А.В. Тронин

Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 9 класс

к пособию «Дидактические материалы по геометрии для 9 класса общеобразовательных учреждений / В.А. Гусев, А.И. Медяник. — 7-е изд.
— М.: Просвещение, 2001.»

Самостоятельные работы

Вариант 1.

С-1.

1. Постройте луч OA. Отложите от точки A отрезок $AA' = AO$.

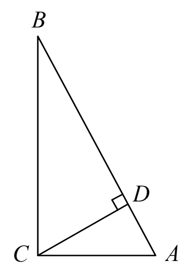
2. Т.к. $\frac{b}{b'} = 2$, то $a' = \frac{1}{2}a = 2{,}5$ см и $c' = \frac{1}{2}c = 1{,}75$ см.

С-2.

1. Треугольники подобны по трем сторонам, т.к. $\frac{7{,}5}{2{,}5} = \frac{6}{20} = \frac{7{,}2}{24}$.

2. Т.к. углы при основании равнобедренных треугольников равны, то они подобны по 2-м углам.

С-3.



1. $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{100-16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ см;
$\angle BCD = 90° - \angle CBD = \angle BAC$, значит, ΔCBD и ΔADC подобны по двум углам, следовательно,
$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{10 \cdot 2\sqrt{21}}{4} = 5\sqrt{21}$ см.
По теореме Пифагора в ΔABC находим,
$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{525+100} = 25$ см.

2. Т.к. $CD^2 = AD \cdot BD$, то $CD = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ см.

С-4.

1. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 88° = 44°$, по свойствам окружности.

2. Т.к. M — центр окружности, то BC — диаметр $\Rightarrow \angle A = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle B = \angle C = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$.

С-5.

1. Строим точку A' симметричную точке A относительно точки C с коэффициентом 2 и точку B' симметричную точке B относительно точки O с коэффициентом 2. Проводим луч $A'B'$.

2. Т.к. $MK \| AC$, то $\angle BMK = \angle BAC$ (как соответственные) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBC$ по 2-м углам ($\angle ABC$ — общий) $\Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{8}{AB} \Rightarrow AB = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14$ см.

3. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по 2-му признаку $\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = 2{,}5 \Rightarrow A_1C_1 = 4$ см.

С-6.

1. По теореме косинусов имеем:

$14^2=9^2+12^2-2\cdot 9\cdot 12\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{9^2+12^2-14^2}{2\cdot 9\cdot 12} = \dfrac{29}{216} > 0 \Rightarrow \alpha$ — острый.

2. Т.к. острый угол равен 52°, то тупой — 128° $\Rightarrow$ диагональ равна

$\sqrt{4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cos 128^\circ} = \sqrt{41-40\cos 128^\circ} \approx 8$ см.

С-7.

1. По теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{AC}{\sin\angle B} \Rightarrow AC = \dfrac{AB\cdot\sin\angle B}{\sin\angle C} = \dfrac{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$ см.

2. Т.к. PQ — меньшая сторона, то $\angle PRQ$ — наименьший, а сторона PR — наибольшая, то $\angle PQR$ — наибольший.

С-8.

1. $\angle C = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ < \angle B \Rightarrow AB < AC$. (т.к. в треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол).

2. По теореме косинусов: $\cos\alpha = \dfrac{15^2+8^2-17^2}{2\cdot 8\cdot 15} = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$.

С-9.

1. Пусть половина меньшего угла равна x, тогда $2x + 2x + 3x + 5x = 360^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ \Rightarrow 60^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ — углы четырехугольника.

2. Пусть n число сторон многоугольника, тогда сумма внутренних углов равна $180^\circ n - 360^\circ$, а сумма внешних —

$180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 360^\circ \Rightarrow 2\cdot(180^\circ\cdot n - 360^\circ) = 360^\circ \Rightarrow n = \dfrac{3\cdot 360^\circ}{360^\circ} = 3$.

С-10.

1. Т.к. радиус вписанной окружности равен 1, то сторона равна 2 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ диаметр описанной окружности по теореме Пифагора равен $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ см, следовательно, радиус равен $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ см.

2. Проведите прямую через центр окружности, затем перпендикулярную к ней, затем соедините точки пересечения прямых с окружностью.

С-11.

1. $l = 2\pi r = 2\pi\cdot 5 = 10\pi$ см.

2. Т.к. радиус вписанной окружности пропорционален стороне квадрата, то они также и относятся $\Rightarrow$ 3:1.

С-12.

1. По теореме косинусов меньшая диагональ равна $\sqrt{a^2+a^2-2a^2\cos 120^\circ}=a\sqrt{3}$, тогда по теореме Пифагора большая диагональ равна $\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

2. $l=\frac{1}{4}\cdot 2\pi r=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 2=\pi$ см.

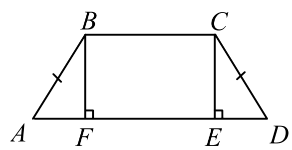
С-13.

1. Т.к. меньшая высота опирается на большую сторону, то

$S=6\cdot 3=18$ см $\Rightarrow$ другая высота равна $\frac{S}{4}=\frac{9}{2}=4{,}5$ см.

2. Постройте треугольник. Измерьте его стороны и воспользуйтесь формулой Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр, a, b и c — стороны треугольника.

С-14.



1. $AF=ED=BF$ (т.к. $\angle A=\angle D=45^\circ$) $\Rightarrow BC=FE=$
$=AD-AF-ED=$
$=AD-2BF=70-2\cdot 10=50$ см.

$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BF=\frac{1}{2}\cdot 120\cdot 10=600$ см^2.

2. Постройте трапецию и ее высоту. Измерьте их и воспользуйтесь формулой $S=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$, где a и b — длины оснований, а h — длина высоты.

С-15.

1. Т.к. коэффициент подобия $k=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, то остальные стороны равны $8\cdot k=$ $=8\cdot\frac{1}{2}=4$ см; $16\cdot k=16\cdot\frac{1}{2}=8$ см и $12\cdot k=12\cdot\frac{1}{2}=6$ см, а площадь второго четырехугольника меньше площади первого в $\frac{1}{k^2}=4$ раза.

2. $k=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=k^2\Rightarrow S_1=S_2\cdot k^2=50\cdot\frac{9}{4}=25\cdot 9=225$ см^2.

С-16.

1. Т.к. $l=2\pi r$, то $r=\frac{l}{2\pi}=\frac{1}{2}\Rightarrow S=\pi r^2\approx\frac{1}{4}\cdot 3{,}14=\frac{314}{400}=\frac{157}{200}=0{,}785$ см^2.

2. $S=a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot AL\cdot AK-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi AL^2=a^2-\frac{a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{8}=a^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$.

С-17.

1. Пусть стороны прямоугольника равны $8x$ и $15x$, тогда по теореме Пифагора $34^2 = 64x^2 + 225x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{34^2}{64+225} = \dfrac{1156}{289} = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ стороны равны 16 см и 30 см $\Rightarrow S = 16 \cdot 30 = 480$ см^2.

2. $S=\pi(r_1^{\,2} - r_2^{\,2})=\pi(4r_2^{\,2} - r_2^{\,2})=3\pi r_2^{\,2}=6 \Rightarrow r_2^{\,2} = \dfrac{2}{\pi} \Rightarrow r_2 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ м $\Rightarrow r_1 = 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ м.

Вариант 2.

С-1.

1. Постройте середины отрезков AO и BO. Эти точки — искомые.

2. Коэффициент подобия $k = \dfrac{1{,}5}{4} \Rightarrow$ стороны равны $7 \cdot \dfrac{1{,}5}{4} = 2{,}625$ см;

$5 \cdot \dfrac{1{,}5}{4} = 1{,}875$ см и $4 \cdot \dfrac{1{,}5}{4} = 1{,}5$ см.

С-2.

1. $P_1 = 3 + 4 + 6 = 13 \Rightarrow k = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{58{,}5}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ стороны равны $4 \cdot \dfrac{58{,}5}{13} = 18$ см, $3 \cdot \dfrac{58{,}5}{13} = 13{,}5$ см и $6 \cdot \dfrac{58{,}5}{13} = 27$ см.

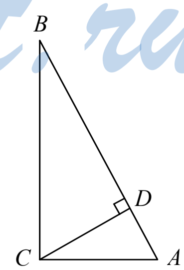
2. Т.к. тупой угол равен $180° - 54° - 18° = 108° \Rightarrow$ один из углов в отсеченном треугольнике равен $54° \Rightarrow$ треугольники подобны по двум углам, т.к. еще один угол — общий.

С-3.

1. Т.к. $\angle C = 90°$, то $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$ см, а $BC = \sqrt{48^2 + 54^2} = 80$ см.

2. Т.к. $CD^{\,2} = BD \cdot AD$, то



$BD = \dfrac{CD^2}{AD} == \left(\dfrac{60}{13}\right)^2 \cdot \dfrac{13}{11 \cdot 13 + 1} = 1\dfrac{12}{13}$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 11\dfrac{1}{13} + 1\dfrac{12}{13} = 13$ см. По теореме Пифагора

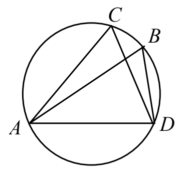
$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{\dfrac{50^2 + (11 \cdot 13 + 1)^2}{13^2}} = 12$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 5$ см.

С-4.

1. Т.к. $\angle ABC$— вписанный, то $\angle ABC = \frac{1}{2}(360° - \angle AOC) = \frac{1}{2}(360° - 84°) = 138°$.

2.



$\angle ABD = \angle ACD = 40° \Rightarrow \angle BAD =$
$= 180° - 40° - 60° = 80°$.

С-5.

1. Разделите отрезки AO, BO и CO пополам. Затем эти «половинки» отложите от точек A, B и C на лучах OA, OB и OC. Концы получившихся отрезков соедините.

2. Т.к. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, пусть D_1 — точка пересечения биссектрис треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ со сторонами AC и A_1C_1 — соответственно. Т.к. $\angle B = \angle B_1$, то $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1 \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$.

3. Т.к. $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{5}{3}$ и $\angle A$ — общий, то $\Delta ABC \sim \Delta HPQ \Rightarrow PQ = \frac{3}{5} \cdot BC = 6$ см.

С-6.

1. Т.к. $0{,}3^2 + 0{,}4^2 = 0{,}5^2$, то по теореме, обратной к теореме Пифагора, этот треугольник прямоугольный.

2. По теореме косинусов: $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos\angle B} =$
$= \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}6^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot \cos 23°28'} \approx 0{,}24$ см.

С-7.

1. По теореме синусов имеем:

$$\frac{CD}{\sin\angle M} = \frac{CM}{\sin\angle D} \Rightarrow CM = \frac{CD \cdot \sin\angle D}{\sin\angle M} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ см.}$$

2. Нет, т.к. тогда угол, лежащий против стороны, равной 9 см, еще больше, но сумма углов треугольника равна $180° \Rightarrow$ противоречие.

С-8.

1. По теореме синусов $\Rightarrow \frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\angle A = \frac{BC \cdot \sin\angle C}{AB} = \frac{12 \cdot 0{,}7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} = \frac{21}{20} > 1 \Rightarrow \sin C \neq 0{,}7.$$

2. По теореме косинусов $RQ = \sqrt{PQ^2 + PR^2 - 2PQ \cdot PR \cdot \cos\angle P} =$

$= \sqrt{45^2 + 7{,}3^2 - 2 \cdot 45 \cdot 7{,}3 \cdot \cos(42°16')} \approx 39{,}9$ см.

С-9.

1. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна (5 – 2) · 180° = 540°, пусть его углы равны x, $3x$, $5x$, $7x$ и $11x$, тогда $x + 3x + 5x + 7x + 11x = 540°$; $27x = 540°$; $x = 20°$, следовательно, искомые углы равны 20°, 3 · 20° = 60°, 5 · 20° = 100°, 7 · 20° = 140° и 11 · 20° = 220°.

2. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$, сумма внешних углов равна $180° \cdot n - 180°(n - 2) = 360°$, следовательно,

$180° \cdot (n - 2) = 360°$; $180° \cdot n = 720°$; $n = \frac{720°}{180°} = 4$.

С-10.

1. Т.к. по теореме синусов $R = \frac{a}{2\sin 60°}$, где a — сторона, а 60° — угол правильного треугольника, $a = 2R\sin 60° = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см $\Rightarrow$ площадь треугольника $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, а периметр $P = 3a$.

$$r = \frac{2 \cdot S}{P} = \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{4}a} = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6\sqrt{3} = 3 \text{ см}.$$

2. Постройте центральный угол в 60°, затем отложите от него равный ему. Повторите эту операцию еще 3 раза. В точках пересечения сторон углов с окружностью проведите касательные.

С-11.

1. По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см, поскольку центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, находим $R = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см, следовательно, длина окружности $l = 2\pi R = 2\pi \cdot 2{,}5 = 5\pi$ см.

