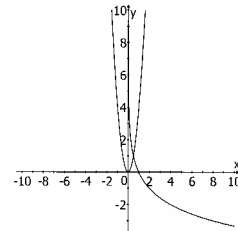
$$x = 3.$$



$$4) \log_{1/2} x = 4x^2$$

Построим графики функций  
 $y = \log_{1/2} x$  и  $y = 4x^2$

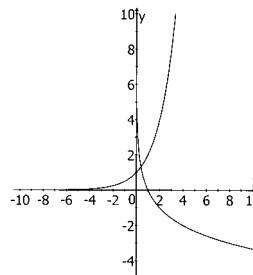
$$x = \frac{1}{2}$$



$$5) 2^x = \log_{0,5} x$$

Построим графики функций  
 $y = 2^x$ ,  $y = \log_{1/2} x$

$$x \approx \frac{1}{2}$$

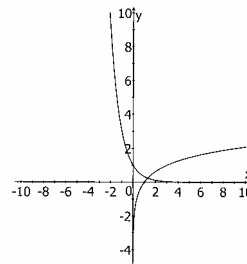


$$6) \left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$$

Построим графики функций

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ и } y = \log_3 x$$

$$x \approx \frac{3}{2}$$



### № 1177

$$1) \cos x = -\frac{1}{2} \quad [-\pi; 3\pi]$$

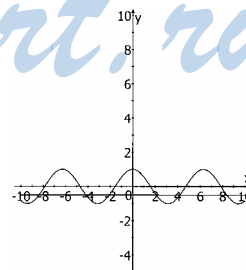
$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$n = 1, \quad x = \frac{4\pi}{3}, \quad x = \frac{8\pi}{3}, \quad n = 0, \quad x = \frac{2}{3}\pi, \quad x = -\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{2}{3}\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi, \quad x = \frac{8\pi}{3}$$





$$2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad [-\pi; 3\pi]$$

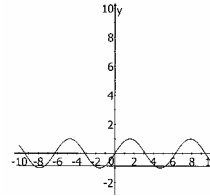
$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + n\pi, \quad n \in Z$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi, \quad n \in Z$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in Z, \quad n = 0, \quad x = -\frac{\pi}{3},$$

$$n = -1, \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi, \quad n = 2, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi,$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{4}{3}\pi, \quad x = \frac{2}{3}\pi, \quad x = \frac{5}{3}\pi.$$



### № 1178

$$1) \sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi, \quad n \in Z,$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in Z, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in Z;$$

$$2) \cos 3x = \frac{-\sqrt{2}}{2}; \quad 3x = \pm \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + 2n\pi, \quad n \in Z,$$

$$3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2n\pi, \quad n \in Z, \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}n\pi, \quad n \in Z;$$

$$3) 2\operatorname{tg} x + 5 = 0, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{5}{2};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right) + n\pi, \quad n \in Z, \quad x = -\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + n\pi, \quad n \in Z$$

### № 1179

$$1) 3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0.$$

Пусть  $\cos x = a$ , тогда уравнение примет вид:  $3a^2 - 5a - 12 = 0$ ,

$$a_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = -\frac{8}{6},$$

$a_1 > 1, a_2 < -1 \Rightarrow$  исходное уравнение не имеет решений, т.к.  $|\cos x| \leq 1$ ;

$$2) 3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 5 = 0, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad 3a^2 - 4a + 5 = 0,$$

$$a_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 15}}{3},$$

$D < 0 \Rightarrow$  действительных корней нет.

№ 1180

1)  $(3 - 4\sin x)(3 + 4\cos x) = 0$ ,

$$\begin{cases} 3 - 4\sin x = 0 \\ 3 + 4\cos x = 0 \end{cases}; \begin{cases} \sin x = \frac{3}{4} \\ \cos x = -\frac{3}{4} \end{cases}; \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + n\pi, n \in Z \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2l\pi, l \in Z \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + n\pi, n \in Z \\ x = \pm(\pi - \arcsin \frac{3}{4}) + 2l\pi, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + n\pi, n \in Z, x = \pm(\pi - \arcsin \frac{3}{4}) + 2l\pi, l \in Z$ .

2)  $(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$ ,

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 3 = 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} \operatorname{tg} x = -3 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} 3 + n\pi, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in Z; x = -\operatorname{arctg} 3 + n\pi, n \in Z$ .

№ 1181

1)  $\sin 2x = 3\sin x \cos^2 x, 2\sin x \cdot \cos x - 3\sin x \cdot \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x(2 - 3\cos x) = 0$ ,

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{2}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = n\pi, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \\ x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{2}{3}\right) + 2m\pi, m \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = n\pi, n \in Z; x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z;$

$x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{2}{3}\right) + 2m\pi, m \in Z$

2)  $\sin 4x = \sin 2x, 2\sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x = 0, \sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0$ ,

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} 2x = n\pi, n \in Z \\ 2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2l\pi, l \in Z \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z; x = \pm \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z$ .

3)  $\cos 2x + \cos^2 x = 0, \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x = 0, 2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0, 3\cos^2 x = 1$ ,

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \begin{cases} x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} + 2n\pi, n \in Z \\ x = \pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 2l\pi, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} + 2n\pi, n \in Z, x = \pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 2l\pi, l \in Z$

4)  $\sin 2x = \cos^2 x, 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0, \cos x(2\sin x - \cos x) = 0,$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x - \cos x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ 2x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z, x = \arctg \frac{1}{2} + l\pi, l \in Z.$

**№ 1182**

1)  $\sin 2x = 3\cos x, 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos x, \cos x(2\sin x - 3) = 0,$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z.$

2)  $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x, 2\sin 2x \cdot \cos 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x),$   
 $2\sin 2x \cdot \cos 2x = \cos 2x, \cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0,$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 2x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z, x = (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z.$

3)  $2\cos^2 x = 1 + 4\sin 2x, (2\cos^2 x - 1) = 4\sin 2x, \cos 2x = 4\sin 2x,$   
 $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 4; \text{ctg } x = 4; x = \text{arcctg} 4 + n\pi, n \in Z.$

Ответ:  $x = \text{arcctg} 4 + n\pi, n \in Z$

4)  $2\cos x + \cos 2x = 2\sin x, 2(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$   
 $2(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0,$   
 $(\cos x - \sin x)(2 + \cos x + \sin x) = 0,$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = -2 \end{cases}; x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z, x \in \emptyset$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z.$

№ 1183

$$1) \cos x + \cos 2x = 0, \quad 2 \cos \frac{3}{2}x \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3}{2}x = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi, n \in Z \\ x = \pi + 2l\pi, l \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi, n \in Z; \quad x = \pi + 2l\pi, l \in Z.$$

$$2) \cos x - \cos 5x = 0, \quad -2\sin 3x \cdot \sin(-2x) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{n\pi}{3}, n \in Z \\ x = \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{3}, x = \frac{l\pi}{2}, l \in Z.$$

$$3) \sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$$

$$2\sin 2x \cdot \cos x = 2\sin 2x, \quad 2\sin 2x(\cos x - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = 2m\pi, m \in Z \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z.$$

$$4) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0, \quad 2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0, \quad \sin 2x(2\cos x + 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2l\pi, l \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{2}, x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2l\pi, n \in Z.$$

№ 1184

$$1) 2\cos x + \sin x = 0, \quad 2 + \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x = -2, \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + n\pi, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = -\operatorname{arctg} 2 + n\pi, n \in Z.$$

$$2) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0, \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

$$x = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + n\pi, n \in Z, \quad x = -\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z.$$

**№ 1185**

$$1) 4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2, 4\sin^4 x + 2^2 \sin 2x \cdot \cos^2 x = 2, 4\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}; \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \begin{cases} x = (-1)^l \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in Z \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^l \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in Z.$$

$$2) \sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8},$$

$$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} + 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8},$$

$$\left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8},$$

$$\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}, \sin \frac{2x}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{2x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z, x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi n}{2}, n \in Z.$$

**№ 1186**

$$1) \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}, \sqrt{3}(\sin 2x - 1) - \cos 2x = 0,$$

$$-\sqrt{3}(\cos x - \sin x)^2 - \cos 2x = 0,$$

$$\sqrt{3}(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\sqrt{3}(\cos x - \sin x) + \cos x + \sin x) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z \\ \cos x(\sqrt{3} + 1) - \sin x(\sqrt{3} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z \\ (\sqrt{3} + 1) - \operatorname{tg} x(\sqrt{3} - 1) = 0 \end{cases}, \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}, \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + n\pi, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + n\pi, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in Z.$$

$$2) 6\sin x + 5\cos x = 6, 12\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 5\cos^2 \frac{x}{2} - 5\sin^2 \frac{x}{2} = 6\cos^2 \frac{x}{2} + 6\sin^2 \frac{x}{2},$$

$$12\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5 - 5\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6 - 6\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0, 1\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 12\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 36 - 11 = 25, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)_{1,2} = \frac{6 \pm 5}{11},$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{11} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{11} + \pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{11} + 2\pi k \end{cases}; \quad k, n \in Z$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{11} + 2\pi k; \quad k, n \in Z.$$

**№ 1187**

$$1) \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) - 2(\operatorname{tg} x + 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z \\ \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z \\ x = \pm\operatorname{arctg} \sqrt{2} + l\pi, \quad l \in Z \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z, \quad x = \pm\operatorname{arctg} \sqrt{2} + l\pi, \quad l \in Z.$$

$$2) 1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x, \quad 1 - \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x; \quad \cos x \neq 0,$$

$$\cos x - \cos^2 x = \sin x - \cos x \cdot \sin x, \quad \cos x (\sin x - \cos x) = \sin x - \cos x,$$

$$(\cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0, \quad \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2n\pi, \quad n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, \quad l \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = 2n\pi, \quad n \in Z, \quad x = \frac{\pi}{4} + l\pi, \quad l \in Z.$$

**№ 1188**

$$1) \sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x, \quad \sin x(1 + 2\cos x) = \cos x(1 + 2\cos x),$$

$$(\sin x - \cos x)(1 + 2\cos x) = 0,$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z \\ x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2l\pi, \quad l \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z, \quad x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2l\pi, \quad l \in Z.$$

$$2) 2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x), \quad 2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \sqrt{6}(\cos x - \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(2(\cos x + \sin x) - \sqrt{6}) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ 2(\cos x + \sin x) = \sqrt{6} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z \\ \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi/2 - 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi/2 - 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z, \quad x = \frac{\pi}{12} + 2\pi l, \quad x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

### № 1189

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \cos x + \sin x, \quad \begin{cases} \sin 2x \neq 1 \\ \cos 2x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin 2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 1 \\ \cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)^2 \end{cases}$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)^2 = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(1 - (\cos x - \sin x)) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 1 - \cos x + \sin x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in Z; \\ \cos x - \sin x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in Z \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in Z \\ x = 2l\pi, \quad l \in Z \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m \in Z; \quad x = 2\pi k, \quad k \in Z.$$

### № 1190

$$1) \sin^3 x + \cos^3 x = 0, \quad (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z \\ x = \phi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z.$$

$$2) 2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2, \quad 2\sin^2 x + 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 2,$$

$$\sin^2 x + 2\sin^2 x - 2\sin^4 x - 1 = 0, \quad 3\sin^2 x - 2\sin^4 x - 1 = 0,$$

$$2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0, \quad \sin 2x = a, \quad 2a^2 - 3a + 1 = 0, \quad D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2};$$

$$1) \sin x = \pm 1, x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; 2) \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z.$$

$$3) 8 \sin x \cdot \cos 2x \cos x = \sqrt{3}, 4 \sin 2x \cos 2x = \sqrt{3}, 2 \sin 4x = \sqrt{3},$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}; 4x = (-1)^l \frac{\pi}{3} + l\pi, l \in Z. \text{ Ответ: } x = (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z.$$

$$4) 4 \sin x \cos x \cos 2x = \cos 4x, 2 \sin 2x \cos 2x = \cos 4x, \sin 4x = \cos 4x,$$

$$4x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z, x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z.$$

### № 1191

$$1) \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = \cos 2x, (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x + \sin^2 x = 0,$$

$$-\cos 2x + 1 = 0, \cos 2x = 1, 2x = 2\pi n, x = \pi n, n \in Z. \text{ Ответ: } x = 2\pi n, n \in Z.$$

$$2) 2 \sin^2 x - \cos^4 x = 1 - \sin^4 x, \cos^4 x - \sin^4 x = 2 \sin^2 x - 1, \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x,$$

$$2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 0, \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z.$$

### № 1192

$$1) \sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \cos 2x, \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0, \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = a, a^2 + a - 1 = 0,$$

$$a_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$1) \operatorname{tg} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x = \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + n\pi, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, x = -\operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + l\pi, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + n\pi, n \in Z, x = -\operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + l\pi, l \in Z;$$

$$2) 2 + \cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x, \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -2,$$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = 0, 3 \cos^2 x + \sin^2 x + 3 \sin x \cos x = 0,$$

$$3 + \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = a, a^2 + 3a + 3 = 0, D < 0, \text{ следовательно, решений нет.}$$

Ответ: решений нет.

### № 1193

$$1) 4 \sin^2 x - 8 \sin x \cdot \cos x + 10 \cos^2 x = 3,$$

$$4 \sin^2 x - 3 \sin^2 x - 8 \sin x \cdot \cos x + 10 \cos^2 x - 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x - 8 \sin x \cdot \cos x + 7 \cos^2 x = 0, \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 7 = 0, a^2 - 8a + 7 = 0,$$



$$a_1 = 1, a_2 = 7, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z, \operatorname{tg} x = 7, x = \operatorname{arctg} 7 + l\pi, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z, x = \operatorname{arctg} 7 + l\pi, l \in Z;$$

$$2) 3\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 1, 3\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0, \\ 2\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0, 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = a, 2a^2 - 2a - 1 = 0,$$

$$a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + n\pi, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + n\pi, n \in Z.$$

### № 1194

$$1) \sin 5x = \sin 3x, \sin 5x - \sin 3x = 0, 2\sin x \cdot \cos 4x = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = n\pi, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z \end{cases}. \text{ Ответ: } x = n\pi, n \in Z, x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z;$$

$$2) \cos 6x + \cos 2x = 0, 2\cos 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z;$$

$$3) \sin 3x + \cos 7x = 0, \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 7x\right) = 0,$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 5x = n\pi, n \in Z \\ \frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5}, n \in Z, x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z;$$

$$4) \sin x = \cos 5x, \sin x - \cos 5x = 0, \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0,$$

$$2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = n\pi, n \in Z \\ \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}, n \in Z, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z.$

**№ 1195**

1)  $\sin x + \sin 5x = \sin 3x, 2\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin 5x = 0, \sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0,$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{n\pi}{3}, n \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{3}, n \in Z, x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{2}, l \in Z;$$

2)  $\cos 7x - \cos 3x = 3\sin 5x, -2\sin 5x \cdot \sin 2x - 3\sin 5x = 0, \sin 5x(2\sin 2x + 3) = 0,$

$$\begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \sin 2x = -\frac{3}{2} \end{cases}; x = \frac{n\pi}{5}, n \in Z.$$

**№ 1196**

1)  $\cos x \cdot \sin 9x = \cos 3x \cdot \sin 7x, \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 10x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 10x),$

$\sin 8x - \sin 4x = 0, 2\sin 2x \cdot \cos 6x = 0,$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 6x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{6}, l \in Z \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z, x = \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{6}, l \in Z;$$

2)  $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cdot \cos 3x, \frac{1}{2}(-\sin 4x + \sin 6x) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 12x),$

$\sin 12x + \sin 4x = 0, 2\sin 8x \cdot \cos 4x = 0,$

$$\begin{cases} \sin 8x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{n\pi}{8}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{8}, n \in Z, x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z.$$

**№ 1197**

1)  $5 + \sin 2x = 5(\sin x + \cos x), 4 + (\sin x + \cos x)^2 = 5(\sin x + \cos x),$

$\cos x + \sin x = t, \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t, t^2 - 5t + 4 = 0, D = 25 - 16 = 9,$

$t_1 = \frac{5+3}{2} = 4, \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 1$  - нет решений,

$t_2 = \frac{5-3}{2} = 1, \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \\ x = 2\pi n, n \in Z \end{cases}$$

$$2) 2 + 2\cos x = 3\sin x \cdot \cos x + 2\sin x,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x) + 2(\cos x - \sin x) = 0,$$

$$3(\cos x - \sin x)^2 + 4(\cos x - \sin x) + 1 = 0, \cos x - \sin x = 0,$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = t, 3t^2 + 4t + 1 = 0, D = 4 - 3 = 1,$$

$$t_1 = \frac{-2-1}{3} = -1, \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\pi + 2\pi n, n \in Z \end{cases} t_2 = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}, \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{2}},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in Z, x = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; x = \pi + 2\pi n; n \in Z,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

### № 1198

$$1) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0, 2\sin \frac{5}{2}x \cdot \cos \frac{x}{2} + 2\sin \frac{5}{2}x \cdot \cos \frac{3}{2}x = 0,$$

$$\sin \frac{5}{2}x \left( \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3}{2}x \right) = 0, \sin \frac{5}{2}x \left( 2\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \right) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin \frac{5}{2}x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{5}n\pi, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \\ x = \pi + 2m\pi, m \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{5}n\pi, n \in Z, x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z, x = \pi + 2m\pi, m \in Z;$$

$$2) \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0, 2\cos \frac{5}{2}x \cdot \cos \frac{x}{2} + 2\cos \frac{5}{2}x \cdot \cos \frac{3}{2}x = 0,$$

$$\cos \frac{5}{2}x \left( \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3}{2}x \right) = 0, 2\cos \frac{5}{2}x \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$\begin{cases} \cos \frac{5}{2}x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}n\pi, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \\ x = \pi + 2m\pi, m \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}n\pi, n \in Z, x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z.$

**№ 1199**

1)  $\operatorname{tg}^2 3x - 4\sin^2 3x = 0, \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - 4\sin^2 3x = 0, \cos 3x \neq 0,$

$\sin^2 3x - 4\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x = 0, \sin^2 3x - 4\sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 0,$   
 $4\sin^4 3x - 3\sin^2 3x = 0, \sin^2 3x(4\sin^2 3x - 3) = 0,$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 3x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{n\pi}{3}, n \in Z \\ 3x = (-1)^l \left( \pm \frac{\pi}{3} \right) + l\pi, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{n\pi}{3}, n \in Z, x = (-1)^l \frac{\pi}{9} + \frac{l\pi}{3}, l \in Z, x = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{9} + \frac{l\pi}{3}, l \in Z$

2)  $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x, \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x + \frac{\sin x}{\cos x}, \frac{\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x}{\cos x} = 0,$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 + \sin^2 x - \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in Z.$

3)  $\operatorname{ctg} x \left( \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} \right) = 1, \frac{\cos x}{\sin x} \left( \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right) = 1, \frac{\cos^2 x + \cos x}{\sin^2 x} = 1,$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos x - \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x \neq 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = +\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi + 2n\pi, n \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi + 2n\pi, n \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z \\ x \neq m\pi, m \in Z \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z.$$

$$4) 4\text{ctg}^2x = 5 - \frac{9}{\sin x}, \frac{4\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{5\sin x - 9}{\sin x}, \begin{cases} 4\cos^2x - 5\sin^2x + 9\sin x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 9\sin^2x + 9\sin x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} 9\sin^2x - 9\sin x - 4 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}, 9\sin^2x - 9\sin x - 4 = 0,$$

$$9a^2 - 9a - 4 = 0, a_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{18} = \frac{9 \pm 15}{18}, \sin x = \frac{4}{3}, x \neq \phi, \sin x = -\frac{1}{3},$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + n\pi, n \in Z, \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + n\pi, n \in Z \\ x \neq m\pi, m \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + n\pi, n \in Z.$$

### № 1200

$$1) \text{tg}2x = 3\text{tg}x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{3\sin x}{\cos x}, \frac{2\sin x \cdot \cos^2x - 3\sin x(\cos^2x - \sin^2x)}{(\cos^2x - \sin^2x)\cos x} = 0,$$

$$\begin{cases} 2\sin x \cdot \cos^2x - 3\sin x \cdot \cos^2x + 3\sin^3x = 0 \\ \cos x(\cos^2x - \sin^2x) \neq 0 \end{cases},$$

$$-\sin x \cos^2x + 3\sin^3x = 0, -\sin x(1 - \sin^2x) + 3\sin^3x = 0, 4\sin^3x - \sin x = 0, \sin x(4\sin^2x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = m\pi, m \in Z \\ x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \\ x = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \end{cases} \begin{cases} x = m\pi, m \in Z \\ x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \\ x = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = m\pi, m \in Z, x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z, x = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in Z;$$

$$2) \text{ctg}2x = 2\text{ctg}x, \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos x}{\sin x}, \frac{\cos 2x}{2\sin x \cdot \cos x} - \frac{4\cos^2x}{2\sin x \cdot \cos x} = 0$$

$$\begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos^2 x = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos^2 x = 0, \\ 3\cos^2 x + \sin^2 x = 0, \end{cases}$$

$$3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 0, \quad 2\cos^2 x + 1 = 0, \quad \cos^2 x = -\frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: решений нет.}$$

$$3) \quad \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} + \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 2,$$

$$\frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} + \frac{\operatorname{tg}x - 1}{1 + \operatorname{tg}x} - 2 = 0, \quad \frac{1 + 2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^2 x - 1 + \operatorname{tg}x - 2 + 2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad \begin{cases} 2\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg}x = 0 \\ 1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \end{cases}, \quad 2\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg}x = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x = 0 \\ \operatorname{tg}x = -2 \\ 1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = -\operatorname{arctg}2 + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

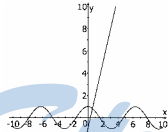
$$\text{Ответ:} \quad x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\operatorname{arctg}2 + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \quad \operatorname{tg}(2x + 1)\operatorname{ctg}(x + 1) = 1, \quad \operatorname{tg}(2x + 1) = \operatorname{tg}(x + 1), \quad \operatorname{tg}(2x + 1) - \operatorname{tg}(x + 1) = 0,$$

$$\frac{\sin(2x + 1 - x - 1)}{\cos(2x + 1)\cos(x + 1)} = 0, \quad \frac{\sin x}{\cos(2x + 1)\cos(x + 1)} = 0, \quad \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \cos(2x + 1)\cos(x + 1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ:} \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### № 1201

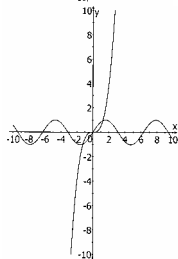


$$1) \quad \cos x = 3x - 1$$

Построим графики функций

$$y = \cos x \text{ и } y = 3x - 1:$$

$$x \approx \frac{1}{2}$$



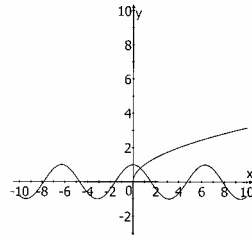
$$2) \quad \sin x = 0,5x^3$$

$$x \approx \pm 1; \quad x = 0$$

$$3) \cos x = \sqrt{x}$$

$$y = \cos x, y = \sqrt{x}$$

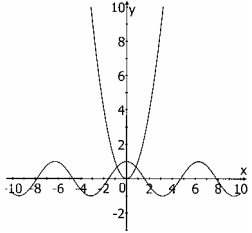
$$x \approx \frac{1}{2}$$



$$4) \cos x = x^2$$

$$y = \cos x, y = x^2$$

$$x \approx \pm 0,8$$



### № 1202

- 1)  $x + 8 > 4 - 3x, 4x > -4, x > -1;$
- 2)  $3x + 1 - 2(3 + x) < 4x + 1, 3x + 1 - 6 - 2x - 4x - 1 < 0, -3x < 6, x > -2.$

### № 1203

- 1)  $\frac{4-3x}{8} - \frac{5-2x}{12} < 2, 3(4-3x) - 2(5-2x) - 2 \cdot 24 < 0, 12-9x-10+4x-48 < 0,$   
 $-5x - 46 < 0, x > -46/5;$
- 2)  $\frac{5x-7}{6} - \frac{x+2}{7} \geq 2 \quad 7(5x-7) - 6(x+2) - 42 \cdot 2 \geq 0,$   
 $35x - 49 - 6x - 12 - 84 \geq 0, 29x \geq 145, x \geq 5.$

### № 1204

$$1) \frac{5x-4}{7x+5} > 0$$

$$a) \begin{cases} 5x-4 > 0 \\ 7x+5 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x > -\frac{5}{7} \end{cases} \quad x > 4/5$$

$$b) \begin{cases} 5x-4 < 0 \\ 7x+5 < 0 \end{cases} \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x < -\frac{5}{7} \end{cases} \quad x < -5/7 \quad \begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x < -\frac{5}{7} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{5}{7}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right);$$

$$2) \frac{3x+10}{40-x} > 0$$

$$a) \begin{cases} 3x+10 > 0 \\ 40-x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{10}{3} \\ x < 40 \end{cases} x \in \left(-\frac{10}{3}; 40\right)$$

$$b) \begin{cases} 3x+10 < 0 \\ 40-x < 0 \end{cases} \begin{cases} x < -\frac{10}{3} \\ x > 40 \end{cases} x \in \emptyset \begin{cases} x \in \left(-\frac{10}{3}; 40\right) \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{10}{3}; 40\right).$$

$$3) \frac{x+2}{5-4x} > 0$$

$$a) \begin{cases} x+2 > 0 \\ 5-4x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x < \frac{5}{4} \end{cases} -2 < x < \frac{5}{4}$$

$$b) \begin{cases} x+2 < 0 \\ 5-4x < 0 \end{cases} \begin{cases} x < -2 \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} x \in \emptyset \begin{cases} -2 < x < \frac{5}{4} \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -2 < x < \frac{5}{4}.$$

$$4) \frac{8-x}{6+3x} > 0$$

$$a) \begin{cases} 8-x > 0 \\ 6+3x > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 8 \\ x > -2 \end{cases} -2 < x < 8$$

$$b) \begin{cases} 8-x < 0 \\ 6+3x < 0 \end{cases} \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases} x \in \emptyset$$

$$\text{Ответ: } -2 < x < 8.$$

№ 1205

$$1) \frac{3-2x}{3x-2} < 0$$

$$a) \begin{cases} 3-2x < 0 \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}; x > \frac{3}{2}; \quad b) \begin{cases} 3-2x > 0 \\ 3x-2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}; x < \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$



$$2) \frac{10-4x}{9x+2} < 0; \text{ а) } \begin{cases} 10-4x < 0 \\ 9x+2 < 0 \end{cases} \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x > -\frac{2}{9} \end{cases}; x > \frac{5}{2}$$

$$б) \begin{cases} 10-4x > 0 \\ 9x+2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x < -\frac{2}{9} \end{cases}; x < -\frac{2}{9} \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x < -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

$$3) \frac{18-7x}{-4x^2-1} < 0; \frac{18-7x}{4x^2+1} > 0$$

$$18-7x > 0; x < \frac{18}{7} \quad (4x^2+1 > 0 \text{ при любых значениях } x). \text{ Ответ: } x < \frac{18}{7}.$$

### № 1206

$$1) \frac{5x+4}{x-3} < 4; \frac{5x+4-4(x-3)}{x-3} < 0; \frac{x+16}{x-3} < 0;$$

$$\begin{cases} x+16 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+16 < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -16 \\ x < 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -16 \\ x > 3 \end{cases}; -16 < x < 3;$$

$$2) \frac{2}{x-4} < 1; \frac{2-1(x-4)}{x-4} < 0; \frac{6-x}{x-4} < 0;$$

$$\begin{cases} 6-x < 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6-x > 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}; \begin{cases} x > 6 \\ x > 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 6 \\ x < 4 \end{cases}; x > 6 \text{ или } x < 4;$$

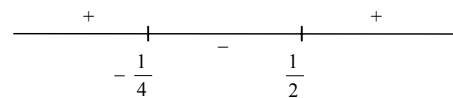
$$3) \frac{2}{x+3} \leq 4, \frac{2-4(x+3)}{x+3} \leq 0, \frac{-4x-10}{x+3} \leq 0,$$

$$\begin{cases} -4x-10 \leq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -4x-10 \geq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -2,5 \\ x > -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq -2,5 \\ x < -3 \end{cases}$$

$$x \geq -2,5 \text{ или } x < -3.$$

### № 1207

$$1) 8x^2 - 2x - 1 < 0, \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0, -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$



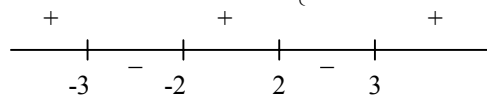
$$2) 5x^2 + 7x \leq 0,$$

$$-\frac{7}{5} \leq x \leq 0.$$



№ 1208

$$1) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} < 0 \text{ равносильно } \begin{cases} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} < 0, & \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$



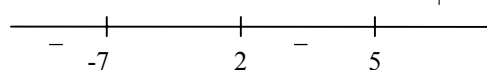
$$x \in (-3; -2) \cup (2; 3);$$

$$2) (2x^2 + 3)(x + 4)^3 > 0, \quad 2x^2 + 3 > 0 \text{ при любых } x; \\ (x + 4)^3 > 0 \text{ равносильно } x + 4 > 0; \quad x > -4.$$

№ 1209

$$1) \frac{3x - 15}{x^2 + 5x - 14} \geq 0, \quad \begin{cases} (3x - 15)(x^2 + 5x - 14) \geq 0, \\ x^2 + 5x - 14 \neq 0 \end{cases},$$

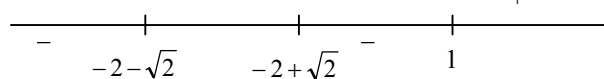
$$(3x - 15)(x - 2)(x + 7) \geq 0, \quad (x - 5)(x - 2)(x + 7) \geq 0,$$



$$x \in (-7; 2) \cup [5; +\infty);$$

$$2) \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 2} < 0, \quad \begin{cases} (x - 1)(x^2 + 4x + 2) < 0, \\ x^2 + 4x + 2 \neq 0 \end{cases},$$

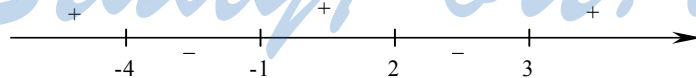
$$(x - 1)(x^2 + 4x + 2) < 0, \quad (x - 1)(x - (2 + \sqrt{2}))(x + 2 - \sqrt{2}) < 0,$$



$$x \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}; 1)$$

$$3) \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x - 3} > 0 \text{ равносильно } \begin{cases} (x^2 + 2x - 8)(x^2 - 2x - 3) > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

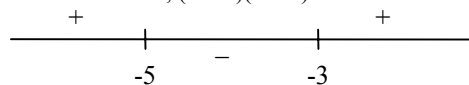
$$(x - 2)(x + 4)(x + 1)(x - 3) > 0$$



$$x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 2) \cup (3; +\infty).$$

№ 1210

$$\lg(x^2 + 8x + 15). \text{ Выражение не имеет смысла при } x^2 + 8x + 15 \leq 0, \\ x^2 + 8x + 15 \leq 0, \quad (x + 3)(x + 5) \leq 0$$



$$x \in [-5; -3].$$

Ответ:  $-5 \leq x \leq -3$ .

**№ 1211**

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0.$$

Т.к. квадратное уравнение имеет два действительных корня, когда

$$D > 0 \text{ и } a \neq 0, \text{ то } \begin{cases} (m+1)^2 - (m-1)(m-3) > 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 3 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m - 2 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} m > \frac{1}{3}, \text{ следовательно, } m = 2 - \text{наименьшее целое число, при}$$

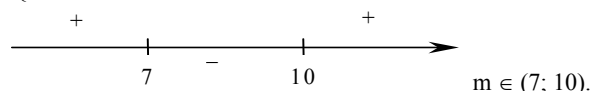
котором уравнение имеет 2 действительных корня.

**№ 1212**

$$(m-7)x^2 + 2(m-7)x + 3 = 0, D < 0, a \neq 0$$

$$\begin{cases} (m-7)^2 - 3(m-7) < 0 \\ m-7 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m^2 - 14m + 49 - 3m + 21 < 0 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 17 + 70 < 0 \\ m \neq 7 \end{cases} \begin{cases} (m-7)(m-10) < 0 \\ m \neq 7 \end{cases} (m-7)(m-10) < 0$$



Ответ: при  $m = 8, m = 9$ .

**№ 1213**

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + 3}{x^2 - 9x + 14} < 0, \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)(x^2 - 9x + 14) < 0.$$

Выражение принимает отрицательное значение, когда

$$x^2 - 9x + 14 < 0, \text{ т.к. } \frac{x^2}{2} + 3 > 0 \text{ при любых } x$$

$$x^2 - 9x + 14 < 0, (x-7)(x-2) < 0$$



$x \in (2; 7)$ , следовательно, наибольшее целое  $x = 6$ .

Ответ:  $x = 6$

**№ 1214**

$$\frac{x^2 - x - 6}{-7 - x^2} > 0, \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7} < 0, x^2 + 7 > 0 \text{ при любых } x, \text{ а}$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \text{ при } x \in (-2; 3), \text{ следовательно, наименьшее целое, } x = -1.$$

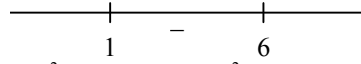
**№ 1215**

$$1) |2x - 3| < x, 2x - 3 < x \text{ или } 3 - 2x < x, 2x - x < 3, x < 3 \text{ или } -2x - x < -3, -3x < -3; x > 1. \text{ Ответ: } 1 < x < 3$$

$$2) |4 - x| > x, 4 - x > x \text{ или } x - 4 > x; x < -2 \text{ или } x \in \emptyset. \text{ Ответ: } x < -2.$$

3)  $|x^2 - 7x + 12| \leq 6$ ,  $x^2 - 7x + 12 \leq 6$  или  $-x^2 + 7x - 12 \leq 6$ ;

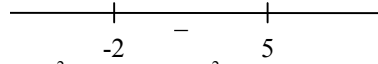
а)  $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ ,  $x_1 = 6$  и  $x_2 = 1$ ,  $1 \leq x \leq 6$ ;



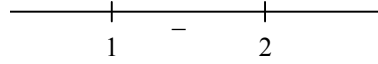
б)  $x^2 - 7x + 18 \geq 0$ ,  $x^2 - 7x + 18 = 0$ ,  $D < 0$ , следовательно, неравенство справедливо при всех  $x$ . Ответ:  $1 \leq x \leq 6$ .

4)  $|x^2 - 3x - 4| > 6$ ,  $x^2 - 3x - 4 > 6$  или  $-x^2 + 3x + 4 > 6$ ;

а)  $x^2 - 3x - 10 > 0$ ,  $x_1 = 5$  и  $x_2 = -2$ ,  $x < -2$ ,  $x > 5$ ;



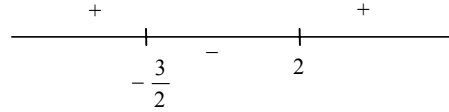
б)  $-x^2 + 3x - 2 > 0$ ,  $x^2 - 3x + 2 > 0$ ,  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 1$ ,  $1 < x < 2$ ;



Ответ:  $x < -2$ ,  $1 < x < 2$ ,  $x > 5$ ;

5)  $|2x^2 - x - 1| \geq 5$ ,  $2x^2 - x - 1 \geq 5$  или  $-2x^2 + x + 1 \geq 5$

а)  $2x^2 - x - 6 \geq 0$ ,  $x_1 = -\frac{3}{2}$  и  $x_2 = 2$ .



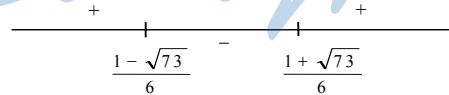
Следовательно,  $x \leq -\frac{3}{2}$ ,  $x \geq 2$ .

б)  $-2x^2 + x - 4 \geq 0$ ,  $2x^2 - x + 4 \leq 0$ ,  $D < 0$  – корней нет.

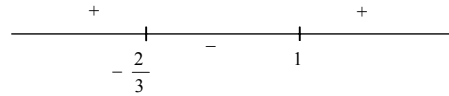
Ответ:  $x \leq -\frac{3}{2}$ ,  $x \geq 2$

6)  $|3x^2 - x - 4| < 2$ ,  $3x^2 - x - 4 < 2$  или  $-3x^2 + x + 4 < 2$ ,

а)  $3x^2 - x - 6 < 0$ ,  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{73}}{6}$ ,  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{73}}{6}$ ;



б)  $-3x^2 + x + 2 < 0$ ,  $3x^2 - x - 2 > 0$ ,  $x_1 = -\frac{2}{3}$ ,  $x_2 = 1$ ,



$$-\frac{2}{3} < x, x > 1, \text{ но } |3x^2 - x - 4| = -3x^2 + x + 4 \text{ при } -1 < x < 4/3$$

$$\text{Ответ: } \frac{1 - \sqrt{73}}{6} < x < -\frac{2}{3}, \quad 1 < x < \frac{1 + \sqrt{73}}{6}.$$

(Опечатка в ответе задачника)

### № 1216

- 1)  $2,5^{1-x} > 2,5^{-3x}, 1 - x > -3x, x > -\frac{1}{2}$ ;
- 2)  $0,13^{x-4} \geq 0,15^{2-x}, x - 4 \leq 2 - x, 2x \leq 6, x \leq 3$ ;
- 3)  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}, -2x \geq x - 1, x \leq \frac{1}{3}$ ;
- 4)  $3^{-4x} > \sqrt{3}, 3^{-4x} > 3^{1/2}, -4x > 1/2, x < -\frac{1}{8}$ .

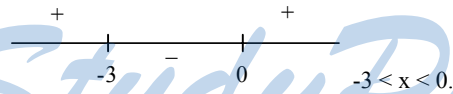
### № 1217

$$1) 2^{-x+5} < \frac{1}{4}, 2^{-x+5} < 2^{-2}, -x + 5 < -2, x > 7;$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}, \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \left(\frac{1}{3}\right)^3, |x-2| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x < 5 \\ x-2 < 0 \\ x > -1 \end{cases} x \in (-1; 5).$$

### № 1218

$$1) 5^{x^2+3x+1,5} < 5\sqrt{5}, 5^{x^2+3x+1,5} < 5^{3/2}, x^2 + 3x + 1,5 < 3/2, \\ x^2 + 3x < 0, x(x+3) < 0$$



$$2) 0,2^{x^2-6x+7} \geq 1, 0,2^{x^2-6x+7} \geq 0,2^0, x^2 - 6x + 7 \leq 0, x \in [3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}].$$

### № 1219

$$1) 3^{x+1} 9^{x-1/2} \geq \sqrt[3]{3}, 3^{x+1} \cdot 3^{2x-1} \geq 3^{1/3}, 3^{3x} \geq 3^{1/3}, 3x \geq 1/3, x \geq \frac{1}{9};$$

$$2) 3^{x+1} + 3^{x-1} < 10, 3^x(3 + 3^{-1}) < 10, 3^x \cdot \frac{10}{3} < 10, 3^x < 3, x < 1.$$

### № 1220

$$1) 2^{2x} - 4^{x-1} + 8^{\frac{2}{3}x} \cdot 2^{-4} > 52, 2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52, 2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52, \\ 2^{2x-4} \cdot 13 > 52, 2^{2x-4} > 4, 2^{2x-4} > 2^2, 2x - 4 > 2, 2x > 6, x > 3;$$

$$2) 2^{x+2} - 2^{x+3} + 5^{x-2} > 5^{x+1} + 2^{x+4}, \quad 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x-2},$$

$$4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - \frac{1}{25} \cdot 5^x, \quad 2^x(4-8-16) > 5^x\left(5 - \frac{1}{25}\right),$$

$$2^x(-20) > 5^x \cdot 4 \cdot \frac{24}{25}, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x < -\frac{124}{25 \cdot 20},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < -0,248 \text{ — решений нет, т.к. } \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0 \text{ для всех } x.$$

### № 1221

$$1) 3,3^{x^2+6x} < 1, \quad 3,3^{x^2+6x} < 3,3^0, \text{ т.е. } x^2 + 6x < 0, \quad x(x+6) < 0$$

$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad - \qquad \qquad + \\ \hline \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ \qquad -6 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad -6 < x < 0; \end{array}$$

$$2) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2} > \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2x^2} > \frac{1}{2}, \text{ т.е. } 2x - 2x^2 < 1, \quad 2x^2 - 2x + 1 > 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } D < 0;$$

$$3) 8,4^{x^2+6x+11} < 1, \quad 8,4^{x^2+6x+11} < 8,4^0, \quad \frac{x-3}{x^2+6x+11} < 0,$$

$$x^2 + 6x + 11 > 0 \text{ при любых } x, \text{ т.к. } D < 0, \quad x - 3 < 0, \quad x < 3.$$

Ответ:  $x < 3$ .

$$4) 2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0, \quad 2^{2x} \cdot 2 - 21 \cdot 2^{-2x-3} + 2 \geq 0,$$

$$2 \cdot 2^{2x} - \frac{21}{8} \cdot 2^{-2x} + 2 \geq 0, \quad 2^{2x} = a, \quad 2^{-2x} = \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad 2a - \frac{21}{8a} + 2 \geq 0,$$

$$\frac{16a^2 + 16a - 21}{8a} \geq 0 \text{ равносильно } (16a^2 + 16a - 21)8a \geq 0.$$

Найдем корни трехчлена  $16a^2 + 16a - 21$ ,

$$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{16} = \frac{-8 \pm 20}{16}, \quad a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = -\frac{7}{4},$$

$$\left(a - \frac{3}{4}\right)\left(a + \frac{7}{4}\right)a \geq 0,$$

$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ \qquad - \qquad \qquad - \qquad \qquad - \\ \qquad -\frac{7}{4} \qquad \qquad 0 \qquad \qquad -\frac{3}{4} \end{array}$$

$$a \in \left[-\frac{7}{4}; 0\right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right) \text{ т.к. } a > 0, \text{ то решением является } a \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

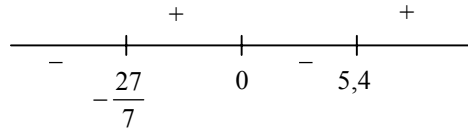
$$2^{2x} \geq \frac{3}{4}; \quad x \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{4}.$$

$$5) \quad 3^{4-3x} - 35 \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0, \quad 3^4 \cdot 3^{-3x} - 35 \cdot 3^{3x-2} + 6 \geq 0, \quad 3^{3x} = a, \quad a > 0,$$

$$\frac{3^4}{a} - \frac{35}{9} \cdot a + 6 \geq 0, \quad \frac{81}{a} - \frac{35}{9} a + 6 \geq 0, \quad \frac{81 \cdot 9 - 35a^2 + 54a}{9a} \geq 0,$$

$$(-35a^2 + 54a + 729)a \geq 0, \quad (35a^2 - 54a - 729)a \leq 0,$$

$$(a - 5,4) \left( a + \frac{27}{7} \right) a \leq 0,$$



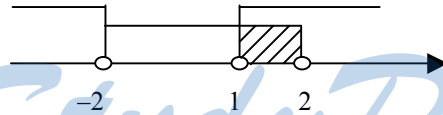
т.к.  $a > 0$ , то решением является  $0 < a \leq 5,4$ ,  $3^{3x} \leq 5,4$ ,

$$3^{3x} \leq 3^{\log_3 5,4}, \quad 3x \leq \log_3 5,4, \quad x \leq 1 - \frac{1}{3} \log_3 5.$$

### № 1222

$$1) \quad 3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \frac{1}{9}, \quad \log_2 \frac{x-1}{x+2} < -2, \quad \log_2 \frac{x-1}{x+2} < \log_2 \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} < \frac{1}{4} \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{4(x-1) - (x+2)}{4(x+2)} < 0 \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{3x-6}{4(x+2)} < 0 \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{3(x-2)}{4(x+2)} < 0 \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases}$$



$$2) \quad 5^{\log_2(x^2 - 4x + 3,5)} > \frac{1}{5}, \quad 5^{\log_2(x^2 - 4x + 3,5)} > 5^{-1}, \quad \log_2(x^2 - 4x + 3,5) > \log_2 \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3,5 > \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x + 3,5 > 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3,5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ \left( x - \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \left( x - \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) > 0 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ x \in \left( -\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cup \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty \right) \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty).$$

**№ 1223**

1)  $\log_6(2-x) < \log_6(2x+5)$

$$\begin{cases} 2-x < 2x+5 \\ 2-x > 0 \\ 2x+5 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \quad x \in (-1; 2);$$

2)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2) \geq -1, \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3,$

$$\begin{cases} x^2-2 \leq 3 \\ x^2-2 > 0 \end{cases}; \begin{cases} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \leq 0 \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0 \end{cases} \begin{cases} x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \end{cases}$$

$$x \in [-\sqrt{5}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{5}].$$

**№ 1224**

1)  $\sqrt{\lg x} < \frac{1}{2}, \begin{cases} \lg x \geq 0 \\ \lg x < \frac{1}{4} \end{cases}; \begin{cases} x \geq 1 \\ \lg x < \lg 10^{1/4} \end{cases}; \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 10^{1/4} \end{cases} \quad x \in [1; 10^{1/4})$

2)  $\log_{1/2} x < \log_{1/2}(2x+6) + 2, \log_{1/2} x < \log_{1/2} \frac{1}{4}(2x+6),$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x+6 > 0 \\ 4x > 2x+6 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > 3 \end{cases} \quad x \in (3; +\infty).$$

**№ 1225**

1)  $\log_{0,5}(1+2x) > -1, \log_{0,5}(1+2x) > \log_{0,5} 2$

$$\begin{cases} 1+2x > 0 \\ 1+2x < 2 \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);$$

2)  $\log_3(1-2x) < -1, \log_3(1-2x) < \log_3 \frac{1}{3},$

$$\begin{cases} 1-2x > 0 \\ 1-2x < \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \quad x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right).$$

**№ 1226**

1)  $\log_{0,5}(x^2-5x+6) > -1$

$$\begin{cases} x^2-5x+6 > 0 \\ x^2-5x+6 < 2 \end{cases} \begin{cases} (x-3)(x-2) > 0 \\ (x-1)(x-4) < 0 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \\ x \in (1; 4) \end{cases}$$

$x \in (1; 2) \cup (3; 4);$



$$2) \log_8(x^2 - 4x + 3) \leq 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 & \{(x-1)(x-3) > 0\} & \{x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)\} \\ x^2 - 4x + 3 \leq 8 & \{(x+1)(x-5) \leq 0\} & \{x \in [-1; 5]\} \end{cases}$$

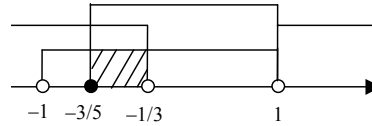
$$x \in [-1; 1) \cup (3; 5].$$

№ 1227

$$1) \log_{\frac{1}{2}} \left( \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1} \right) \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-1} > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1} > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x + \frac{1}{3}}{x-1} > 0 \\ \frac{3x+1}{3x+1} < 1 \\ \frac{x-1}{3x+1} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty) \\ 3x+1-x+1 < 0 \\ \frac{x-1}{6x+2-x+1} \leq 0 \end{cases}$$

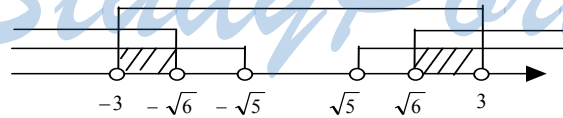
$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty) \\ \frac{x+1}{x-1} < 0 \\ \frac{x+\frac{3}{5}}{x-1} \leq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } x \in \left[ -\frac{3}{5}; -\frac{1}{3} \right)$$

$$2) \log_{\frac{1}{3}} (\log_4(x^2 - 5)) > 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ \log_4(x^2 - 5) > 0 \\ \log_4(x^2 - 5) > 1 \end{cases} \begin{cases} (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0 \\ x^2 - 5 > 1 \\ x^2 - 5 < 4 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty) \\ x \in (-3; 3) \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } x \in (-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3).$$

№ 1228

$$1) (x^2 - 4) \log_{0.5} x > 0, x > 0 \text{ по определению логарифма}$$

$$a) \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ \log_{0.5} x > 0 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} (x-2)(x+2) < 0 \\ \log_{0.5} x < 0 \end{cases};$$

$$a) \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ x < 1 \end{cases} \quad x \in (-\infty; -2); \quad б) \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ x > 1 \end{cases} \quad x \in (1; 2)$$

Т.к.  $x > 0$ , то  $x \in (1, 2)$ . Ответ:  $x \in (1; 2)$

$$2) (3x - 1) \log_2 x < 0$$

$$a) \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 1/3 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$б) \begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ \log_2 x < 0 \end{cases} \begin{cases} x < 1/3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1/3. \quad \text{Ответ: } x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$

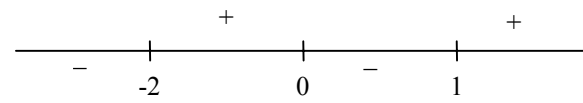
### № 1129

$$1) x^{1+\lg x} < 0,1^{-2}, \quad x > 0; \quad x^{1+\lg x} < 10^2.$$

Ясно, что  $x = 1$  решение нашего неравенства

$$a) x > 0, x < 1, \log_x x^{1+\lg x} > \log_x 10^2, \quad 1 + \lg x > \frac{2}{\lg x}, \quad \frac{\lg x + \lg^2 x - 2}{\lg x} > 0$$

$$\text{Сделаем замену: } \lg x = a, a \neq 0, \quad \frac{a^2 + a - 2}{a} > 0, \quad \frac{(a-1)(a+2)}{a} > 0$$



$$a \in (-2; 0) \cup (1; +\infty), \text{ т.е. } -2 < \lg x < 0 \text{ и } \lg x > 1,$$

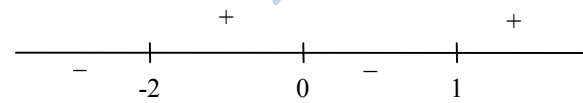
$0,01 < x < 1$  и  $x > 10$ , но т.к.  $x > 0$  и  $x < 1$ , то решением является

$$\frac{1}{100} < x < 1$$

$$б) x > 1, \log_x x^{1+\lg x} < 2 \log_x 10, \quad 1 + \lg x - \frac{2}{\lg x} < 0.$$

$$\text{Сделаем замену: } \lg x = a, \quad 1 + a - \frac{2}{a} < 0, \quad a \neq 0$$

$$\frac{a + a^2 - 2}{a} < 0, \quad \frac{a^2 + a - 2}{a} < 0, \quad \frac{(a-1)(a+2)}{a} < 0$$



$$a \in (-\infty; -2) \cup (0; 1), \text{ т.е.}$$

$$\lg x < -2 \text{ и } 0 < \lg x < 1$$

$$x < \frac{1}{100} \text{ и } 1 < x < 10 \text{ т.е. } x > 1, \text{ то решением является } 1 < x < 10$$

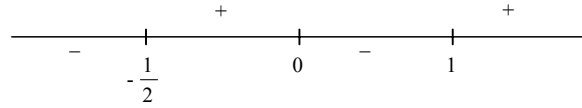
$$\text{Ответ: } x \in (0,001; 1) \cup (1; 10) \cup [1].$$

$$2) \sqrt{x^{4\lg x}} < 10x.$$

Ясно, что  $x = 1$  – решение нашего неравенства

$$a) x > 1, \log_x x^{2\lg x} < \log_x 10x, 2\lg x < 1 + \frac{1}{\lg x}.$$

$$\text{Сделаем замену: } \lg x = a, a \neq 0, \frac{2a^2 - a - 1}{a} < 0, \frac{(a-1)\left(a + \frac{1}{2}\right)}{a} < 0$$



$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1), \text{ т.е. } \lg x < -\frac{1}{2} \text{ и } 0 < \lg x < 1$$

$$x < \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ и } 1 < x < 10 \text{ т.к. } x > 1, \text{ то решением является } 1 < x < 10;$$

$$б) 0 < x < 1, \log_x x^{2\lg x} > \log_x 10x, 2\lg x > 1 + \frac{1}{\lg x}.$$

Сделаем замену:  $\lg x = a, a \neq 0$

$$2a > 1 + \frac{1}{a}, \frac{2a^2 - a - 1}{a} > 0, a \in \left(\frac{1}{2}; 0\right) \cup (1; +\infty),$$

$$\text{т.е. } -\frac{1}{2} < \lg x < 0 \text{ и } \lg x > 1, \frac{1}{\sqrt{10}} < x < 1 \text{ и } x > 10; \text{ т.к. } 0 < x < 1,$$

$$\text{то решением является } \frac{1}{\sqrt{10}} < x < 1. \text{ Ответ: } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; 1\right).$$

$$3) x + 3 > \log_3(26 + 3^x), 26 + 3^x > 0 \text{ при любых } x, \log_3 3^{x+3} > \log_3(26 + 3^x),$$

$$3^{x+3} > 26 + 3^x, 3^{x+3} - 26 - 3^x > 0, 26 \cdot 3^x - 26 > 0, 3^x > 1, x > 0;$$

$$4) 3 - x < \log_5(20 + 5^x), 20 + 5^x > 0 \text{ при любых } x, \log_5 5^{3-x} < \log_5(20 + 5^x),$$

$$5^{3-x} < 20 + 5^x, \frac{125}{5^x} - 20 - 5^x < 0, 5^x = a > 0$$

$$\frac{125 - 20a - a^2}{a} < 0, \frac{a^2 + 20a - 125}{a} > 0, \frac{(a-25)(a+5)}{a} > 0,$$

$$a \in (-5; 0) \cup (25; +\infty), \text{ т.е. } -5 < 5^x < 0 \text{ и } 5^x > 25, x = \emptyset \text{ и } x > 2, \text{ т.е. } x > 2;$$

### № 1230

$$1) \cos(-3x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(3x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, 3x = y, \cos y \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq y \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n \leq \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in Z;$$

$$2) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}, \quad 2x - \frac{\pi}{3} = y, \quad \cos y < -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{3}\pi + 2\pi n < y < \frac{4}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad \frac{2}{3}\pi + 2\pi n < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5}{6}\pi + \pi n, \quad n \in Z$$

### № 1231

$$1) \sin x < \frac{1}{4}$$

$$b = \arcsin \frac{1}{4}, \quad a = -\pi - \arcsin \frac{1}{4}$$

$$c = 2\pi + a = \pi - \arcsin \frac{1}{4}$$

$$-\pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n < x < \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$2) \sin x > -\frac{1}{4}$$

$$-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n < x < \arcsin \frac{1}{4} + \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$3) \operatorname{tg} x - 3 \leq 0$$

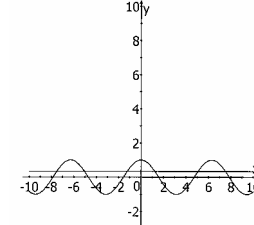
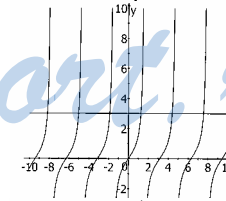
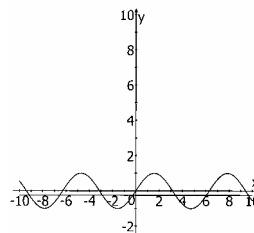
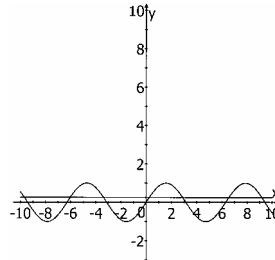
$$\operatorname{tg} x \leq 3$$

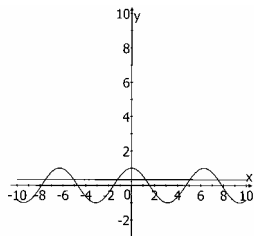
$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in Z$$

$$4) \cos x > \frac{1}{3}; \quad a = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$b = \arccos \frac{1}{3}$$

$$-\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$





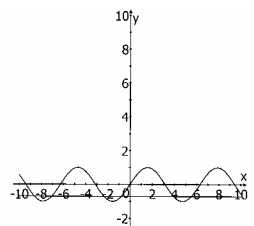
$$1) 2 \cos x - \sqrt{3} < 0 \quad [-3\pi; \pi]$$

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{-\pi}{6}, \quad c = a - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi,$$

$$d = b - 2\pi = \frac{-13}{6}\pi$$

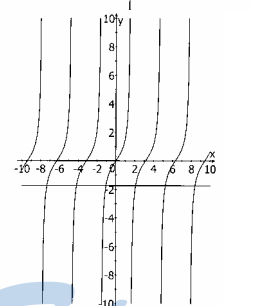
$$x \in \left[-3\pi; -\frac{13}{6}\pi\right) \cup \left(-\frac{11}{6}\pi; -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \pi\right]$$



$$2) \sqrt{2} \sin x + 1 \geq 0 \quad [-3\pi; \pi]$$

$$\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x \in \left[-3\pi; -\frac{11}{4}\pi\right] \cup \left[-\frac{9\pi}{4}; -\frac{3}{4}\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$$



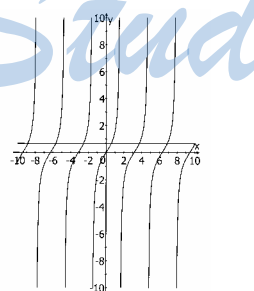
$$3) \sqrt{3} + \operatorname{tg} x \leq 0, \quad [-3\pi; \pi]$$

$$\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}, \quad a = -\frac{\pi}{3}, \quad b = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi,$$

$$c = \frac{-\pi}{3} - \pi = -\frac{4}{3}\pi, \quad d = c - \pi = -\frac{4}{3}\pi - \pi = -\frac{7}{3}\pi,$$

$$x \in \left(-\frac{5}{2}\pi; -\frac{7}{3}\pi\right] \cup \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{4}{3}\pi\right] \cup$$

$$\cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$$



$$4) 3 \operatorname{tg} x - 2 > 0, \quad [-3\pi; \pi]$$

$$\operatorname{tg} x > \frac{2}{3}$$

$$a = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$$

$$x \in \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - 3\pi; \frac{-5\pi}{2}\right) \cup \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - 2\pi; \frac{-3\pi}{2}\right) \cup$$

$$\cup \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$$

**№ 1233**

1) Рассмотрим очевидное неравенство  $(a - b)^2 \geq 0$ ; преобразуем его:

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \text{ что и требовалось доказать}$$

2) Преобразуем неравенство:  $\frac{a^3 + b^3}{2} > \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{8}$ ;

$$\frac{4a^3 + 4b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3}{8} > 0; \quad \frac{3a^3 + 3b^3 - 3a^2b - 3ab^2}{8} > 0;$$

$$\frac{3(a^3 + b^3) - 3ab(a + b)}{8} > 0; \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{(a^3 + b^3) - ab(a + b)}{1} > 0;$$

$a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)(a - b)^2$ , при  $a, b > 0$  и  $a \neq b$   $(a + b)(a - b)^2 > 0$ , следовательно, исходное неравенство верно.

**№ 1234**

1)  $(a+b)(ab+1) \geq 4ab$ . Пусть  $ab=x$ , тогда  $a = \frac{x}{b}$  и неравенство примет вид:

$$\left(\frac{x}{b} + b\right) \left(\frac{x}{b} \cdot b + 1\right) \geq \frac{4x}{b} \cdot b; \quad \frac{(x + b^2)(x + 1) - 4bx}{b} \geq 0; \quad \frac{x^2 + b^2x + x + b^2 - 4bx}{b} \geq 0;$$

$$\frac{(x^2 - 2bx + b^2) + x(1 - 2b + b^2)}{b} \geq 0; \quad \frac{(x - b)^2 + x(1 - b)^2}{b} \geq 0.$$

Сделаем обратную подстановку:  $\frac{(ab - b)^2 + ab(1 - b)^2}{b} \geq 0$ .

Неравенство верно, т.к.  $(ab - b)^2 > 0$ ,  $ab > 0$ ,  $b > 0$ ,  $(1 - b)^2 \geq 0$ ;

2)  $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 > 4ab(a^2 + b^2)$ ,  $(a^4 + 2a^2b + b^4) + 4a^2b^2 > 4ab(a^2 + b^2)$ ,  $(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 > 4ab(a^2 + b^2)$ ,  $(a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 + b^2) + 4a^2b^2 > 0$ , но  $((a^2 + b^2) - 2ab)^2 > 0$  при всех  $a, b$  таких, что  $a^2 + b^2 - 2ab \neq 0$ , т.е. при  $(a - b)^2 \neq 0$ ,  $a \neq b$ .

**№ 1235**

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3, \quad \frac{1}{3} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 1$$

Слева стоит среднее арифметическое чисел  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{c}$  и  $\frac{c}{a}$ , а справа их

среднее геометрическое. Т.к. среднее геометрическое всегда не превышает среднего арифметического, то неравенство верно для любых  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$

2)  $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ ,  $a^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac \geq 0$ ,  $(a-b)^2 + (a-c)^2 \geq 0$  – верно.

**№ 1236**

$$1) \begin{cases} 5x - 7y = 3 \\ 6x + 5y = 17 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3 + 7y}{5} \\ \frac{6(3 + 7y)}{5} + 5y = 17 \end{cases}$$

$$18 + 42y + 25y = 85, \quad 67y = 67, \quad y = 1, \quad x = \frac{3+7y}{5} = 2. \quad \text{Ответ: } (2; 1).$$

$$2) \begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -2y - 1 \\ 2(-2y - 1) - y - 13 = 0 \end{cases}$$

$$-4y - 2 - y - 13 = 0, \quad -5y = 15, \quad y = -3, \quad x = 5. \quad \text{Ответ: } (5; -3).$$

**№ 1237**

$$1) \begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{2} = 10 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 10 \end{cases} \begin{cases} 2x - 2y - 5x - 5y = 100 \\ 2x + 5y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 7y = 100 \\ x = \frac{100 - 5y}{2} \end{cases} \begin{cases} -3\left(\frac{100 - 5y}{2}\right) - 7y = 100 \\ x = \frac{100 - 5y}{2} \end{cases}$$

$$-300 + 15y - 14y = 200, \quad y = 500, \quad x = -1200. \quad \text{Ответ: } (-1200; 500).$$

$$2) \begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 6 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x + 3y + 2x - 2y - 36 = 0 \\ 3x + 3y - 4x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y - 36 = 0 \\ 7y - x = 0 \end{cases} \begin{cases} 35y + y - 36 = 0 \\ x = 7y \end{cases} \quad y = 1, \quad x = 7. \quad \text{Ответ: } (7; 1).$$

**№ 1238**

$$1) \begin{cases} y + 5 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \begin{cases} y = x^2 - 5 \\ x^2 + (x^2 - 5)^2 = 25 \end{cases}$$

$$x^2 + x^4 - 10x^2 + 25 = 25, \quad x^4 - 9x^2 = 0, \quad x^2(x^2 - 9) = 0, \quad x^2(x - 3)(x + 3) = 0,$$

$$x = 0, \quad x = \pm 3, \quad y = -5, \quad y = 4.$$

$$\text{Ответ: } (0, -5), (3, 4), (-3, 4).$$

$$2) \begin{cases} xy = 16 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}; \begin{cases} xy = 16 \\ x = 4y \end{cases}; \begin{cases} 4y^2 = 16 \\ x = 4y \end{cases}, \quad y = \pm 2, \quad x = \pm 8. \quad \text{Ответ: } (\pm 8, \pm 2).$$

$$3) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 96 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} 4y^2 + 2y^2 = 96 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 2y \end{cases}, \quad y = \pm 4, \quad x = \pm 8.$$

$$\text{Ответ: } (\pm 8, \pm 4)$$

**№ 1239**

$$1) \begin{cases} x^2 - y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \begin{cases} (1+y)^2 - y^2 = 13 \\ x = y + 1 \end{cases} \begin{cases} 1 + 2y + y^2 - y^2 = 13 \\ x = y + 1 \end{cases}, \quad y = 6, \quad x = 7.$$

$$\text{Ответ: } (7, 6).$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 3y = -5 \\ 7x + 3y = 23 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 3y = -5 \\ y = \frac{23 - 7x}{3} \end{cases}, x^2 - 23 + 7x + 5 = 0, x^2 + 7x - 18 = 0,$$

$$x_1 = 2, x_2 = -9, y_1 = 3, y_2 = 28\frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } (2, 3), (-9, 28\frac{2}{3}).$$

**№ 1240**

$$1) \begin{cases} \frac{x-y}{y-x} = \frac{3}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}. \text{ Пусть } \frac{x}{y} = t, \text{ тогда } t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}; \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{3}{2}; 2t^2 - 3t - 2 = 0,$$

$$t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}, \text{ отсюда а) } \frac{x}{y} = 2 \text{ и б) } \frac{x}{y} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{а) } x = 2y \text{ и } (2y)^2 + y^2 = 20, 5y^2 = 20, y = \pm\sqrt{4} = \pm 2, x = \pm 4;$$

$$\text{б) } x = -\frac{1}{2}y \text{ и } \left(-\frac{1}{2}y\right)^2 + y^2 = 20, y = \pm 4, x = \pm 2.$$

Ответ:  $(\pm 4, \pm 2), (\pm 2, \pm 4)$ .

$$2) \begin{cases} \frac{y+x}{x-y} = 3\frac{1}{3} \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} \frac{y+x}{x-y} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Обозначим: } \frac{y}{x} = t, \text{ тогда } t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}, 3t^2 + 3 - 10t = 0, 3t^2 - 10t + 3 = 0,$$

$$t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{3};$$

$$\text{а) } \frac{y}{x} = 3, y = 3x, x^2 - 9x^2 = 8, -8x^2 = 8, x^2 = -1, \text{ решений нет}$$

$$\text{б) } \frac{y}{x} = \frac{1}{3}; x = 3y, 9y^2 - y^2 = 8, y = \pm 1, x = \pm 3. \text{ Ответ: } (\pm 3, \pm 1).$$

$$3) \begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}, \text{ вычтем уравнения: } x^2 - y^2 = 9(x - y),$$

$$(x - y)(x + y) - 9(x - y) = 0, (x - y)(x + y - 9) = 0 - \text{ либо } x = y, \text{ либо } x = 9 - y$$

$$\text{а) } x = y, x^2 = 13x + 4x, x^2 - 17x = 0, x(x - 17) = 0, x_1 = 0, x_2 = 17, y_1 = 0, y_2 = 17;$$

$$\text{б) } x = 9 - y, y^2 = 4(9 - y) + 13y, y^2 - 9y - 36 = 0, y_1 = -3, y_2 = 12, x_1 = 12, x_2 = -3.$$

Ответ:  $(0, 0), (17, 17), (12, -3), (-3, 12)$ .

$$4) \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4x = 40 \\ 2x^2 + y^2 + 3x = 52 \end{cases}, \text{ вычтем уравнения: } x^2 - 7x = -12,$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0, x^2 - 7x + 12 = 0, x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}, x_1 = 4, x_2 = 3;$$



a)  $x = 4, 32 + y^2 + 12 = 52, y^2 = 8, y = \pm 2\sqrt{2}$ ;

б)  $x = 3, 18 + y^2 + 9 = 52, y^2 = 25, y = \pm 5$ . Ответ:  $(4, \pm 2\sqrt{2}), (3, \pm 5)$ .