2. Т.к. стороны 2-го треугольника в 2 раза меньше сторон 1-го, то радиус окружности, вписанной во 2-й треугольник, в 2 раза меньше.

С-12.

1. Каждый из углов правильного восьмиугольника равен:

$\frac{180° \cdot (8 - 6)}{8} = 135°$.

По теореме косинусов: $AC^2 = 2b^2(1 - \cos 135°) = 2b^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Т.к. $\angle ABC = \angle BCD = \frac{180°(8-2)}{8} = 135°$, то $\angle BCA = \frac{180°-135°}{2} = 22{,}5° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACD = 135° - 22{,}5° = 112{,}5° \Rightarrow$ по теореме косинусов

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos 112{,}5°} =$$
$$= \sqrt{2b^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b^2 - 2b^2\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \cos 112{,}5°} =$$
$$= b\sqrt{3+\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = b\sqrt{1+\sqrt{2}}\,.$$

2. $\frac{1}{5} \cdot 2\pi r = 3 \Rightarrow r = \frac{15}{2\pi}$ дм.

С-13.

1. В параллелограмме на большую сторону падает меньшая высота, значит, площадь параллелограмма $S = 2 \cdot 5 = 10$ см^2, следовательно, искомая сторона равна $\frac{S}{2{,}5} = 4$ см.

2. Необходимо измерить стороны треугольника, вычислить его полупериметр и воспользоваться формулой Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, и c — стороны треугольника, p — полупериметр.

С-14.

1. Высота трапеции равна $40 \cdot \sin 45° = 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$ см $\Rightarrow$ ее площадь равна $\frac{1}{2}(24+60) \cdot 20\sqrt{2} = 840\sqrt{2}$ см^2.

2. Построить серединный перпендикуляр к любому из оснований трапеции, измерить высоту трапеции (отрезок серединного перпендикуляра, заключенного между основаниями), измерить основания трапеции; вычислить площадь по формуле $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, где a и b — основания, h — высота.

С-15.

1. Вычислите площадь четырехугольника по теореме Герона:
$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, а затем умножить ее на 1000, где p — полупериметр, a, b, c и d — стороны четырехугольника.

2. $P_1 = 11 + 3 + 6 + 7 = 27$см. $\Rightarrow \dfrac{P_2}{P_1} = k = \dfrac{216}{27} = 8 \Rightarrow$ стороны второго четырехугольника: $11 \cdot 8 = 88$ см; $3 \ 8 = 24$ см; $6 \cdot 8 = 48$ см; $7 \cdot 8 = 56$ см, площадь второго четырехугольника больше площади первого в $k^2 = 8^2 = 64$ раза.

С-16.

1. Площадь квадрата $S = a^2$, где a — сторона квадрата, площадь вписанного в него круга $S_2 = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{a^2}{2}\right)$, значит, $\dfrac{S}{S_2} = \dfrac{a^2}{\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\pi \cdot \dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{\pi}$.

2. $S' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 - 3\dfrac{1}{6}\pi\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = b^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{8}\right)$

С-17.

1. Пусть $DH \perp AB$ и $CK \perp AB$. Т.к. $DC \| AB$, то $DH = CK \Rightarrow$

$\Rightarrow S(ABD) = S(CAB) = \dfrac{1}{2} DH \cdot AB$, т.к. AB — их общее основание.

2. Пусть a — сторона квадрата $\Rightarrow$ по теореме Пифагора диаметр круга равен $a\sqrt{2}$, тогда $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \pi R^2 = a^2 + 456 \Rightarrow \dfrac{\pi a^2}{2} = a^2 + 456 \Rightarrow a^2 = \dfrac{912}{\pi - 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{круга}} = \dfrac{\pi a^2}{2} = \dfrac{456\pi}{\pi - 2} = 1256$ см^2.

Вариант 3.

С-1.

1. Находим середины отрезков CO и OD, пусть это будут точки A и B — соответственно, теперь ищем середины отрезков AO и OB, пусть это будут точки P и K — соответственно; при данной гомотетии точка C перейдет в точку P, а точка D перейдет в точку K.

2. Коэффициент подобия $k = \dfrac{3{,}5}{6}$, значит, искомые стороны равны 3,5 см, $4 \cdot k = 4 \cdot \dfrac{3{,}5}{6} = \dfrac{7}{3}$ см и $3 \cdot k = 3 \cdot \dfrac{3{,}5}{6} = \dfrac{7}{4}$ см.

С-2.

1. Пусть стороны треугольника равны $5x$, $6x$ и $8x$, тогда стороны подобного — $5kx$, $6kx$ и $8kx \Rightarrow 8kx - 5kx = 3kx = 15 \Rightarrow kx = 5 \Rightarrow$ искомые стороны равны $5kx = 5 \cdot 5 = 25$ см, $6kx = 6 \cdot 5 = 30$ см, $8kx = 8 \cdot 5 = 40$ см.

2. Пусть меньший угол равен x, тогда $x + 3x + 6x = 180° \Rightarrow x = 18° \Rightarrow$ углы треугольника равны $18°$, $3x = 3 \cdot 18° = 54°$ и $6x = 6 \cdot 18° = 108°$. Далее см. Вар. 2. С-2.2.

С-3.

1. Высота данного треугольника (опущенная на гипотенузу) равна (по теореме Пифагора) $\sqrt{10^2-8^2}=6$ дм, пусть проекция неизвестного катета x, тогда $6^2=8\cdot x$; $x=\dfrac{36}{8}=4{,}5$ дм; гипотенуза равна $8+4{,}5=12{,}5$ дм, по теореме Пифагора неизвестный катет равен $\sqrt{12{,}5^2-10^2}=7{,}5$ дм.

2. Пусть проекция другого катета равна x, тогда $\left(7\dfrac{1}{17}\right)^2=13\dfrac{4}{17}\cdot x\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{120^2}{17^2}\cdot\dfrac{17}{225}=\dfrac{64}{17}$ дм, значит, гипотенуза $13\dfrac{4}{17}+\dfrac{64}{17}=17$ дм, по теореме Пифагора один из катетов равен $\sqrt{\left(7\dfrac{1}{17}\right)^2+\left(13\dfrac{4}{17}\right)^2}=15$ дм, а оставшийся катет равен $\sqrt{17^2-15^2}=8$ дм.

С-4.

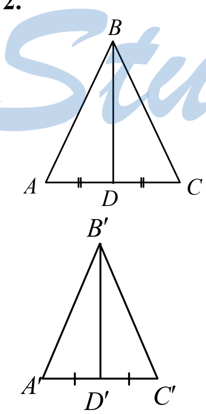
1. Из того, что $\angle ABC$ — вписанный, а $\angle AOC$ — центральный и они опираются на одну и туже хорду, следует, что $\angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle AOC=146°:2=73°$.

2. $\angle BCD=\angle ACD+\angle ADB=70°+50°=120°$ (как углы, опирающиеся на одну хорду), следовательно, $\angle BAD=180°-\angle BCD=180°-120°=60°$.

С-5.

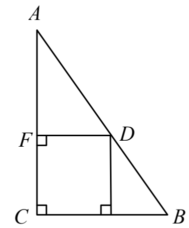
1. Пусть точки M', C' и K' — середины отрезков MO, CO и KO, соответственно, тогда при данной гомотетии ΔMKC перейдет в $\Delta M'K'C'$.

2.



Из того, что $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, следует, что $\angle BAD=\angle B'A'D'$ и $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A'C'}=k=\dfrac{AB}{A'B'}$, следовательно, $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ по двум сторонам и углу, значит, $\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

3.



Пусть сторона квадрата равна a. тогда из подобия треугольников FAD и CAB следует, что $\frac{6}{a} = \frac{3}{3-a}$ или $\frac{a}{6} = \frac{3-a}{3} \Rightarrow a = 6 - 2a \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$ см.

С-6.

1. По теореме косинусов $\cos\alpha = \frac{7^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = -\frac{31}{112} < 0$, где α — угол, лежащий против стороны в 12 см, значит, данный треугольник тупоугольный.

2. По теореме косинусов $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C} =$
$= \sqrt{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 123°17'} \approx 22$ см.

С-7.

1. По теореме синусов $\frac{KD}{\sin\angle P} = \frac{PD}{\sin\angle K} \Rightarrow KD = \frac{PD \cdot \sin\angle P}{\sin\angle K} = \frac{6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6}$ см.

2. Не может, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, а 6 см < 8 см.

С-8.

1. Не может, так как тогда бы по теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$;
$\frac{4}{0{,}4} = \frac{11}{\sin B} \Rightarrow \sin B = 1{,}1 > 1$, а синус любого угла не больше единицы.

2. По теореме косинусов $KE = \sqrt{MK^2 + ME^2 - 2MK \cdot ME \cdot \cos\angle M} =$
$= \sqrt{5{,}6^2 + 4{,}2^2 - 2 \cdot 5{,}6 \cdot 4{,}2 \cdot \cos(67°13')} \approx 5{,}55$ см.

С-9.

1. Сумма углов выпуклого шестиугольника равна 720°, пусть углы равны $2x$, $4x$, $4x$, $6x$, $8x$ и $12x$, тогда $2x + 4x + 4x + 6x + 8x + 12x = 720°$, $36x = 720°$, $x = 20°$, значит, искомые углы равны $2x = 2 \cdot 20° = 40°$, $4x = 4\ \ 20° = 80°$, $4x = 80°$,$6x = 6 \cdot 20° = 120°$, $8x = 8 \cdot 20° = 160°$, $12 \cdot x = 12 \cdot 20° = 240°$.

2. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°n - 360°$, сумма внешних углов равна $180°n - 180°(n - 2) = 360°$, следовательно, $180°n - 360° = 360° + 180° \Rightarrow n = \frac{900°}{180°} = 5$.

С-10.

1. Пусть a — сторона 6-угольника $\Rightarrow r\text{tg}30° = \frac{a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r\text{tg}30° = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow R = a = \sqrt{3}$.

2. Проведите диаметр окружности, затем перпендикулярный ему, затем поверните эти диаметры на 45° и соедините точки пересечения с окружностью.

С-11.

1. По теореме Пифагора диаметр окружности будет равен $\sqrt{5^2+12^2} = 13$см. Длина искомой окружности равна $2\pi r = \pi d = 13\pi$ см, где d — диаметр окружности.

2. Окружность, описанная около треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного равностороннего треугольника, является вписанной в данный равносторонний треугольник. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, где а — сторона треугольника, значит,

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = 2:1$$

С-12.

1. Рассмотрим восьмиугольник $ABCDMNKP$ со стороной b, так же как и в В2, С-12 по теореме косинусов $AC^2 = 2b^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Треугольник KAC является прямоугольным, так как он вписан в окружность, описанную около данного восьмиугольника, а сторона CK является диаметром этой окружности. $AC = AK$, т.к. $\Delta KPA = \Delta CBA$ по первому признаку ($KP = PA = AB = BC = b$, $\angle KPA = \angle ABC = 135°$). По теореме Пифагора $CK = \sqrt{AK^2 + AC^2} = \sqrt{4b^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2b\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$, а CK и есть искомая диагональ.

2. $2\pi r = 4 \cdot \frac{360°}{250°} \Rightarrow r = \frac{72}{25\pi}$ дм.

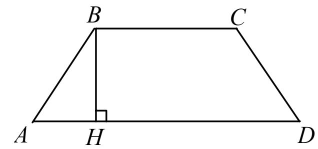
С-13.

1. $S = a \cdot h \Rightarrow h = \frac{S}{a} = \frac{24}{6} = 4$ см.

2. см. Вар. 1.

С-14.

1.



Рассмотрим трапецию $ABCD$ и высоту BH, пусть $AB = 20$ см, $BC = 12$ см и $AD = 30$ см, тогда $\angle ABH = \angle ABC - \angle HBC =$ $= 150° - 90° = 60°$; из прямоугольного ΔABH находим $BH = AB \cdot \cos\angle ABH = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ см. Итак,

$S = \frac{1}{2} BH \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (30 + 12) = 210$ см^2.

2. См. В2, С-14.2.

С-15.

1. Вычислить площадь четырехугольника по формуле Герона: $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, а затем умножить ее на 5000, где p — полупериметр четырехугольника, a, b, c и d — стороны четырехугольника.

2. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $2k + 5k = 28$, $7k = 28$, $k = 4$; стороны второго четырехугольника равны $2k=2\cdot 4 = 8$ см, $3k = 3 \cdot 4 = 12$ см, $4k = 4 \cdot 4 = 16$ см, $5k = 5 \cdot 4 = 20$ см, а площадь второго четырехугольника больше площади первого четырехугольника в $k^2 = 4 \cdot 4 = 16$ раз.

С-16.