**№ 1241**

1)  $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 3^{3y-x} = 27 \end{cases}, \begin{cases} 2^{x+y} = 2^5 \\ 3^{3y-x} = 3^3 \end{cases}, \begin{cases} x+y = 5 \\ 3y-x = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5-y \\ 3y-5+y = 3 \end{cases}$

$4y = 8, y = 2$ , тогда  $x = 3$ . Ответ:  $(3, 2)$ .

2)  $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ \frac{x}{3^2 - 2^y} = 7 \end{cases}$ . Пусть  $3^{\frac{x}{2}} = a, 2^y = b$ ;  $a, b > 0$ , тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 77 \\ a - b = 7 \end{cases} \begin{cases} a^2 - b^2 = 77 \\ a = b + 7 \end{cases} \begin{cases} (b+7)^2 - b^2 = 77 \\ a = b + 7 \end{cases} \begin{cases} b^2 + 14b - b^2 = 28 \\ a = b + 7 \end{cases}$$

$\begin{cases} b = 2 \\ a = 9 \end{cases}$ , тогда  $3^{\frac{x}{2}} = 3^2, x = 4, 2^y = 2, y = 1$ . Ответ:  $(4, 1)$

3)  $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases} \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^2 \cdot 2^6 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^4 \end{cases} \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^2 \cdot 2^6 \\ y-x = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^2 \cdot 2^6 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad 3^x \cdot 2^{x+4} = 3^2 \cdot 2^6, 3^x \cdot 2^x = 3^2 \cdot 2^2$

Т.к. функция  $3^x \cdot 2^x$  возрастает, то решение единственное. Отсюда  $x = 2, y = 6$ . Ответ:  $(2, 6)$

4)  $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases} \begin{cases} \lg xy = \lg 10^4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases} \begin{cases} xy = 10^4 \\ \log_x x^{\lg y} = \log_x 1000 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = 10^4 \\ \lg y = \log_x 10^3 \end{cases} \begin{cases} y = \frac{10^4}{x} \\ \lg y = 3 \log_x 10 \end{cases} \begin{cases} y = \frac{10^4}{x} \\ \lg \frac{10^4}{x} = \frac{3}{\log_{10} x} \end{cases}$

$\lg \frac{10^4}{x} = \frac{3}{\lg x} \quad 4 - \lg x = \frac{3}{\lg x}$

Пусть  $\lg x = a, 4a - a^2 - 3 = 0, a^2 - 4a + 3 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3$ ;

1)  $a = 1, \lg x = 1, x = 10, y = 10^3$ ; 2)  $a = 3, \lg x = 3, x = 10^3, y = 10$ .

Ответ:  $(10, 1000), (1000, 10)$ .

**№ 1242**

1)  $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \log_2 \sqrt{x} y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 1 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ x^2 - \frac{5}{x} + 4 = 0 \end{cases} \quad x^3 + 4x - 5 = 0,$$

$x^3 + 4x - 5 = (x - 1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (т.к.  $x^2 + x + 5 > 0$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ ),  $x = 1$  – единственный действительный корень;  $y = 1$ . Ответ:  $(1, 1)$ .

$$2) \begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ xy^2 = 2^3 \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ y^2 = \frac{8}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{8^2}{x^2} = 16 \\ y^2 = \frac{8}{x} \end{cases} \begin{cases} x^4 - 16x^2 + 64 = 0 \\ y^2 = \frac{8}{x} \end{cases} \begin{cases} (x^2 - 8)^2 = 0 \\ y^2 = \frac{8}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{8} \\ y = \sqrt{\sqrt{8}} \end{cases}, \text{ но } x, y > 0 \text{ по определению логарифма. Ответ: } (\sqrt{8}, \sqrt[4]{8}).$$

### № 1243

$$1) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Пусть  $\sqrt{x} = a$ ,  $\sqrt{y} = b$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 2 \end{cases} \begin{cases} 2b = 14 \\ a = b + 2 \end{cases} \begin{cases} b = 7 \\ a = 9 \end{cases}, \text{ тогда } x = a^2 = 81, y = b^2 = 49.$$

Ответ:  $(81, 49)$ .

$$2) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19 \end{cases}. \text{ Пусть } \sqrt{x} = a \geq 0, \sqrt{y} = b \geq 0$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 19 \end{cases} \begin{cases} a = b + 1 \\ 2b = 18 \end{cases}; \begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \end{cases}, \text{ где } a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, \text{ тогда } x = 100, y = 81.$$

### № 1244

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases} \begin{cases} x+y-1 = 1 \\ x-y+2 = 4(y^2-2y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ 2 - y - y + 2 = 4y^2 - 8y + 4 \end{cases} \begin{cases} x = 2 - y \\ 4y^2 - 6y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 - y \\ 2y(2y - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ y = 0, y = \frac{3}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2, x = \frac{1}{2} \\ y = 0, y = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ при этом должно выполняться:}$$

а)  $x + y - 1 \geq 0$ ; б)  $x - y + 2 \geq 0$ ; в)  $2y - 2 \geq 0$ .  
 Для  $y = 0$ ,  $x = 2$  условие в) не выполняется, следовательно,

решение —  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

$$2) \begin{cases} \sqrt{3y+x+1} = 2 \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6 \end{cases} \begin{cases} 3y+x+1 = 4 \\ 2x-y+2 = 49y^2 - 84y + 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3-3y \\ 2(3-3y)-y+2 = 49y^2 - 84y + 36 \end{cases} \begin{cases} x = 3-3y \\ 6-6y-y+2 = 49y^2 - 84y + 36 \end{cases}$$

$$49y^2 - 77y + 28 = 0, \quad y_{1/2} = \frac{77 \pm \sqrt{5929 - 5488}}{98} = \frac{77 \pm 21}{98},$$

$y_1 = 1, y_2 = \frac{4}{7}, x_1 = 0, x_2 = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}$ , при этом должно выполняться:

а)  $3y + x + 1 \geq 0$ ; б)  $2x - y + 2 \geq 0$ ; в)  $7y - 6 \geq 0$ , следовательно, решением является пара  $(0, 1)$ . Ответ:  $(0, 1)$ .

### № 1245

$$1) \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ \sin^2 x + 2 \sin x(1 - \sin x) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ \sin^2 x + 2 \sin x - 2 \sin^2 x - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ -\sin^2 x + 2 \sin x - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

$$4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0, \quad \sin x = a, |a| \leq 1, \quad 4a^2 - 8a + 3 = 0,$$

$$a_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4}, \quad a_{1/2} = \frac{4 \pm 2}{4}, \quad a_1 = 1,5 > 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \text{ т.е.}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in Z, \quad \cos y = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\pm\pi}{3} + 2l\pi, \quad l \in Z.$$

Ответ:  $\left( (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z, \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z \right)$

$$2) \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x + 2 \sin x \sin y + 4 \cos^2 y = 4 \end{cases}, \quad \sin x = \frac{1}{2} - \sin y,$$

$$\cos^2 x + 2 \left( \frac{1}{2} - \sin y \right) \sin y + 4 \cos^2 y = 4,$$

$$1 - \left( \frac{1}{2} - \sin y \right)^2 + 1 \cdot \sin y - 2 \sin^2 y + 4 \cos^2 y = 4,$$

$$1 - \frac{1}{4} + \sin y - \sin^2 y + \sin y - 2 \sin^2 y + 4 - 4 \sin^2 y - 4 = 0,$$

$$-7 \sin^2 y + 2 \sin y + \frac{3}{4} = 0, \quad \sin y = a; |a| \leq 1, \quad 28a^2 - 8a - 3 = 0,$$

$$a_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{28} = \frac{4 \pm 10}{28}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{3}{14},$$

$$\text{а) } \sin y = \frac{1}{2}; \quad y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z, \quad \sin x = 0, x = \pi l, l \in Z,$$

$$\text{б) } \sin y = -\frac{3}{14}; \quad y = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{3}{14}\right) + n\pi, n \in Z,$$

$$\sin x = \frac{5}{7}, \quad x = (-1)^l \arcsin\left(\frac{5}{7}\right) + l\pi, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left( \pi l, l \in Z; (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z \right)$$

$$\left( (-1)^l \arcsin \frac{5}{7} + l\pi, l \in Z; (-1)^{n+1} \arcsin \frac{3}{14} + n\pi, n \in Z \right).$$

### № 1246

$$1) \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1 \end{cases} \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = 1 \end{cases} \text{ тогда } \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = 1, \text{ тогда}$$

$$\cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}, \quad \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, \text{ т.е.}$$

$$\sin(x - y) = 0, \quad x - y = \pi n, n \in Z, \quad x = \pi n + y, n \in Z,$$

$$\sin(y + \pi n) \cos y = -\frac{1}{2}, \quad (\sin y \cdot \cos \pi n + \cos y \sin \pi n) \cos y = -\frac{1}{2},$$

$$\text{а) } n = 2k + 1, \text{ тогда } -\sin y \cos y = -\frac{1}{2}, \quad \sin 2y = 1, \quad 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z;$$

$$\text{б) } n = 2k, \text{ тогда } \sin y \cos y = -\frac{1}{2}, \quad \sin 2y = -1, \quad 2y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left( \pi n + \left( \pm \frac{\pi}{4} + \pi l \right), \pm \frac{\pi}{4} + \pi l \right), l, n \in Z.$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y \end{cases} \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ тогда } \cos x \cos y = \frac{3}{4},$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\cos(x+y) = \frac{1}{2}; \quad x+y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} - y + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left( \cos(x-y) - \frac{1}{2} \right),$$

$$\cos(x-y) = 1; \quad x-y = 2\pi l, l \in Z,$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} - y + 2\pi n, n \in Z \\ y = x - 2\pi l, l \in Z \end{cases}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi(l+n) \quad y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi(l+n) - 2\pi l; \quad l, n \in Z$$

$$\text{Ответ: } \left( \pm \frac{\pi}{6} + \pi(l+n); \pm \frac{\pi}{6} + \pi(n-l) \right), l, n \in Z.$$

#### № 1247

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x+5}{3} - \frac{x}{6} < 3 - \frac{x+4}{2} \\ 1 - \frac{2x-8}{3} + \frac{4-3x}{2} < 2x - \frac{x+2}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} 3(2x-3) - 2(3x+5) - x - 3 \cdot 6 + 3(x+4) < 0 \\ 6 - 2(2x-8) + 3(4-3x) - 12x + 2(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-9-6x-10-x-18+3x+12 < 0 \\ 6-4x+16+12-9x-12x+2x+4 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-25 < 0 \\ -23x+38 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x < \frac{25}{2} \\ x > 1\frac{15}{23} \end{cases}, \quad \begin{cases} x < 12\frac{1}{2} \\ x > 1\frac{15}{23} \end{cases}$$

Ответ: наибольшее целое решение – это  $x = 12$ , наименьшее – это 2.

#### № 1248

$$\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x+2}{4} < \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{2} \\ \frac{x-2}{3} > 1 + \frac{x-5}{15} \end{cases}, \quad \begin{cases} 12(x+1) - 15(x+2) - 20(x-3) - 30(x-4) < 0 \\ 5(x-2) - 15 - 3(x-5) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x+12-15x-30-20x+60-30x+120 < 0 \\ 5x-10-15-3x+15 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -53x+162 < 0 \\ 2x-10 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x > -\frac{162}{53} \\ x > 5 \end{cases}$$

Ответ:  $x > 5$ .

#### № 1249

Примем длину эскалатора за 1, а время, за которое эскалатор поднимает неподвижно стоящего человека, за  $x$ , тогда  $\frac{1}{x}$  — скорость эскалатора,  $\frac{1}{180}$

— скорость пассажира, а  $\frac{1}{45}$  — скорость пассажира, поднимающегося по движущемуся эскалатору.

По условию  $\frac{1}{45} = \frac{1}{x} + \frac{1}{180}$ , откуда  $x = 60$ . Ответ: 60 с

**№ 1250**

Пусть собственная скорость теплохода  $x$ , тогда скорость движения по течению  $(x + 2)$ , а против  $-(x - 2)$ . Расстояние между пристанями составит  $(x + 2) \cdot 7$  или  $(x - 2) \cdot 9$ , следовательно  $(x - 2)9 = (x + 2) \cdot 7$ , откуда  $x = 16$ , следовательно, расстояние между пристанями 126 км.

**№ 1251**

Пусть  $x$  км/ч – планируемая скорость парохода, тогда истинная скорость  $x + 2,5$  км/ч. расстояние будет равно  $x \cdot 54$ , или  $(x + 2,5) \cdot 48$ . Следовательно,  $x \cdot 54 = (x + 2,5) \cdot 48$ ;

$54x - 48x = 120$ ,  $6x = 120$ ,  $x = 20$ , следовательно, скорость парохода 20 км/ч, а расстояние  $20 \cdot 54 = 1080$  км.

**№ 1252**

Примем объем работы за 1, а время выполнения при совместной работе за  $x$  дней. Тогда производительность I рабочего  $\frac{1}{24}$ , а II  $\frac{1}{48}$ , общая

$\frac{1}{24} + \frac{1}{48}$ . Следовательно, получаем уравнение:  $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{48}\right)x = 1$ ,

$$\frac{3}{48}x = 1; 3x = 48, x = 16. \quad \text{Ответ: за 16 дней.}$$

**№ 1253**

Пусть было освоено  $x$  га целинных земель, тогда остальная площадь составит  $174 - x$  га. С целинных земель собрано  $30x$  ц, а с остальных  $(174 - x) \cdot 22$  ц. По условию было собрано 4556 ц. Следовательно, составим уравнение:

$$(174 - x) \cdot 22 + 30x = 4556, \text{ откуда } x = 91. \quad \text{Ответ: 91 га.}$$

**№ 1254**

Пусть I число равно  $x$ , а II равно  $y$ . Тогда  $(x - y):xy = 1:24$  и  $x + y = 5(x - y)$ .

Составим систему уравнений:  $\begin{cases} 24(x - y) = xy \\ x + y = 5(x - y) \end{cases}$ , получим  $x = 12$ ,  $y = 8$ .

**№ 1255**

Пусть первая дробь равна  $x$ , а вторая дробь равна  $y$ . Тогда третья дробь равна  $1 - x - y$ . По условию  $x - y = 1 - x - y$  и  $x + y = 5(1 - x - y)$ .

Составим систему:

$$\begin{cases} x - y = 1 - x - y \\ x + y = 5 - 5x - 5y \end{cases}, \text{ откуда } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, \text{ тогда третья дробь } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Откуда: } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$$

**№ 1256**

Пусть дневная плановая норма –  $x$  деталей, тогда новая норма  $x + 9$  деталей.

360 деталей должны были изготовить за  $\frac{360}{x}$  дней. А 378 деталей за  $\frac{378}{x + 9}$

дней. По условию задачи  $\frac{360}{x}$  больше  $\frac{378}{x + 9}$  на 1. Составим уравнение:

$$\frac{360}{x} - \frac{378}{x+9} = 1, \text{ откуда } x = 45.$$

На самом деле бригада делала 54 детали, а за весь срок  $378+54=432$  детали.  
Ответ: 432 детали.

**№ 1257**

Пусть скорость катера  $x$  км/ч. По условию, скорость плота 3,6 км/ч. Путь катера 50 км, а плота 10 км. Время, затраченное на путь, будет равно  $\frac{30}{x+3,6} + \frac{20}{x-3,6}$  или  $\frac{10}{3,6}$ . Отсюда  $\frac{30}{x+3,6} + \frac{20}{x-3,6} = \frac{10}{3,6}$ , откуда  $x = 18$ .

**№ 1258**

Пусть стоимость 1 билета в I организации  $x$  копеек, тогда во II организации билет стоил  $x - 30$  копеек. I организация закупила  $\frac{3000}{x}$ , а II  $\frac{1800}{x-30}$

билетов. По условию  $\frac{3000}{x}$  больше  $\frac{1800}{x-30}$  на 5.

$$\text{Составим уравнение: } \frac{3000}{x} - \frac{1800}{x-30} = 5, \text{ откуда } x = 150 \text{ или } x = 120.$$

Следовательно, I организация купила 20 или 25 билетов, а II – 15 или 20.

**№ 1259**

Пусть скорость плота  $x$  км/ч, тогда скорость лодки  $x + 48$  км/ч. Время лодки  $\frac{17}{x+48}$  ч, а плота  $\frac{17}{x}$  ч. По условию  $\frac{17}{x}$  больше  $\frac{17}{x+48}$  на  $5\frac{1}{3}$ .

$$\text{Составим уравнение: } \frac{17}{x} - \frac{17}{x+48} = \frac{16}{3}$$

$$51x + 51 \cdot 48 - 51x = 16(x^2 + 48x), \quad 16x^2 + 16 \cdot 48x - 51 \cdot 48 = 0, \\ x^2 + 48x - 152 = 0, \text{ откуда } x = 3. \quad \text{Ответ: 3 км/ч.}$$

**№ 1260**

Пусть со II с 1 га собирали  $x$  ц, тогда на I участке с 1 га собирали

$x + 1$  ц. Площадь первого  $\frac{210}{x+1}$  га, а второго  $\frac{210}{x}$  га. По условию  $\frac{210}{x}$

больше  $\frac{210}{x+1}$  на 0,5. Составим уравнение:  $\frac{210}{x} - \frac{210}{x+1} = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = 20$ .

Следовательно, на II участке с 1 га собрано 20 ц, а на I участке – 21 ц.

**№ 1261**

Пусть  $x$  шагов делает ученик, тогда его брат делает  $x - 400$  шагов. Длина шага ученика  $\frac{700}{x}$  м, а длина шага брата  $\frac{700}{x-400}$  м. По условию  $\frac{700}{x-400}$

больше  $\frac{700}{x}$  на 0,2 м.

Составим уравнение:  $\frac{700}{x-400} - \frac{700}{x} = 0,2$ .

$3500x - 3500x + 1400000 = x^2 - 400x$ , откуда  $x=1400$ .

**№ 1262**

Пусть I число равно  $x$ , тогда II число  $xq$ , III –  $xq^2$ , IV –  $xq^3$ . По условию  $xq^2$  больше  $x$  на 9, а  $xq$  больше  $xq^3$  на 18.

Составим систему:  $\begin{cases} xq^2 - x = 9 \\ xq - xq^3 = 18 \end{cases}$ , откуда  $\begin{cases} x = 3 \\ q = -2 \end{cases}$

Следовательно, I число равно 3, II равно -6, III равно 12, IV равно -24.

**№ 1263**

1) По условию  $a_4 = 1$ , т.е.  $a_1 + 3d = 1$ , кроме того,

$S_3 = \frac{2a_1 + d \cdot 2}{2} \cdot 3 = (a_1 + d) \cdot 3$ , т.е.  $(a_1 + d) \cdot 3 = 0$

Составим систему уравнений:

$\begin{cases} a_1 + 3d = 1 \\ a_1 + d = 0 \end{cases} \begin{cases} 2d = 1 \\ a_1 = -d \end{cases} \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ a_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2)  $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ , тогда  $S_{12} = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 11}{2} = 27$ .

**№ 1264**

Пусть I число равно  $x$ , знаменатель геометрической прогрессии  $q$ . Тогда II число равно  $xq$ , а III число  $xq^2$ . Разность арифметической прогрессии  $xq^2 - xq$ , тогда IV число  $xq^2 + xq^2 - xq = 2xq^2 - xq$ . По условию задачи составим систему уравнений:

$\begin{cases} x + 2xq^2 - xq = 16 \\ xq + xq^2 = 12 \end{cases}$ , решая, получим:  $\begin{cases} q = 3 \\ x = 1 \end{cases}$  и  $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ x = 16 \end{cases}$

Следовательно, I число равно 1, II равно 3, III равно 9, IV равно 15, или числа равны 16, 8, 4, 0, соответственно. Ответ: 1, 3, 9, 15 или 16, 8, 4, 0.

**№ 1265**

Пусть  $x$  – первый член геометрической прогрессии, а  $y$  – ее знаменатель, тогда  $b_5 = x \cdot y^4$ ;  $b_8 = x \cdot y^7$ ,  $b_{11} = x \cdot y^{10}$ . По условию  $a_1 = x \cdot y^4$ ,  $a_2 = x \cdot y^7$ ,  $a_{10} = x \cdot y^{10}$ .

Тогда  $d = xy^7 - xy^4$  и  $a_{10} = a_1 + 9d = xy^4 + 9(xy^7 - xy^4)$ .

Составим уравнение:  $xy^{10} = xy^4 + 9xy^7 - 9xy^4$ ;  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$

Следовательно,  $y^6 = 9y^3 - 8$ ,  $y^6 - 9y^3 + 8 = 0$ ,

$y^3 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2}$ ;  $y^3 = 8$ ,  $y^3 = 1$ .



Следовательно,  $y = 2$  и  $y = 1$ . По условию

$$S_5 = \frac{x(y^5 - 1)}{y - 1} \text{ и } S_5 = 62, \text{ т.е. } 62 = \frac{x \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1}; x = 2$$

При  $y = 1$  имеем  $x + x + x + x + x = 62$ ,  $5x = 62$ ,  $x = 12\frac{2}{5}$ .

Таким образом, первый член геометрической прогрессии равен 2 или  $12\frac{2}{5}$ .

Ответ: 2 или  $12\frac{2}{5}$ .

### № 1266

1) Пусть  $a_1$  – первый член арифметической прогрессии, а  $d$  – ее разность. По условию  $a_1 > 0$ ,  $d > 0$ .

2)  $a_5 \cdot a_6$  больше  $a_1 \cdot a_2$  в 33 раза, следовательно, можем составить уравнение:  $(a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 5d) = a_1(a_1 + d) \cdot 33$ ;  $a_1^2 + 9da_1 + 20d^2 = 33a_1^2 + 33a_1d$ ;

$$32a_1^2 + 24a_1d - 20d^2 = 0, \text{ откуда } a_1 = \frac{-10d}{8}, a_1 = \frac{d}{2}, \text{ но } a_1 > 0, d > 0,$$

следовательно,  $a_1 = \frac{d}{2}$ .

$$3) a_5 \cdot a_2 = (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + d) = 3.$$

### № 1267

В результате построений получается множество подобных треугольников с  $k = \frac{1}{2}$ , площади которых образуют бесконечную геометрическую

прогрессию, в ней  $b_1 = 12$ ,  $q = \frac{1}{4}$ , следовательно  $S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{12}{1 - \frac{1}{4}} = 16 \text{ см}^2$ .

№ 1268  $y = -\frac{5}{2}x + b$   $(-2; 3); 3 = -\frac{5}{2} \cdot (-2) + b$   
 $b = -2$

№ 1269  $y = kx + 3$   $(-1; 4); 4 = -1 \cdot k + 3$   
 $k = -1$

### № 1270

$$y = kx + b$$

$$1) A(-1; -2), B(3; 2) \begin{cases} -2 = -1 \cdot k + b \\ 2 = 3k + b \end{cases}; \begin{cases} 2 = k - b \\ 2 = 3(b + 2) + b \end{cases}; k = 1, b = -1;$$

$$2) A(2;1), B(1;2), \begin{cases} 1 = 2k + b \\ 2 = k + b \end{cases}; \begin{cases} 1 = 2k + 2 - k \\ b = 2 - k \end{cases}; k = -1, b = 3;$$

$$3) A(4;2), B(-4;-3), \begin{cases} 2 = 4k + b \\ -3 = -4k + b \end{cases}; \begin{cases} b = 2 - 4k \\ 3 = 4k - 2 + 4k \end{cases}; k = \frac{5}{8}, b = -\frac{1}{2};$$

$$4) A(-2;-2), B(3;-2), \begin{cases} -2 = -2k + b \\ -2 = 3k + b \end{cases}; \begin{cases} b = 2k - 2 \\ -2 = 3k + 2k - 2 \end{cases}; \begin{cases} b = 2k - 2 \\ k = 0 \end{cases}; k = 0, b = -2$$

**№ 1271**

$A(-3;2), B(-2;2), C(3;0)$

Для прямой, проходящей через  $B$  и  $C$ , справедлива система:

$$\begin{cases} 2 = -2k + b \\ 0 = 3k + b \end{cases}; k = -\frac{2}{5}, b = \frac{6}{5}k, \text{ таким образом } y_1 = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}.$$

У прямой, проходящей через  $A$  коэффициент  $k$  равен  $-\frac{2}{5}$  вследствие параллельности ее и первой прямой  $BC$ .

Справедливо уравнение:  $2 = -3\left(-\frac{2}{5}\right) + b$ , откуда  $b = \frac{4}{5}$ ,

тогда  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ . Ответ:  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}, y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ .

**№ 1272**

$$x + \frac{y}{2} = 1$$

1)  $A(-1;4) -1 + \frac{4}{2} = 1$  принадлежит; 2)  $A(0;3) 0 + \frac{3}{2} \neq 1$  не принадлежит

3)  $A(1;0) 1 + \frac{0}{2} = 1$  принадлежит 4)  $A\left(\frac{3}{2}; -1\right) \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$  принадлежит.

**№ 1273**

$y = -\frac{3}{4}x + 2$ ; 1)  $x = 0, y = 2, A(0,2)$  – точка пересечения с  $Oy$ ;

$y = 0, x = \frac{8}{3}, B\left(\frac{8}{3}, 0\right)$  – точка пересечения с  $Ox$ ;

2)  $AB = \sqrt{\left(0 - \frac{8}{3}\right)^2 + (2 - 0)^2} = \frac{10}{3}$

3) Из  $\triangle AOC : OC = \sqrt{4 - x^2}$  (1)

$$4) \text{ Из } \triangle BOC : OC = \sqrt{\frac{64}{9} - \left(\frac{100}{9} - \frac{20}{3}x + x^2\right)} \quad (2)$$

$$\text{Из (1) и (2): } x = \frac{6}{5} = AC; \quad OC = \sqrt{4 - \frac{36}{25}} = \frac{8}{5}.$$

№ 1274

$$y = 3x - 1; \quad 1) 3x - 1 > 0, x < \frac{1}{3}; \quad 2) 3x - 1 < 0, x < \frac{1}{3}.$$

№ 1275

$$y^2 - 2x + 1; \quad 1) -2x + 1 > 0, x < \frac{1}{2}; \quad 2) -2x + 1 < 0, x > \frac{1}{2}.$$

№ 1276

$$y = 2x - 1, y = 3x - 2, \quad 2x - 1 < 3x - 2; x > 1.$$

№ 1277

$$y = (\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3}, y = (1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} > (1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}; x < -\sqrt{3}$$

№ 1278

$y = 2x - 3$ . Т.к. линейная функция вида  $y = kx + b$  возрастает при  $k > 0$  и данная функция линейная и  $k = 2 > 0$ , то она возрастает.

№ 1279

$$y = -\sqrt{3}x - 3$$

Т.к. функция  $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$  линейная и  $k = -3 < 0$ , то она убывает.

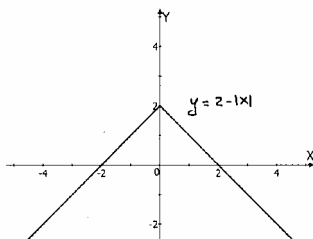
№ 1280

1) Графики линейных функций пересекаются, если коэффициенты  $k$  у них различны.

$$y = 3x - 2 \text{ и } y = 3x + 1 \text{ параллельны}$$

2)  $y = 3x - 2$  и  $y = 3x + 1$  пересекаются.

№ 1281

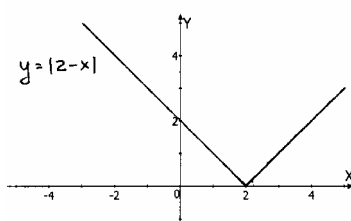


$$1) y = 2 - |x|$$

$$a) y = 2 - x$$

б) симметрия относительно  $Oy$

в) пересечений нет.

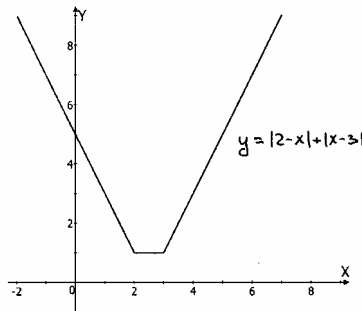


2)  $y = |2 - x|$   
 точки пересечения  
 $|2 - x| = 3, x = -1, y = 3$   
 и  $x = 5, y = 3$

3)  $y = |2 - x| + |x - 3|$

а)  $\begin{cases} x \geq 3 \\ y = x - 2 + x - 3 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 2x - 5 \end{cases};$  б)  $\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ y = x - 2 - x - 3 \end{cases}; \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ y = 1 \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} x < 2 \\ y = 2 - x - x + 3 \end{cases}; \begin{cases} x < 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

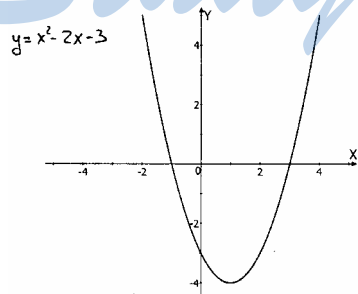
точки пересечения:  $y = |2 - x| + |x - 3| = 3, x = 4, y = 3$  и  $x = 1, y = 3$ .



**№ 1282**

$y = x^2 - 2x - 3$

1) графиком функции служит парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке  $(+1; -4)$ .



2) Найдем  $y'$ :  
 $y' = 2x - 2 = 2(x - 1)$   
 $y' > 0$  при  $x > 1$ , след. на  $x \in [1; 4)$

функция возрастает

3) Наименьшее значение в точке  $x = 1$ , равное  $-4$

4)  $x^2 - 2x - 3 > -2x + 1, x^2 - 4 > 0$   
 при  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

5)  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(2) = 2, f(2) = -3$$

$$y = -3 + 2(x-2) = -3 + 2x - 4$$

$$y = 2x - 7 \text{ — уравнение касательной в точке } x_0 = 2.$$

**№ 1283**

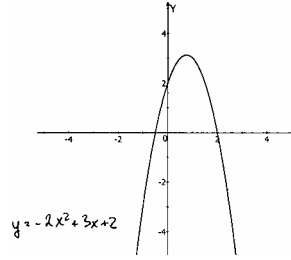
$$y = -2x^2 + 3x + 2$$

1) график функции – парабола, ветви направлены вниз; вершина с координатами

$$x_0 = \frac{3}{4}, y_0 = 3\frac{1}{8},$$

точки пересечения с 0y: (0;2);

с 0x: (2;0), (-1/2; 0)  $y(x) < 0$  при  $x > 2$  и  $x < -1/2$



2)  $y' - 4x + 3 < 0$  при  $x > \frac{3}{4}$ , следовательно на  $[1;2]$  функция убывает

3) наибольшее значение функция принимает в точке  $x = \frac{3}{4}$

4)  $y = 3x + 2, -2x^2 + 3x + 2 < 3x + 2, -2x^2 < 0,$   
 $x^2 > 0$ , следовательно при всех  $x \neq 0$ ;

5)  $y = 3; 3 = -2x^2 + 3x + 2; 2x^2 - 3x + 1 = 0; x = 1, x = \frac{1}{2};$

$y'(1) = -1, y = -x + 4$  - уравнение касательной в  $x = 1$

$y'(\frac{1}{2}) = 1; y = x + 2,5$  - уравнение касательной в  $x = \frac{1}{2}$

**№ 1284**

1)  $y = x^2$  и  $y = x + 6, x^2 = x + 6,$   
 $x^2 - x - 6 = 0 \quad D = 1 + 24$  - решение есть, след. пересекаются.

2)  $y = \frac{3}{x}$  и  $y = 4(x+1), \frac{3}{x} = 4x+1; 3 = 4x^2 + x, 4x^2 + x - 3 = 0,$   
 $D = 1 + 48$  - решение есть, след. пересекаются.

3)  $y = \frac{1}{8}x^2$  и  $y = \frac{1}{x}, \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{x}, x^3 = 8, x = 2$ , след. пересекаются.