1. Пусть сторона квадрата a, тогда диагональ квадрата, которая является диаметром описанной окружности, равна $a\sqrt{2}$, а радиус равен $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Площадь квадрата $S=a^2$, а площадь круга $S_1=\pi R^2=\frac{\pi a^2}{2}$, тогда $\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

2. $S' = 2a \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$.

С-17.

1. Пусть BH — высота, опущенная из точки B на прямую AC, диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, значит, $AO = OC$. Площади треугольников ABO и CBO соответственно равны $S_1 = \frac{1}{2} BH \cdot AO$ и $S_2 = \frac{1}{2} BH \cdot OC$, получим $S_1 = S_2$, так как $AO = OC$.

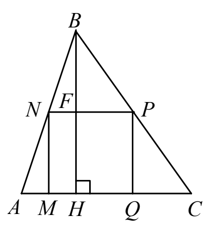
2. Пусть сторона квадрата a, тогда радиус круга $r = \frac{a}{2}$, площадь круга $S_1 = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}$, площадь квадрата $S_2 = a^2$, следовательно, $\frac{\pi a^2}{4} + 86 = a^2$, откуда $a^2 = \frac{344}{4-\pi}$, теперь $S_1 = \frac{\pi \cdot 344}{4(4-\pi)} = \frac{86\pi}{4-\pi} \approx 314$ см^2.

Вариант 4.

С-1.

1. Пусть точки E, G и K — середины отрезков AB, AC и AD, соответственно, точки F, N и M — середины отрезков AE, AG и AK, а точки X, Y и Z — середины отрезков FE, NG и MK, соответственно. Четырехугольник $AXYZ$ — искомый.

2. Отношение другой стороны к диагонали — это синус угла между другой стороной и диагональю. С помощью тригонометрического круга постройте этот угол и отложите от данной стороны. В другом конце данной стороны проведите перпендикуляр. Через точку их пересечения проведите прямую, параллельную данной стороне. Затем еще один перпендикуляр через другой конец данной стороны.

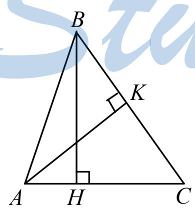


С-2.

1. $\Delta ABC \sim \Delta NBP$ по двум углам ($\angle ABC$ — общий, $\angle BPN = \angle BCA$, как соответственные при пересечении параллельных прямых AC и NP секущей BC) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{NP} = \frac{BH}{BF} = \frac{BH}{BH - FH} = \frac{BH}{BH - NP} \Rightarrow$$

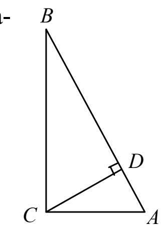
$$\Rightarrow AC \cdot BH - AC \cdot NP = BH \cdot NP \Rightarrow NP = \frac{AC \cdot BH}{BH + AC} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \text{ см.}$$



2. ΔAKC и ΔBHC — прямоугольные $\Rightarrow$ они подобны, т.к. имеют общий угол C.

С-3.

1. По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 40^2} = 41$ дм. Площадь прямоугольного треугольника с одной стороны равна половине произведения катетов, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 40 = 180$ дм^2, а с другой стороны половине произведения высоты на гипотенузу, откуда высота равна $\frac{2 \cdot 180}{41} = 8\frac{32}{41}$ дм^2.

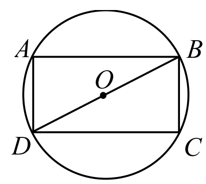


2. Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущей задаче, получаем:

$CD = \frac{2S}{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $S = \frac{1}{2}ab$, а $AB = \sqrt{a^2+b^2}$.

С-4.

1. $\angle AOC = 360° - 2 \cdot \angle ABC = 360° - 2 \cdot 99° = 162°$.



2. Т.к. $BO = OD = OP$, то $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$ и $\angle OAD = \angle ODA = \beta$, т.к. $\angle A = 90°$, то $\alpha + \beta = 90°$. Т.к. $\angle OBD + \angle A + \angle ODA = 180°$, то точки B, O и D лежат на одной прямой $\Rightarrow BD$ — диаметр.

Т.к. $\angle C = 90°$ и опирается на диаметр, то точка C лежит на окружности.

С-5.

1. Пусть точки A и B при гипотетии с центром точки O и коэффициентом, равным k, переходят в точки C и D, соответственно, тогда $\Delta AOB \sim \Delta COD$ с коэффициентом подобия, равным k, по 2-му признаку $\Rightarrow CD \| AB$.

2. Пусть h_a — высота, проведенная к стороне a, h_b — высота, проведенная к стороне b, тогда площадь треугольника равна

$S = \frac{1}{2}h_a \cdot a = \frac{1}{2}h_b \cdot b$, откуда $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

3. Т.к. $\frac{AB}{AE} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = \frac{AC}{AD}$ и $\angle A$ — общий, то $\Delta ABC \sim \Delta AED \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BC}{ED} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow ED = \frac{2}{5}BC = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12$ м.

С-6.

1. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол; из теоремы косинусов, косинус наибольшего угла будет равен

$\frac{8^2+10^2-12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8} > 0$, следовательно, треугольник остроугольный.

2. Пусть конец вектора силы P, приложенной к точке O, есть точка B, приложим силу Q к точке B, пусть конец вектора этой силы будет точка C, тогда $\angle OBC$ = 180° – 50° = 130°. По теореме косинусов равнодействующая

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2 - 2 \cdot OB \cdot BC \cdot \cos\angle OBC} =$$

$$= \sqrt{100^2 + 200^2 - 20 \cdot 100 \cdot 200 \cdot \cos 130°} = 275{,}16H .$$

Из треугольника OBC по теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin\angle BOC} = \frac{OC}{\sin\angle OBC} \Rightarrow \sin\angle BOC = \frac{BC}{OC} \cdot \sin\angle OBC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BOC = \arcsin\left(\frac{200}{275{,}16} \cdot \sin 130°\right) \approx 35°50' .$$

С-7.

1. Сумма углов треугольника равна 180°, пусть $\angle K = 4x$, $\angle L = 2x$, $\angle M = 3x$, тогда $4x+2x+3x=180°$, $9x = 180°$, $x = 20°$, следовательно, $\angle K = 4 \cdot 20° = 80°$, $\angle L = 2 \cdot 20° = 40°$, $\angle M = 3 \cdot 20° = 60°$.

По теореме синусов $\frac{KL}{\sin\angle M} = \frac{LM}{\sin\angle K} = \frac{KM}{\sin\angle L}$, следовательно,

$KL = \frac{LM \cdot \sin\angle M}{\sin\angle K} = \frac{8 \cdot \sin 60°}{\sin 80°} \approx 7$ см, а $KM = \frac{LM \cdot \sin\angle L}{\sin\angle K} = \frac{8 \cdot \sin 40°}{\sin 80°} \approx 5{,}2$ см.

2. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, следовательно, если угол, противолежащий стороне 4 см, больше 60°, то сумма углов треугольника больше 180°, противоречие, ведь сумма углов треугольника равна 180°, следовательно, угол, противолежащий стороне 4 см, не может быть больше 60°.

С-8.

1. Пусть стороны параллелограмма равны a и b, а острый угол равен α, тогда по теореме косинусов диагонали равны $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ и $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$, т.к. диагональ против тупого угла больше.

2. По теореме синусов $\frac{PQ}{\sin A} = \frac{AP}{\sin Q} = \frac{AQ}{\sin P} \Rightarrow \angle Q = \arcsin\left(\frac{AP}{PQ}\sin A\right)$, тогда $\angle P = 180° - \angle A - \angle Q \approx 62°6'$, а сторона $AQ = \frac{PQ \cdot \sin P}{\sin A} \approx 8$ см.

С-9.

1. Пусть у выпуклого пятиугольника четыре прямых угла, сумма всех углов выпуклого пятиугольника 180°(5 – 2) = 5400°, сумма четырех прямых углов 4 · 90° = 360°, следовательно, пятый угол равен 540° – 360° = 180°, что противоречит тому, что пятиугольник выпуклый.

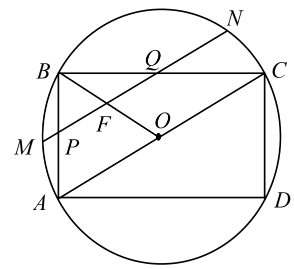
2. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°n - 360°$, сумма его внешних углов $180°n - (180°n - 360°) = 360°$, следовательно,
$180°n - 360° = 360° + 720°$; $180°n = 1440°$; $n = 8$.

С-10.

1. Радиус вписанной окружности является высотой треугольника, составленного из стороны восьмиугольника и двух радиусов описанной окружности, проведенным к концам этой стороны, угол при вершине этого равнобедренного треугольника равен $\frac{360°}{8} = 45°$,

$h = r = R \cdot \cos\left(\frac{45°}{2}\right) = 2 \cdot \cos 22°30' = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ см.

2.



$\Delta PBQ \sim \Delta ABC$ по 2-му признаку $\Rightarrow MN \| AC$

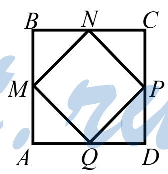
и $BF = FO = \frac{R}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = 2FN =$

$= 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \sqrt{3}R = 3\sqrt{3}$ см.

С-11.

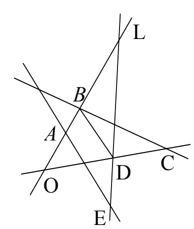
1. $R = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}\text{ см}}{3}$. $r = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ см, тогда длина описанной окружности $L = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см, а длина вписанной окружности $l = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см.



2. $\Delta MBN = \Delta NCP = \Delta PDQ = \Delta QAM$ по 2-м катетам $\Rightarrow$
$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM \Rightarrow MNPQ$ — ромб
$\angle BNM = \angle CNP = 45° \Rightarrow \angle MNP = 90° \Rightarrow MNPQ$ — квадрат.
Пусть $BC = a$, тогда $MN = \frac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{a}{2}$, а $r_2 = \frac{\sqrt{2}a}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$, а $R_1 = \sqrt{2}a$ и $R_2 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}a}{2} = a \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{2}$.

С-12.



1.

$\angle A = \frac{180°(5-2)}{5} = \frac{180° \cdot 3}{5} = 108° = \angle D \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OAE = \angle OEA = 180° - 108° = 72° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

По теореме косинусов из ΔBOD получаем, что $d^2 = 2a^2(1 - \cos 36°)$, где $LD = OB = OD = a$, следовательно, $a^2 = \dfrac{d^2}{2(1-\cos 36°)}$, теперь из ΔOLD по теореме косинусов получаем, что

$$OL = \sqrt{OD^2 + LD^2 - 2OD \cdot LD \cdot \cos\angle D} = \sqrt{2a^2(1 - \cos 108°)} = d\sqrt{\frac{1-\cos 108°}{1-\cos 36°}}.$$

2. Пусть r — радиус окружности, тогда $2\pi r \cdot \dfrac{240°}{360°} = 4 \Rightarrow r = \dfrac{3}{\pi}$ м.

По теореме косинусов из треугольника, образованного хордой и радиусами, проведенными к ее концам, находим длину хорды

$$l = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(360° - 240°)} = r\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = r\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \text{ м.}$$

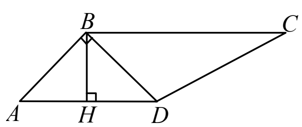
С-13.

1. Пусть высота равна x, тогда сторона равна $3x \Rightarrow S = 3x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{S}{3}} = \sqrt{\dfrac{48}{3}} = 4 \Rightarrow$ высота равна 4 см, а сторона $3x = 3 \cdot 4 = 12$ см.

2. *1 способ:* см. Вар. 2. *2 способ:* постройте одну из высот, измерьте ее и воспользуйтесь формулой $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h$, где a — сторона, на которую опущена высота, а h — высота.

С-14.



1. $AB = BD = AD \cdot \cos 45° = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$

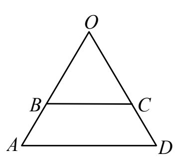
$BH = BD \cdot \cos 45° = 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{2} BH(AD + BC) = \dfrac{1}{2} \cdot 5(10 + 20) = 75$ см^2.

2. 1 способ: см. Вар. 2.

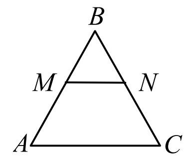
2 способ: постройте середины боковых сторон, проведите среднюю линию трапеции и высоту к одному из оснований, измерьте их и воспользуйтесь формулой $S = \dfrac{1}{2} s \cdot h$, где s — средняя линия, а h — высота.

С-15.



1. Т.к. $S(BOC) = S(ABCD)$, то $S(AOD) = 2S(BOC)$, т.к. $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам ($\angle AOD$ — общий, $\angle OCB = \angle ODA$ как соответственные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей OD), $k^2 = \dfrac{S(BOC)}{S(AOD)} = \dfrac{1}{2}$; $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{BC}{AD}$, где k — коэффициент подобия.

2. $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (см. предыдущую задачу), а $k = \frac{3}{5} \Rightarrow$



$\Rightarrow S(\Delta ABC) = \frac{25}{9} S(\Delta MBN)$.

$S(AMNC) = S(ABC) - S(MBN) = \frac{16}{9} S(MBN) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(AMNC) - S(MBN) = \frac{16}{9} S(MBN) - S(MBN) = \frac{7}{9} S(MBN) = 69 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(MBN) = \frac{69 \cdot 9}{7}$ см^2 $\Rightarrow S(ABC) = \frac{25}{9} \cdot \frac{69 \cdot 9}{7} \approx 246{,}4$.см^2

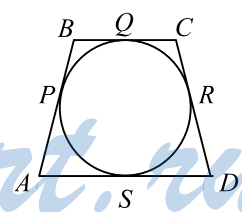
С-16.

1. $r = \dfrac{\frac{a}{2}}{\text{tg}30°} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{S_6}{S_к} = \dfrac{6 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\pi r^2} = \dfrac{\frac{6\sqrt{3}a^2}{4}}{\frac{3\pi a^2}{4}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}$.

2. $S' = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \dfrac{1}{3}\pi a^2 = a^2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2}{3}\pi\right)$.

С-17.

1. $S(AOD) = S(ADB) - S(AOB) = S(ACB) - S'(AOB) = S(COB)$, данное равенство выполняется, т.к. $S(ADB) = S(ACB)$.
В задаче использовался результат, полученный в Вар. 2. С-17.1.
2. Пусть $BP = BQ = CQ = CR = x$,
тогда $PA = AS = SD = DR = 3 - x \Rightarrow CB = 2x$,



$AD = 6 - 2x \Rightarrow S = (2x + 6 - 2x) \cdot \frac{1}{2} h = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 2$ см $\Rightarrow r = \frac{h}{2} = 1$ см $\Rightarrow S_0 = \pi r^2 = \pi$ см^2.

Дифференцированные задания

Д-1.

1. Т.к. при подобии равные отрезки переходят в равные, а углы сохраняются, то ромб переходит в ромб.

2. Гомотетия является преобразованием подобия $\Rightarrow$ см. п. 1.

3. Проведите биссектрису одного из углов, затем к ней серединный перпендикуляр. Точка его пересечения со сторонами треугольника, а также концы биссектрисы — вершины искомого ромба.

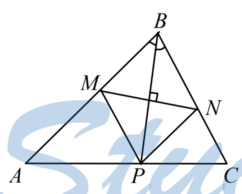
4. Пусть дан ΔABC. Из вершины B проведите луч, составляющий со стороной BC угол, меньший 60°. Пусть этот луч пересекает сторону AC в точке D. На отрезке BD постройте равносторонний треугольник BDF. Проведите серединный перпендикуляр FH. Пусть он пересекает сторону BC и точке M. Через точку M проведите прямые, параллельные FB и FD. Точки их пересечения со сторонами треугольника ABC соедините.

Д-2.

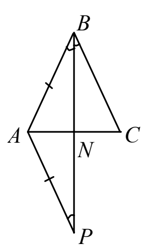
1. 1) Т.к. $AB \| NP$, то $\angle A = \angle NPC$, т.к. $AC \| MN$, то $\angle NPC = \angle MNP \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle A = \angle MNP$. Аналогично, $\angle C = \angle NMP \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta NPM$ по 1-му признаку.

2) По п. 1. $\angle A = \angle MNP$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta NPM$ по 2-му признаку.

3) $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{AB} = \frac{MP}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta NPM$ по 3-му признаку.



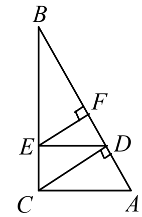
2. Пусть сторона ромба равна x. Т.к. $NP \| AB$, то $\angle A = \angle NPC \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PNC$ по 1-му признаку $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{NC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow ax = ca - cx \Rightarrow x = \frac{ac}{a+c}$. Аналогично можно получить $x = \frac{bc}{b+c}$ и $x = \frac{ab}{a+b}$ (если одна из вершин ромба совпадает с другой стороной треугольника).



Дополнительный вопрос:
через точку A проведем прямую AP так, чтобы $AP = AB$; пусть AP пересекает биссектрису BN в точке P, тогда $\angle ANP = \angle BNC$ как вертикальные, $\angle ABP = \angle BPA = \angle PBC$, поскольку ΔPAB — равнобедренный, а BP — биссектриса угла ABC, следовательно, $\Delta ANP \sim \Delta CNB$ по 1-му признаку, и $\frac{AN}{AC} = \frac{AP}{BC} = \frac{AB}{BC}$.

Д-3.

1. По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ см.



$CD=\dfrac{BC\cdot CA}{AB}=4{,}8$ см.

2. Т.к. $BC^2=BD\cdot BA$, то $BD=\dfrac{BC^2}{BA}=6{,}4$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow DE=\dfrac{BD\cdot DC}{BC}=\dfrac{6{,}4\cdot 4{,}8}{8}=6{,}4\cdot 0{,}6=3{,}84$ см.

3. Т.к. $BD^2=BE\cdot BC$, то $BE=\dfrac{BD^2}{BC}=\dfrac{6{,}4^2}{8}=\ 0{,}8\cdot 6{,}4\Rightarrow$

$\Rightarrow EF=\dfrac{BE\cdot ED}{BD}=\dfrac{0{,}8\cdot 6{,}4\cdot 0{,}6\cdot 6{,}4}{6{,}4}=3{,}072$ см.

4. $BD=\dfrac{BC^2}{BA}=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $CD=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow ED=\dfrac{a^3b}{(a^2+b^2)a}=\dfrac{a^2b}{(a^2+b^2)}\ \Rightarrow BE=\dfrac{BD^2}{BC}=\dfrac{a^4}{(a^2+b^2)a}=\dfrac{a^3}{(a^2+b^2)}$,

а $EF=\dfrac{BE\cdot ED}{BD}=\dfrac{a^3\cdot a^2b\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^2\cdot a^2}=\dfrac{a^3b\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^2}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow BF=\sqrt{\dfrac{a^6(a^2+b^2)^2-a^6b^2(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^5}}=$

$=\sqrt{\dfrac{a^6(a^2+b^2)-a^6b^2}{(a^2+b^2)^3}}=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{a^4}{(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow FD=BD-BF=\dfrac{a^4(a^2+b^2)-a^4}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a^2b^2}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}$.

Д-4.

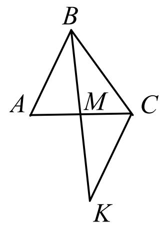
1. Т.к. $\angle B=\angle D$ и $\angle BAC>\angle DAC$, то $\angle DCA>\angle BCA$.
2. AD и BC пересекаются, т.к. при указанных условиях луч AD пересекает BC, а луч CB пересекает AD.
3. По п. 2. KM и LN пересекаются $\Rightarrow K$ и M лежат по разные стороны от LN.
4. Обозначим как в предыдущей задаче, т.к. вписанные углы K и M опираются на дуги, сумма градусных мер которых равна 2π, то сумма самих углов равна π. Аналогично и для углов L и N.

Д-5.

1. $\angle B=180°-45°-70°=65°\Rightarrow\angle B<\angle C\Rightarrow AC<AB$ (т.к. в треугольнике против большего угла лежит большая сторона).

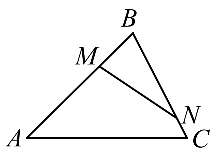
2. Т.к. $\angle BDA = \angle CBD$, и $\angle ABD > \angle CBD$, то $\angle ABD > \angle BDA \Rightarrow$
$\Rightarrow AD > AB \Rightarrow BC > AB$ (т.к. $BC = AD$).

3.



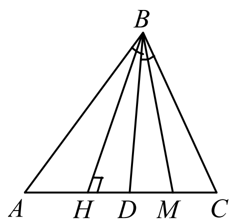
Построим $\Delta CMK = \Delta AMB$, тогда $\angle MKC = \angle ABM \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MKC > \angle MBC \Rightarrow BC > CK$, но $CK = AB \Rightarrow CB > AB$.

4.



Очевидно, что радиус описанной окружности около ΔMBN меньше радиуса описанной окружности около $\Delta ABC \Rightarrow$ по теореме синусов: $\dfrac{AC}{2\sin\angle B} > \dfrac{MN}{2\sin\angle B} \Rightarrow AC > MN$, но AC не больше наибольшей стороны $\Rightarrow$ ч.т.д.

Д-6.



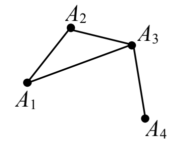
1. По теореме косинусов $BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2BD \cdot$
$\cdot\, DC \cdot \cos\angle BDA$,
а $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos\angle BDA \Rightarrow$
$\Rightarrow BC^2 - AB^2 = DC^2 - AD^2 + 4 \cdot BD \cdot AC \cdot \cos\angle BDA \Rightarrow$
$$\Rightarrow \cos\angle BDA = \frac{(BC^2 - AB^2) - (DC^2 - AD)^2}{4BD \cdot AC} =$$
$$= \frac{(BC^2 - DC^2) - (AB^2 - AD)^2}{4BD \cdot AC} = \frac{DC^2}{4BD \cdot AC} \cdot \left(\frac{BC^2}{DC^2} - 1\right) - \frac{AD^2}{4BD \cdot AC} \cdot \left(\frac{AB^2}{AD^2} - 1\right) =$$
$$= \left(\frac{BC^2}{DC^2} - 1\right) \cdot \frac{1}{4BD \cdot AC} \cdot (DC^2 - AD^2) > 0 \Rightarrow \angle BDA \text{ — острый} \Rightarrow \angle BDC \text{ — тупой.}$$

2. Поскольку $DC > AD$, то $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{DC + AD}{2} < DC$, следовательно, середина стороны AC принадлежит лучу DC.

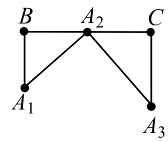
3. Обозначения как в предыдущей задаче. Пусть BM — медиана, тогда из ΔBMD, из того, что $\angle BDM$ — тупой, следует, что $\angle BMD$ — острый и $\angle BMD < \angle BDM$, а в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, значит, $BM > BD$.

4. Обозначения как в предыдущей задаче. Пусть BH — высота. Точка H принадлежит лучу DA, т.к. если бы она принадлежала лучу DC, то в ΔBHD сумма углов $\angle BHD + \angle BDH > 180°$, что противоречит теореме о сумме углов треугольника ($\angle BHD = 90°$, $\angle BDH$ — тупой, т.е. $\angle BDH > 90°$), следовательно, точка D лежит между точками H и M (точка M лежит на луче DC по предыдущей задаче).

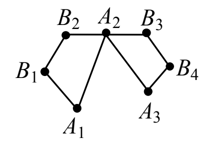
Д-7.



1. Т.к. по свойствам треугольника $A_1A_2+A_2A_3>A_1A_3$, то $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_3 + A_3A_4$. Ч.т.д.



2. см. п. 1. $A_1B + BA_2 > A_1A_2$ и $A_2C + CA_3 > A_2A_3 \Rightarrow$ $A_1B + BA_2 + A_2C + CA_3 > A_1A_2 + A_2A_3$.



3. см. п. 1. $A_1B_2 < A_1B_1 + B_1B_2$, $A_1A_2 < A_1B_2 + B_2A_2$, $A_2B_4 < A_2B_3 + B_3B_4$, $A_2A_3 < A_2B_4 + B_4A_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1A_2+A_2A_3 < A_1B_1+B_1B_2+B_2A_2 + A_2B_3 + B_3B_4 + B_4A_3$.

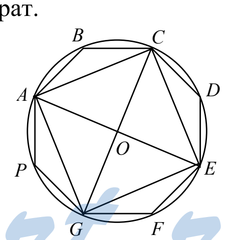
4. Можно, т.к. A_1A_2 строго меньше, чем $A_1B_1 + B_1B_2 + B_2A_2$ и A_2A_3 строго меньше, чем $A_2B_3 + B_3B_4 + B_4A_3$.

Д-8.

1. Т.к. $\Delta ABC = \Delta CDE = \Delta EFG = \Delta GAP$ по 1-му признаку, то $AC = CE = EG = GA \Rightarrow AGEC$ — ромб.

$$\angle A = \angle B = \frac{180°\cdot 6}{8} = 135° \Rightarrow \angle HAG = \angle BAC = \frac{180° - 135°}{2} = 22{,}5° \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle GAC = 135° - 2 \cdot 22{,}5° = 90° \Rightarrow ACEG$ — квадрат.



2. Пусть точка O — центр описанной окружности $\Rightarrow AO = OC = OG = OE \Rightarrow \Delta AOC =$
$= \Delta COE = \Delta EOG = \Delta GOA \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = CE = EG = GA$ и $\angle AOC =$
$= \angle AOG \Rightarrow \angle AOC = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow AGEC$ — квадрат.