4)  $y = 2x - 1$  и  $y = \frac{1}{x}, 2x - 1 = \frac{1}{x},$

$2x^2 - x - 1 = 0 \quad D = 1 + 8$  - решение есть, след. пересекаются.

**№ 1285**

1)  $y = 2^x + 2^{-x}, y(-x) = 2^{-x} + 2^x = y(x)$  - функция четная

2)  $y = 3^x - 3^{-x}, y(-x) = 3^{-x} - 3^x = -y(x)$  - функция нечетная

$$3) y = \ln \frac{3+x}{3-x}, \quad y(-x) = \ln \frac{3-x}{3+x} = -\ln \frac{3+x}{3-x} = -y(x) \text{ — функция не-}$$

четная

$$4) y = \left| \ln \frac{5+x}{5-x} \right|; \quad y(-x) = y(x) \text{ — функция четная}$$

**№ 1286**

$$1) y = 2x^2 - 1, \quad y(-x) = 2(-x)^2 - 1 = y(x) \text{ — функция четная}$$

$$2) y = x - x^3, \quad y(-x) = -x + x^3 = y(-x) \text{ — функция нечетная}$$

$$3) y = x^5 - \frac{1}{x}, \quad y(-x) = -x^5 + \frac{1}{x} = y(x) \text{ — функция нечетная}$$

$$4) y = \frac{\sin(x)}{x}, \quad y(-x) = \frac{-\sin x}{x} = y(x) \text{ — функция четная}$$

**№ 1287**

$$1) y = x \sin x, \quad y(-x) = -x(-\sin x) = y(x) \text{ — функция четная}$$

$$2) y = x^2 \cos x, \quad y(-x) = (-x)^2 \cos x = y(x) \text{ — функция четная}$$

$$3) y = x + \sin x, \quad y(-x) = -x - \sin x = -y(x) \text{ — функция нечетная}$$

$$4) y = x + \cos x, \quad y(-x) = -x + \cos x \text{ — функция не является четной и}$$

не является нечетной.

**№ 1288**

$$1) y = \cos \frac{3x}{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3} \quad 2) y = 2 \sin 0,6x, \quad T = \frac{2\pi}{0,6} = \frac{10}{3} \pi$$

**№ 1289**

$$1). y = \cos 3x; 3T = 2\pi; T = \frac{2\pi}{3}; \quad 2). y = \sin \frac{x}{5}; \frac{T}{5} = 2\pi; T = 10\pi;$$

$$3). y = \operatorname{tg} 5x; 5T = \pi; T = \frac{\pi}{5};$$

$$4). y = \sin x + \operatorname{tg} x; y = \frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x} = \frac{\sin x (\cos x + 1)}{\cos x} = \operatorname{tg} x (\cos x + 1);$$

Наименьший период для  $\sin x$   $2\pi$ , для  $\operatorname{tg} x$   $2\pi$  тоже являются периодом. Следовательно для  $y = \sin x + 69x$   $T=2\pi$ .

**№ 1290**

$$1) y = -x^4 + 4x^2 - 5, \quad y(-x) = -x^4 + 4x^2 - 5 = y(x) \text{ — функция четная}$$

$$2) y = x^3 - 4x, \quad y(-x) = -x^3 + 4x = -y(x) \text{ — функция нечетная}$$

№ 1291

$$y = ax^2 + bx - 4, \quad y(1) = 0, \quad y(4) = 0,$$

$$\begin{cases} 0 = a + b - 4 \\ 0 = 16a + 4b - 4 \end{cases} \cdot \begin{cases} b = 4 - a \\ 16a + 16 - 4a = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} b = 4 - a \\ 12a + 12 = 0 \end{cases} \begin{cases} b = 5 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$y = -x^2 + 5b - 4.$$

Наибольшее значение функция принимает в точке  $x = \frac{5}{2}$ ;  $y\left(\frac{5}{2}\right) = 2,25$

№ 1292

$$1) \quad y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \left( \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y &= 2 \cos 2x + \sin^2 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 2(\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x))) = \\ &= 2(1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x - 2\sin^4 x) = 2 - 4\sin^2 x \end{aligned}$$

$1 \geq \sin^2 x \geq 0$ ,  $y_{\max} = 2$ ,  $y_{\min} = -2$ . (Опечатка в ответе задачника).

№ 1293

$$1) \quad y = 2x^2 - 5x + 6, \quad \text{с осью } 0y: x = 0, y = 6 \Rightarrow (0, 6),$$

с осью  $0x$  пересечений нет, т.к.  $D < 0$ ;

$$2) \quad y = 2x^2 - 5x + 2, \quad \text{с осью } 0y: x = 0, y = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

$$\text{с осью } 0x: x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}, \quad (2, 0) \text{ и } \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

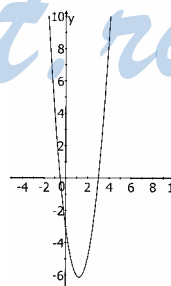
№ 1294

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y(-2) = 15, \quad y(3) = 0, \quad y(0) = -3$$

$$\begin{cases} 15 = 4a - 2b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ -3 = c \end{cases} \begin{cases} c = -3 \\ -3a + 1 = b \\ 15 = 4a + 6a - 2 - 3 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$$

$y = 2x^2 - 5x - 3$  — график функции — парабола с

вершиной в точке  $\left(\frac{5}{4}, -6\frac{1}{8}\right)$ , ветви которой направлены вверх.



№ 1295

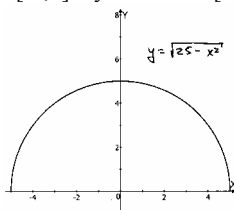
$$y = \sqrt{25 - x^2},$$

1)  $25 - x^2 \geq 0, (5 - x)(5 + x) \geq 0; D(y) = [-5; 5];$

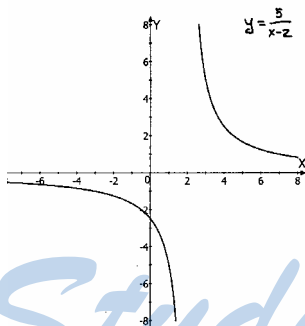
2)  $y(-x) = \sqrt{25 - x^2} = y(x)$  — четная;

3)  $y' = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}, y' = 0$  при  $x = 0$ ;

4) т.к. функция четная, то график функции симметричен относительно  $Oy$ . Функция возрастает на  $[-5; 0]$  и убывает на  $[0; 5]$ .



№ 1296



$$y = \frac{5}{x - 2}$$

1)  $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ ; 2) Ни четная, ни нечетная, неперiodическая

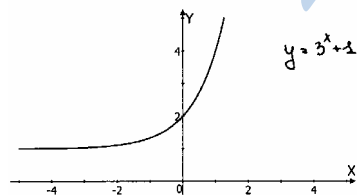
3)  $y' = \frac{-5}{(x - 2)^2}, y' \neq 0$ , следовательно-

но стационарных точек нет.

4)  $Oy: x = 0, y = -1,25, Ox:$  пересечений нет;

5)  $y' < 0$  при  $x \neq 2$ , следовательно функция убывает.

№ 1297



1)  $y = 3^x + 1$

а)  $D(y) = (-\infty; +\infty)$

б) функция не является четной и нечетной

в)  $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$

г)  $Ox: y = 0$  — пересечений нет,  $Oy: x = 0, y = 2$

д)  $y' > 0, y' \neq 0$ , следовательно функция возрастает.



$$2) y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$$

a)  $D(y) = (-\infty; +\infty)$

б) функция не является четной и нечетной

в)  $y' = \frac{(0,5)^x}{\ln(0,5)}$

г)  $Ox: y = 0$  – пересечений нет

$Oy: x = 0, y = -3$

д)  $y' > 0, y' \neq 0$ , следовательно функция возрастает

3)  $y = \log_2(x+1)$

a)  $D(y): x+1 > 0$ , т.е.  $x > -1$

б) функция не является четной и нечетной

в)  $y' = \frac{1}{(x+1)\ln 2}$

г)  $Ox: y = 0, x = 0$ ;  $Oy: x = 0, y = 0$

д)  $y' > 0$  при  $x > -1$  — функция возрастает

$y' < 0$  при  $x < -1$ , но на данном промежутке функция не существует.

4)  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

a)  $D(y): x-1 > 0, x > 1$

б) функция не является четной и не является нечетной

в)  $y' = \frac{1}{(x-1)\ln \frac{1}{3}}$

г)  $Ox: y = 0, x = 2$

$Oy: x = 0$  – пересечений нет

д)  $y' > 0$  при  $x > 1$ , функция возрастает

$y' < 0$  при  $x < 1$ , но функция на данном промежутке не существует.

### № 1298

1)  $y = 2^{x-1} - 3$

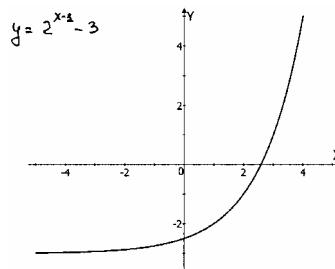
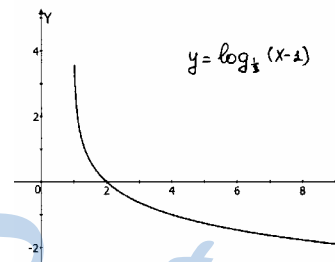
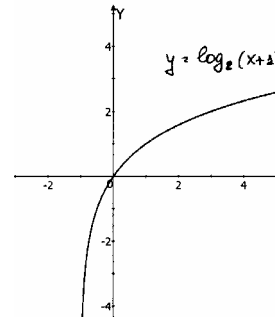
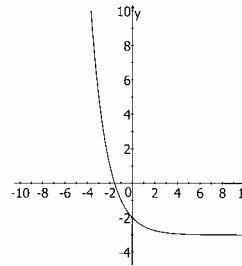
a)  $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$

б) функция не является четной и не является нечетной

в)  $y' = \frac{2^{x-1}}{\ln 2}$

г)  $Ox: y = 0, x = \log_2 3 + 1$

$Oy: x = 0, y = -2,5$



д)  $y' > 0$  при  $x > -2$   
 $y' < 0$  при  $x < -2$ , но на данном интервале функция не существует

2).  $y = \log_2(x+2) + 3$ ; а)  $D(y) : x+2 > 0; x > -2$ ;

б) функция не обладает свойствами четности или нечетности;

в)  $y' = \frac{1}{(x+2)\ln 2}$ ; г)  $Ox : y=0$  при  $x = -2 + \frac{1}{8} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$ ;

$Oy : x=0$  при  $y=4$ ;

д).  $y' > 0$  при  $x > -2$ ;  $y' < 0$  при  $x < -2$ , но на этом интервале функция не существует, следовательно, данная функция возрастает на области определения.

### № 1299

1)  $y = 2^x + \lg(6-3x)$ ,  $D(y) : 6-3x > 0, x < 2$ ;

2)  $3^{-x} - 2 \ln(2x+4)$ ,  $D(y) : 2x+4 > 0, x > -2$ ;

3)  $y = \frac{1}{\cos 2x}$ ,  $D(y) : \cos 2x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$ ;

4)  $y = tg \frac{x}{4}$ ,  $D(y) : \cos \frac{x}{4} \neq 0, x \neq 2\pi + 4n\pi, n \in Z$ .

### № 1300

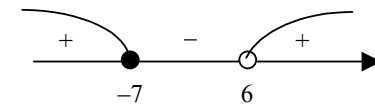
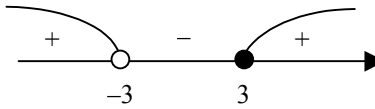
1)  $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}, \frac{x-3}{x+3} \geq 0$

$D(y) : x \in (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$

2)  $y = \sqrt{\log_3 \frac{2x+1}{x-6}}$

$\frac{2x+1}{x-6} \geq 1; \frac{2x+1-x+6}{x-6} \geq 0;$

$\frac{x+7}{x-6} \geq 0$   
 $D(y) : x \in (-\infty; -7] \cup (6; +\infty)$ .



### № 1301

1)  $y = \sqrt{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}$ ,

$D(y) : \frac{(x-8)(x+2)}{(x-11)(x-1)} \geq 0; x \in (-\infty; -2] \cup (1; 8] \cup (11; +\infty)$ ;

2)  $y = \sqrt{\log_{1/2}(x-3)-1}$ ,

$D(y) : \begin{cases} \log_{1/2}(x-3)-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x-3 \leq \frac{1}{2} \\ x-3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3\frac{1}{2} \\ x > 3 \end{cases}; x \in \left(3; 3\frac{1}{2}\right]$ .

**№ 1302**

$$1) y = \sqrt{\log_{0,8}(x^2 - 5x + 7)}, \quad D(y) \begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0 \\ \log_{0,8}(x^2 - 5x + 7) \geq 0 \end{cases};$$

$$x^2 - 5x + 7 = 0; \quad D < 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 7 > 0;$$

$$x^2 - 5x + 7 \leq 1; \quad x^2 - 5x + 6 \leq 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x \in (2; 3) \end{cases} \quad x \in (2; 3);$$

$$2) y = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 9)},$$

$$D(y): \begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ \log_{0,5}(x^2 - 9) \geq 0 \end{cases}; \quad x \in [-\sqrt{10}; -3] \cup (3; \sqrt{10}].$$

**№ 1303**

$$1) y = x^2 + 6x + 3, \quad x_0 = -\frac{6}{2} = -3, \quad y_0 = -6, \text{ след. } y \geq -6;$$

$$2) y = -2x^2 + 8x - 1, \quad x_0 = \frac{-8}{-4} = 2, \quad y_0 = 7, \text{ след. } y \leq 7;$$

$$3) y = e^x + 1, \quad e^x > 0, \text{ след. } y > 1;$$

$$4) y = 2 + \frac{2}{x}, \quad y - 2 = \frac{2}{x}; \quad x \neq 0, \quad \frac{2}{x} \neq 0 \Rightarrow y \neq 2.$$

**№ 1304**

$$1) y = 0,5 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad -1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \text{ след. } y \in [-0,5; 1,5];$$

$$2) y = 0,5 \cos x + \sin x; \quad y = \sqrt{1,25} \cos(\alpha - x); \quad \alpha = \arccos \frac{0,5}{\sqrt{1,25}};$$

$$-\sqrt{1,25} \leq \sqrt{1,25} \cos x \leq \sqrt{1,25}; \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \text{ след. } y \in [-\sqrt{1,25}; \sqrt{1,25}]$$

**№ 1305**

$$1) f(x) = \sin x + \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad k = f'(x) = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = -1;$$

$$2) f(x) = \cos 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad k = f'(x_0) = -3 \sin \frac{\pi}{2} = -3.$$

**№ 1306**

$$1) f(x) = \frac{1}{4x^2} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

$$f'(1) = -1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4};$$

$$2) f(x) = 2x\sqrt{x}, \quad x_0 = \frac{1}{3}, \quad f'(x) = (2x^{3/2})' = 3x^{1/2},$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

**№ 1307**

$$1) f(x) = \frac{3}{4x\sqrt{x}}, \quad x_0 = \frac{1}{4}, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{4}x^{-3/2}\right)' = -\frac{9}{8}x^{-5/2}, \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = -36,$$

$$y = 6 - 36\left(x - \frac{1}{4}\right); \quad y = 15 - 36x$$

$$2) f(x) = 2x^4 - x^2 + 4, \quad x_0 = -1, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(x) = 8x^3 - 2x, \quad f'(-1) = -6, \quad y = 5 - 6(x + 1); \quad y = -1 - 6x.$$

**№ 1308**

$$y = x^3 - x + 1 = f(x). \quad \text{Точка пересечения } (0,1), \text{ т.е. } x_0 = 0,$$

$$g = f(x) + f'(x_0)(x - x_0), \quad f'(x) = 3x^2 - 1, \quad f'(0) = -1 = k, \quad \text{следовательно } k = -1.$$

**№ 1309**

$$y = 3x^3 - 1 = f(x), \quad y = 2, \quad 2 = 3x^3 - 1, \quad x = 1,$$

$$f'(x) = 9x^2; \quad f'(1) = 9, \quad k = f'(1) = 9 \cdot 1 = 9.$$

**№ 1310**

$$y = 4x - 3, \quad y = 6 - 2x + x^2.$$

Приравняем  $4x - 3$  и  $6 - 2x + x^2$ ,  $4x - 3 = 6 - 2x + x^2$ ,  
 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ,  $(x - 3)^2 = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 9$ . Ответ: (3; 9).

**№ 1311**

$$y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1, \quad y' = 12x^2 - 18x + 6.$$

По условию  $k = y'(x_0) = 0$ , где  $x_0$  — точка касания;

$$12x^2 - 18x + 6 = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0,5; \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 2,25. \quad \text{Ответ: } (1; 2), (0,5; 2,25).$$

**№ 1312**

$$y = 3x^2 + 7x + 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \text{тогда } \operatorname{tg}\alpha = 1 = y'(x_0), \quad \text{где } x_0 \text{ — точка касания;}$$

$$y' = 6x + 7 = 1, \quad x = -1, \quad y = -3. \quad \text{Ответ: } (-1; -3).$$

**№ 1313**

$$1) f(x) = x \ln 2x, \quad x_0 = 0,5, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(x) = \ln 2x + \frac{x}{2x} \cdot 2 = \ln 2x + 1, \quad f'(0,5) = 0 + 1,$$

$$y = 0 + 1 \left( x - \frac{1}{2} \right); \quad y = x - \frac{1}{2};$$

$$2) f(x) = 2^{-x}, \quad x_0 = 1, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad f'(x) = -2^{-x} \ln 2,$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \ln 2, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2(x - 1) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2 - x \ln 2).$$

**№ 1314**

$$y = x^3 - x^2 - 7x + 6, \quad M(2; -4), \quad y' = 3x^2 - 2x - 7,$$

$$y'(2) = 12 - 4 - 7 = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = y'(2) = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

**№ 1315**

$$y = x^2 \cdot e^{-x}, \quad x = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = y'(1), \quad y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x},$$

$$y'(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{e}.$$

**№ 1316**

$$y = \frac{2}{3} \cos \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right), \quad x = \frac{\pi}{3},$$

$$y' = -2 \sin \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right); \quad y' \left( \frac{\pi}{3} \right) = -1, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

**№ 1317**

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}, \quad \frac{x^3 + 1}{3} = 0, \quad x = -1; \quad y = f(-1) + f'(-1)(x + 1),$$

$$f'(x) = x^2; \quad f'(-1) = 1, \quad y = x + 1.$$

**№ 1318**

$$f(x) = \sqrt{x^3} + 1, \quad x = 4, \quad y = f(4) + f'(4)(x - 4),$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}; \quad f'(4) = 3, \quad y = 9 + 3(x - 4); \quad y = 3x - 3.$$

**№ 1319**

$$1) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

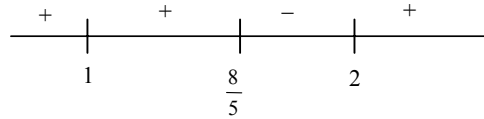
Функция возрастает при  $x < 0$

$$2) y = \frac{x^2 - 1}{x}; \quad y' = \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Функция возрастает при  $x \neq 0$

**№ 1320**

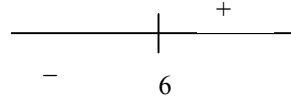
$$1) y = (x-1)^3(x-2)^2; \quad y' = 3(x-1)^2(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^3 = \\ = (x-1)^2(x-2)(3(x-2) + 2(x-1)) = (x-1)^2(x-2)(5x-8)$$



$x = \frac{8}{5}$  — точка максимума;  $x = 2$  — точка минимума;

$$2) y = 4 + (6-x)^4; \quad y' = -4(6-x)^3$$

$x = 6$  — точка минимума.



**№ 1321**

$$1) y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}; \quad y' = \frac{(6x+4)(x^2+x+1) - (2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 6x^2 + 6x + 4x^2 + 4x + 4}{(x^2+x+1)^2} -$$

$$- \frac{6x^3 + 8x^2 + 8x + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$



$x = -2$  — точка минимума;  $x = 0$  — точка максимума;

$$2) y = \frac{x^2 + 6x + 3}{3x + 4}; \quad y' = \frac{(2x+6)(3x+4) - 3(x^2+6x+3)}{(3x+4)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 26x + 24 - 3x^2 - 18x - 9}{(3x+4)^2} = \frac{3x^2 + 8x + 15}{(3x+4)^2} > 0, \quad \text{следовательно,}$$

функция возрастает на всей числовой, за исключением точки  $x = -\frac{4}{3}$ , в которой функция не определена.

Следовательно нет точек максимума и минимума.

**№ 1322**

$$1) y = 2 \sin x + \sin 2x \quad \left[0; \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$y' = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 2 \cdot 2 \cos \frac{3}{2}x \cdot \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos \frac{3}{2}x > 0 \text{ при } x \in (0; \pi) \quad \cos \frac{x}{2} > 0 \text{ при } x \in (0; \pi)$$

$$\cos \frac{3x}{2} = 0 \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \quad \cos \frac{x}{2} = 0 \quad x = \pi + 2\pi n,$$

$$y(0) = 0 \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}, \quad y(\pi) = 0,$$

$$\text{наиб.: } y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}; \quad \text{наим.: } y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2;$$

$$2) y = 2 \sin x + \cos 2x \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2 \cos x(1 - 2 \sin x),$$

$$\cos x > 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad 1 - 2 \sin x > 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right), \text{ следова-}$$

тельно  $y = 1,5$  – точка максимума,  $y = 1$  – точка минимума.

**№ 1323**

$$1) y = \sqrt{x+5} \quad [-1; 4], \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0, \text{ следовательно,}$$

$$y = 2 \text{ – минимум; } y = 3 \text{ – максимум;}$$

$$2) y = \sin x + 2\sqrt{2} \cos x \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y' = \cos x - 2\sqrt{2} \sin x = 3 \left( \frac{1}{3} \cos x - \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin x \right) = 3 \cos(\alpha + x) = 0,$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}, \quad \cos(\alpha + x) = 0 \quad \alpha + x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\alpha - \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2} \leq -\alpha \leq \pi, \quad -\pi \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{2}, \text{ что невозможно}$$

$$y(0) = 2\sqrt{2}; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \text{наим.: } y = 1; \quad \text{наиб.: } y = 2\sqrt{2}.$$

**№ 1324**

$$1) y = \ln x - x \quad [0,5; 4), \quad y' = \frac{1}{x} - 1 = 0,$$

$$x = 1; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{1}{2}; \quad y(4) = \ln 4 - 4$$

$$y(1) = -1; \text{наим. } y(4) = \ln 4 - 4 \text{ наиб. } y(1) = -1$$

$$2) y = x\sqrt{1-x^2} \quad [0;1],$$

$$y' = \sqrt{1-x^2}; \quad \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0; \quad x^2 = \frac{1}{2}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 0, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \text{Наим. } y = 0; \text{Наиб. } y = \frac{1}{2}.$$

### № 1325

Обозначим радиус основания цилиндра через  $r$ , тогда объем цилиндра  $V = \pi r^2(3-r) = 3\pi r^2 - 2\pi r^3$ ,  $V = 6\pi r - 3 \cdot 2\pi r^2 = 6\pi r(1-r)$ .

Функция  $V(r)$  возрастает, при  $0 < r < 1$  и убывает при  $r < 0$  и  $r > 1$ , следовательно максимум функции  $V$  будет, при  $r = 1$ .

### № 1326

Площадь полной поверхности цилиндра  $S = 54\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2$ , где  $r$  – радиус основания, а  $h$  – высота, тогда объем  $V = \pi r^2 h$ ,  $S = 54\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2$ ,

$$h = \frac{27-r^2}{r}, \text{ тогда } V = \frac{\pi r^2(27-r^2)}{r} = \pi(27r^2 - r^3),$$

$V' = \pi(27 - 3r^2) = 3\pi(9 - r^2)$ , тогда максимум  $V$  будет в точке  $r = 3$ ,  $h = 6$ , тогда максимальный объем  $V_{\max} = 54\pi$

### № 1327

Обозначим за  $x$  сторону основания, а за  $h$  – высоту пирамиды, тогда по условию  $x + h = 9$ ;  $V = \frac{1}{4\sqrt{3}}x^2(9-x)$ , и так как объем максимальный, то

$$V' = x\left(\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right), \quad V' = 0, \text{ тогда } x = 6.$$

### № 1328

Обозначим за  $x$  сторону основания, а за  $h$  – высоту призмы, тогда  $V = x^2 \cdot h$ , где  $x^2$  выражается через  $h$  и длину диагонали по формуле:

$x^2 = \frac{12-h^2}{2}$ , тогда  $V = \frac{12-h^2}{2} \cdot h$ ,  $V' = 6 - \frac{3}{2}h^2$ , откуда находим, что максимум достигается при  $h = 2$ .

### № 1329

$$f(x) = x^{-2} + \cos x; \quad M\left(0,5\pi; -\frac{2}{\pi}\right)$$

первообразная:  $f_1(x) = -x^{-1} + \sin x + c$ , т.к.



$$f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} \text{ запишем: } -\frac{2}{\pi} + 1 + c = -\frac{2}{\pi}, \text{ откуда } c = -1, \text{ следовательно}$$

первообразная имеет вид:  $y_1 = -x^{-1} + \sin x - 1$ .

**№ 1330**

$$f(x) = x^2(2x-3) - 12(3x-2), \quad -3 \leq x \leq 6$$

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 36x + 24) = 6x^2 - 6x - 36;$$

Функция возрастает при  $x < -2$  и  $x > 3$ , и убывает при  $-2 < x < 3$

$$f(-2) = 68, \quad f(-3) = 51, \quad f(3) = -57, \quad f(6) = 132. \text{ Ответ: } -57 \text{ и } 132.$$

**№ 1331**

$$1) f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} - 9 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x} (\ln^2 x - 3 \ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } \frac{6}{x} (\ln^2 x - 3 \ln x + 2) = 0;$$

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}, \quad \ln x = 2 \text{ и } \ln x = 1, \text{ т.е. } x = e^2 \text{ и } x = e;$$

$$2) e^2 \in [e^{3/4}, e^3], \quad e \in [e^{3/4}, e^3];$$

$$3) f(e^3) = 9, \quad f(e^{3/4}) = 4 \frac{25}{32}, \quad f(e^2) = 4, \quad f(e) = 5. \text{ Ответ: } 4 \text{ и } 9.$$

**№ 1332**

$$y = x^2, \quad A\left(2; \frac{1}{2}\right);$$

$$a) d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2; \quad A\left(2; \frac{1}{2}\right), \text{ следовательно } x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2},$$

$$X(x; x^2), \text{ следовательно } x_2 = x, \quad y_2 = x^2;$$

$$d^2 = (2-x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x^2\right)^2; \quad x > 0$$

$$b) \text{ рассмотрим } f(x) = (2-x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \text{ и найдем ее наименьшее}$$

значение при  $x > 0$ .

$$f'(x) = \left(4 - 4x + x^2 + \frac{1}{4} - x^2 + x^4\right)' = \left(4\frac{1}{4} - 4x + x^4\right)' = -4 + 4x^3;$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } -4 + 4x^3 = 0, \quad x^3 - 1, \quad x = 1 - \text{ стационарная точка}$$

При переходе через единственную стационарную точку  $x = 1$  производная меняет знак с «-» на «+», след. функция принимает в ней наименьшее значение. Итак, расстояние будет наименьшим от  $A$  до точки  $(1;1)$ .

**№ 1333**

$AD$  – основание трапеции, поэтому  $BC(x)$  – отрезок, параллельный  $AD$ .

$$S(x) = \frac{1}{2}(AD + BC(x)) \cdot h(x), \text{ причем } AD = 1,$$

$$BC(x) = 2x, \quad h(x) = 1 + (1 - x^2) = 2 - x^2, \text{ т.т.}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(1 + 2x)(2 - x^2) = \frac{1}{2}(2 + 4x - x^2 - 2x^3) = \\ &= 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - x^3, \text{ где } 0 < x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Рассмотрим } S'(x): S'(x) = 2 - x - 3x^2; S'(x) = 0 \text{ при } x = -1 \text{ или } x = \frac{2}{3}$$

Из полученных критических точек только  $x = \frac{2}{3}$  лежит в промежутке  $(0;1]$ ; при переходе через эту точку  $S'(x)$  меняет знак с «+» на «-», т.е. это точка максимума.

Найдем значения  $S(x)$  на концах рассматриваемого промежутка и в полученной критической точке.

$$S(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1, \quad S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{49}{27}, \quad S(1) = \frac{3}{2}, \text{ таким образом } S_{\max} = \frac{49}{27}.$$

**№ 1334**

$$1) x \in [-1;1]; \quad B(x;4x^2), \quad A(-x;4x^2);$$

$$2) C(x_c; y_c), \quad 3 = \frac{x + x_c}{3}; \quad x_c = 6 - x; \quad 6 = \frac{4x^2 + y_c}{2}; \quad y_c = 12 - 4x^2;$$

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (12 - 4x^2 - 4x^2) = 4(3x - 2x^3)$$

4) Рассмотрим функцию  $f(x) = 4(3x - 2x^3)$  на  $[0;1]$  и найдем ее наибольшее значение.  $f'(x) = 4(3 - 6x^2)$ ,

$$f'(x) = 0 \text{ при } 4 \cdot (3 - 6x^2) = 0; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} - \text{стационарная точка.}$$

При переходе через единственную стационарную точку  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  на  $[-1;1]$  производная меняет знак с «+» на «-», следовательно в этой точке функция принимает наибольшее значение.

$$5) S_{ABC} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 3 - 2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = 4\sqrt{2}.$$

**№ 1335**

$$y = x^2 + px + q; \quad x = 5, \quad y_{\min} = 1$$

$$\begin{cases} 1 = 25 + 5p + q, \\ y'(5) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 = 25 + 5p + q, \\ 2 \cdot 5 + p = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } p = -10, q = 26.$$

**№ 1336**

Обозначим через  $r$  радиус основания, а через  $h$  – высоту конуса, тогда

$$\text{объем } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h = \frac{400}{3}\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3,$$

$$V' = \frac{400}{3}\pi - \pi h^2 = \pi \left( h - \frac{20}{\sqrt{3}} \right) \left( h + \frac{20}{\sqrt{3}} \right), \quad h > 0, \text{ след. } h_0 = \frac{20}{\sqrt{3}} - \text{точка}$$

максимума (при переходе через  $h_0$   $V'$  меняет знак с «+» на «-»), таким образом  $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$ .

**№ 1337**

Обозначим через  $r$  – радиус, через  $h$  – высоту цилиндра, тогда

$$V = \pi r^2 \cdot h, \text{ а } S = 2\pi r h + 2\pi r^2, \quad h = \frac{V}{\pi r^2}; \quad S = \frac{2\pi r \cdot V + 2\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2,$$

$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}, \quad \text{точка минимума } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ а минимальная}$$

$$\text{площадь } S_{\min} = \frac{2V\sqrt[3]{2\pi}}{\sqrt[3]{V}} + 2\pi \left( \frac{V}{2\pi} \right)^{2/3} = 2V^{2/3}\sqrt[3]{2\pi V^{2/3}} = 3V^{2/3}\sqrt[3]{2\pi} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

**№ 1338**

Обозначим через  $r$  – радиус основания, через  $2h$  – высоту цилиндра, тогда  $S = 2\pi r \cdot 2h = 4\pi r h$ , где  $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ , тогда  $S = 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}$ .

$$S' = 4\pi \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{2\pi r(-2r)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4\pi(R^2 - r^2) - 4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= \frac{4\pi R^2 - 8\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4\pi(R^2 - 2r^2)}{R^2 - r^2}, \quad r_0 = R/\sqrt{2} - \text{точка максимума, т.к. при}$$

переходе через  $r_0$   $S'$  меняет знак с «+» на «-», таким образом  $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ .

**№ 1339**

Обозначим через  $r$  – радиус основания, через  $2h$  – высоту цилиндра, тогда

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V' = \left( \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \right)' = \pi \left( 2r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) =$$

$$= \frac{\pi (2r(R^2 - r^2) - r^3)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi (2rR^2 - 3r^3)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$r_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}R$  – точка максимума, т.к. при переходе через  $r_0$   $V'$  меняет знак

с «+» на «-», тогда  $h = \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \frac{R}{\sqrt{3}}$ , соответственно высота  $2h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

### № 1340

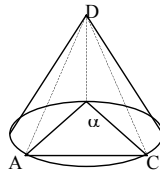
Обозначим через  $h$  высоту конуса, тогда радиус основания

$$r = \sqrt{R^2 - (h - R)^2}, \text{ а}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - (h - R)^2) h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2 + 2hR - R^2) h = \frac{1}{3} \pi h (2hR - h^2)$$

$$V' = \frac{1}{3} \pi (2hR - h^2 + h(2R - 2h)) = \frac{1}{3} \pi h (R - 3h); \quad h_0 = \frac{4}{3}R \text{ – точка максимума.}$$

### № 1341



$$S_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \text{ – задана}$$

$$S_{\text{тип}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

$$AC = 2R \sin \alpha \quad \angle BAC = \angle BCA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AC}{\sin \alpha} \quad AB = \frac{2R \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha \quad \text{исследуем } f = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha$$

$$f' = \left( \sin \alpha \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)' = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}$$

$$f' = 0 \quad 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \quad D = 1 + 8 = 9;$$

$\cos \alpha_1 = -1; \cos \alpha_2 = \frac{1}{2}$ , следовательно сумма всех углов треугольника

$$\pi; \quad \alpha_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

**№ 1342**

Обозначим через  $r$  – радиус основания, тогда высота  $h = \frac{p}{2} - 2r$ , а  
 объем  $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left( \frac{p-4r}{2} \right)$ ,  $V' = \frac{\pi}{2} (2rp - 12r^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 2r(p-6r)$ ;

$$r_0 = \frac{p}{6} \text{ - точка максимума, тогда } V_{\max} = \frac{\pi p^2}{36} \left( \frac{p}{2} - \frac{p}{3} \right) = \frac{\pi p^3}{216}.$$

**№ 1343**

Пусть  $AO_1 = x$ , тогда  $OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$ ;

$$V = \pi \cdot x^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}; \quad V = 2\pi\sqrt{R^2 x^4 - x^6}; \quad x > 0 \text{ и } x < R$$

Рассмотрим функцию  $g(x) = 2\pi\sqrt{R^2 x^4 - x^6}$  при  $0 < x < R$  и найдем ее наибольшее значение, заметим, что  $g(x)$  принимает наибольшее значение в той же точке, что и  $f(x) = R^2 x^4 - x^6$ .  $f'(x) = 4R^2 x^3 - 6x^5$ ;

$$x_0 = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} \text{ - точка максимума, тогда } H = R \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**№ 1344**

Пусть  $r$  – радиус основания,  $H$  – высота цилиндра, тогда

$$S = 2\pi r H + 4\pi r^2 = 2 \frac{Vr + 2\pi r^4}{r^2}, \text{ где } V \text{ - объем}$$

$$S' = \frac{2(4\pi r^3 - V)}{r^2}; \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \text{ - точка минимума, следовательно расход}$$

жести будет наименьшим, когда  $\frac{2r}{H} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \cdot \pi \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \right)^2}{V} = \frac{2\pi \cdot V}{V \cdot 4\pi} = \frac{1}{2}$ ,  
 т.е. при  $2D = H$ . (Опечатка в ответе задачника).

**№ 1345**

Пусть  $OO_1 = x$ , тогда  $AO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$ ;  $O_2O_1 = 2x$ ;  $S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4} (R^2 - r^2)$ ;

$$V_{np} = \frac{3\sqrt{3}}{4} (R^2 - r^2) 2x = \frac{3\sqrt{3}}{2} (R^2 x - x^3), \text{ причем } x > 0 \text{ и } x < R.$$

Рассмотрим  $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (R^2 x - x^3)$  на  $(0; R)$  и найдем ее наибольшее

значение:  $f'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (R^2 - 3x^2)$ ,  $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$  – точка максимума, тогда наи-

больший объем призмы имеет при высоте  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

**№ 1346**

Пусть  $AO = x$ , тогда из подобия треугольников  $MOS$  и  $BO_1S$  получим

$$\frac{x}{R} = \frac{b}{H}; \quad \frac{x}{R} = \frac{H-h}{H}; \quad h = \frac{H(R-x)}{R};$$

$$V = \pi \cdot x^2 \cdot \frac{H \cdot (R-x)}{R} = \frac{\pi H}{R} (Rx^2 - x^3), \text{ причем } x > 0 \text{ и } x < R.$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\pi H}{R} (Rx^2 - x^3)$  на  $(0; R)$  и найдем ее наибольшее значение.

$$f'(x) = \frac{\pi H}{R} (2Rx - 3x^2), \quad x = \frac{2R}{3} \text{ — точка максимума, таким образом}$$

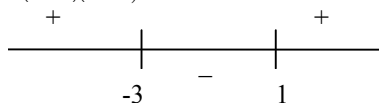
наибольший объем у цилиндра будет при  $r = \frac{2R}{3}$ ,  $h = \frac{H \cdot R/3}{R} = \frac{H}{3}$ .

**№ 1347**

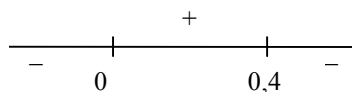
1)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3)$$

$x = -3$  — точка максимума;  
 $x = 1$  — точка минимума.

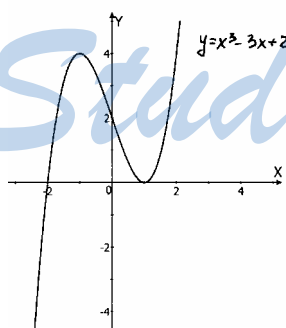


2)  $f(x) = x^4 - 2x^5 + 5$ ,  $f'(x) = 4x^3 - 10x^4 = x^3(4 - 10x) = x^3(\frac{4}{10} - x)$ ;



$x = 0$  — точка минимума  
 $x = 0,4$  — точка максимума

**№ 1348**



$x = -1, x = 1$ , т.е.  $(1; 0), (-1; 4)$ .

1)  $D(y) = IR$ , непрерывная, непериодическая, т.к. задана многочленом

2)  $y(-x) = -x^3 + 3x + 2$  — ни четная, ни нечетная

3)  $y = 0$  при  $x^3 - 3x + 2 = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = -2$

4)  $y' = 3x^2 - 3$ ;  $y = 0$  при  $3x^2 - 3 = 0$ ;

$3(x-1)(x+1) = 0$ ;  $x = \pm 1$  — стационарные точки

5)  $(-\infty; -1)$  — функция возрастает

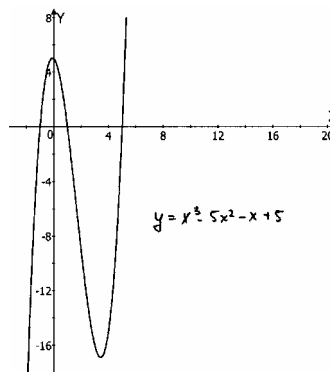
$(-1; 1)$  — функция убывает

$(1; +\infty)$  — функция возрастает

6)  $k = \text{tg} \alpha$ ,  $\alpha = 0$  при  $k = 0$ ;  $f'(x) = 0$ , т.е.

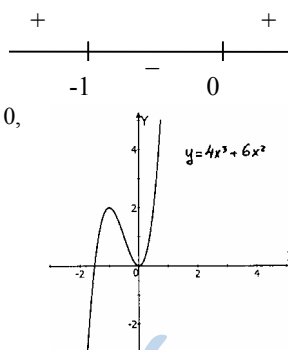
**№ 1349**

1.  $D(y) = \mathbb{R}$
2.  $y(-x) = -x^3 - 5x^2 + x + 5$  – ни четная, ни нечетная
3.  $y = 0$  при  $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$ ;  $x = 1$ ,  $x = 5$ ,  $x = -1$
4.  $y' = 3x^2 - 10x - 1$   
 $y' = 0$  при  $3x^2 - 10x - 1 = 0$ ;  
 $x = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{3}$
5.  $x = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$  — точка максимума  
 $x = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}$  — точка минимума
6.  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ;  $x_0 = 4$   
 $f(4) = -15$ ,  $f'(4) = 3x^2 - 10x - 1$ ,  $f'(4) = 7$ ,  $y = 7x - 43$

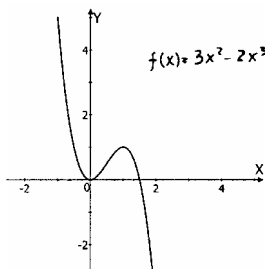


**№ 1350**

- 1)  $f(x) = 4x^3 + 6x^2$
- а)  $D(y) = \mathbb{R}$
- б)  $f(-x) = -4x^3 + 6x^2$  – ни четная, ни нечетная
- в)  $f(x) = 0$  при  $4x^3 + 6x^2 = 0$ ;  $x^2(4x+6)=0$ ,  $x = 0$ ,  $x = -1,5$
- г)  $f'(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1)$   
 $x = -1$  – точка максимума  
 $x = 0$  – точка минимума

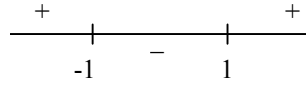


- 2)  $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ ; а)  $D(y) = \mathbb{R}$
- б)  $f(-x) = 3x^2 + 2x^3$  – функция ни четная, ни нечетная
- в)  $f(x) = 0$  при  $3x^2 - 2x^3 = 0$ ,



- г)  $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$   
 $x = 0$  – точка минимума  
 $x = 1$  – точка максимума

3)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ ;



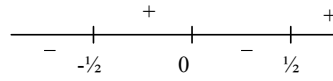
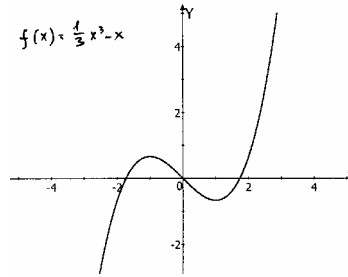
а)  $D(y) = \mathbb{R}$ ; б)  $f(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$ ,

следовательно функция нечетная

$f(x) = 0$  при  $\frac{1}{3}x^3 - x = 0$ ;

в)  $x\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0, x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ ;

$x = -1$  – точка максимума  
 $x = 1$  – точка минимума



4)  $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$

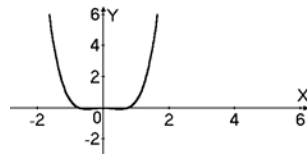
а)  $D(y) = \mathbb{R}$

$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$  – точки минимума  
 $x = 0$  – точка максимума

б)  $f(-x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$  – функция четная

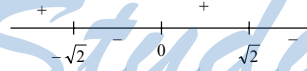
$f(x) = 0$  при  $x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ,

в)  $x^2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0, x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$



г)  $f'(x) = 4x^3 - x = x(4x^2 - 1) =$   
 $= 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

№ 1351



$x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$  – точки максимума  
 $x = 0$  – точка минимума

1)  $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$

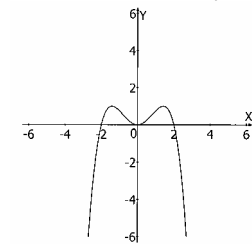
а)  $D(y) = \mathbb{R}$

б)  $f(-x) = -\frac{x^4}{4} + x^2$  – функция четная

в)  $f(x) = 0$  при  $-\frac{x^4}{4} + x^2 = 0$ ;

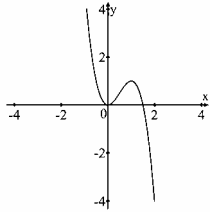
$\frac{x^2}{4}(-x^2 + 4) = 0; x = 0, x = \pm 2$

г)  $f'(x) = -x^3 + 2x = x(-x^2 + 2) =$   
 $= -x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$





$x = \pm 1$  – точка минимума  
 $x = 0$  – точка максимума



2)  $y = x^4 - 2x^2 - 3$

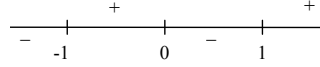
а)  $D(y) = \mathbb{R}$

б)  $f(-x) = x^4 - 2x^2 - 3$  – функция четная

в)  $f(x) = 0$  при  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ ,

$x = \pm\sqrt{1 \pm 2}$ , след.  $x = \pm\sqrt{3}$

г)  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$



№ 1352

1)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$

а)  $D(y) = \mathbb{R}$

б)  $f(-x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 9$  – функция

ни четная, ни нечетная

в)  $f(x) = 0$  при  $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9 = 0$ ,

$\frac{1}{3}x^2(x-3) - 3(x-3) = 0, (x-3)\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0, x = 3, x = \pm\sqrt{3}$

г)  $f'(x) = x^2 - x - 3 = \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$  – точка максимума

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$  – точка минимума

2)  $y = -x^4 + 6x^2 - 9$

а)  $D(y) = \mathbb{R}$

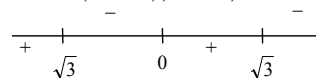
б)  $f(-x) = f(x)$  – функция четная

в)  $f(x) = 0$  при  $-x^4 + 6x^2 - 9 = 0$ ,

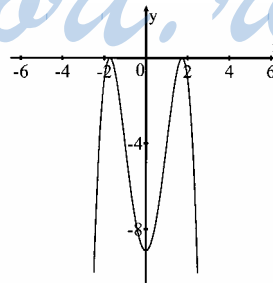
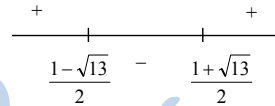
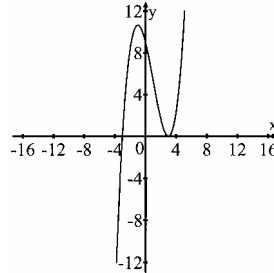
$x^4 - 6x^2 + 9 = 0, (x^2 - 3)^2, x = \pm\sqrt{3}$

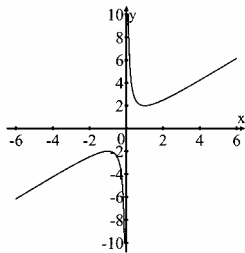
г)  $f'(x) = -4x^3 + 12x = -4x(x^2 - 3) =$

$= -4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$



$x = \pm\sqrt{3}$  – точка максимума;  $x = 0$  – точка минимума.



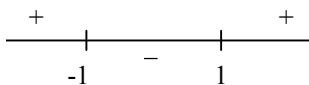


$$3) y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

а)  $D(y): x \neq 0$

б)  $f(-x) = -f(x)$  – функция нечетная

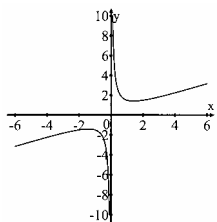
в)  $f(x) = 0$  при  $\frac{x^2 + 1}{x} = 0$ , т.е. пересечений с осью  $Ox$  нет.



$$г) f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$x = -1$  – точка максимума

$x = 1$  – точка минимума



$$4) y = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

а)  $D(y): x \neq 0$

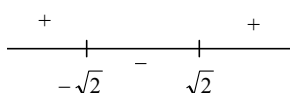
б)  $f(-x) = -f(x)$  – функция нечетная

в)  $f(x) \neq 0$

$$г) f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - 2(x^2 + 2)}{4x^2} = \frac{2x^2 - 4}{4x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

$x = -\sqrt{2}$  – точка максимума

$x = \sqrt{2}$  – точка минимума



### № 1353

1)  $y_1 = \sqrt{x-1}$ ,  $y_2 = 3-x$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $x-1 = 9-6x+x^2$ ,  $x^2-7x+10=0$ ,  $x=5$ ,  $x=2$ , но  $x-1 \geq 0$  и  $3-x \geq 0$ , след.  $x=2$  – точка пересечения  $y_1$  и  $y_2$ , тогда

$$S = \int_1^2 \sqrt{x-1} dx + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

2)  $y_1 = -\frac{1}{x}$ ,  $y_2 = x^2$ ,  $y_3 = \frac{x^2}{8}$

$y_1 = y_2$ ;  $-\frac{1}{x} = x^2$ ;  $x = -1$  – точка пересечения  $y_1$  и  $y_2$

$y_2 = y_3$ ;  $x^2 = \frac{x^2}{8}$ ,  $x = 0$ ,  $y_1 = y_3$ ;  $-\frac{1}{x} = \frac{x^2}{8}$ ;  $x = -2$ , тогда

$$S = \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{x} dx + \int_{-1}^0 x^2 dx - \int_{-2}^0 \frac{x^2}{8} dx = -\ln|x| \Big|_{-1}^{-2} + \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{24} x^3 \Big|_{-2}^0 =$$

$$= \ln x \Big|_1^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \ln 2$$

**№ 1354**

1)  $y_1 = 4x - x^2, y_2 = 5, x = 0, x = 3$

$$S = 5 \cdot 3 - \int_0^3 4x - x^2 = 15 - \left( 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 = 15 - 18 + 9 = 6;$$

2)  $y = x^2 - 2x + 8, y = 6, x = -1, x = 3,$

$$\int_{-1}^3 (x^2 - 2x + 8) dx - 24 = \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x \right) \Big|_{-1}^3 - 24 =$$

$$= 9 - 9 + 24 - \left( -\frac{1}{3} - 1 - 8 \right) - 24 = \frac{28}{3}$$

3)  $y = \sin x, y = 0, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi, S = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4)  $y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}, S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

**№ 1355**

1)  $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 9, \sqrt{x} = 2, x = 4,$

$$S = 2 \cdot 4 - \int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^9 \sqrt{x} - 5 \cdot 2 = 8 - \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_4^9 - 10 =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + 18 - \frac{16}{3} - 10 = \frac{16}{3}$$

2)  $y = x^2 + 3, y = x + 5, x^2 + 3 = x + 5, x^2 - x - 2 = 0, x_1 = -1, x_2 = 2,$

$$S = \int_{-1}^2 (x + 5) dx - \int_{-1}^2 (x^2 + 3) dx = \left( \frac{1}{2}x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^2 - \left( \frac{1}{3}x^3 + 3x \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= 12 + 4,5 - \left( \frac{8}{3} + 6 - \left( -\frac{1}{3} - 3 \right) \right) = 16,5 - 3 - 9 = 4,5$$

**№ 1356**

1)  $y = 9 - x^2, y = (x - 1)^2 - 4, y_1 = 9 - x^2, y_2 = x^2 - 2x - 3,$

$9 - x^2 = x^2 - 2x - 3, 2x^2 - 2x - 12 = 0, x^2 - x - 6 = 0, x_1 = 3, x_2 = -2,$

$$S = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx + \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| - \int_{-3}^{-2} (9 - x^2) dx - \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx =$$

$$= \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 + \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^3 - \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^{-2} - \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= (27 - 9 + 27 - 9) + \left( \left( 9 - 9 - 9 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right) - \left( -18 + \frac{8}{3} + 27 - 9 \right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{3}-1+3+\frac{8}{3}+4-6\right)=36+\frac{32}{3}-\frac{8}{3}-\frac{7}{3}=\frac{125}{3}.$$

2)  $y_1 = x^2$ ,  $y_2 = \sqrt[3]{x}$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $x^2 = \sqrt[3]{x}$ ,  $x^6 = x$ ,  $x(x^5 - 1) = 0$ ,  
 $x = 0$ ,  $x = 1$  – точки пересечения

$$S = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

**№ 1357**

1)  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = 0$ ,

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}};$$

2)  $y = 3^x$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $S = \int_{-1}^1 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_{-1}^1 = \frac{3 - 1/3}{\ln 3} = \frac{8}{3 \ln 3}$ .

**№ 1358**

1)  $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$ ,  $x_0 = \frac{1}{3}$ ,  $f'(x) = 3x^2 - x + 1$ ,  $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 = 1$ ;

2)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,  $f'(1) = 1$ ;

3)  $f(x) = x^{-3} - \frac{2}{x^2} + 3x$ ,  $x_0 = 3$ ,  $f'(x) = -3x^{-4} + \frac{4x}{x^4} + 3$ ,

$$f'(3) = -\frac{1}{27} + \frac{4}{27} + 3 = \frac{1}{9} + 3 = 3\frac{1}{9};$$

4)  $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ .

**№ 1359**

1)  $f(x) = \sin 2x - x$ ,  $f'(x) = 2\cos 2x - 1$ ,  $2\cos 2x - 1 = 0$ ,  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ;

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z;$$

2)  $f(x) = \cos 2x + 2x$ ,  $f'(x) = -2\sin 2x + 2$ ,  $2\sin 2x = 2$ ,  $\sin 2x = 1$ ,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

3)  $f(x) = (2x - 1)^3$ ,  $f'(x) = 3(2x - 1)^2 \cdot 2$ ,  $2x - 1 = 0$ ,  $x = 1/2$ ;

4)  $f(x) = (1 - 3x)^5$ ,  $f'(x) = 5(1 - 3x)^4 \cdot (-3)$ ,  $1 - 3x = 0$ ,  $x = 1/3$ .

**№ 1360**

$$f(x) = (2x - 3)(3x^2 + 1), f'(x) = 2(3x^2 + 1) + 6x(2x - 3),$$

$$f'(1) = 8 - 6 = 2 \Rightarrow f'(1) = f'(0), f'(0) = 2.$$

**№ 1361**

$$f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 18x + \sqrt{3}, f'(x) = 3x^2 - 3x - 18, 3x^2 - 3x - 18 < 0,$$

$$x^2 - x - 6 < 0, (x - 3)(x + 2) < 0, x \in (-2; 3).$$

**№ 1362**

$$h = V_0 t - 4,9t^2 \quad V_0 = 360 \text{ м/с}, V = h' = V_0 - 9,8t,$$

$$V(10) = 360 - 98 = 262 \text{ м/с}, h_{\max} \text{ при } V_0 - 9,8t = 0 \quad t = \frac{360}{9,8} \approx 37 \text{ сек.}$$

**№ 1363**

$$\varphi = kt^3 \quad \varphi = 2\pi \quad t = 2c \Rightarrow k = \frac{\varphi}{t^3} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4},$$

$$\omega = 3kt^2 = \frac{3\pi}{4}t^2, \quad \omega(4) = \frac{3\pi}{4} \cdot 16 = 12\pi.$$

**№ 1364**

$$1) y = \frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^3},$$

$$y' = \frac{(5x^4 - 9x^2 + 4x - 1)x^3 - 3x^2(x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3)}{x^3} =$$

$$= \frac{5x^7 - 9x^5 + 4x^4 - x^3 - 3x^7 + 9x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 9x}{x^3} =$$

$$= \frac{2x^7 - 2x^4 - 2x^3 - 9x^2}{x^3} = \frac{2x^5 - 2x^2 - 2x - 9}{x};$$

$$2) y = \frac{6x^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}; y = \frac{6x^{4/3}}{x^{1/2}}, y' = \frac{8x^{1/3} \cdot x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot x^{4/3} \cdot 6}{x} = \frac{8x^{5/6} - 3x^{5/6}}{x} = 5x^{-1/6}.$$

**№ 1365**

$$1) y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1},$$

$$y' = \frac{(6x - 2)(x + 1) - (3x^2 - 2x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6x - 2x - 2 - 3x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 + 6x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{3(x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^2}$$

$$2) y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1},$$

$$y' = \frac{(4x - 3)(2x + 1) - 2(2x^2 - 3x + 1)}{(2x + 1)^2} = \frac{8x^2 + 4x - 6x - 3 - 4x^2 - 6x - 2}{(2x + 1)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 4x - 5}{(2x + 1)^2}$$

**№ 1366**

$$1) y = (2x + 1)^2 \sqrt{x - 1},$$

$$y' = 2(2x + 1) \cdot 2\sqrt{x - 1} + \frac{1}{2}(x - 1)^{-1/2} = \frac{2 \cdot 4(2x + 1)(x - 1) + 1}{2\sqrt{x - 1}} =$$

$$= \frac{8(2x^2 - 2x + x - 1) + 1}{2\sqrt{x - 1}} = \frac{16x^2 - 8x - 7}{2\sqrt{x - 1}}$$

$$2) y = x^2 \sqrt[3]{(x + 1)^2}; \quad y = x^2 (x + 1)^{2/3},$$

$$y' = 2x(x + 1)^{2/3} + \frac{2}{3}x^2(x + 1)^{-1/3} = \frac{3 \cdot 2x(x + 1) + 2x^2}{3\sqrt[3]{x + 1}} =$$

$$= \frac{8x^2 + 6x}{3\sqrt[3]{x + 1}} = \frac{2x(4x + 3)}{3\sqrt[3]{x + 1}}$$

$$3) y = \sin 2x \cos 3x,$$

$$y' = 2 \cos 2x \cdot \cos 3x - 3 \sin 2x \cdot \sin 3x = \cos x + \cos 5x - \frac{3}{2}(\cos x - \cos 5x) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{5}{2} \cos 5x$$

$$4) y = x \cos 2x, \quad y' = \cos 2x - 2x \sin 2x.$$

**№ 1367**

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3); \quad f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 3)$$

$$f'(x) = (2x - 3)(x - 3) + x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 6x - 3x + 9 + x^2 - 3x + 2 = 3x^2 - 12x + 11$$

$$3x^2 - 12x + 11 = -1, \quad 3x^2 - 12x + 12 = 0, \quad 3(x^2 - 4x + 4) = 0; \quad 3(x - 2)^2 = 0, \quad x = 2.$$

**№ 1368**

$$1) f(x) = e^{3-2x} \cdot x^2, \quad f'(x) = -2e^{3-2x} \cdot x^2 + 2x \cdot e^{3-2x}$$

$$f'(x) = -2e^{-1} \cdot 4 + 4 \cdot e^{-1} = -4e^{-1} < 0$$

$$2) f(x) = \frac{x^2}{e^{1-x}}, \quad f'(x) = \frac{2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x}}{e^{2(1-x)}}, \quad f'(2) = \frac{4 \cdot e^{-1} + 4e^{-1}}{e^{-2}} > 0.$$

**№ 1369**

$$f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$$

$$f'(x) = \frac{2\cos 2x(1-\sin 2x) + 2\cos 2x(1+\sin 2x)}{(1-\sin 2x)^2} = \frac{2 \cdot 2\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2} = \frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{4}{1} = 4; \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{8}{(2-\sqrt{3})^2}$$

**№ 1370**

$$f(x) = x^3 + x^2 + x\sqrt{3}, \quad f'(x) = 3x^2 + 2x + \sqrt{3}$$

$$g(x) = x\sqrt{3} + 1, \quad g'(x) = \sqrt{3}$$

$$f'(x) \leq g'(x), \quad 3x^2 + 2x + \sqrt{3} \leq \sqrt{3}, \quad 3x^2 + 2x \leq 0, \quad x(3x + 2) \leq 0,$$

$$x \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right].$$

**№ 1371**

$$f(x) = \cos 3x, \quad F\left(\frac{\pi}{24}\right) = -1.$$

Первообразная  $F = \frac{1}{4} \sin 4x + c$ , с найдем из условия  $F\left(\frac{\pi}{24}\right) = -1$ ,

$$\frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} + c = -1; \quad \frac{1}{8} + c = -1, \quad c = -1\frac{1}{8}, \quad F = \frac{1}{4} \sin 4x - 1\frac{1}{8}.$$

**№ 1372**

$$1) \quad y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}, \quad F = \ln|x+1| - \ln|x-1| + c;$$

$$2) \quad y = \frac{3}{4x-1}; \quad y = \frac{3}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}, \quad F = \frac{3}{4} \ln\left|x-\frac{1}{4}\right| + c.$$

**№ 1373**

$$1) \quad \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx = \int_2^9 (x-1)^{1/3} dx = \frac{3}{4} (x-1)^{4/3} \Big|_2^9 = \frac{3}{4} (2^4 - 1) = \frac{45}{4};$$

$$2) \quad \int_{\pi/6}^{\pi/4} (2\cos^2 x - 1) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4};$$

$$3) \quad \int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx = \int_3^4 \left(x+2 + \frac{7}{x-2}\right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 7\ln|x-2|\right) \Big|_3^4 =$$

$$= (8+8+7\ln 2) - \left(\frac{9}{2} + 6 + 7\ln 1\right) = \frac{11}{2} + 7\ln 2.$$

№ 1374

$$1) \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1; \quad 2) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$3) \int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 3) dx = \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ = \frac{1}{3} + 1 + 3 - \frac{8}{3} + 4 - 6 = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$4) \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx = \left( \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \right) \Big|_1^2 = \\ \left( \frac{8}{3} - 12 + 16 \right) - \left( \frac{1}{3} - 3 + 8 \right) = \frac{7}{3} - 1 = 1\frac{1}{3};$$

$$5) \int_1^3 (x^{-2} + 1) dx = \left( -\frac{1}{x} + x \right) \Big|_1^3 = \left( -\frac{1}{3} + 3 \right) - (-1 + 1) = 2\frac{2}{3};$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{2}{5-4x} dx = -\int_{-1}^1 \frac{2}{4x-5} dx = -\int_{-1}^1 \frac{2}{4\left(x-\frac{5}{4}\right)} dx = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| x - \frac{5}{4} \right| \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{9}{4} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{9} = -\ln \frac{1}{3} = \ln 3.$$

№ 1375

$$1) \cos \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}, \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$3x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad \text{Ответ: } x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in Z$$

$$2) \log_2(3-2x) < -1, \quad \log_2(3-2x) < \log_2 \frac{1}{2}, \quad 3-2x > 0, \quad \text{т.т. } x < \frac{3}{2}, \\ 3-2x < \frac{1}{2}; \quad x > \frac{5}{4}. \quad \text{Ответ: } \frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$$

$$3) 4 \cdot 2^{3a} = 0,25^{\frac{a^2}{2}}; \quad 2^{3a+2} = 2^{-2 \cdot \frac{a^2}{2}};$$

$$2^{3a+2} = 2^{-a^2}; \quad 3a+2 = -a^2; \quad a^2 + 3a + 2 = 0; \quad a_1 = -1, a_2 = -2.$$

Ответ:  $a_1 = -1, a_2 = -2$

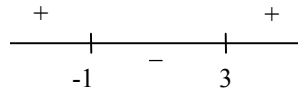
$$4) y = x(4-x), \quad x=0, x=4 - \text{точки пересечения } y = 4x - x^2 \text{ и } y = 0, \text{ тогда}$$

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left( 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } 10\frac{2}{3}$$



$$5) y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$$

$$\begin{cases} 4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3} \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$



$$\frac{4(x+1)(x-3) - 9(x-3) + (x+1)}{(x+1)(x-3)} \geq 0, \quad \frac{4(x^2 - 2x - 3) - 9x + 27 + x + 1}{(x+1)(x-3)} \geq 0,$$

$$\frac{4x^2 - 16x + 16}{(x+1)(x-3)} \geq 0; \quad \frac{4(x-2)^2}{(x+1)(x-3)} \geq 0, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

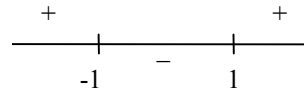
Ответ:  $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ .

$$6) y = x^3 - 3x + a; \quad [-2; 0]; \quad y_{\max} = 5,$$

$$y' = 3x^2 - 3, \quad y' = 0; \quad 3(x-1)(x+1) = 0,$$

Максимальное значение на  $[-2; 0]$  функ-

ция принимает в точке  $x = -1$ ,  $y = 5 = -1 + 3 + a$ , откуда  $a = 3$ .



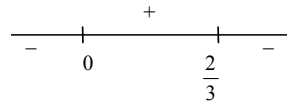
### № 1376

1)  $\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0$ ,  $\sin x = -1$ ,  $\sin x = 5$ , что невозможно, таким образом  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{3}{2}\pi > 0$ .

2)  $f(x) = 3x^2(1-x)$ ,  $[0; 1]$

$$f'(x) = 6x(1-x) - 3x^2 = -9x^2 + 6x = -3x(3x-2)$$



Точка максимума  $x = \frac{2}{3}$ ,  $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ .

3)  $\lg x = \lg 3 - \lg(3x-8)$ ,  $x > 0$ ,  $x > \frac{8}{3}$ , т.е.  $x > 2\frac{2}{3}$ ,

$$x = \frac{3}{3x-8}; \quad 3x^2 - 8x - 3 = 0, \quad x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3}. \quad \text{Ответ: } x = 3$$

4)  $y_1 = (x-3)^2$ ,  $y_2 = 9$ ,  $y_1 = y_2$ ;  $(x-3)^2 = 9$ ,  $x = 0$ ,  $x = 6$ ,

$$S = 6 \cdot 9 - 2 \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx = 54 - 2 \left( \frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 9x \right) \Big|_0^3 = 54 - 2(9 - 27 + 27) = 36$$

Ответ: 36.

$$5) \frac{(x-5)\left(2 - \frac{1}{x-1} + 0,2\right)}{x+2} \leq 0$$

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{x+2} \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x \in (-2; 1) \cup (1; 5]$$

$$6) y = x^2 - 4x + 2, y = -2x + a, x^2 - 4x + 2 = -2x + a, x^2 - 2x + 2 - a = 0, D = 4 - 4(2 - a) = -4 + 4a = 4(a - 1), D \geq 0 \text{ при } a \geq 1.$$

### № 1377

$$1) 2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4, \log_{0,7}(1+2x) > 2, \log_{0,7}(1+2x) > \log_{0,7} 0,7^2,$$

$$1+2x < \frac{49}{100}, 2x < -\frac{51}{100}, x < -\frac{51}{200}, \text{ но } 1+2x > 0, \text{ т.е. } x > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2} < x < -\frac{51}{200}.$$

$$2) f(x) = x^2 - x^3, x_0 = -1, y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), f'(x) = 2x - 3x^2, f'(x_0) = -2 - 3 = -5, f(x_0) = 2, y = 2 - 5(x + 1), \text{ т.е. } y = -5x - 3.$$

$$3) \sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1,$$

$$\begin{cases} x^4 - 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x^4 - 3x - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 \end{cases} \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2} \\ x^4 - 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = 2$$

$$4) y_1 = \sqrt{x}, y_2 = \frac{1}{2}x, y_1 = y_2; \sqrt{x} = \frac{1}{2}x; x = \frac{1}{4}x^2, x^2 - 4x = 9; x(x - 4) = 0, x_1 = 0, x_2 = 4 - \text{ точки пересечения } y_1 \text{ и } y_2, \text{ тогда}$$

$$S = \int_0^4 x^{1/2} dx - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

$$5) y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5, y' = 3x^2 - 6ax + 27 = 0, 3x^2 - 6ax + 27 = 0, x^2 - 2ax + 9 = 0, \text{ при } a = 3, x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9 = (x - 3)^2, \text{ следовательно единственная стационарная точка при } a = 3.$$

$$6) \sin \frac{5\pi}{4} x = x^2 - 4x + 5, \left| \sin \frac{5\pi}{4} x \right| \leq 1$$

$x^2 - 4x + 5 \geq 1$ , т.к.  $(x-2)^2 + 1 \geq 0$ , следовательно, равенство возможно только в случае  $x=2$ , т.е. когда обе части уравнения принимают значение, равное 1.