Д-9.

1. Т.к. угол при основании равен 75°, то угол против него —

$180° - 2 \cdot 75° = 30° \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$ см.

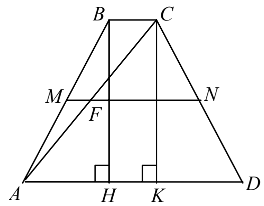
2. Угол при основании равен (180° – 60°) : 2 = 60° $\Rightarrow$ треугольник равносторонний $\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

3. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, тогда по теореме Пифагора высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{13^2 - (24:2)^2} = 5$ см $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 24 = 60$ см^2.

4. $S=5\cdot 6\cdot\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{24}{30}=\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ по теореме косинусов диагонали равны $\sqrt{6^2+5^2-2\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{3}{5}}$ и $\sqrt{6^2+5^2+2\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{3}{5}}$, или 5 см и $\sqrt{97}$ см.

Д-10.

1. $S = 4\cdot 6\cdot\sin 150° = 12$ см^2.



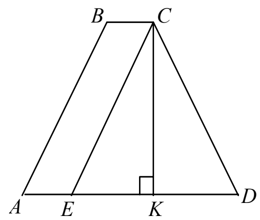
2. Из подобия треугольников AMF и ABC, а также CFN и CAD следует, что $BC = 6$ см, $AD = 14$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH = KD = \frac{1}{2}(AD - BC) = 4$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме Пифагора

$BH = CK = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2-4^2} = 3$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ S = \frac{1}{2}BH\cdot(AD + BC) = \frac{1}{2}\cdot 3(14+6) = 30$ см^2.

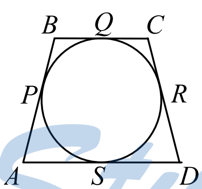


3. $S(ABCE) = BC\cdot CK = 3CK$; (1)

$S(ECD) = \frac{1}{2}ED\cdot CK.$

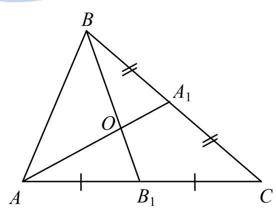
Из (1) $\Rightarrow CK = \frac{S(ABCE)}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(ECD) = \frac{S(ABCE)\cdot ED}{2BC} \Rightarrow 2BC=ED \Rightarrow ED=6$ см.



4. Высота трапеции равна $4\sin 30° = 2$ см; $BC + AD = AB + CD = 8$ см. (по свойствам описанных четырехугольников) $\Rightarrow\ S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2 = 8$ см^2.

Д-11.



1) $\frac{S(AOB_1)}{S(AA_1C)} = \frac{AO\cdot AB_1}{AA_1\cdot AC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$,

но $S(AA_1C) = \frac{1}{2}S(ABC) \Rightarrow S(AOB) = \frac{1}{6}S(ABC)$.

Аналогично $S(BOA_1) = \frac{1}{6}S(ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(AOB_1) = S(BOA_1)$. Ч.т.д.

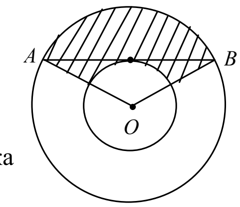
2) $\frac{S(AOB_1)}{S(BOA_1)} = \frac{AO\cdot OB_1}{BO\cdot OA_1} = \frac{AO}{OA_1}\cdot\frac{OB_1}{OB} = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow S(AOB_1) = S(BOA_1)$. Ч.т.д.

Дополнительное задание.

$S(BOC_1)=\frac{1}{6}S(ABC)=S(BOA_1)=S(A_1OC)\Rightarrow S(AC_1C)=\frac{1}{2}S(ABC)$ и $S(CC_1B)=$

$=\frac{1}{2}S(ABC)\Rightarrow$ точки C_1, O и C лежат на одной прямой $\Rightarrow$ медианы пересекаются в одной точке.

Д-12.

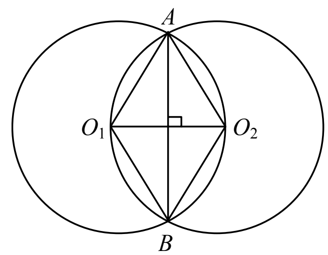


1. $S'_{\text{кольца}}=\frac{1}{2}\pi\cdot\angle AOB(R^2-r^2)=\frac{3}{2}\pi\angle AOBr^2$,

т.к. $r=\frac{R}{2}$. $S''_{\text{сектора}}=\frac{1}{2}\pi\angle AOBr^2\Rightarrow\frac{S'}{S''}=3$. Ч.т.д.

2. По формуле для площади круга и треугольника имеем:

$S=S_{\text{сектора } AOB}-S_{\Delta AOB}=\frac{\pi}{2}R^2\cdot\angle AOB-\frac{R^2}{2}\cdot\sin\angle AOB$.



3. Т.к. радиусы окружностей равны, то ΔAO_1O_2 и ΔBO_1O_2 — равносторонние $\Rightarrow$ $\angle AO_1O_2=\angle BO_1O_2=\angle AO_2O_1=$
$=\angle BO_2O_1=60°\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{\text{фигуры}}=4S_{\text{сектора } AO_1O_2}-S(AO_1O_2)=$
$=4\cdot\frac{1}{6}\pi R^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=R^2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. По теореме Герона

$S=\sqrt{45\cdot 20\cdot 169}=4\cdot 9\cdot 2\cdot 5=360\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{25\cdot 29\cdot 36}{4\cdot 360}=\frac{25\cdot 29}{4\cdot 10}=18\frac{1}{8}$ см;

$r=\frac{S}{P}=\frac{360}{45}=8$см. $\Rightarrow$ $S=\pi(R^2-r^2)=\pi\left(\left(18\frac{1}{8}\right)^2-8^2\right)\approx 264{,}5$ см^2.

Дополнительные задачи

Задачи к §11

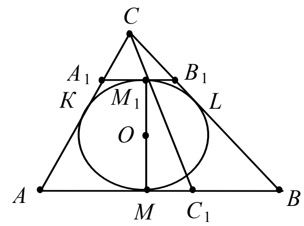
1. Т.к. преобразования обратные к гомотетии также являются гомотетией, а, следовательно, преобразованиям подобия, то преобразование обратное к преобразованию подобия, также является преобразованием подобия.

2. Пусть C и D — точки деления и пусть $\frac{AO}{OC}=\frac{OB}{OD}=k$, тогда при гомотетии с центром в точке O с коэффициентом равным k прямая CD перейдет в $AB\Rightarrow CD\| AB$.

3. 1) Проведите произвольный отрезок CD, соединяющий стороны угла. Разделите его в отношении 1:2, затем через точку M проведите параллельный ему искомый отрезок AB.

2) Для одной из сторон угла постройте гомотетичный ей луч с центром гомотетии в точке M и коэффициентом гомотетии равным данному. Затем полученную точку пересечения луча соедините со второй стороной угла с точкой M.

4. $A_1B_1 \perp OM_1$.



Из свойств касательных, проведенных из одной точки следует, что

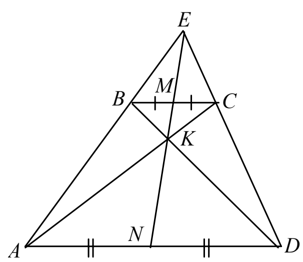
$CK = A_1K + A_1M_1$ и $CL = B_1L + B_1M_1$, но поэтому же свойству

$CK = CL \Rightarrow A_1K + A_1M_1 = B_1L + B_1M_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $CA = AC_1 = CB + BC_1$, т.к. $\Delta ACC_1 \sim \Delta A_1CM_1$ и $\Delta C_1CB \sim \Delta M_1CB_1$ по 1-му признаку, т.к. $A_1B_1 \| AB$.

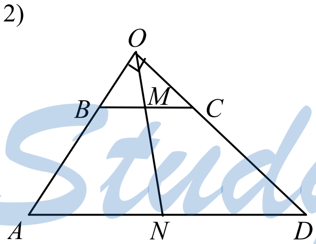
5.

1)



$AD \| BC \Rightarrow \Delta BEC \sim \Delta AED$, значит EM и EN — медианы 2-х подобных треугольников $\Rightarrow$ они лежат на одной прямой. $\Delta BKC \sim \Delta DKA$ $\Rightarrow$ MK и KM — медианы 2-х подобных треугольников $\Rightarrow$ они лежат на одной прямой $\Rightarrow$ точки E, M, K, N — лежат на одной прямой.

2)



$AD \parallel BC \Rightarrow \Delta AOD$ — прямоугольный $\Rightarrow$

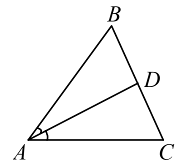
$\Rightarrow ON = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$. Аналогично,

$OM = \frac{1}{2}b \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(a - b)$.

6. Из подобия следует, что $\angle CAC_1 = \angle CBC_1 \Rightarrow$ треугольник ABC — равнобедренный с основанием AB, и чтобы получить подобные треугольники нужно провести биссектрису $\angle C$.

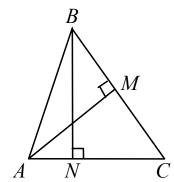
7. Пусть $\Delta AMC \sim \Delta CMB \Rightarrow AM = CM$, но $AM = BM$, т.к. CM — медиана $\Rightarrow$ ΔACM и ΔBCM — равнобедренные, но из подобия следует, что $\angle AMC = \angle BMC \Rightarrow \Delta AMC = \Delta BMC$ по 1-му признаку — противоречие. Пусть $\Delta AMC \sim \Delta BCM \Rightarrow \angle AMC = \angle BCM \Rightarrow AB \| CB$ — противоречие. Пусть $\Delta ACM \sim \Delta BCM \Rightarrow \angle ACM = \angle BCM \Rightarrow CM$ — медиана $\Rightarrow \Delta ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \Delta ACM = \Delta BCM$ — противоречие.

8. Пусть $\angle A = \angle C = 2\alpha \Rightarrow \angle ADC = \pi - 3\alpha$, а $\angle B = \pi - 4\alpha$. Т.к. ΔABC — равнобедренный, то подобный ему тоже $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ либо $\alpha = \pi - 3\alpha$ либо $\alpha = \pi - 4\alpha$.

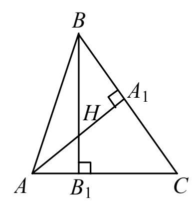


Если $\alpha = \pi - 3\alpha$, то $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ треугольник вырождается в отрезок. Если $\alpha = \pi - 4\alpha$, то $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$, а $2\alpha = \dfrac{2\pi}{5} = 72° \Rightarrow$ искомые углы 72°, 72°, 36°.

9. Т.к. $\angle A = \angle C$, то $\Delta AMC \sim \Delta BNA$ по признаку подобия прямоугольных треугольников.



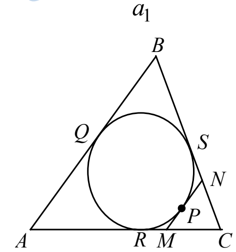
10. $\angle AHB_1 = \angle BHA_1 \Rightarrow \angle HAB_1 = \angle HBA_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AHB_1 \sim \Delta BCB_1 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{B_1H}{CB_1} = \frac{AB_1}{BB_1} \Rightarrow B_1H \cdot BB_1 = CB_1 \cdot AB_1.$$
Т.к. $\angle AHB_1 = \angle BHA_1 \Rightarrow \angle HAB_1 = \angle HBA_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BA_1H \sim \Delta AA_1C \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{A_1H}{A_1C} = \frac{BA_1}{AA_1} \Rightarrow A_1H \cdot AA_1 = BA_1 \cdot A_1C.$$ Ч.т.д.

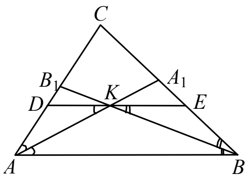


11. Отношение другой стороны угла к диагонали является синусом угла между стороной и диагональю. Постройте угол по его синусу, затем через концы одной стороны проведите перпендикуляры и отложите этот угол от данной стороны. Через точку его пересечения с одним из перпендикуляров проведите прямую, параллельную данной стороне.

12. Из подобия треугольников, отсекаемых высотами, следует, что $\dfrac{b}{a} = \dfrac{h_a}{h_b}$ и $\dfrac{c}{a} = \dfrac{h_a}{h_c}$, поэтому сначала постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому, со сторонами a_1, b_1, c_1, где $b_1 = \dfrac{a_1 h_a}{h_b}$, $c_1 = \dfrac{a_1 h_a}{h_c}$, а a_1 — произвольный отрезок, а затем ΔABC с коэффициентом подобия $\dfrac{b_1}{a_1}$.