№ 1378

$$1) \sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_6 9}} = \sqrt[4]{6^{2 \log_6 5} - 9} = \sqrt[4]{25 - 9} = 2.$$

2)  $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$  т.к. касательная проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид  $y = kx$ ; пусть  $x_0$  – точка касания  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}, \text{ тогда } y = e^{\frac{x_0}{3}} + \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} (x - x_0)$$

$$y = e^{\frac{x_0}{3}} + \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} x - \frac{x_0}{3} e^{\frac{x_0}{3}}, \text{ откуда } e^{\frac{x_0}{3}} - \frac{x_0}{3} e^{\frac{x_0}{3}} = 0;$$

$$3e^{\frac{x_0}{3}} - x_0 e^{\frac{x_0}{3}} = 0, \quad e^{\frac{x_0}{3}} (3 - x_0) = 0, \quad x_0 = 3. \quad \text{Ответ: (3; e)}$$

$$3) \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - y\right) = 1 \\ x + y = -\frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\sin x + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 \\ y = -x - \frac{3\pi}{2} \end{cases} = 1$$

$$-\sin x - \sin x = 1, \quad \sin x = -\frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in Z, \quad y = (-1)^{n+2} \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z.$$

$$4) (3-x)\log_3(x+5) \leq 0;$$

$$a) x+5 > 0, \text{ т.е. } x > -5$$

$$b) x+5 > 0, \text{ т.е. } x > -5$$

$$\begin{cases} 3-x \leq 0 \\ \log_3(x+5) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \log_3(x+5) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

$$-5 < x \leq -4$$

$$\text{Ответ: } x \in (-5; -4] \cup [3; +\infty)$$

$$5) \int_{-6}^6 \sqrt{36-x^2} dx, \text{ заметим, что данный интеграл – это половина пло-$$

щади круга радиуса 6, тогда  $\int_{-6}^6 \sqrt{36-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot 6^2 = 18\pi;$

$$6) \cos \sqrt{2-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2-x^2 \geq 0, \quad |x| \leq \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2-x^2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad 2-x^2 = \frac{\pi^2}{36} \pm 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2\pi n + 4\pi^2 n^2$$

$$x^2 = 2 - \frac{\pi^2}{36} \pm \frac{2}{3} \pi^2 n + 4\pi^2 n^2, \quad x = \pm \sqrt{2 - \frac{\pi^2}{36} \pm \frac{2}{3} \pi^2 n + 4\pi^2 n^2},$$

$$\text{но т.к. } |x| \leq \sqrt{2}, \text{ то } x = \pm \sqrt{2 - \frac{\pi^2}{36}}.$$

№ 1379

$$1) \cos x \cos 3x = -0,5, \quad \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = -0,5, \quad \cos 2x + \cos 4x = -1,$$

$$\cos 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = -1, \quad \cos 2x + 2 \cos^2 2x = 0,$$

$$\cos 2x(1 + 2 \cos 2x) = 0,$$

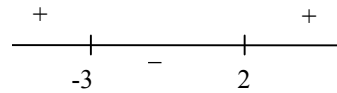
$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi, l \in Z.$$

$$2) \log_4 x^2 + \log_2^2(-x) > 6, \quad \frac{1}{2} \log_2 x^2 + \log_2^2(-x) > 6,$$

$$\log_2^2(-x) + \log_2(-x) - 6 > 0, \quad \log_2(-x) = t$$

$$t^2 + t - 6 = 0; \quad D = 1 + 24 = 25, \quad t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$



$$\begin{cases} \log_2(-x) > 2 = \log_2 4 \\ \log_2(-x) < -3 = \log_2 \frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} -x > 4 \\ -x < \frac{1}{8} \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < -4 \\ x > -\frac{1}{8} \\ x < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{1}{8} < x < 0 \\ x < -4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 9 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3^{2x+y} = 3^2 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ \sqrt{2-2x} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2 - 2x \\ \sqrt{2-2x} = 1 + \sqrt{x} \end{cases}$$

$$2 - 2x = 1 + 2\sqrt{x} + x, \quad 1 - 3x = 2\sqrt{x}, \quad 1 - 6x + 9x^2 = 4x,$$

$$9x^2 - 10x + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{9} = \frac{5 \pm 4}{9}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{9}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Ответ: } (1; 0), \left(\frac{1}{9}; \frac{16}{9}\right).$$

$$4) y_1 = 9x - x^3, \quad x_0 = 3, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \quad f(3) > 0, \quad f'(x) = 9 - 3x^2, \\ f'(3) = -18, \quad y = -18x + 54, \quad 9x - x^3 = -18x + 54, \quad -x^3 + 27x - 54 = 0, \\ (-x^2 + 6x^2 - 9x) - 6x^2 + 36x - 54 = 0, \quad -x(x-3)^2 - 6(x-3)^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 -(x-3)^2(x+6) &= 0, \quad x=3, \quad x=-6, \quad S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \\
 S_1 &= \int_{-6}^{-3} (-18x + 54 - 9x + x^3) dx = \int_{-6}^{-3} (x^3 - 27x + 54) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{27x^2}{2} + 54x \right|_{-6}^{-3} = \\
 &= \frac{81}{4} - \frac{243}{2} - 162 - 324 + 486 + 324 = 324 - \frac{405}{4} = \frac{891}{4}, \\
 S_2 &= \int_{-3}^0 (-18x + 54) dx = \left. -9x^2 + 54x \right|_{-3}^0 = 81 + 162 = 243, \\
 S_3 &= \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right|_{-3}^0 = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{81}{4}, \\
 S_4 &= \int_0^3 (-18x + 54 - 9x + x^3) dx = \int_0^3 (x^3 - 27x + 54) dx = \\
 &= \left. \frac{x^4}{4} - \frac{27x^2}{2} + 54x \right|_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{243}{2} + 162 = 162 - \frac{405}{4} = \frac{243}{4} \\
 S &= \frac{891}{4} + 243 + \frac{243}{4} = 546 \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

$$5) \quad y = 2 - 3 \sin x + 4 \cos x \quad \text{на} \quad \left[ -\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$y' = -3 \cos x - 4 \sin x = -5 \left( \frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x \right) = -5 \cos(x - \varphi), \quad \text{где } \varphi = \arccos \frac{3}{5}$$

$$-5 \cos(x - \varphi) = 0 \quad x - \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (2) \quad n \in Z,$$

$$x = \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$y = 2 - 5 \left( \frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right) = 2 - 5 \sin(x - \varphi), \quad \text{где } \varphi = \arccos \frac{3}{5} \quad (1);$$

$$y \left( -\frac{4\pi}{3} \right) = 2 - 3 \sin \left( -\frac{4\pi}{3} \right) + 4 \cos \left( -\frac{4\pi}{3} \right) = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$y \left( \frac{2\pi}{3} \right) = y \left( -\frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{теперь подставим в (1) (2)}$$

$$y = 2 - 5 \sin(x - \varphi) = 2 - 5 \sin \frac{\pi}{2} = 2 - 5 = -3$$

$$y = 2 - 5 \sin(x - \varphi) = 2 - 5 \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) = 2 + 5 = 7$$

$$\max y = 7 \quad \min y = -3;$$

б)  $\log_3 4$  и  $\sqrt[4]{2}$ ,  $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4} = \log_3 3^{2^{1/4}}$ , сравним,  $\log_3 4$  и  $\log_3 3^{2^{1/4}}$ , что равносильно сравнению  $4$  и  $3^{2^{1/4}}$  очевидно,  $4 > 3^{2^{1/4}}$ , следовательно  $\log_3 4 > \sqrt[4]{2}$ .

**№ 1380**

$$\begin{aligned} 1) \cos 4x + 3\sin^2 x &= 0,25, \quad \cos^2 2x - \sin^2 2x + 3\sin^2 x = 0,25, \\ 1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x + 3\sin^2 x &= 0,25, \quad 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin^2 x = 0,25, \\ 1 - 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 3\sin^2 x &= 0,25, \quad 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x + 3\sin^2 x = 0,25, \\ 8\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 &= 0,25, \quad \sin^2 x = a, \quad 32a^2 - 20a + 3 = 0, \end{aligned}$$

$$a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{32} = \frac{10 \pm 2}{32}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{3}{8};$$

$$a) \sin^2 x = \frac{1}{4}; \quad \sin x = \pm \frac{1}{2}, \quad x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z,$$

$$x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z;$$

$$б) \sin^2 x = \frac{3}{8}; \quad \sin x = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad x_{3,4} = (-1)^l \arcsin\left(\pm \sqrt{\frac{3}{8}}\right) + l\pi, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z, \quad x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z,$$

$$x_{3,4} = (-1)^l \arcsin\left(\pm \sqrt{\frac{3}{8}}\right) + l\pi, l \in Z.$$

$$2) y = \log_{3x+4}(7x-4), x=2, \quad y = \frac{\ln(7x-4)}{\ln(3x+4)},$$

$$y' = \frac{\frac{7}{7x-4} \cdot \ln(3x+4) - \frac{3}{3x+4} \ln(7x-4)}{\ln^2(3x+4)},$$

$$y'(2) = \left( \frac{7}{10} \ln 10 - \frac{3}{10} \ln 10 \right) \ln^2 10 = \frac{2}{5 \ln 10};$$

$$3) y = 2\cos 3x - 5\sin 2x + 10, \quad x = -\frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4},$$

$$y = 2\cos 3x - 5\sin 2x + 10 \geq 10 - 2 - 5 = 3 > 0$$

$$S = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (2\cos 3x - 5\sin 2x + 10) dx = \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{5}{2} \cos 2x + 10x \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{25\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{15\pi}{2} = \frac{40\pi}{2} = 20\pi.$$

$$4) y = \sqrt{6x-7} - 2x, \quad x \geq \frac{7}{6}, \quad y' = \frac{1 \cdot 6}{2\sqrt{6x-7}} - 2 = \frac{3-2\sqrt{6x-7}}{\sqrt{6x-7}} = 0,$$

$$\sqrt{6x-7} = \frac{3}{2} \quad 6x-7 = \frac{9}{4} \quad x = \frac{37}{24}, \quad \begin{array}{c} \frac{7}{6} \quad \frac{37}{24} \\ \text{+} \quad \text{-} \end{array} \xrightarrow{x}$$

$$x = \frac{37}{24} - \text{точка максимума} \Rightarrow \text{дальше } y \text{ убывает в } -\infty.$$

$$y\left(\frac{37}{24}\right) = \sqrt{6 \cdot \frac{37}{24} - 7} - 2 \cdot \frac{37}{24} = \frac{3}{2} - \frac{37}{24} = -\frac{19}{12}.$$

$$5) 9^{|x|} + 6 \cdot 3^x \geq 11, \quad 3^{2|x|} + 6 \cdot 3^x \geq 11.$$

Так как необходимо найти наименьшее натуральное число, удовлетворяющее решению, то:  $x \geq 0$ ,  $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 11 \geq 0$ ,  $3^x = t > 0$ ,  
 $t^2 + 6t - 11 \geq 0$ ,  $D/4 = 9 + 11 = 20$ ;

$$1) \quad \begin{array}{l} t_1 = -3 + 2\sqrt{5} \quad t_2 = -3 - 2\sqrt{5} \\ 3^x \geq 2\sqrt{5} - 3 \quad x \geq \log_3(2\sqrt{5} - 3) > 0 \end{array}$$

### № 1381

$$1) \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{25 + 10x + x^2} = 8; \quad |x-3| + |5+x| = 8$$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x \geq 3; & \text{б) } -5 \leq x < 3; & \text{в) } x < -5; \\ x-3+5+x=8; & 3-x+5+x=8; & 3-x-5-x=8; \\ x=3; & -5 \leq x < 3; & x=-5; x \in \emptyset \end{array}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x \in \emptyset \\ -5 \leq x < 3 \end{cases}; \quad x \in [-5; 3].$$

$$2) \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 6; \quad |x+2| - |x-3| = 6$$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x \geq 3; & \text{б) } -2 \leq x < 3; & \text{в) } x < 2 \\ x+2-x+3=6; & x+2-3+x=6; & -x-2-3+x=6 \\ x \in \emptyset & x=3,5 & x \in \emptyset \end{array}$$

Ответ:  $x \in \emptyset$ . (Опечатка в ответе задачника)

$$3) \sqrt[3]{(8-x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = 7.$$

Пусть  $\sqrt[3]{8-x} = y$ ,  $\sqrt[3]{27+x} = z$ , тогда исходное уравнение примет вид:

1)  $y^2 - yz + z^2 = 7$ , и 2)  $y^3 + z^3 = 35$ , поделим 2) на 1), получим:

$$y+z=5; \quad \begin{cases} y+z=5 \\ y^3+z^3=35 \end{cases}; \quad \begin{cases} z=5-y \\ y^3+(5-y)^3=35 \end{cases};$$

$$y^3 + 125 - 75y + 15y^2 - y^3 = 35; 15y^2 - 75y + 90 = 0;$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0, y_1 = 2, y_2 = 3, \text{ тогда а) } \sqrt[3]{8-x} = 2, x = 0; \text{ б) } \sqrt[3]{8-x} = 3, x = -19.$$

$$4. \sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5; x \leq 8, x \geq -89; \sqrt{8-x} + 2\sqrt{(8-x)(89+x)} + \sqrt{(89+x)} = 25;$$

$$\sqrt[4]{8-x} = y, \sqrt[4]{89+x} = z, y, z \geq 0;$$

$$\begin{cases} y^2 + 2yz + z^2 = 25 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}; \begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}; \begin{cases} y = 5 - z \\ (5 - z)^4 + z^4 = 97 \end{cases};$$

$$(5-z)^4 + z^4 = 97; (25 - 10z + z^2)^2 + z^4 = 97; (25 - 10z)^2 + 2(25 - 10z)z^2 + z^4 = 97;$$

$$625 - 500z + 100z^2 + 50z^2 - 20z^3 + 2z^4 - 97 = 0;$$

$$2z^4 - 20z^3 + 150z^2 - 500z + 528 = 0; z^4 - 10z^3 + 75z^2 - 250z + 264 = 0;$$

$$z_1 = 3, z_2 = \sqrt[4]{162}, \text{ т.к. } z = \sqrt[4]{89+x}, \text{ то } x_1 = -8, x_2 = 73.$$

### № 1382

В учебнике опечатка. Условие задачи следует читать так :

$$1) 16\sin 2x + 16\cos^2 x = 10; 16\sin 2x + 16\cos^2 x = 10(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$32\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x - 10\sin^2 x = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ не является решением, тогда } 10\operatorname{tg}^2 x - 32\operatorname{tg} x - 6 = 0;$$

$$5\operatorname{tg}^2 x - 16\operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 15}}{5}; x = \operatorname{arctg} \frac{8 \pm \sqrt{79}}{5} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{8 \pm \sqrt{79}}{5} + \pi n, n \in Z.$$

$$2) \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 34;$$

$$\left(\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1}\right)^x = 34; \left(\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}\right)^x + \left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}\right)^x = 34;$$

$$|1+\sqrt{2}|^x + |1-\sqrt{2}|^x = 34; (1+\sqrt{2})^x + (\sqrt{2}-1)^x = 34;$$

$$(1+\sqrt{2})^{2x} - 34(1+\sqrt{2})^x + 1 = 0; (1+\sqrt{2})^x = 17 \pm \sqrt{288} = 17 \pm 12\sqrt{2};$$

$$17 + 12\sqrt{2} = 9 + 6\sqrt{8} + \sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^2 = (1 + \sqrt{2})^4, \text{ т.е. } x_1 = 4;$$

$$17 - 12\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^4 = (1 + \sqrt{2})^{-4}, \text{ т.е. } x_2 = -4.$$

Ответ:  $x = \pm 4$ .

### № 1383

$$1) x^3 - 3x^2 + x = 3; x^3 - 3x^2 - 3 + x = 0; x^2(x-3) + (-3+x) = 0; (x^2+1)(x-3) = 0; x = 3.$$

$$2) x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0; x^2(x-3) - 4(x-3) = 0; (x-2)(x+2)(x-3) = 0; x_{1/2} = \pm 2; x_3 = 3;$$

$$3) x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3 = 0;$$



$x = -1$  – корень данного уравнения, тогда можно записать его в следующем виде:  $(x+1)(x^4 - 6x^2 - 8x - 3) = 0$ ;  $(x+1)(x-3)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 0$ ;  
 $(x+1)(x-3)(x+1)(x^2 + 2x + 1) = 0$ ;  $(x+1)^4(x-3) = 0$ ;  $x_1 = -1, x_2 = 3$ .  
 $4)x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$ ;

$x = -1$  – корень данного уравнения, тогда можно записать его в следующем виде:  $(x+1)(x^3 - 4x^2 + 2x - 8) = 0$ ;  $(x+1)(x^2(x-4) + 2(x-4)) = 0$ ;

$$(x+1)(x-4)(x^2 + 2) = 0; \quad x_1 = -1, x_2 = 4, x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}.$$

**№ 1384**

$$1) \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 2\operatorname{ctg}4x; \quad \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{\operatorname{ctg}^2 2x - 1}{\operatorname{ctg} 2x}; \quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} - 1}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}};$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin^2 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x}; \quad \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x};$$

$$\frac{\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x} - \frac{1}{\sin x \cos x} = 0;$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 2x - 1 - 2\cos 2x = 0, & \cos 2x = a; \\ \sin 2x \cdot \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$2a^2 - 1 - 2a = 0; \quad 2a^2 - 2a - 1 = 0; \quad a = 1 - \sqrt{3}; \quad 2x = \pm \arccos(1 - \sqrt{3}) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\arccos(1 - \sqrt{3})}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}; \\ \sin 2x \cdot \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\arccos(1 - \sqrt{3})}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \frac{\sin 4x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x); \quad \frac{\sin 4x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x);$$

$$\begin{cases} \sin 4x - (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0; \\ \sin x - \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\sin 4x + \cos 2x = 0; \quad 2\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 2x = 0; \quad \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, & n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2}, & l \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, & n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2}, & l \in \mathbb{Z} \\ \sin x - \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad x = (-1)^l \frac{\pi}{24} + \frac{\pi l}{4}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

№ 1385

$$1) \frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 3x}; \quad \frac{\sin 3x \cdot \sin 2x + \cos 3x \cdot \cos 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x} = \frac{2}{\sin 3x};$$

$$\frac{\cos x}{\sin 2x \cdot \cos 2x} - \frac{2}{\sin 3x} = 0; \quad \frac{\cos x \cdot \sin 3x - \sin 4x}{\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x - 2 \sin 4x}{2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x} = 0; \quad \frac{\sin 2x - \sin 4x}{\sin 4x \cdot \sin 3x} = 0; \quad -\frac{2 \sin x \cdot \cos 3x}{\sin 4x \cdot \sin 3x} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 3x = 0 \\ \sin 4x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, n \in Z \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases}. \quad \text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$2) \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x; \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8 \cos^2 x;$$

$$\frac{\sin 2x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos 2x}{\cos 2x \cdot \sin x} = 8 \cos^2 x; \quad \frac{\cos x}{\cos 2x \cdot \sin x} = 8 \cos^2 x;$$

$$\frac{\cos x}{\cos 2x \cdot \sin x} - 8 \cos^2 x = 0; \quad \cos x \left( \frac{1}{\cos 2x \cdot \sin x} - 8 \cos x \right) = 0;$$

$$\cos x \left( \frac{1 - 8 \cos 2x \cdot \cos x \cdot \sin x}{\cos 2x \cdot \sin x} \right) = 0; \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 8 \cos 2x \cdot \cos x \cdot \sin x = 0 \\ \cos 2x \cdot \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ 1 - 2 \sin 4x = 0 \\ \cos 2x \cdot \sin x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ x = (-1)^l \frac{\pi}{24} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z \\ \cos 2x \cdot \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z. \quad x = (-1)^l \frac{\pi}{24} + \frac{l\pi}{4}, l \in Z.$$

№ 1386

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2 \cos 2x; \quad \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{\sin x \cdot \sin 3x} = 2 \cos 2x;$$

$$\frac{(\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)}{\sin x \cdot \sin 3x} = 2 \cos 2x; \quad \frac{2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin 3x} = 2 \cos 2x;$$

$$\frac{2 \sin^2 2x \cdot \cos 2x - 2 \cos 2x \cdot \sin x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot \sin 3x} = 0;$$

$$\begin{cases} 2 \cos 2x (\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 3x) = 0 \\ \sin x \cdot \sin 3x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \cos 2x \cdot \sin x (4 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin 3x) = 0 \\ \sin x \cdot \sin 3x \neq 0 \end{cases}$$

$$2\cos 2x \cdot \sin x(4\sin x - 4\sin^3 x + 4\sin^3 x - 3\sin x) = 0$$

$$\begin{cases} 2\cos 2x \cdot \sin^2 x = 0, \\ \sin x \cdot \sin 3x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x \neq n\pi, x \neq \frac{n\pi}{3}, n \in Z \end{cases}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z.$$

**№ 1387**

$$\log_2(4\cos x + 3) \log_6(4\cos x + 3) = \log_2(4\cos x + 3) + \log_6(4\cos x + 3); 4\cos x + 3 = a > 0;$$

$$\log_2 a \log_6 a = \log_2 a + \log_6 a; \log_2 a (\log_6 a - 1) = \log_6 a; \log_2 a \log_6 a / 6 - \log_6 a = 0;$$

$$\frac{\log_6 a}{\log_6 2} \log_6 a / 6 - \log_6 a = 0; \log_6 a (\log_6 a / 6 - \log_6 2) = 0;$$

$$\begin{cases} \log_6 a = 0 \\ \log_6 a / 12 = 0 \end{cases}; \begin{cases} a = 1 \\ a = 12 \end{cases}; \begin{cases} 4\cos x + 3 = 1 \\ 4\cos x + 3 = 12 \end{cases}; \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ x \in \emptyset \end{cases};$$

$$x = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n, n \in Z. \text{ Ответ: } x = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n, n \in Z.$$

**№ 1388**

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6; 0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x = 1; (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0;$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0; x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3 - \text{ точки пересечения с осью } O_x.$$

**№ 1389**

$$2x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0; x_1 = 1, x_2 = -2; \begin{cases} 2 + m + n + 12 = 0 \\ -16 + 4m - 2n + 12 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} m + n = -14 \\ 4m - 2n = 4 \end{cases}; \begin{cases} m + n = -14 \\ 2m - n = 2 \end{cases}; \begin{cases} m = -14 - n \\ -28 - 3n = 2 \end{cases}; \begin{cases} m = -4 \\ n = -10 \end{cases}, \text{ тогда исходное}$$

$$\text{уравнение имеет вид: } 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 0; x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3.$$

**№ 1390**

$$1) \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2 \\ x + y = a + a^2 \end{cases}; \begin{cases} \log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 5/2 \\ x + y = a + a^2 \end{cases}; \begin{cases} 2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0 \\ x + y = a + a^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \log_y x = 2 \\ \log_y x = 1/2 \end{cases}; \begin{cases} x = y^2 \\ x = \sqrt{y} \end{cases}; \begin{cases} x = y^2 \\ x = \sqrt{y} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y = a + a^2 \\ x = a + a^2 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + a^2 - y = y^2 \\ a + a^2 - y = \sqrt{y} \end{cases}; \begin{cases} y^2 + y - (a + a^2) = 0 \\ y + \sqrt{y} - (a + a^2) = 0 \end{cases};$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a + a^2)}}{2}; x_{1,2} = -y_{1,2} + a + a^2$$

$$y_{3,4} = \left( \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a + a^2)}}{2} \right)^2; x_{3,4} = -y_{3,4} + a + a^2$$

Ответ:

- 1) если  $a > 0, a \neq 1$ , то  $(a^2; a), (a; a^2)$
- 2) если  $a < -1, a \neq -2$ , то  $(-a - 1; (a + 1)^2), ((a + 1)^2; -a - 1)$
- 3) если  $-1 \leq a \leq 0, a = 1, a = -2$ , то решений нет.

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 & b > 0 \\ \log_b x + \log_b y = 2 & b \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \log_b xy = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = b^2 \end{cases}; \begin{cases} \left(\frac{b^2}{y}\right)^2 + y^2 = a^2 \\ x = \frac{b^2}{y} \end{cases}; \begin{cases} \left(\frac{b^2}{y}\right)^2 + y^2 = a^2 \\ b^4 + y^4 = a^2 y^2 \end{cases};$$

$$y^4 - a^2 y^2 + b^4 = 0; y^2 = t; t^2 - a^2 t + b^4 = 0; t_{1,2} = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2};$$

$$a^4 - 4b^4 \geq 0; (a^2 - 2b^2)(a^2 + 2b^2) \geq 0.$$

$$\text{При } a^2 - 2b^2 \geq 0 \text{ и } a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4} \geq 0; y = \pm \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}}.$$

### № 1391

$$\begin{cases} a^2 - 2\sqrt{3|a|}y + x^2 + 2xy - y^2 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - \cos(xy) + 11 - 6a + a^2 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 + (a - 3)^2 + (1 - \cos(xy)) = 0. \end{cases}$$

Все слагаемые не отрицательны, следовательно:  $x=0, y=1, a=3$ ,

$1 - \cos(xy) = 0$ , т.е. при  $a \neq 3$  решений нет.

При  $a = 3$  проверим, является ли решением системы  $x = 0, y = 1$ .

$1 - \cos(0 \cdot 1) = 0$  — верно;  $9 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 0 + 0 - 1 - 2 = 0$ ;

$3 - 3 = 0$  — верно, т.е.  $x = 0, y = 1$  — решение.

Ответ:  $a = 3, x = 0, y = 1$ .  $a \neq 3$  решений нет.

### № 1392

$$1) \begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}; x, y > 0; \begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^{2/3} \end{cases}; \begin{cases} x^y = y^{y^{2/3}} \\ x = y^{2/3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^y = y^{y^{2/3}} \\ x = y^{2/3} \end{cases}; y^{2/3} - \frac{2}{3}y = 0; y^{2/3} \left(1 - \frac{2}{3}y^{1/3}\right) = 0;$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y^{1/3} = \frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}; y \neq 0; \end{cases} x = y^{2/3}; x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{9}}, \text{ а также } (1; 1).$$

Ответ:  $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{9}}; \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right), (1; 1).$

$$2) \begin{cases} x\sqrt{y} = y \\ y\sqrt{y} = x^4 \end{cases}; x, y > 0; \begin{cases} x^{y^{1/2}} = y \\ x = y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}} \end{cases}; \begin{cases} y^{\frac{1}{4}y} = y \\ x = y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}} \end{cases};$$

$$\frac{1}{4}y = 1; y = 4; x = 2, \text{ а также } (1; 1). \quad \text{Ответ: } (1; 1), (2; 4).$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y \end{cases}.$$

Сложим уравнения системы:  $\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = \sin y + \sqrt{3} \cos y$ ;

$$2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \sin y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y \right); \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( y + \frac{\pi}{3} \right);$$

$$x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n = y + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{12} + y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вычтем уравнения системы, получим:

$$2 \sin \frac{x - y + \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \cos \frac{x + y - \frac{7}{12}\pi}{2} = 0, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{3}{4}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{3}{4}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$4) \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3} \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = y - \frac{1}{3} \\ \cos^2 \pi \left( y - \frac{1}{3} \right) - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\cos^2 \left( \pi y - \frac{\pi}{3} \right) - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}; \left( \cos \pi y \cdot \frac{1}{2} + \sin \pi y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2};$$

$$\left( \frac{1}{2} \cos \pi y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \pi y \right)^2 - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4}\cos^2 \pi y + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \pi y \cdot \sin \pi y + \frac{3}{4}\sin^2 \pi y - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2};$$

$$\cos^2 \pi y + 2\sqrt{3}\cos \pi y \cdot \sin \pi y + 3\sin^2 \pi y - 4\sin^2 \pi y = 2;$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + 2\sqrt{3}\cos \pi y \cdot \sin \pi y = 2; \quad \cos 2\pi y + \sqrt{3}\sin 2\pi y = 2;$$

$$\frac{1}{2}\cos 2\pi y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\pi y = 1; \quad \sin \frac{\pi}{6}\cos 2\pi y + \cos \frac{\pi}{6}\sin 2\pi y = 1;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi y\right) = 1; \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{1}{6} + n, \quad x = -\frac{1}{6}.$$

Ответ:  $\left(-\frac{1}{6} + n, \frac{1}{6} + n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

$$5) \begin{cases} \cos x \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x + \sin 2y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\sin(x+y)\cos(x-y) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = 1/2 \\ \sin(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x \cdot \sin y = 1/2 \\ x+y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x-y = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(\sin(y-x) + \sin(y+x)) = \frac{1}{2}; \quad \sin(y-x) + \sin(y+x) = 1.$$

a)  $x+y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \sin(n\pi - 2x) = 1;$

$$n\pi - 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad n, k \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} - k\pi + \frac{n\pi}{2};$$

$$y = n\pi + \frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{n\pi}{2}, \quad n, k \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{n\pi}{2}, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} - k\pi + \frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

б)  $x-y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \sin(y+x) = 1; \quad \sin(2y+n\pi) = 1;$

$$2y + n\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k, n \in \mathbb{Z}; \quad 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{n\pi}{2}, \quad n, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k + \frac{n\pi}{2}, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

Ответ:  $\left(\pm \frac{\pi}{4} \pm k\pi + \frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\pi \pm \frac{n\pi}{2}\right), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$

### № 1393

$$\begin{cases} 6\sin x \cdot \cos y + 2\cos x \cdot \sin y = -3 \\ 5\sin x \cdot \cos y - 3\cos x \cdot \sin y = 1 \end{cases}$$

Обозначим  $\sin x \cdot \cos y$  за  $u$ ,  $\cos x \cdot \sin y$  за  $v$ , тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 6u + 2v = -3 \\ 5u - 3v = 1 \end{cases}, \begin{cases} u = \frac{-3-2v}{6} \\ 5(-3-2v) - 18v = 6; -15 - 10v - 18v = 6; \end{cases}$$

$$-28v = 21; v = -\frac{3}{4}; u = \frac{-3 + \frac{3}{2}}{6} = -\frac{1}{4};$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = -\frac{3}{4} \end{cases}, \begin{cases} 4\sin x \cdot \cos y = -1 \\ 4\cos x \cdot \sin y = -3 \end{cases}, \begin{cases} 2(\sin(x-y) + \sin(x+y)) = -1 \\ 2(\sin(x-y) + \sin(x+y)) = -3 \end{cases},$$

$$4\sin(x-y) = 2; \sin(x-y) = \frac{1}{2}; x-y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z;$$

$$x = y + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z; 2(\sin(x-y) + \sin(x+y)) = -1;$$

$$2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = -1; 1 + 2\sin\left(2y + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -1;$$

$$\sin\left(2y + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -1; 2y + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \pi n - \frac{k\pi}{2}, k, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} - (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi n - \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi n + \frac{k\pi}{2}, k, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi n + \frac{k\pi}{2}; y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \pi n - \frac{k\pi}{2}, k, n \in Z.$$

№ 1394

$$\begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y} \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x} \end{cases}, \begin{cases} \log_x 2 = \log_3 y^{\log_5 y} \\ \log_y 3 = \log_2 x^{\log_7 x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_2 x} = \log_5 y \cdot \log_3 y \\ \frac{1}{\log_3 y} = \log_7 x \cdot \log_2 x \end{cases}; \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y} \\ \frac{1}{\log_3 y} = \log_7 x \cdot \log_2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \frac{1}{\log_3 y} = \log_7 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \cdot \log_2 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \frac{1}{\log_3 y} = \frac{\log_7 2}{\log_3^2 y \cdot \log_5^2 y} \end{cases}; \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \log_5^2 y \cdot \log_3 y = \log_7 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \log_5^2 y \cdot \frac{\log_5 y}{\log_3} = \log_7 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \log_5 y = (\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}} \end{cases}; \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{(\log_5 3 \cdot \log_7 2)^{\frac{2}{3}}}} \log_5 3 \\ y = 5^{(\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}}} \end{cases}.$$

**№ 1395**

1)  $x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > 1000$ ;  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ;  $\lg_x x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > \lg_x 1000$ ;

$$\lg^2 x - 3 \lg x + 1 > \frac{1}{\log_{10^3} x}; \quad \lg^2 x - 3 \lg x + 1 > \frac{3}{\lg x}.$$

Обозначим  $\lg x$  через  $a$ , тогда неравенство примет вид:

$$a^2 - 3a + 1 > \frac{3}{a}; \quad \frac{a^3 - 3a^2 + a - 3}{a} > 0;$$

$$\frac{a^2(a-3) + (a-3)}{a} > 0; \quad \frac{(a-3)(a^2+1)}{a} > 0;$$

$$a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty), \text{ т.е. } \begin{cases} \lg x < 0 \\ \lg x > 3 \end{cases}; \begin{cases} x < 1 \\ x > 1000 \end{cases}$$

Ответ:  $x \in (0; 1) \cup (1000; +\infty)$ .