13. По свойству касательных:
$P(CMN) = CM + MN + NC = CM + MP + PN + NC =$
$= CM + MR + SN + CN = CR + CS = (AC - AQ) +$
$+ (CB - BQ) = AC + CB - AB = b + a - c;$
$\Delta CMN \sim \Delta CAB$ по двум углам ($\angle CAB = \angle CMN$, $\angle CBA = \angle CNM$, как соответственные при пересечении $MN \| AB$ секущими AC и BC)
$$\Rightarrow MN = c \cdot \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$





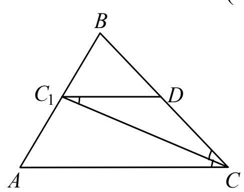
14.
Т.к. $DE \parallel AB$, то $\angle DKA = \angle KAB$,
а $\angle EKB = \angle ABK \Rightarrow DK = DA$ и $KE = EB \Rightarrow$
$\Rightarrow P(DCE) = a+b$. $\Delta ACB \sim \Delta DCE \Rightarrow$
$k = \dfrac{a+b}{a+b+c} \Rightarrow DE = c \cdot \dfrac{a+b}{a+b+c}$.

15. По свойству биссектрисы $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{b}{a}$, т.к. $AC_1 + C_1B = AB = c$, то

$AC_1 = \dfrac{cb}{a+b}$. AK — биссектриса $\Delta AC_1C \Rightarrow \dfrac{C_1K}{KC} = \dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{\frac{cb}{a+b}}{b} = \dfrac{c}{a+b}$. Ч.т.д.

16. По задаче 15: $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{b+c}{a}$, $\dfrac{BK}{KB_1} = \dfrac{a+c}{b} \Rightarrow \dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+c}{a} \Rightarrow$

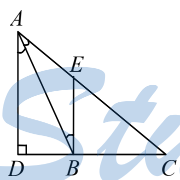
$\Rightarrow a^2 + ac - b^2 - bc = 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) + c(a-b) = 0 \Rightarrow (a-b)(a+b+c) = 0 \Rightarrow a = b$. Ч.т.д.



17. Т.к. $C_1D \parallel AC$, то $\angle DC_1C = \angle C_1CA =$
$= \angle C_1CD \Rightarrow C_1D = DC$ и
$\Delta ABC \sim \Delta C_1BD \Rightarrow \dfrac{C_1D}{AC} = \dfrac{C_1B}{AB}$, по свойству биссектрисы $\dfrac{C_1B}{BC} = \dfrac{C_1A}{AC} \Rightarrow \dfrac{C_1B}{C_1A} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{C_1A} = \dfrac{BC+AC}{AC} \Rightarrow C_1A = \dfrac{AB \cdot AC}{BC+AC} \Rightarrow C_1B =$

$= AB - \dfrac{AB \cdot AC}{BC + AC} = \dfrac{AB \cdot BC}{AC + BC} = C_1D = DC = \dfrac{AC \cdot C_1B}{AB} = \dfrac{AC \cdot BC}{AC + BC} = \dfrac{ab}{a+b}$.



18. Т.к. $\angle BAC = \angle ABE$ и $AD \parallel BE$, то $\angle BAC = \angle BAD \Rightarrow$
$\Rightarrow AB$ — биссектриса ΔACD. Пусть $AD = x \Rightarrow$ по задаче 17: $AE = \dfrac{bx}{b+x}$, $EC = b - AE = \dfrac{b^2}{b+x}$.

Т.к. $\Delta CBE \sim \Delta CDA$, то $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{x}{b} \Rightarrow BD = \dfrac{ax}{b}$.

По теореме Пифагора: $AD^2 + CD^2 = x^2 + \left(a + \dfrac{ax}{b}\right)^2 = b^2 \Rightarrow x = b\dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \Rightarrow$

По теореме Пифагора для ΔABD: $c^2 = AD^2 + BD^2 =$

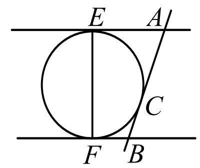
$= x^2 + \dfrac{a^2x^2}{b^2} = \left(1 + \dfrac{a^2}{b^2}\right)\left(b \cdot \dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right) = \dfrac{(b^2 - a^2)^2}{(b^2 + a^2)} \Rightarrow c^2(b^2 + a^2) = (b^2 - a^2)^2$. Ч.т.д.

19. Пусть BD — биссектриса ΔABC, тогда $\Delta BDC \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{a}{CD} = \dfrac{c}{BD} = \dfrac{b}{a}$,

$CD = \dfrac{a^2}{b}$, $BD = \dfrac{ac}{b}$. Т.к. $\angle BAD = \angle DBA \Rightarrow BD = AD = b - CD \Rightarrow b^2 - a^2 = ac$.

20. По свойствам касательных $AE = AC = m$ и $FB = BC = n \Rightarrow$

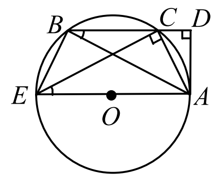
$\Rightarrow EF = \sqrt{(m+n)^2 - (m-n)^2} = 2\sqrt{mn}$ (т.к. $EF \perp a$ и b).



21. Т.к. треугольники подобны, то $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1 \Rightarrow$ по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow aka_1 + bkb_1 = ckc_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = cc_1$.

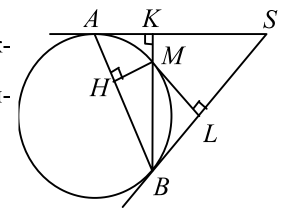
22.



$\angle CBA = \angle CEA$, т.к. они опираются на одну дугу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD = \dfrac{AB \cdot AC}{2R}$.

23. По предыдущей задаче

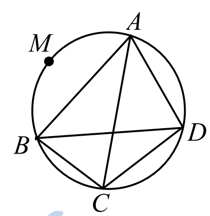


$HM = \dfrac{AM \cdot MB}{2R}$. Т.к. расстояние от точки M окружности радиуса R до касательной, проведенной в точке A, равно $\dfrac{AM^2}{2R}$, то

$AM = \sqrt{2R \cdot KM}$, $BM = \sqrt{2R \cdot ML} \Rightarrow$

$\Rightarrow HM = \dfrac{AM \cdot MB}{2R} = \sqrt{ML \cdot KM}$. Ч.т.д.

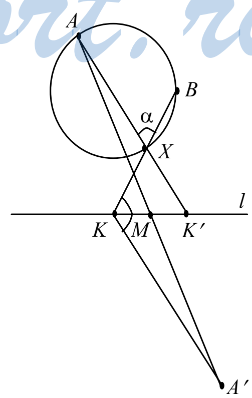
24. По задаче № 22. Пусть $p(X,\ YZ)$ — расстояние от точки X до прямой YZ, тогда



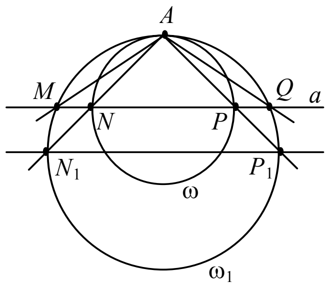
$\rho(M,\ AC) \cdot \rho(M,\ BD) = \dfrac{AM \cdot AC}{2R} \cdot \dfrac{MB \cdot MD}{2R}$. Аналогично $\rho(M, AB) \cdot \rho(M, CD) = \dfrac{AM \cdot MB \cdot MC \cdot MD}{4R^2}$ и

$\rho(M, BC) \cdot \rho(M, AD) = \dfrac{AM \cdot MD \cdot MB \cdot MC}{4R^2}$. Ч.т.д.

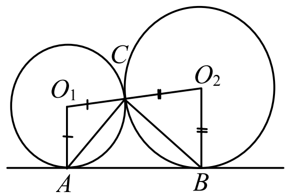
25. Точка A' симметрична точке A относительно точки M, тогда $A'K \| K'A \Rightarrow \angle BKA' = 180° - \angle AXB$. Постройте точку K, используя результаты, полученные в задаче № 58.



26.



Рассмотрим гомотетию с центром в точке A, переводящую окружность ω в окружность ω_1. При этом $N \to N_1$, а $P \to P_1 \Rightarrow P_1N_1 \| PN \Rightarrow \angle MAN_1 =$ $= \angle QAP_1 \Rightarrow \angle MAN = \angle QAP$.



27. Т.к. $\angle O_1 + \angle O_2 = 180°$, то $\angle O_1AC + \angle O_1CA + \angle O_2CB + \angle O_2BC =$ $= 180° \Rightarrow \angle O_1CA + \angle O_2CB = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow$ точка C описывает окружность, диаметром которой является AB.

28. Пусть ABC — данный треугольник ($\angle C = 90°$). А точка O — вершина угла, в котором он скользит.

Пусть $\angle ABO = \alpha$, $\angle CBA = \angle AOC$, $\angle ACO = \alpha$, $\angle COB = \angle CAB$

(т.к. $\angle C = \angle O = 90° \Rightarrow$ можно описать окружность).

$\angle COB = 180° - \angle OCB - \angle CBA - \alpha = 180°\ (90° - \alpha) - \angle CBA - \alpha =$

$= 90° - \angle CBA$ — не зависит от $\alpha \Rightarrow$ точка C движется по отрезку, проходящему через точку O. Пусть $C(x; y)$, тогда

$x = 10\cos\alpha - 8\cos(\alpha + \beta)$, где $\beta = \angle CBA$, $y = 8\sin(\alpha + \beta)$, тогда

$$OC = \sqrt{100\cos^2\alpha + 64 - 160\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \sqrt{100\cos^2\alpha + 64 - 160\cos\alpha(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} =$$

$$= \sqrt{50\cos 2\alpha + 50 - 160\cos\alpha\left(\cos\alpha\frac{4}{5} - \sin\alpha\frac{3}{5}\right)} =$$

$$= \sqrt{50\cos 2\alpha + 50 + 64 - 128\cos^2\alpha + 48\sin 2\alpha} = \sqrt{-14\cos^2\alpha - 14 + 48\sin 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{50 - 50\cos(2\alpha - \varphi)}\text{, где } \varphi = \arccos\frac{7}{25},\ \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

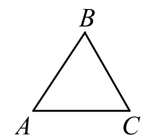
$\Rightarrow$ минимум OC достигается при $\alpha = 0$ и равен

$\sqrt{50 - 50\cdot\frac{7}{25}} = 6$, максимум при $\alpha = \frac{\pi - \varphi}{2}$ и равен

$\sqrt{50 + 50} = 10 \Rightarrow$ длина отрезка равна 10– 6 = 4 см.

Задачи к §12.

30.



По теореме косинусов:

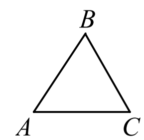
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle C$

а)$AB^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 9\ \ 16 - 12 = 13$; $AB = \sqrt{13}$ см.

б)

$AB^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 + 16 + 8 = 28$; $AB = 2\sqrt{7}$ см.

31.



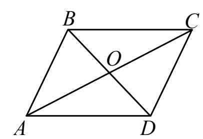
а) $\alpha = 45°$, б) $\alpha = 60°$, в) $\alpha = 90°$

По теореме косинусов: $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

а) $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}$; б) $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$;

в) $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

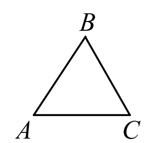
32. По теореме косинусов



$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$

$BD^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $BD = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ см.

33.

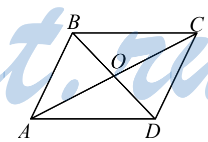


а) $\cos\angle A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{9 + 36 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \dfrac{29}{36}$;

$\angle A = \arccos\dfrac{29}{36}$.

б) $\cos\angle C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \dfrac{36 + 16 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \dfrac{43}{48}$; $\angle C = \arccos\dfrac{43}{48}$.

34.



По теореме косинусов:

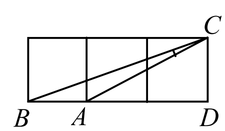
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle A \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab}$;

$AC^2 = a^2 + b^2 - a \cdot b \cdot 2\cos 150°$, т.к. $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ и

$\angle BAD = 30° \Rightarrow \angle ABD = 150° \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab}$.

35.



По теореме Пифагора $AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$;

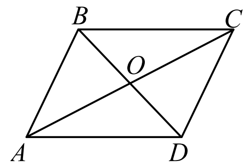
$BC^2 = BD^2 + CD^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$.

По теореме косинусов:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle BCA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\angle BCA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{10a^2 + 5a^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot a^2} = \frac{14}{2\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BCA = \arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$



36.

По теореме косинусов

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle A$

$BD^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}\, a \cdot b.$

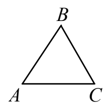
Аналогично: $AC^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}\, ab$

$AC^2 \cdot BD^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2}\, ab)(\, (a^2 + b^2 + \sqrt{2}\, ab) =$

$= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4.$

37.

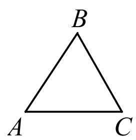
а) По теореме синусов



$$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 30°} \Rightarrow a = \frac{AC \cdot \sin 45°}{\sin 30°} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{2} \text{ см.}$$

б) По теореме синусов $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 135°} \Rightarrow a = \frac{AB \cdot \sin 30°}{\sin 135°} = 10\sqrt{2}$ см.

38.



а) По теореме синусов $\frac{AC}{\sin 30°} = \frac{a}{\sin 45°} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{5 \cdot \sin 45°}{\sin 30°} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2} = BC.$$

Аналогично: $\frac{b}{\sin 105°} = \frac{AC}{\sin 30°} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sin 105°}{\frac{1}{2}} = 10\sin 105° = AB$.

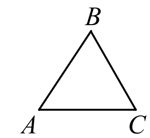
б) $\angle ABC = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 100° - 50° = 30°$;

По теореме синусов $\frac{AC}{\sin 30°} = \frac{a}{\sin 100°} = \frac{b}{\sin 50°} \Rightarrow$

$a = 2\sin 100° = BC$

$b = 2\sin 50° = AB$

39.



По теореме синусов $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow$

а) $\frac{20}{\sin C} = 80 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle C = \arcsin\frac{1}{4}$.

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cdot \cos B$;
$AC^2 = 400 + 1600 - 1600\cos B$.

Т.к. $\frac{AC}{\sin B} = 80 \Rightarrow AC = 80\sin B$.

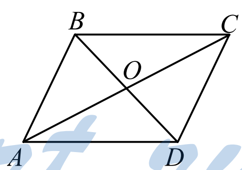
Подставляем: $6400\sin^2 B = 6400 - 6400\cos^2 B = 2000 - 1600\cos B$;
$64 - 64\cos^2 B = 20 - 16\cos B$; $16 - 16\cos^2 B = 5 - 4\cos B$;

$16\cos^2 B - 4\cos B - 11 = 0$; $\cos B = \frac{4 \pm 12\sqrt{5}}{32} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{8}$, т.к. $\angle A$ и $\angle C$ — острые, то $\angle B$ — тупой $\Rightarrow \angle B = \arccos\frac{1+3\sqrt{5}}{8}$.

Аналогично в б). $\frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{30}{\sin C} \Rightarrow \frac{30}{\sin C} = \frac{80}{\sqrt{2}} = 40\sqrt{2} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

$\frac{AC}{\sin B} = 40\sqrt{2} \Rightarrow AC = 40\sqrt{2}\,\sin B \Rightarrow 3200 - 3200\cos^2 B = 900 + 1600 - 2400\cos B$;
$32\cos^2 B - 24\cos B - 7 = 0$;

$\cos B = \frac{24 \pm 4\sqrt{117}}{64} = \frac{6 \pm \sqrt{117}}{16} \Rightarrow \angle B = \arccos\frac{6-\sqrt{117}}{16}$, т.к. $6 + \sqrt{117} < 16$.

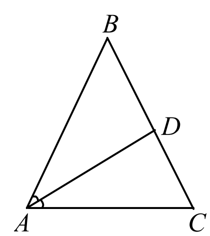


40. Из ΔABC по теореме синусов
$\frac{AC}{\sin(ABC)} = \frac{BC}{\sin(BAC)} = \frac{AB}{\sin(BCA)}$

$BC \| AD \Rightarrow \angle BCA = \angle CAD$ (накрест лежащие) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = \beta \Rightarrow \frac{d}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $AB = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.



41. $\angle BAD = \angle DAC$, $\angle BAD = \alpha$

По теореме синусов $\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, т.к. AD — биссектриса $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow BD = \frac{DC\sin\gamma}{\sin\beta}$

$BD + DC = a \Rightarrow DC\left(1+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) = a \Rightarrow$

$\Rightarrow DC = \frac{a\sin\beta}{\sin\gamma+\sin\beta} \Rightarrow BD = a - \frac{a\sin\beta}{\sin\gamma+\sin\beta} = \frac{a\sin\gamma}{\sin\gamma+\sin\beta}$.

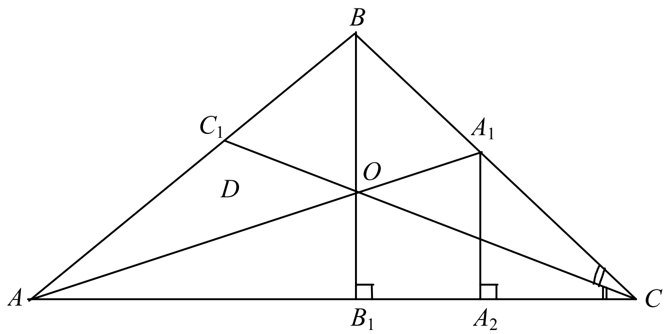
Из ΔABD и ΔADC по теореме синусов: $\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\beta}$

$\alpha = \frac{180-\beta-\gamma}{2} \Rightarrow \frac{BD}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} = \frac{AD}{\sin\beta} \Rightarrow AD = \frac{a\sin\gamma\sin\beta}{(\sin\gamma+\sin\beta)\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$.

42. Пусть $CB_1 = x$, $BB_1 = y$, тогда по теореме Пифагора

$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ (b-x)^2+y^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=a^2-x^2 \\ b^2+x^2-2bx+a^2-x^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, следовательно, $AB_1 = b - x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$.



$\Delta CBB_1 \sim \Delta CA_1A_2 \Rightarrow A_1A_2 = \frac{1}{2}BB_1$ и $B_1A_2 = CA_2 = \frac{1}{2}B_1C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4b}$.

$\Delta AA_1A_2 \sim \Delta AOB_1 \Rightarrow \frac{A_1A_2}{OB_1} = \frac{AA_2}{AB_1} = \frac{AB_1+B_1A_2}{AB_1} = 1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2(b^2+c^2-a^2)}$.

По свойству биссектрисы имеем:

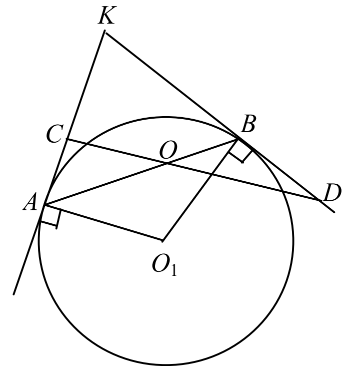
$\frac{BB_1}{OB_1} = \frac{BC+CB_1}{CB_1} = 1 + \frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}$, т.к. $\frac{BB_1}{OB_1} = \frac{2A_1A_2}{OB_1}$, то

$1 + \frac{2ab}{a^2+b^2-c^2} = 2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2(b^2+c^2-a^2)}\right) \Rightarrow \frac{2ab}{a^2+b^2-c^2} = \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2} \Rightarrow$

$a(b^2+c^2-a^2) = b(a^2+b^2-c^2) \Rightarrow ab^2+ac^2-a^3-a^2b-b^3+bc^2 = 0$,

$(a+b)(a^2+b^2-ab)-c^2(a+b)+ab(a-b) = 0$, $(a+b)(a^2+b^2-c^2-ab)+ab(a-b) = 0$,

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)+ab(a-b)-ab(a+b) = 0$, $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$.



43. $AK = KB$ по свойству касательных. По теореме синусов из

ΔAOC: $\dfrac{AC}{\sin AOC} = \dfrac{AO}{\sin ACO} = \dfrac{CO}{\sin CAO}$ и из

ΔBOD: $\dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{OD}{\sin OBD} = \dfrac{OB}{\sin BDO}$;

$\sin AOC = \dfrac{AC \sin CAO}{CO}$;

$\sin AOC = \dfrac{BD \sin OBD}{OD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AC \sin CAO}{CO} = \dfrac{BD \sin OBD}{OD}$.

$AC \cdot OD \cdot \sin CAO = CO \cdot BD \cdot \sin OBD$;

$AK = KB \Rightarrow \angle KAB = \angle KBA \Rightarrow \sin CAO = \sin OBD$. Ч.т.д.

44. Пусть $CD = x$, $AC = CB = a$, $\angle A = \angle B = \alpha$,

тогда по теореме косинусов: $x^2 = a^2 + AD^2 - 2a \cdot AD \cdot \cos\alpha$;

$x^2 = a^2 + BD^2 - 2a \cdot BD \cdot \cos\alpha$;

$a^2 = a^2 + (AD + BD)^2 - 2a(AD + BD) \cdot \cos\alpha$.

Сложим первые два и вычтем третье уравнение, получим:

$2x^2 + a^2 = 3a^2 + AD^2 + BD^2 - (AD + BD)^2 - 2a \cdot \cos\alpha(AD + BC - AD - BD) \Rightarrow$

$2x^2 = 2a^2 - 2AD \cdot DB \Rightarrow CD^2 = AC^2 - AD \cdot DB$. Ч.т.д.

45. Пусть точка O — центр вписанной, а точка K — центр описанной окружности около ΔABC. CM — биссектриса. Для ΔMOC $r^2 = R^2 - CK \cdot KM$ (по задаче 44). В ΔMKB

$\angle MKB = \angle MBK = \dfrac{\angle B + \angle C}{2} \Rightarrow MK = MB$, но $MB = 2R\sin\dfrac{\angle C}{2}$.

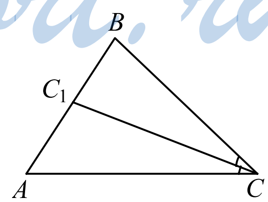
Т.к. $CK = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle C}{2}}$, то $d^2 = R^2 - 2Rr$.

46. Дано: ΔABC, CC_1 — биссектриса.

Доказать: $CC_1^{\,2} = CA \cdot CB - AC_1 \cdot BC_1$.

Доказательство:

По теореме косинусов:



из ΔACC_1: $\cos\angle ACC_1 = \dfrac{AC^2 + CC_1^2 - C_1A^2}{2AC \cdot CC_1}$;

из ΔBCC_1: $\cos\angle BCC_1 = \dfrac{BC^2 + CC_1^2 - C_1B^2}{2BC \cdot CC_1}$.

Т.к. CC_1 — биссектриса $\Rightarrow \angle ACC_1 = \angle BCC_1 \Rightarrow \cos\angle ACC_1 = \cos\angle BCC_1$;

$\dfrac{AC^2 + CC_1^2 - C_1A^2}{2AC \cdot CC_1} = \dfrac{BC^2 + CC_1^2 - C_1B^2}{2BC \cdot CC_1}$;

$$\frac{AC^2 \cdot BC + CC_1^2 \cdot BC - C_1A^2 \cdot BC - BC^2 \cdot AC - CC_1^2 \cdot AC + C_1B^2 \cdot AC}{AC \cdot BC} = 0;$$

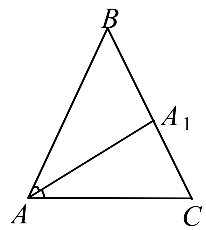
$CC_1^2(BC - AC) = C_1A^2 \cdot BC + BC^2 \cdot AC - C_1B^2 \cdot AC - AC^2 \cdot BC$ в этом равенстве получим новые группировки, теперь

$CC_1^2(BC - AC) = BC \cdot AC(BC - AC) + (C_1A^2 \cdot BC - C_1B^2 \cdot AC)$

подставим в предыдущее уравнение $AC = \dfrac{BC \cdot AC_1}{BC_1}$ и $BC = \dfrac{BC_1 \cdot AC}{AC_1}$ (по свойству биссектрисы);

$CC_1^2(BC - AC) = BC \cdot AC(BC - AC) + C_1B \cdot AC_1(AC - BC)$.

Разделим на $(BC - AC)$. Получим: $CC_1^2 = BC \cdot AC - C_1B \cdot AC_1$.



47. Дано: ΔABC, $AA_1 = l_A$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\dfrac{AC + BC + AB}{2} = p$.

Доказать: $l_A = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

Доказательство:

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Также $S_{ABC} = S_{ABA_1} + S_{ACA_1}$. Пусть $\angle BAA_1 = \varphi$.

Т.к. AA_1 — биссектриса, то $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \varphi$; $S_{ABA_1} = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot l_a \cdot \sin\varphi$;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot l_a \cdot \sin\varphi(b+c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (1)$$

Найдем $\sin\varphi$.

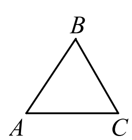
По формуле из курса алгебры: $\sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$;

$\cos 2\varphi = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, по теореме косинусов.

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc - b^2 + a^2 - c^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} =$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{4bc}.$$

Из (1) выразим l_A: $l_A = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(b+c)\sin\varphi} = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.