2)  $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$ ;  $x > 0$ ;  $3^{\lg x + 2} - 3^{2 \lg x + 5} + 2 < 0$

$$3^{\lg x + 2} - 3^{2(\lg x + 2)} \cdot 3 + 2 < 0; \quad 3^{\lg x + 2} = t \quad t > 0;$$

$$-3t^2 + t + 2 < 0; \quad 3t^2 - t - 2 > 0;$$

$$D = 1 + 24 = 25; \quad t_1 = \frac{1+5}{6} = 1; \quad t_2 = -\frac{2}{3};$$

$$t > 1 \quad 3^{\lg x + 2} > 1 + 3^0; \quad \lg x + 2 > 0 \lg x > -2 = \lg 0,01; \quad x > 0,01.$$

**№ 1396**

$$\log_{|2x+2|} (1 - 9^x) < \log_{|2x+2|} (1 + 3^x) + \log_{|2x+2|} \left( \frac{5}{9} + 3^{x-1} \right);$$

1)  $|2x+2| > 1$ , т.е.  $x < -\frac{3}{2}$ ,  $x > -\frac{1}{2}$ ;

$$\log_{|2x+2|} \frac{(1-3^x)(1+3^x)}{1+3^x} < \log_{|2x+2|} \left( \frac{5}{9} + 3^{x-1} \right); \quad 1-3^x < \frac{5+3^{x+1}}{9};$$

$$4 < 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x; \quad 9 - 3^{x+2} < 5 + 3^{x+1}; \quad 4 < 12 \cdot 3^x; \quad 3^{x+1} > 3^0; \quad x > -1;$$



$$\begin{cases} x > -1 \\ x < -\frac{2}{3}; x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2) |2x+2| < 1, \text{ т.е. } -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2};$$

$$\log_{|2x+2|} (1-9^x) < \log_{|2x+2|} (1-3^x) + \log_{|2x+2|} \left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right);$$

$$1-3^x > \frac{5+3^{x+1}}{9}; x < -1; \begin{cases} x < -1 \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} < x < -1. \end{cases}$$

Заметим, что по определению логарифма  $1-9^x > 0$ ,  $1+3^x > 0$ ,  $\frac{5}{9} + 3^{x-1} > 0$ , т.е.  $x < 0$ ,

тогда решением исходного неравенства являются  $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .

**№ 1397**

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} > 0; \frac{x(x^2 - 4) + (x^2 - 4)}{(x-1)(x+3)(x+4)} > 0; \frac{(x+1)(x+2)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x+4)} > 0.$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$ .

**№ 1398**

$$1) \sqrt{2x-7} \leq \sqrt{6x+13}; \begin{cases} 2x-7 \geq 0 \\ 6x+13 \geq 0 \\ 2x-7 \leq 6x+13 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3,5 \\ x \geq -\frac{13}{6} \\ x \geq -5 \end{cases}. \text{ Ответ: } x \geq 3,5.$$

$$2) \sqrt{3-x} < \sqrt{3x-5}; \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \\ 3-x < 3x-5 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \frac{5}{3} \\ x > 2 \end{cases}. \text{ Ответ: } x \in (2; 3].$$

**№ 1399**

$$\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x-4} \geq 3x-10; \begin{cases} 3x^3 - 22x^2 + 40x \geq 0 \\ 3x^3 - 22x^2 + 40x \geq (3x-10)^2(x-4)^2; \\ x-4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ 3x^3 - 22x^2 + 40x \geq (3x-10)^2(x-4)^2 \\ x-4 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ x(x-4)(3x-10) - (3x-10)^2(x-4)^2 \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ (x-4)(3x-10)(x-(3x-10)(x-4)) \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ (x-4)(3x-10)(x-3x^2+22x-40) \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ (x-4)(3x-10)(-3x^2+23x-40) \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{array} \right. ; (x-4)(3x-10)(x-5)\left(x-\frac{8}{3}\right) \leq 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right] \cup [4; 5] \end{array} \right. ; x \neq 4. \quad \text{Ответ: } x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right] \cup (4; 5).$$

**№ 1400**

$$|x-5a| \leq 4a-3;$$

а)  $x-5a \geq 0$ , т.е.  $x \geq 5a$ ;  $x-5a \leq 4a-3$ ;  $x \leq 9a-3$ , тогда  $5a \leq x \leq 9a-3$

при  $a > \frac{3}{4}$ ;  $x = \frac{15}{4}$  при  $a = \frac{3}{4}$ ;  $x \in \emptyset$  при  $a < \frac{3}{4}$ .

б)  $x-5a < 0$ , т.е.  $x < 5a$ ;  $5a-x \leq 4a-3$ ;  $x \geq a+3$ , тогда  $a+3 \leq x < 5a$  при  $a > \frac{3}{4}$ ;

$x = \frac{15}{4}$  при  $a = \frac{3}{4}$ ;  $x \in \emptyset$  при  $a < \frac{3}{4}$ ;  $x^2-4x-5 < 0$ ;  $(x+1)(x-5) < 0$ ;  $x \in (1; 5)$ .

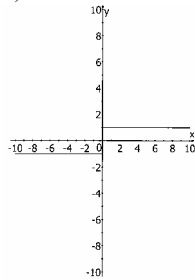
Ответ: если  $a = \frac{3}{4}$ , то  $x = \frac{15}{4}$ ; если  $a > \frac{3}{4}$ , то  $a+3 < x < 9a-3$ ;

если  $a < \frac{3}{4}$ , то  $x \in \emptyset$ ; решения первого неравенства являются решения-

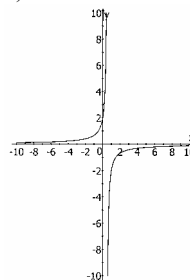
ми второго при  $\frac{3}{4} \leq a < \frac{8}{9}$ .

**№ 1401**

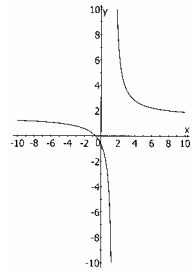
1)



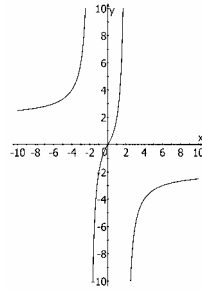
2)



2)

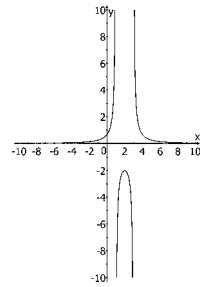


3)

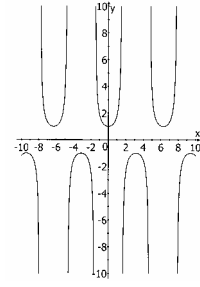


№1402

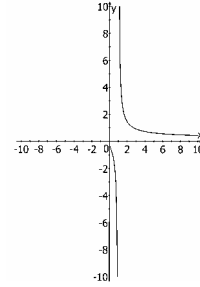
1)



2)

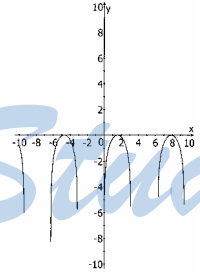


3)

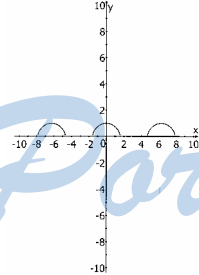


№1403

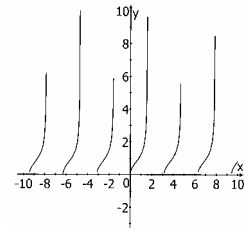
1)



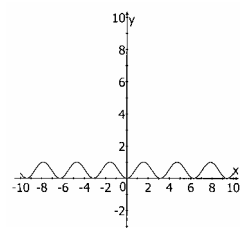
2)



3)

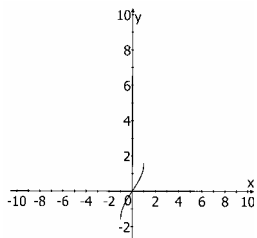


4)

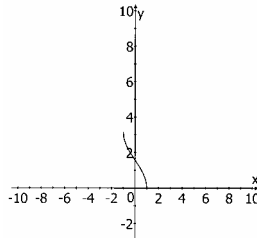


**№1404**

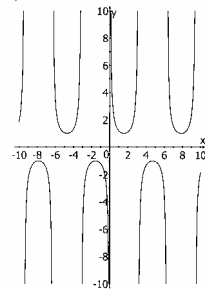
1)



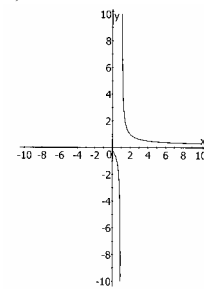
2)



3)



4)



**№ 1405**

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$$

Преобразуем левую часть выражения:  $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c =$

$$= \frac{\log_c a}{\log_c b} \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_c a \cdot \log_d c = \frac{\log_d a}{\log_d c} \cdot \log_d c = \log_d a, \quad \text{что и}$$

требовалось доказать.

**№ 1406**

$$1) \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \pm \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5};$$

$$\arcsin \frac{3}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ следовательно } \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$2) \sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = \pm \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)} = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \pm \frac{12}{13}.$$

$\arccos\left(\frac{5}{13}\right) \in [0; \pi]$ , на промежутке  $[0; \pi]$   $\sin x > 0$ , следовательно

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{12}{13}.$$

**№ 1407**

$\arcsin x + \arccos x$ . Пусть  $\arcsin x + \arccos x = c$ , тогда  $\arcsin x = c - \arccos x$ ;  
 $\sin(\arcsin x) = \sin(c - \arccos x)$ ;  $x = \sin c \cdot \cos(\arccos x) - \cos c \cdot \sin(\arccos x)$ ;  
 $x = x \cdot \sin c - \cos c \sqrt{1-x^2}$ ;  $x(1 - \sin c) = -\cos c \sqrt{1-x^2}$ ;  
 $x(\sin c - 1) = \cos c \sqrt{1-x^2}$ ;  $x^2(\sin^2 c - 2\sin c + 1) = \cos^2 c(1-x^2)$ ;  
 $x^2 \sin^2 c - 2x^2 \sin c + x^2 - \cos^2 c + x^2 \cos^2 c = 0$ ;  $2x^2 - 2x^2 \sin c - \cos^2 c = 0$ ;  
 $2x^2 - 2x^2 \sin c - 1 + \sin^2 c = 0$ ;  $2x^2(1 - \sin c) - (1 - \sin^2 c) = 0$ ;  
 $(1 - \sin c)(2x^2 - (1 + \sin c)) = 0$ , независимо от  $x$  уравнение решается при  
 $\sin c = 1$ , откуда  $c = \frac{\pi}{2}$ .

**№ 1408**

$f(x) = \sin 2x - 8(b+2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)x$ ;  
 $f'(x) = 2\cos x + 8(b+2)\sin x - (4b^2 + 16b + 6)x$ ;  $f'(x) < 0$ ;  
 $2\cos 2x + 8\sin x(b+2) - (4b^2 + 16b + 6)x < 0$ ;  $2b^2 - b(4\sin x - 8) - (\cos 2x + 8\sin x - 3) > 0$ ;  
 $(b - (\sin x - 2 + \sqrt{3}))(b - (\sin x - 2 - \sqrt{3})) > 0$ ;  
 Решение неравенства не зависит от  $x$  при  $b \in (-\infty; -3 - \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3} - 1; +\infty)$ .

**№ 1409**

$y_1 = 3\cos 5x$ ,  $y_2 = 5\cos 3x + 2$ ;  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ;  
 $y_{1_k} = -15\sin 5x_0(x - x_0) + 3\cos 5x_0$ ;  $y_{2_k} = -15\sin 3x_0(x - x_0) + 5\cos 3x_0$ ;  
 $y_{1_k} = -15x\sin 5x_0 + 15x_0\sin 5x_0 + 3\cos 5x_0$ ;  $y_{2_k} = -15x\sin 3x_0 + 15x_0\sin 3x_0 + 5\cos 3x_0$ .

Условие параллельности:

$$-15\sin 5x_0 = -15\sin 3x_0; \sin 5x_0 - \sin 3x_0 = 0; 2\sin x_0 \cdot \cos 4x_0 = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x_0 = 0 \\ \cos 4x_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = n\pi, n \in Z \\ x_0 = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z \end{cases}. \text{ Ответ: при } x = n\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z.$$

**№ 1410**

$A\left(2; -\frac{12}{5}\right)$ ,  $y = -\frac{3}{5}x^2$ ,  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,

$$y = -\frac{6}{5} \cdot 2(x-2) - \frac{12}{5}; y = -\frac{12}{5}x + \frac{12}{5}$$

$$y = 0, x = 1 \quad (1, 0) - \text{точка В}$$

$$x = 0, y = \frac{12}{5}; \quad \left(0, \frac{12}{5}\right) - \text{точка С}$$

$r = \frac{S}{p}$ , где  $r$  – радиус вписанной окружности,  $p$  – полупериметр,  $S$  –

площадь.

$$S = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{5}, \quad p = \frac{\left(1 + \frac{12}{5} + \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\right)}{2} = \frac{5 + 12 + 13}{10} = 3, \quad \text{тогда } r = \frac{2}{5}.$$

**№ 1411**

$$A(3; -4), y = -\frac{12}{x}; \quad l: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$$

$$y = \frac{12}{x_0^2}(x - x_0) - \frac{12}{x_0}; \quad y = \frac{4}{3}(x - 3) - 4; \quad y = \frac{4}{3}x - 8.$$

Искомая окружность является вписанной в треугольник со сторонами  $12, \sqrt{36+64}, \sqrt{36+64}$ , тогда  $r = \frac{S}{p}$ , где  $S = 48, p = 16$ , т.е.  $r = 3$  – случай,

когда окружность лежит ниже оси  $Ox$ , во втором случае (окружность лежит выше оси  $Ox$ ) получаем  $r = 12$ .

**№ 1412**

Пусть  $t$  – переменная времени, тогда расстояние  $l$  между кораблями можно представить как функцию  $l(t)$ .

$$l(t) = \sqrt{(3t)^2 + (5 - 4t)^2} = \sqrt{9t^2 + 25 - 40t + 16t^2} = \sqrt{25t^2 - 40t + 25};$$

$$l'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{50t - 40}{\sqrt{25t^2 - 40t + 25}}; \quad t = \frac{4}{5} \text{ – точка минимума; } l\left(\frac{4}{5}\right) = 3 \text{ мили.}$$

Ответ: корабли не будут на расстоянии, достаточном для приема.

**№ 1413**

$$y = -x^3 + ax^2 + bx + c, \quad x = 2, (0; 2), (0; 6).$$

Пусть точки  $A$  и  $B$  лежат на расстоянии  $l$  от прямой  $x = 2$ , тогда имеют координаты  $A(2 - l, y_1), B(2 + l, y_1)$ , т.к.  $A$  и  $B$  лежат на графике функции, то  $y_1 = -(2 - l)^3 + a(2 - l)^2 + b(2 - l) + c; \quad y_1 = -(2 + l)^3 + a(2 + l)^2 + b(2 + l) + c$

$$\text{Уравнение касательной в точке } A: y = y'(2 - l)(x - (2 - l)) + y(2 - l)$$

$$\text{Уравнение касательной в точке } B: y = y'(2 + l)(x - (2 + l)) + y(2 + l)$$

Т.к. касательные проходят через точки  $(0; 2)$  и  $(0; 6)$ , то справедливо

$$0 = y'(2 - l)(2 - (2 - l)) + y(2 - l) \quad \text{и} \quad 0 = y'(2 + l)(6 - (2 + l)) + y(2 + l);$$

условие параллельности касательных:  $y'(2 - l) = y'(2 + l)$

$$y' = -3x^2 + 2ax + b, \quad \text{тогда можно записать систему уравнений:}$$

$$\begin{cases} y_1 = -(2 - l)^3 + a(2 - l)^2 + b(2 - l) + c \\ y_1 = -(2 + l)^3 + a(2 + l)^2 + b(2 + l) + c \\ 0 = (-3(2 - l)^2 + 2a(2 - l) + b) \cdot (-2 - l) + (-(2 - l)^3 + a(2 - l)^2 + b(2 - l) + c) \\ 0 = (-3(2 + l)^2 + 2a(2 + l) + b) \cdot (4 - l) + (-(2 + l)^3 + a(2 + l)^2 + b(2 + l) + c) - 3(2 - l)^2 + 2a(2 - l) + b = -3(2 + l)^2 + 2a(2 + l) + b \end{cases}$$

решая которую, найдем  $a = 6, b = -11, c = 6$ .

**№ 1414**

Пусть  $A = (x_1; y_0)$ ,  $B = (x_2; y_0)$ , тогда по условию  $x_1 = -2 - t$ ,  $x_2 = -2 + t$ ,  $t > 0$ .

$y' = 3x^2 + 2ax + b$ , т.к. касательные в  $A$  и  $B$  параллельны, то

$y'(x_1) = y'(x_2)$ , т.е.  $3(-2-t)^2 + 2a(-2-t) + b = 3(-2+t)^2 + 2a(-2+t) + b$ , откуда  $a = 6$ .

Уравнение касательных, проходящих через  $A(0; 1)$  и  $B(0; 5)$ :

$$0 = (3(2+t)^2 + 12(-2-t) + b)(1 - (-2-t) + (-2-t)^3) + 6(2+t)^2 + b(-2-t) + c$$

$$0 = (3(-2+t)^2 + 12(-2+t) + b)(5 - (-2+t) + (-2+t)^3) + 6(-2+t)^2 + b(-2+t) + c$$

Т.к.  $A$  и  $B$  принадлежат графику функции  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ , то  $(-2-t)^3 +$

$$6(2+t)^2 + b(-2-t) + c = (-2+t)^3 + 6(-2+t)^2 + b(-2+t) + c.$$

Из полученных трех уравнений найдем  $b = 11$ ,  $c = 5$ .

**№ 1415**

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(0; y_0)$ ,  $M = (x_1; 0)$ ,  $N = (x_2; 0)$ , тогда

площадь  $\triangle AMN$  можно записать как  $\frac{1}{2} |x_2 - x_1| \cdot |y_0| = 1$ .

Уравнение касательной в точке  $M$ , проходящей через точку  $A$ :

$$y_0 = (3x_1^2 + 2ax_1 + b)(0 - x_1) + x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c.$$

Т.к.  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  проходит через  $M$  и  $N$  и  $A$ , то

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0, \quad x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \quad \text{и} \quad y_0 = c.$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = c, \quad c < 0 \\ |(x_2 - x_1)y_0| = 0 \\ y_0 = (3x_1^2 + 2ax_1 + b)(0 - x_1) - x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c \\ x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем  $a = -4$ ,  $b = 5$ ,  $c = -2$ .

**№ 1416**

$$y = -x^3 + ax^2 + bx + c, \quad c > 0$$

По условию  $D = (0, y_0)$ ,  $A = (x_1, 0)$ ,  $B = (x_2, 0)$ , тогда площадь  $\triangle ABD$  за-

пишем как  $\frac{1}{2} |(x_2 - x_1)y_0| = 1$ .

Запишем уравнение касательной в точке  $B$ , проходящей через точку  $D$

$$y_0 = (-3x_2^2 + 2ax_2 + bx_2)(0 - x_2) - x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Т.к. точки  $A$ ,  $B$ ,  $D$  принадлежат графику функции  $y = -x^3 + ax^2 +$   
 $+ bx + c$ , то

$$y_0 = c$$

$$0 = -x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c; \quad 0 = -x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Можем записать систему:

$$\begin{cases} y_0 = c, \quad c > 0 \\ |(x_2 - x_1)y_0| = 2 \\ y_0 = (-3x_2^2 + 2ax_2 + bx_2)(-x_2) - x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c \\ 0 = -x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c \\ 0 = -x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем  $a = 4, b = -5, c = 2$ .

**№ 1417**

$$y = 0,5x^2 - 2x + 2, \quad A\left(1; \frac{1}{2}\right), B(4; 2).$$

Уравнение касательной:

$$y = (x_0 - 2)(x - x_0) + 0,5x_0^2 - 2x_0 + 2, \text{ т.к. касательная проходит через точ-}$$

ки  $A$  и  $B$ , то справедливо  $\frac{1}{2} = (x_0 - 2)(1 - x_0) + 0,5x_0^2 - 2x_0 + 2$  и

$$2 = (x_0 - 2)(4 - x_0) + 0,5x_0^2 - 2x_0 + 2, \text{ откуда}$$

$$x_{0_1} = 1$$

$$x_{0_2} = 4; \text{ тогда уравнения касательных:}$$

$$y = -1(x - 1) + 1/2 = -x + \frac{3}{2}, \quad y = 2(x - 4) + 2 = 2x - 6 \text{ (точка пересечения}$$

касательных  $x = \frac{5}{2}$ ), тогда искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 (0,5x^2 - 2x + 2) dx + \left| \int_{3/2}^{5/2} \left(\frac{3}{2} - x\right) dx \right| + \left| \int_{5/2}^3 (2x - 6) dx \right| - \int_1^{3/2} \left(\frac{3}{2} - x\right) dx - \\ &- \int_{3/2}^4 (2x - 6) dx = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right) \Big|_1^4 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{3/2}^{5/2} + \left(x^2 - 6x\right) \Big|_{5/2}^3 - \\ &- \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_1^{3/2} - (x^2 - 6x) \Big|_3^4 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

**№ 1418**

Уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $a$  имеет вид:

$$y = \frac{x}{2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2} + \sqrt{a} = \frac{x - a + 2a}{2\sqrt{a}} = \frac{x + a}{2\sqrt{a}}; \text{ ордината точки пересечения с}$$

прямой  $x = 3$ :  $\frac{3+a}{2\sqrt{a}}$ ; абсцисса точки пересечения с осью  $Ox$ :  $x = -a$ .



Тогда искомая площадь треугольника

$$S = \frac{(a+3)^2}{4\sqrt{a}}; S' = \frac{2(a+3)4\sqrt{a} - (3+a)^2 \cdot \frac{4}{2\sqrt{a}}}{16a} = \frac{8a(a+3) - 2(3+a)^2}{16a\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{8a^2 + 24a - 18 - 12a - 2a^2}{16a\sqrt{a}} = \frac{6a^2 + 12a - 18}{16a\sqrt{a}} = \frac{3a^2 + 6a - 9}{8a\sqrt{a}}$$

$$S = \frac{(a+3)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4^2}{4} = 4. \text{ Точка минимума } a = 1.$$

**№ 1419**

Площадь фигуры  $S = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$ .

Прямая, проходящая через начало координат, задается уравнением  $y = kx$ , где  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha$  – угол наклона к оси  $Ox$ . Тогда условие того, что данная прямая делит фигуру площади  $S$  на две фигуры равной площади, запишем следующим образом:  $1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k$ , откуда  $k = \frac{4}{\pi^2}$ , а угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{\pi^2}$ .

**№ 1420**

1)  $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-4} = \sqrt{3x-2}$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-4} \geq 0 \\ x+3 - 2\sqrt{(x+3)(2x-4)} + 2x-4 = 3x-2 \end{cases}$$

$3x+3-4-3x+2 = 2\sqrt{(x+3)(2x-4)}$ ;

$1 = 2\sqrt{(x+3)(2x-4)}$ ;  $1 = 4(2x^2 + 2x - 12)$ ;  $8x^2 + 8x - 49 = 0$ ;

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 392}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{408}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{102}}{4}$ ;

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-4} \geq 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{102}}{4} \end{cases} \quad \text{. Ответ: } x = \frac{-2 \pm \sqrt{102}}{4}.$$

2)  $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$ ;  $\sqrt{1-x} = a > 0$ ;

$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} = \frac{2\sqrt{2}}{a}$ ;  $\begin{cases} (1+a+1-a)a - 2(1-a^2)\sqrt{2} = 0, \\ (1-a)(1+a)a \neq 0 \end{cases}$

$$2a - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}a^2 = 0; a - \sqrt{2} + \sqrt{2}a^2 = 0; \sqrt{2}a^2 + a - \sqrt{2} = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}; a > 0, \text{ следовательно, } a = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; 1-x = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } x = \frac{1}{2}.$$

**№ 1421**

$$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7; |2\sqrt{x} - x + 1| + |-(2\sqrt{x} - x + 1) + 3| = 7;$$

$$|2\sqrt{x} - x + 1| = a; |a| + |3 - a| = 7.$$

а)  $a > 3; a + a - 3 = 7; a = 5.$  б)  $0 \leq a \leq 3; a + 3 - a = 7; a \in \emptyset.$

в)  $a < 0; -a + 3 - a = 7; a = -2;$  а)  $2\sqrt{x} - x + 1 = 5; 2\sqrt{x} = x + 4; 4x = x^2 + 8x + 16;$   
 $x^2 + 4x + 16 = 0$  – действ. корней нет.

б)  $2\sqrt{x} - x + 1 = -2; 2\sqrt{x} = x - 3; x \geq 0; 4x = x^2 - 6x + 9;$   
 $x^2 - 10x + 9 = 0; x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{1} = 5 \pm 4; x_1 = 9, x_2 = 1.$

$x = 1$  не является решением, т.к.  $|2 + 1 - 1| + |1 - 2 + 2| \neq 7.$  Ответ:  $x = 9.$

**№ 1422**

1)  $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} = 4 \cdot 9^{1/x}; 3^2 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 2^{1/x} \cdot 3^{1/x} = 4 \cdot 3^{2/x}; 3^2 \cdot 2^{2/x} + 5 \cdot 2^{1/x} \cdot 3^{1/x} = 2^2 \cdot 3^{2/x}$

разделим все на  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} \neq 0, 9\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 4 = 0; \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = t; t > 0$

$$9t^2 + 5t - 4 = 0; D = 25 + 144, t_1 = \frac{-5 + 13}{18} = \frac{4}{9}; t_2 = \frac{-5 - 13}{18} = -1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2; \frac{1}{x} = 2; x = \frac{1}{2}.$$

2)  $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0,$   
 $\frac{x^2 - 3}{6x - 10} = \frac{1}{2}; \frac{2x^2 - 6 - 6x + 10}{2(6x - 10)} = 0; \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 = 0, \\ x \neq 10/6 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x \neq 10/6 \end{cases};$   
 $x_1 = 1, x_2 = 2,$  т.к.  $x^2 - 3 > 0$  и  $6x - 10 > 0,$  то  $x = 1$  не является решением.

Ответ:  $x = 2.$

3)  $2\log_2 x - 2\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\log_2 x}; 2\log_2 x + 1 = 3\sqrt{\log_2 x}, x > 0.$

$$\sqrt{\log_2 x} = a \geq 0; 2a^2 - 3a + 1 = 0; a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}; \log_2 x = 1, x = 2;$$

$$\log_2 x = \frac{1}{4}, x = \sqrt{\sqrt{2}}. \quad \text{Ответ: } x = \sqrt{\sqrt{2}}.$$

4)  $\log_2(2x^2 - 3x - 4) = 2; 2x^2 - 3x - 4 > 0, x > 0, x \neq 1;$

$\log_x(2x^2 - 3x - 4) = \log_x x^2$ ;  $2x^2 - 3x - 4 = x^2$ ;  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ;  
 $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ ;  $x_1 < 0$ , следовательно не является решением.  
 Ответ:  $x = 4$ .

**№ 1423**

1)  $1 + \log_x(5 - x) = \log_7 4 \cdot \log_x 7$ ;  $1 + \log_x(5 - x) = \log_x 7^{\log_7 4}$ ;  
 $\log_x x(5 - x) = \log_x 4$ ;  $5 - x > 0$ ,  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ;  $5x - x^2 = 4$ ;  
 $x^2 - 5x + 4 = 0$ ;  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ; Ответ:  $x = 4$ .  
 2)  $(\log_9(7 - x) + 1) \log_{3-x} 3 = 1$ ;  $\log_9 9(7 - x) \log_{3-x} 3 = 1$ ;  
 $\frac{1}{2} \log_3 9(7 - x) \cdot \frac{1}{\log_3 3 - x} = 1$ ;  $\log_{3-x} 9(7 - x) = 2$ ;  
 $\log_{3-x} 9(7 - x) = \log_{3-x}(3 - x)^2$ ;  $9(7 - x) = 9 - 6x + x^2$ ;  $x^2 + 3x - 54 = 0$ ;  
 $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 54 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 15}{2}$ ;  
 $x_1 = 6$ ,  $x_2 = -9$ ;  $3 - x > 0$ ,  $3 - x \neq 1$  следовательно,  $7 - x > 0$ ,  $x = -9$ .  
 Ответ:  $x = -9$ .

**№ 1424**

1)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ ;  $2\cos 2x + \cos x + \cos 2x = 0$ ;

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2l\pi, l \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ ,  $n \in Z$ ;  $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2l\pi$ ,  $l \in Z$ .

2)  $\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ;

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x; \cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = -\cos x + \sin 2x;$$

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x + 2\cos x - \sin 2x = 0; \cos x(\cos^2 x - 3\cos x + 2 - 2\sin x) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - \sin^2 x - 3\cos x + 2 - 2\sin x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ 3 - 3\cos x - \sin^2 x - 2\sin x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \\ x = 2\pi l, l \in Z \end{cases}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z; x = 2\pi l, l \in Z.$$

3)  $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$ ;  $\cos^2 3x - \cos^2 x = 0$ ;

$$\begin{cases} \cos 3x - \cos x = 0 \\ \cos 3x + \cos x = 0 \end{cases}; \begin{cases} -2\sin 2x \cdot \sin x = 0 \\ 2\cos 2x \cdot \cos x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x = m\pi, m \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \end{cases} \cdot \text{Ответ: } x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

$$4) \operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x; \operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} x - \sin 2x = 0; \frac{-\sin 2x}{\sin 3x \cdot \sin x} - \sin 2x = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 2x(1 + \sin 3x \cdot \sin x) = 0 \\ \sin 3x \cdot \sin x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x - \cos 4x = -2; \\ \sin 3x \cdot \sin x \neq 0 \end{cases}; x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in Z.$$

### № 1425

$$1) \sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ 1 + \operatorname{tg} x \geq 0 \\ (\sin x + \cos x)^2 = \frac{(\cos x + \sin x)}{\cos x} \end{cases}; (\sin x + \cos x)^2 - \frac{(\cos x + \sin x)}{\cos x} = 0;$$

$$\begin{cases} (\sin x + \cos x)(\cos x(\sin x + \cos x) - 1) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x \cdot \sin x + \cos^2 x - 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + n\pi, n \in Z \\ \sin x(\cos x - \sin x) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + n\pi, n \in Z \\ x = m\pi, m \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z \\ \cos x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}, m \in Z \\ x = n\pi, n \in Z \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \\ 1 + \operatorname{tg} x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}; x = n\pi, m, n \in Z.$$

$$2) \sqrt{5 \sin 2x - 2} = \sin x - \cos x; \begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0 \\ 5 \sin 2x - 2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \end{cases};$$

$$5 \sin 2x - 2 = 1 - \sin 2x; 6 \sin 2x = 3; \sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ \sin x - \cos x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \\ x \in \left[ \frac{\pi}{4} + 2l\pi; \frac{5}{4}\pi + 2l\pi \right], l \in Z \end{cases};$$

№ 1426

$$\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{1}{3} = 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad \frac{2\sin x}{+2\sin 2x\sin x} - \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2};$$

$$\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{3} = 2 \cdot (1 + \sin 2x); \quad \frac{3 - \sin 2x}{3\sin 2x} - \frac{3(2 + 2\sin 2x)\sin 2x}{3\sin 2x} = 0; \quad \sin 2x \neq 0;$$

$$\sin x \neq 0; \quad 3 - \sin 2x - 6\sin 2x - 6\sin^2 2x = 0; \quad 6\sin^2 2x + 7\sin 2x - 3 = 0; \quad \sin 2x = t; \quad 6t^2 + 7t - 3 = 0;$$

$$D = 49 + 72 = 121; \quad t_1 = \frac{-7 + 11}{12} = \frac{1}{3}; \quad t_2 = \frac{-7 - 11}{12} = -\frac{3}{2} < -1;$$

$$\sin 2x = \frac{1}{3}; \quad 2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \frac{1}{2} \left( (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n \right), \quad n \in Z.$$

№ 1427

$$\begin{cases} \cos x + (1 + \cos x) \operatorname{tg}^2 x = 0; \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}; \quad \cos x + (1 + \cos x) \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) - 1 = 0;$$

$$\cos x + \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} - 1 = 0; \quad \cos x \neq 0; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos^3 x + 1 - \cos^2 x + \cos x - \cos^3 x - \cos^2 x = 0; \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0; \quad \cos x = t; \quad 2t^2 - t - 1 = 0;$$

$$D = 1 + 8 = 9; \quad t = \frac{1 + 3}{4} = 1; \quad t = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = 0; \quad \operatorname{tg} x = 0 - \text{не подходит.}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x < 0 - \text{не подходит.}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} x > 0; \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

№ 1428

$$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{25\pi}{6}; \\ \operatorname{lg}(x - \sqrt{2x + 24}) > 0 = \operatorname{lg} 1 \\ \operatorname{lg}(x - \sqrt{2x + 24}) > 0 \end{cases}$$

$$x - \sqrt{2x + 24} > 0; \quad x > -12; \quad x - 1 > \sqrt{2x + 24}; \quad x > 1; \quad x^2 - 2x + 1 > 2x + 24;$$

$$x^2 - 4x - 23 > 0; \quad D/4 = 4 + 23 = 27; \quad x_1 = 2 + 3\sqrt{3}; \quad x_2 = 2 - 3\sqrt{3}; \quad x > 2 + 3\sqrt{3};$$

$$\sin^4 x + \left( \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{6}; \quad 4\sin^4 x + (1 + \sin 2x)^2 = \frac{1}{4};$$

$$4\sin^4 x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1; \quad 4 \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 0;$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 0; \quad 2 + 2\sin 2x - 2\cos 2x = 0;$$

$$1 + \sin 2x - \cos 2x = 0; \quad 1 + \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = n\pi, n \geq 3 \\ x = \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \geq 2 \end{cases}.$$

**№ 1429**

$$\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin x \cdot \cos 2x = 0; \quad -\sin 5x + \sin 3x - \sin x = 0;$$

$$\sin 3x - (2\sin 3x \cos 2x) = 0; \quad \sin 3x(1 - 2\cos 2x) = 0; \quad \sin 3x = 0; \quad 3x = \pi n; \quad x = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Самое большое значение  $x$  на  $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$  из этой серии  $x = \frac{\pi}{3}$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Самое большое значение  $x$  на  $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$  из этой серии  $x = \frac{\pi}{6}$

В итоге самое большое  $x = \frac{\pi}{3}$ .

**№ 1430**

$$\sin^8 x + \cos^8 x = a; \quad (\sin^4 x - \cos^4 x)^2 + 2\sin^4 x \cos^4 x = a; \quad (\cos^4 x - \sin^4 x)^2 + \frac{1}{8} \sin^4 2x = a;$$

$$\cos^4 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x = a; \quad 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x = a; \quad \sin^4 2x - 8\sin^2 2x + (8 - 8a) = 0;$$

$$(\sin^2 2x - 4)^2 = 8 + 8a; \quad \sin^2 2x - 4 = \pm \sqrt{8 + 8a};$$

$$\sin^2 2x = 4 \pm \sqrt{8 + 8a}; \quad 0 \leq 4 \pm \sqrt{8 + 8a} \leq 1; \quad 0 \leq 4 + \sqrt{8 + 8a} \leq 1 - \text{невыполнимо};$$

$$0 \leq 4 - \sqrt{8 + 8a} \leq 1; \quad 3 \leq \sqrt{8 + 8a} \leq 4; \quad a \in \left[\frac{1}{8}; 1\right]$$

Итак, при  $a \in \left[\frac{1}{8}; 1\right]$ :  $\sin^2 2x = 4 - \sqrt{8 + 8a}$ ;

$$\sin 2x = \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2(1+a)}}; \quad x = (-1)^n (\pm \arcsin \sqrt{4 - 2\sqrt{2(1+a)}}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{4 - 2\sqrt{2(1+a)}} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

№ 1431

$$1) \begin{cases} x - 3y = -5; y \neq 0; x \neq 0 \\ \frac{x}{3y} - \frac{2y}{x} = -\frac{23}{6} \end{cases}; \begin{cases} x = 3y - 5 \\ \frac{3y - 5}{3y} - \frac{2y}{3y - 5} = -\frac{23}{6} \end{cases};$$

$$6((3y - 5)^2 - 6y^2) + 23 \cdot 3y(3y - 5) = 0; 6(9y^2 - 30y + 25 - 6y^2) + 207y^2 - 345y = 0;$$

$$18y^2 - 180y + 150 + 207y^2 - 345y = 0; 225y^2 - 525y + 150 = 0; 9y^2 - 21y + 6 = 0;$$

$$3y^2 - 7y + 2 = 0; y_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}; y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{3}, x_1 = 1, x_2 = -4.$$

Ответ: (1; 2),  $(-4; \frac{1}{3})$ .

$$2) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}; x \neq \pm y; \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{10}{3}; \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 - y^2} = \frac{10}{3}; \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} \frac{10}{x^2 - y^2} = \frac{10}{3}; \\ x^2 = 5 - y^2 \end{cases}; \frac{10}{5 - 2y^2} = \frac{10}{3}; 30 = 50 - 20y^2; y = \pm 1; x = \pm 2.$$

№ 1432

$$1) \begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 12; \\ 6^x \cdot 3^y = 12 \end{cases}; \begin{cases} 6^x = 2 + 2 \cdot 3^y; \\ 6^x \cdot 3^y = 12 \end{cases}; (2 + 2 \cdot 3^y) \cdot 3^y = 12; 2 \cdot 3^y + 2 \cdot 3^{2y} = 12;$$

$$3^y + 3^{2y} = 6; 3^y = a > 0; a^2 + a - 6 = 0, a_1 = -3, a_2 = 2, \text{ тогда } 3^y = 2, y = \log_3 2;$$

$$6^x = 2 + 2 \cdot 2, \text{ т.е. } x = 1. \text{ Ответ: } (1, \log_3 2)$$

$$2) \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93 \end{cases}; \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 6 \cdot 2^x - 5y = 93 \end{cases}; \begin{cases} 2^x = \frac{2 - 6y}{7} \\ \frac{6(2 - 6y)}{7} - 5y = 93 \end{cases};$$

$$6(2 - 6y) - 35y = 651; 12 - 36y - 35y = 651; -71y = 639; y = -9; 2^x = 8, x = 3.$$

Ответ: (3; -9).

№ 1433

$$\begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ \lg(y - 4x) = 2\lg(2 + 2x - y) - \lg y \end{cases}$$

Очевидно, что  $\begin{cases} y - 4x > 0 \\ 2 + 2x - y > 0; \\ y > 0 \end{cases}; \lg \frac{y - 4x}{2 + 2x - y} = \lg \frac{2 + 2x - y}{y};$

$$\frac{y - 4x}{2 + 2x - y} = \frac{2 + 2x - y}{y}; \begin{cases} y^2 - 4xy - (2 + 2x - y)^y = 0 \\ y \neq 0 \\ 2 + 2x - y \neq 0 \end{cases};$$

$$y^2 - 4xy - (4 + 8x + 4x^2 - 2y(2 + 2x) + y^2) = 0; y^2 - 4xy - 4 - 8x - 4x^2 - 4y + 4xy - y^2 = 0;$$

$$-4x^2 - 8x + 4y - 4 = 0; x^2 + 2x - y + 1 = 0;$$

$y = (x + 1)^2$ , подставим в первое уравнение исходной системы:

$$27 \cdot 3^{2x-x^2-2x-1} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}; 3^3 \cdot 3^{-x^2-1} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3};$$

$$3^{2-x^2} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}; 3^{x^2} = a > 0; \frac{9}{a} + a = 4\sqrt{3}; 9 + a^2 = 4\sqrt{3} a;$$

$$a^2 - 4\sqrt{3} a + 9 = 0; a_{1/2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-9}}{1} = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{3};$$

$a_1 = 3\sqrt{3}, a_2 = \sqrt{3}$ , тогда

$$1) 3^{x^2} = 3^{3/2}; x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}; y_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{6} + 1; y_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{6} + 1; y_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{6} + 1;$$

$$2) 3^{x^2} = 3^{1/2}; x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1; y_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y - 4x > 0 \\ 2 + 2x - y > 0 \\ y > 0 \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}}, y = \frac{5}{2} + \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, y = \frac{5}{2} - \sqrt{6} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Ответ:  $\left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} \pm \sqrt{2} \right)$ .

$$2) \begin{cases} 8 \cdot 2^{-x-2y} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2} \\ \lg(x+4y) = 2\lg(2-x-2y) - \lg x \end{cases};$$

Очевидно, что  $\begin{cases} x+4y > 0 \\ 2-x-2y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$\lg(x+4y) = 2\lg(2-x-2y) - \lg x; \frac{x+4y}{2-x-2y} = \frac{2-x-2y}{x};$$

$$x(x+4y) = (2-x-2y)^2; x^2 + 4xy - (4 - 4x + x^2 - 4y(2-x) + 4y^2) = 0;$$



$$x^2+4xy-4+4x-x^2+8y-4xy-4y^2=0; -4+4x+8y-4y^2=0; -1+x+2y-y^2=0;$$

$x = (y-1)^2$ , подставим в первое уравнение исходной системы:

$$8 \cdot 2^{-(y-1)^2} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2}; 8 \cdot 2^{3-y^2+2y-1-2y} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2};$$

$$2^2 \cdot 2^{-y^2} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2}; 2^{y^2} = a > 0;$$

$$\frac{4}{a} + a^2 = 3\sqrt{2}; 4 + a^2 = 3\sqrt{2} a; a^2 - 3\sqrt{2} a + 4 = 0;$$

$$a_{1/2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-16}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2}.$$

$$1) a_1 = 2\sqrt{2}, \text{ тогда } 2^{y^2} = 2^{3/2}; y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{6} + 1.$$

$$2) a_2 = \sqrt{2}, \text{ тогда } 2^{y^2} = 2^{1/2}; y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2} + 1;$$

$$\begin{cases} x+4y > 0 \\ 2-x-2y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \cdot \text{ Ответ: } \left( \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\left( \frac{3}{2} \pm \sqrt{6} + 1; \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \right), \left( \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

#### № 1434

$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2\log_9 x = 0 \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}; y > 3; x > 0; \begin{cases} y-3 = x \Rightarrow y = x+3 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 2x - 6 - 5a = 0 \end{cases}.$$

Хотя бы одно решение  $D \geq 0$ .  $x^2 + (2a-2)x + a^2 - 5a - 6 = 0$ ;

$$D/4 = (a-1)^2 - a^2 + 5a + 6 = a^2 - 2a + 1 - a^2 + 5a + 6 = 3a + 7; 3a + 7 \geq 0; a \geq -\frac{7}{3};$$

$$D = 0, x = 1 - a = 1 + \frac{7}{3} > 0; D > 0, x_1 = 1 - a + \sqrt{3a+7} > 0.$$

См. в конце.

$$x_2 = 1 - a - \sqrt{3a+7} > 0; 1 - a = \sqrt{3a+7}, 1 - a > 0, a < 1$$

$$1 - 2a + a^2 > 3a + 7, a^2 - 5a - 6 > 0;$$

$$\begin{cases} a < -1 \text{ и } a > 6 \\ a < 1 \\ a < -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{3} < a < -1, x_1 = 1 - a + \sqrt{3a+7} > 0; \sqrt{3a+7} > 1 - a$$

$$1) a - 1 < 0; a < 1, \begin{cases} a < 1 \\ a > -\frac{7}{3} \end{cases}, -\frac{7}{3} < a < 1$$

$$2) a - 1 \geq 0; a \geq 1; 3a + 7 > a^2 - 2a + 1; a^2 - 5a - 6 < 0;$$

$$\begin{cases} -1 < a < 6 \\ a < -\frac{7}{3} \\ a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \geq a < 6; \begin{cases} -\frac{7}{3} < a \leq 1; \\ 1 < a < 6 \end{cases}; \quad -\frac{7}{3} < a < 6,$$

$$\text{одновременно } x_1 \text{ и } x_2 > 0, \begin{cases} -\frac{7}{3} < a < 6 \\ \frac{3}{3} < a < -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{3} < a < -1.$$

### № 1435

$$1) \frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}; \frac{2x^2-3x-4+x}{x(4-x)} > 0;$$

$$\frac{2x^2-2x-4}{x(4-x)} > 0; \frac{x^2-x-2}{x(x-4)} < 0; \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-4)} < 0.$$

Ответ:  $x \in (-1; 0) \cup (2; 4)$ .

$$2) \frac{2x+5}{|x+1|} \geq 1; 1. x > -1; \frac{2x+5-x-1}{(x+1)} \geq 0; \frac{x+4}{x+1} \geq 0; x \in (-1; +\infty).$$

$$2. x < -1; \frac{2x+5}{-x-1} \geq 1; \frac{2x+5}{x+1} \leq -1; \frac{2x+5+x+1}{x+1} \leq 0;$$

$$\frac{3x+6}{x+1} \leq 0; \frac{x+2}{x+1} \leq 0; x \in [-2; -1). \text{ Ответ: } x \in [-2; -1) \cup (-1; +\infty).$$

### № 1436

$$1) \frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} \leq a; \frac{8x^2-4x+3-4x^2a+2ax-a}{4x^2-2x+1} \leq 0;$$

$$\frac{8x^2-4ax^3-4x+2ax+3-a}{4x^2-2x+1} \leq 0; \frac{x^2(8-4a)-x(4-2a)+(3-a)}{4x^2-2x+1} \leq 0;$$

$4x^2-2x+1 < 0$  при любых  $x$ ; найдем значения  $a$ , для которых  $x^2(8-4a)-x(4-2a)+(3-a) \leq 0$  при любых  $x$ :  $8-4a < 0$ , т.е.  $a > 2$  и  $D = (4-2a)^2 - 4(3-a)(8-4a) \leq 0$ ;

$$16 - 16a + 4a^2 - 4(24 - 12a - 8a + 4a^2) = -12a^2 + 64a - 80;$$

$$12a^2 - 64a + 80 \geq 0; 6a^2 - 32a + 40 \geq 0; 3a^2 - 16a + 20 \geq 0; a \in (-\infty; 2] \cup [10/3; +\infty).$$

Таким образом  $x^2(8-4a)-x(4-2a)+(3-a) \leq 0$  при  $a \geq \frac{10}{3}$ .

$$2) \frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16} \geq a; \frac{3x^2-4x+8-9ax^2+12ax-16a}{9x^2-12x+16} \geq 0;$$

$9x^2-12x+16 > 0$  при любых  $x$ ; найдем значения  $a$ , для которых  $3x^2-9ax+12ax-4x+8-16a \geq 0$  независимо от  $x$ .  $x^2(3-9a)+x(12a-4)+(8-16a) \geq 0$ :

$$3-9a \geq 0, \text{ т.е. } a \leq \frac{1}{3}, D = (6a-2)^2 - (8-16a)(3-9a) \leq 0;$$

$$36a^2 - 48a + 4 - (24 - 72a - 48a + 144a^2) = -108a^2 + 72a - 20;$$

$$-108a^2 + 72a - 20 \leq 0; 27a^2 - 18a + 5 \geq 0 \quad (1); a_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 135}}{27};$$

$D < 0 \Rightarrow$  неравенство (1) выполнено при любом  $a$ , таким образом  $a \leq \frac{1}{3}$ .

### № 1437

$$1) \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6} < 1; \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6} < \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0; (x-2)(x-3) > 0; x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty).$$

$$2) 5^x - 3^{x+1} > 2(5^x - 3^{x+1}); 5^x - 3 \cdot 3^x > \frac{2}{5} \cdot 5^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x; \frac{3}{5} \cdot 5^x - 2 \frac{7}{9} \cdot 3^x > 0;$$

$$\frac{3}{5} \cdot 5^x - \frac{25}{9} \cdot 3^x > 0; 27 \cdot 5^x - 125 \cdot 3^x > 0; 3^3 \cdot 5^x - 5^3 \cdot 3^x > 0; 3^3 \cdot 5^x > 5^3 \cdot 3^x; x > 3.$$

### № 1438

$$1) \log_{1/2}(1+x-\sqrt{x^2-4}) \leq 0$$

$$\begin{cases} \log_{1/2}(1+x-\sqrt{x^2-4}) \leq \log_{1/2} 1 & (1) \\ 1+x-\sqrt{x^2-4} > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) 1+x-\sqrt{x^2-4} \geq 0; \begin{cases} x \geq \sqrt{x^2-4} \\ x \geq 0, x^2-4 \geq 0 \end{cases}; x^2 \geq x^2-4; \begin{cases} 0 \geq -4 \\ x \geq 2 \end{cases}; x \geq 2.$$

$$(2) 1+x-\sqrt{x^2-4} > 0; 1+x > \sqrt{x^2-4};$$

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ x^2-4 \geq 0 \\ 1+2x+x^2 > x^2-4 \end{cases}; \begin{cases} x > -1 \\ x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty); x \geq 2. \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 2 \end{cases}; x \geq 2.$$

$$2) \frac{1}{\log_5(3-2x)} - \frac{1}{4-\log_5(3-2x)} < 0;$$

$$\begin{cases} 3-2x > 0 \\ \log_5(3-2x) \neq 0 \\ 4-\log_5(3-2x) \neq 0 \end{cases} \text{ - область определения; } \log_5(3-2x) = a$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{4-a} < 0; \frac{4-a-a}{4-a} < 0; \frac{2-a}{4-a} < 0;$$

$$2 < \log_5(3-2x) < 4; \log_5 5^2 < \log_5(3-2x) < \log_5 5^4; 25 < 3-2x < 4^4; 11 < -x < 311;$$

$$\begin{cases} -11x > x > -311 \\ 3-2x > 0 \\ \log_5(3-2x) \neq 0 \\ 4-\log_5(3-2x) \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} -311 < x < -11 \\ x < \frac{3}{2} \\ x \neq 1 \\ x \neq -311 \end{cases}; -311 < x < -11.$$

№ 1439

1)  $\log_{2x+1}x^2 \geq 2$ ;  $\log_{2x+1}x^2 \geq 1$   $\log_{2x+1}|2x+1|^2$   
 1.  $|2x+1| > 1$ , т.е.  $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ ;  $x_2 \geq (2x+1)^2$

$x_2 \geq 4x^2 + 4x + 1$ ;  $3x^2 + 4x + 1 \leq 0$ ;  $(x+1)(x + \frac{1}{3}) \leq 0$ .  $x \in [-1; -\frac{1}{3}]$ .

2.  $|2x+1| < 1$ , т.е.  $x \in (-1; 0)$ ;  $x_2 \leq 4x^2 + 4x + 1$ ;  $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$ ;

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-1; -\frac{1}{3}] \\ x \in (-1; 0) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty) \end{cases} \quad \text{. Ответ: } x \in [-\frac{1}{3}; 0].$$

2)  $\log_{x^2}|3x+1| < \frac{1}{2}$ ;  $\log_{x^2}|3x+1| < \log_{x^2}|x|$

1.  $x^2 > 1$ ,  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ;  $|3x+1| < |x|$

а)  $x \geq 0$ ,  $3x+1 < x$ ,  $x < -\frac{1}{2}$ ;  $x \in \emptyset$

б)  $-\frac{1}{3} \leq x < 0$ ,  $3x+1 < -x$ ,  $x < -\frac{1}{4}$ ;  $-\frac{1}{3} \leq x < -\frac{1}{4}$

в)  $x < -\frac{1}{3}$ ,  $-3x-1 < -x$ ,  $x > -\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$ .  $x \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$ .

2.  $x^2 < 1$ ,  $x \in (-1; 1)$ ;  $|3x+1| > |x|$

а)  $x \geq 0$ ,  $3x+1 > x$ ,  $x > -\frac{1}{2}$ ;  $x \geq 0$ ;

б)  $-\frac{1}{3} \leq x < 0$ ,  $3x+1 > -x$ ,  $x > -\frac{1}{4}$ ;  $-\frac{1}{4} < x < 0$ ;

в)  $x < -\frac{1}{3}$ ,  $-3x-1 > -x$ ,  $x < -\frac{1}{2}$ ;  $x < -\frac{1}{2}$ ;  $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{4}; +\infty)$ .

Решением исходного неравенства является система:

$$\begin{cases} x \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{4}; +\infty) \\ x \in (-1; 1) \end{cases}.$$

Кроме того по определению логарифма  $x \neq 0$ ,  $x \neq -\frac{1}{3}$ , тогда

$x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; 1)$ . Ответ:  $x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{4}; 0) \cup (0; 1)$ .

№ 1440

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < 0; \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \text{— область определения;}$$

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}+x-3}{x-3} < 0; \frac{4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < 0;$$

$$\begin{cases} 4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} < 0; & \sqrt{x^2+3x-4} < 2x-4 \\ x-3 > 0; & 2x-4 > 0 \\ & x-3 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+3x-4 < 4x^2-16x+16 \\ x > 2 \\ x > 3 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2-19x+20 > 0; \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (5; +\infty); \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (5; +\infty) \\ x > 3 \end{cases}; x \in (5; +\infty).$$

$$2) \begin{cases} 4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} > 0; \\ x-3 < 0 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} > 2x-4; \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ \begin{matrix} x \in \left(\frac{4}{3}; 5\right) \\ x \in (-\infty; 2) \\ x < 3 \end{matrix} \right]; x \in (-\infty; 3); \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty) \\ x-3 \neq 0 \\ x \in (-\infty; 3) \cup [5; +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; -4] \cup [1; 3) \cup (5; +\infty)$ .

№ 1441

$$\log_{1/2}(x^2+ax+1) < 1, x < 0; \log_{1/2}(x^2+ax+1) < \log_{1/2} 1/2;$$

$$x^2+ax+1 > 1/2; x^2+ax+1/2 > 0; 2x^2+2ax+1 > 0.$$

Для любых  $x < 0$  неравенство выполняется в двух случаях:

$$1) D = a^2 - 2 < 0, \text{ т.е. } a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

$$2) \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} -a + \sqrt{a^2 - 2} > 0 \\ -a - \sqrt{a^2 - 2} > 0 \end{cases}$$

$$a) \sqrt{a^2 - 2} > a, \begin{cases} a^2 - 2 \geq 0 \\ a^2 - 2 > a^2 \\ a < 0 \end{cases}; \begin{cases} a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \\ a \in \emptyset \\ a < 0 \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -\sqrt{2}]$$

$$б) -\sqrt{a^2 - 2} > a, \sqrt{a^2 - 2} < -a$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \\ -a > 0 \\ a^2 - 2 < a^2 \end{cases} \quad a \in (-\infty; -\sqrt{2}]$$

Таким образом, ответом на вопрос задачи является система

$$\begin{cases} a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \\ a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \end{cases}. \text{ Ответ: } a \in (-\infty; -\sqrt{2}].$$

### № 1442

$$y = (x-1)^2, 0 \leq x \leq 1; y = x^2 - 2x + 1; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$$

$$y = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 1; y = 2xx_0 - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 + x_0^2 - 2x_0 + 1;$$

$$y = 2xx_0 - 2x - 2x_0^2 + 1; y = x(2x_0 - 2) + (1 - 2x_0^2).$$

$$\text{Точки пересечения касательной с осями: } x = 0, y = 1 - 2x_0^2$$

$$y = 0, x = \frac{2x_0^2 - 1}{2x_0 - 2}, \text{ тогда площадь треугольника,}$$

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_0^2 - 1}{2x_0 - 2} \cdot \frac{1 - 2x_0^2}{1} = \frac{(2x_0^2 - 1)^2}{2(2 - 2x_0)}; S(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_0^2 - 1}{2x_0 - 2} \cdot \frac{1 - 2x_0^2}{1} = \frac{(2x_0^2 - 1)^2}{2(2 - 2x_0)};$$

$$S'(x_0) = \left( \frac{(2x_0^2 - 1)^2}{4 - 4x_0} \right)' = \frac{2(2x_0^2 - 1) \cdot 4x_0 + 4(2x_0^2 - 1)^2}{(4 - 4x_0)^2} =$$

$$= \frac{(4x_0^2 - 2) \cdot 4x_0 + 4(4x_0^4 - 4x_0^2 - 1)}{(4 - 4x_0)^2}.$$

$$\text{Минимум данной функции } S'(x_0) \text{ в точке } x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{4}{9}. \text{ Ответ: } \left( \frac{1}{3}; \frac{4}{9} \right).$$

### № 1443

Уравнение касательной в точке  $x_0$  выглядит  $y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ . Она прямая. Из этого следует, что для любой касательной, проходящей через центр  $y(x_0) - y'(x_0)x_0 = 0$ ,  $(y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = kx + b)$

$$y(x_0) = 2x_0^2 - 3x_0 + 8, y'(x_0) = 4x_0 - 3 \Rightarrow 2x_0^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

Легко проверить, что в этих точках касательная проходит через центр.

**№ 1444**

$$y = x^2 + 2x - 3, y = kx + 1. \text{ Ошибка в условии.}$$

**№ 1445**

$$y = x^2 + px + q, y = 2x - 3; x = 1.$$

Найдем точки пересечения:  $y = 1 \cdot 2 - 3 = -1$ , тогда для  $p$  и  $q$  справедливо  $-1 = 1 + p + q$ , т.е.  $p + q = -2$  (использовали уравнение  $y = x^2 + px + q$ )

Вершины параболы имеют координаты  $\left(-\frac{p}{2}, \left(\frac{-p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{2} + q\right)$ , т.е.

$$\text{расстояние до оси } O_x \text{ равно } |y_0| = \left|\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{2} + q\right| = \left|\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q\right| = \left|-\frac{p^2}{4} - 2 - p\right|$$

$$y'_0 = -\frac{p}{2} - 1 = \frac{-p-2}{2}, \text{ очевидно } p = -2 \text{ точка минимума, тогда } q = 0, \text{ а}$$

кратчайшее расстояние равно 1.

**№ 1446**

$$y = 4x - x^2, M\left(\frac{5}{2}; 6\right); y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$$

$$y' = 4 - 2x, \text{ тогда уравнение касательной имеет вид: } y = (4 - 2x_0)(x - x_0) + 4x_0 - x_0^2;$$

$$y = 4x - 4x_0 - 2xx_0 + 2x_0^2 + 4x_0 - x_0^2; y = x_0^2 - 2xx_0 + 4x.$$

Известно, что эта касательная проходит через точку  $M$ , тогда

$$6 = x_0^2 - 5x_0 + 10; x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0;$$

$$x_0 = 1, x_0 = 4, \text{ т.е. получим уравнения касательных } y = 1 + 2x \text{ и } y = 16 - 4x;$$

Касательные пересекаются в точке с абсциссой  $\frac{15}{6}$ , тогда искомая площадь

$$S = \int_1^{15/6} (1 + 2x) dx + \int_{15/6}^4 (16 - 4x) dx - \int_1^4 (4x - x^2) dx =$$

$$= \left(x + x^2\right)\Big|_1^{15/6} + \left(16x - 2x^2\right)\Big|_{15/6}^4 - \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 = 2,25$$

**№ 1447**

$$y = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$$

Перепишем данную функцию в виде  $y = 6(1 - \sin^2 x) + 6\sin x - 2, y = -6\sin^2 x + 6\sin x + 4$ , положим  $y' = -12\sin x \cos x + 6\cos x = 0, 6\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \text{ и } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z - \text{ точки max } \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

№ 1448

$$y = x^2 + (a+4)x + 2a + 3, x \in [0; 2]; y_{\min} = -4; y' = 2x + a + 4;$$

$$y' = 0, 2x + a + 4 = 0, x = \frac{-a-4}{2}.$$

Ветви параболы направлены вверх, т.е.  $x = \frac{-a-4}{2}$  – точка минимума.

Рассмотрим три случая. 1) вершина параболы лежит правее  $x = 2$ , тогда минимальное на отрезке  $[0; 2]$  значение она принимает в точке  $x = 2$ , т.е.

$$\begin{cases} \frac{-a-4}{2} \geq 2 \\ -4 = 4 + (a+4) \cdot 2 + 2a + 3 \end{cases} \quad \text{– решений нет}$$

2) вершина параболы лежит внутри отрезка  $[0; 2]$ :

$$\begin{cases} 0 < \frac{-a-4}{2} < 2 \\ -4 = \left(\frac{-a-4}{2}\right)^2 + \frac{(a+4)(-a-4)}{2} + 2a + 3 \end{cases} \quad \text{– решений нет}$$

$$3) \text{ вершина параболы лежит левее } x = 0; \begin{cases} \frac{-a-4}{2} \leq 0 \\ -4 = 2a + 3 \end{cases} \quad a = -3,5.$$

№ 1449

$y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2, x \in [0; 2]; y_{\min} = 3$ . Ветви параболы направлены вверх.  $y' = 8x - 4a; y' = 0; 8x - 4a = 0, x = \frac{a}{2}$

$$1) \begin{cases} \frac{a}{2} \geq 2 \\ 3 = 16 - 8a + a^2 - 2a + 2 \end{cases} \quad a = 5 + \sqrt{10}$$

$$2) \begin{cases} 0 < \frac{a}{2} < 2 \\ 3 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} - 4 \cdot a \cdot \frac{a}{2} + a^2 - 2a + 2 \end{cases} \quad \text{– решений нет}$$

$$3) \begin{cases} \frac{a}{2} \leq 0 \\ 3 = a^2 - 2a + 2 \end{cases} \quad a = 1 - \sqrt{2}$$

Рассмотрели три случая: в первом – вершина лежит правее  $x = 2$ , т.е. минимальное значение на  $[0; 2]$  данная функция принимает в точке  $x = 2$ ; во втором – вершина лежит внутри  $[0; 2]$ , т.е. минимальное значение – в точке  $x = \frac{a}{2}$ ; в третьем случае – вершина лежит левее точки  $x = 0$ , т.е. минимальное значение на отрезке  $[0; 2]$  данная функция принимает в точке  $x = 0$ .

Ответ:  $a = 5 + \sqrt{10}; a = 1 - \sqrt{2}$ .



**№ 1450**

$$y = 4x^2 + 8ax - 9, y = 4ax^2 + 8x + a - 2; y = -5.$$

Найдем ординаты вершин парабол:

$$y_1 = 4(-a)^2 + 8a(-a) - 9 = -4a^2 - 9;$$

$$y_2 = 4a\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{a}\right) + a - 2 = \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + a - 2 = -\frac{4}{a} + a - 2.$$

Возможны два случая:

$$1) \begin{cases} -4a^2 - 9 > -5 \\ -\frac{4}{a} + a - 2 > -5 \end{cases}; \begin{cases} 4a^2 < -4 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} a^2 < -1 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{— чего не может}$$

быть ни при каких  $a$

$$2) \begin{cases} -4a^2 - 9 < -5 \\ -\frac{4}{a} + a - 2 < -5 \end{cases}; \begin{cases} 4a^2 > -4 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 < 0 \end{cases}; \begin{cases} a^2 > -1 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{— это при любых } a$$

Рассмотрим два случая

$$1) a > 0, -\frac{4}{a} + a + 3 < 0; -4 + a^2 + 3a < 0; a^2 + 3a - 4 < 0$$

$a \in (-4; 1)$  и  $a > 0$ , следовательно,  $0 < a < 1$ ;  $a < 0$ .

$$2) -4 + a^2 + 3a > 0; a^2 + 3a - 4 > 0; a < -4 \text{ и } a > 1, \text{ но } a < 0; a < -4.$$

Ответ:  $a < -4, 0 < a < 1$ .

**№ 1451**

$$y = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}; y' = \frac{(2\cos^4 x + \sin^2 x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)}{(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)^2} -$$

$$- \frac{(2\cos^4 x + \sin^2 x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)}{(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{(-8\cos^3 x \cdot \sin x + 2\sin x \cdot \cos x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)}{(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)^2} -$$

$$- \frac{(2\cos^4 x + \sin^2 x)(8\sin^3 x \cos x - 6\cos x \cdot \sin x)}{(2\sin^4 x + 3\cos^2 x)^2}$$

Знаменатель дробей не влияет на исследование функции  $y$ , т.к. не может обращаться в 0 и не может быть отрицательным.

$$\begin{aligned} & (-8\cos^3 x \cdot \sin x + 2\sin x \cdot \cos x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) - \\ & - (2\cos^4 x + \sin^2 x)(8\sin^3 x \cdot \cos x - 6\cos x \cdot \sin x) = \\ & = \sin x \cdot \cos x(2 - 8\cos^2 x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) - \cos x \cdot \sin x(8\sin^2 x - 6)(2\cos^4 x + 3\sin^2 x) = \\ & = \sin 2x(1 - 4\cos^2 x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) - \sin 2x(4\sin^2 x - 3)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) = \\ & = \sin 2x(2\sin^4 x + 3\cos^2 x - 8\sin^4 x \cos^2 x - 12\cos^4 x - 8\sin^2 x \cos^4 x - 4\sin^4 x + 6\cos^4 x + 3\sin^2 x) = \\ & = \sin 2x(-2\sin^4 x - 6\cos^4 x + 3 - 8\sin^2 x \cos^4 x - 8\sin^4 x \cos^2 x) = \sin 2x(-2\sin^4 x - 6\cos^4 x + 3 - \\ & - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x))^2 = \sin 2x(-2\sin^4 x - 6\cos^4 x + 3 - 2\sin^2 x) \end{aligned}$$

Отсюда получаем максимальное значение  $\frac{2}{3}$  и минимальное значение  $\frac{7}{15}$ .