48. $\dfrac{p(p-a)}{bc} = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{abc} =$

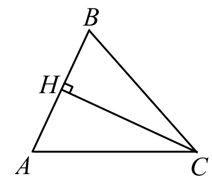
$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{abc} + \dfrac{2bc}{abc} = \dfrac{1}{2}(\cos A + 1) =$

$= \cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \cos\frac{A}{2}$.

$\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{4bc - b^2 - c^2 + a^2 - 2bc}{4bc} =$

$= \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$. Ч.т.д.

49. Решение:



1) Опустим высоту из вершины C — CH.

Из ΔCBH: $\cos B = \frac{CB}{a}$; Из ΔCAH: $\cos A = \frac{CA}{b}$

$CB + CA = \cos B \cdot a + b \cdot \cos A$; $(CB + CA = c)$.

Аналогично, остальные два соотношения

2) Выведем из этих соотношений теорему косинусов

$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$; $c^2 = a^2 \cos^2 B + 2ab\cos A \cdot \cos B + b^2 \cos^2 A$;

$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - (a\sin B - b\sin A)^2 + 2ab\cos A \cdot \cos B - 2ab\sin A \cdot \sin B$,

но $a\sin B - b\sin A = 0$, т.к. по теореме синусов $\left(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}\right)$.

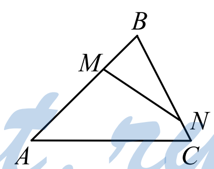
Далее $2ab(\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B) = 2ab\cos(A + B) = 2ab\cos(A + B) =$
$= -2ab(\cos(180 - (A + B))) = -2ab\cos C \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Ч.т.д.

50. Пусть $\angle C$ — тупой. Тогда по теореме косинусов
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$.

Т.к. $\cos\angle C < 0$, то все слагаемые в правой части — положительны $\Rightarrow$ левая часть больше любого из них $\Rightarrow AB > AC$ и $AB > BC$.

51. $AB > AC = BC$. см. предыдущую задачу.

52. $AB = 15$. см. задачу 50.

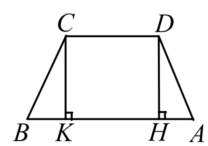


53. AC — большая сторона. Радиус окружности, описанной около $\Delta AMN = r$, около $\Delta ABC = R$. $R > r$

$\frac{MN}{2\sin B} < \frac{AC}{2\sin B} \Rightarrow MN < AC$. Ч.т.д.

Т.к. AC — большая сторона $\angle B > \angle A \Rightarrow \sin\angle B > \sin\angle A$ $(MN < AC)$.

54.



$DH = CK \Rightarrow DA \cdot \sin\angle A = CB \cdot \sin\angle B \Rightarrow$

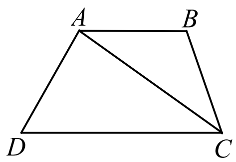
$\Rightarrow \frac{DA}{CB} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} < 1$, т.к. $\angle B = \angle A$ и синус возрастает от $0°$ до $90° \Rightarrow DA < CB$. Ч.т.д.

55. Т.к. $AC > BD$ и $\Delta AOB \sim \Delta COB$, то $OC + OC \cdot k > OD + OD \cdot k \Rightarrow$
$\Rightarrow OC > OD$, аналогично $AO > OB$. Ч.т.д.

56. Рассмотрим трапецию $ABCD$. $\angle A + \angle B = 180°$, т.к. $AD \| BC$, либо $\angle A = \angle B = 90°$, либо один из углов тупой.

ΔABD — прямоугольный, где AB — катет, BD — гипотенуза. $AB < BD$.
2) Пусть $\angle B$ — тупой.
Рассмотрим ΔABC. $\angle B$ — тупой $\Rightarrow AC$ — большая сторона ΔABC.
$AB < AC$
57. Неверно. Рассмотрим трапецию $ABCP$, $AD \parallel BC$, и $BD \perp AD$ и BC. В данном случае $BD < AB$, DC, т.к. BD — перпендикуляр, а AB, DC — наклонные.
58. $CB > AC$
Решение:
Т.к. точка M — центр описанной около ΔABC окружности $\Rightarrow MC=AM=BM;$
ΔAMC, ΔBMC — равнобедренные треугольники.
$\angle MCA > 45°$; $\angle MAC = \angle MCA$, значит $CB > AC$.
59. Из того, что $\angle A > \angle B + \angle C$ не следует, что $\sin\angle A > \sin\angle B + \sin\angle C$
Пример: $\angle A = 150°$, $\angle B = 30° = \angle C$.

Задачи к §13.

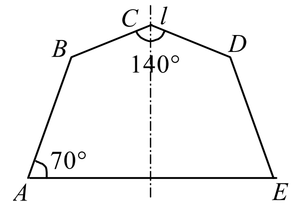


60. Доказать: $AD \le (AB + BC + CD)$.
По неравенству треугольника $AC \le AB + BC;$
$AD \le AC + CD \le AB + BC + CD$. Ч.т.д.
61. По неравенству треугольника:
$AC < AB + BC;$
$AD < AC + CD < AB + BC + CD$. Ч.т.д.
62. Т.к. сумма длин первых четырех сторон меньше длины пятой стороны, то не может.
63. Нет, т.к. длина большей стороны равна сумме длин остальных сторон. Четырехугольник вырождается в отрезок.
64. $AB = 3$ см, $AC = 14$ см, $DB = 5$ см, $DC = 6$ см.
Т.к. $AC = AB + BD + DC$, то точки A, B, C, D лежат на одной прямой.
65. По неравенству треугольника.
$PQ < PB + BQ$; $RQ < RC + QC$; $PR < AP + AR$.
Сложив эти неравенства, получим:
$PQ + RQ + PR < PB + BQ + QC + RC + AR + AP$; $P_{PQR} < P_{ABC}$. Ч.т.д.

66. Длина отрезка, соединяющего концы ломаной — кратчайшее расстояние между этими концами, значит любое другое расстояние между концами ломаной больше длины этого отрезка. Значит длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.
67. Допустим, что прямая a не пересекает ни одну из остальных сторон четырехугольника. Значит, прямая $a \parallel BC$, $a \parallel CD$, $a \parallel AD$.
Значит, $BC \parallel CD \parallel AD$ — противоречие.
Значит, прямая a пересекает хотя бы одну из остальных сторон четырехугольника.
68. Не может, т.к. любые две соседние вершины лежат по разные стороны от этой прямой.
69. См. задачу № 68. **70.** а) только одну, т.к. только одна вершина не является соседней.

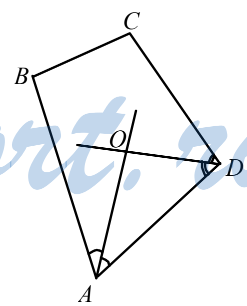
б) две, т.к. две вершины не являются соседними.
в) три, т.к. три вершины не являются соседними.
г) $n - 3$, т.к. $n - 3$ вершины не являются соседними.
71. Т.к. диагоналей две (см. задачу № 70), то треугольников три.
72. Т.к. диагоналей $n - 3$ (см. задачу № 70), то треугольников $n - 2$.
73. Сумма углов в пятиугольнике 540°. Т.к. пятиугольник симметричен относительно прямой l, то $\angle A = \angle E = 70°$; $\angle B = \angle D$
Значит,

$$\angle B = \frac{540° - 2\angle A - \angle C}{2} = \frac{540° - 140° - 140°}{2} = 130°.$$



74. Сумма внутренних углов в выпуклом n-угольнике $(n - 2)180°$.
Значит $(n - 2)180° + x = 2250°$; $(n - 2) \cdot 180° = 2250° - x$;
$2250° - x$ — кратно 180.
Значит, $x = 90°$. $(n - 2)180° = 12 \cdot 180°$; $n - 2 = 12$, $n = 14$.
Ответ: 14.
75. Сумма внутренних углов: $(n - 2)180°$.
Сумма внешних углов: $180° \cdot n - (n - 2)180° = 180°n - 180° \cdot n + 360° = 360°$.
Значит, один из внутренних углов равен: $468° - 360° = 108°$.
Т.к. внутренние углы равны, то $108° \cdot n = (n - 2) \cdot 180°$;
$108° \cdot n = 180° \cdot n - 360$; $360° = 72n$; $n = 5$.
Ответ: 5.
76. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника: 360°.
Если внутренний угол многоугольника острый, то соответствующий ему внешний угол — тупой. Значит, многоугольник не может иметь больше трех острых углов.
77.

$$\angle AOD = 180° - \angle OAD - \angle ODA =$$
$$= 180° - \frac{\angle BAD}{2} - \frac{\angle CDA}{2} =$$
$$= 180° - \frac{(360° - (\angle ABC + \angle BCD))}{2} =$$
$$= 180° - 180° + \frac{\angle ABC + \angle BCD}{2} = \frac{\angle ABC + \angle BCD}{2}.$$



78. Не обязательно. Пример — ромб.
79. Будет.
Из центра окружности проведем радиусы в точки касания. Соединим центр с вершинами многоугольника. Мы получим $2n$ треугольников. Эти треугольники — прямоугольные и равны по гипотенузе и острому углу. Значит, стороны многоугольника равны. Значит, многоугольник правильный.

80. Все диагонали в правильном многоугольнике равны. Сумма внутренних углов: 540°. Значит, внутренний угол 108°.
Найдем длину диагонали по теореме косинусов:
$\sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 108°} = \sqrt{2a^2(1 - \cos 108°)} = a\sqrt{2(1 - \cos 108°)}$.

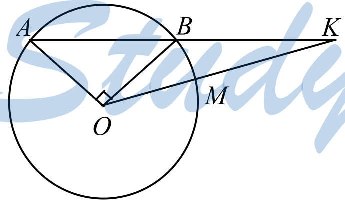
81. $\Delta ABC = \Delta BCD = \Delta CDE = \Delta DEA = \Delta EAB$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\angle CAB = \angle DBC = \angle ECD = \angle AEB = \angle ABE = \angle BCA =$
$= \angle BDC = \angle CED = \angle EAD$.
Значит, $\Delta ABK = \Delta BCL = \Delta CDM = \Delta DEN = \Delta EAP$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам)
Значит, $AK = BK = BL = LC = CM = MD = DN = EN = EP = AP$.
Т.к. диагонали равны, то $PK = KL = LM = NM = PN$.
Т.к. $\Delta ABK = \Delta BCL = \Delta CDM = \Delta DEN = \Delta EAP$, то
$\angle AKP = \angle BLC = \angle CMD = \angle DNE = \angle EPA$.
Значит, $\angle KPN = \angle PNM = \angle NML = \angle MLK = \angle LKP$.
Значит, пятиугольник $KLMNP$ — правильный.
82. Пусть MC — сторона 8-угольника и пусть радиус окружности равен R.

$\angle MOC = \frac{360°}{7}$; $MC = \sqrt{2R^3 - 2R^2 \cdot \cos\frac{360°}{7}}$; $OA = R$; $OK = R$; $OB = \frac{R}{2}$;

$BK = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $MC - BK = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos\frac{360°}{7}} - R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{360°}{7}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{360°}{7}\right)}}{\sqrt{3}} - 1 =$ 1,002 – 1 = 0,002.

83. Пусть NP — сторона многоугольника и пусть радиус окружности равен R, тогда $\angle NOP = \frac{360°}{10} = 36°$ и $NP = R \cdot \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos 36°} = \sqrt{2 - 2\cos 36°} \cdot R$.



$\angle AOB = \frac{360°}{4} = 90°$; $AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$; $AK = 2\sqrt{2}R$; $\angle BAO = 45°$;

$OK = \sqrt{8R^2 + R^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}R \cdot R \cdot \cos 45°} = \sqrt{9R^2 - 4\sqrt{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$= \sqrt{9R^2 - 4R^2} = \sqrt{5}R \Rightarrow MK = KO - OM = R(\sqrt{5} - 1)$.

По теореме косинусов сторона правильного вписанного 10-угольника равна $\sqrt{2R^2\left(1-\cos\frac{360°}{10}\right)} = R\sqrt{2(1-\cos 36°)} =$

$$= R\sqrt{2\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)} = R\sqrt{2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = R\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = R\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= R\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}} = R\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$$. Ч.т.д.

84. Длина дуги $\frac{\pi R}{180°}\cdot\alpha$.

а) $l=\frac{\pi R}{3}$; $AB = R$; $\frac{l}{AB}=\frac{\pi}{3}$;

б) $l=\frac{\pi R}{2}$; $AB = R\sqrt{2}$; $\frac{l}{AB}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$;

в) $l=\frac{2\pi R}{3}$; $AB=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cdot\cos 120°}=R\sqrt{\left(2+2\cdot\frac{1}{2}\right)}=R\sqrt{3}$;

$\frac{l}{AB}=\frac{2\pi R}{3\cdot R\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$;

г) $l=\frac{4}{3}\pi R$; $AB=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cdot\cos 120°}=R\sqrt{3} \Rightarrow \frac{l}{AB}=\frac{4\pi R}{3\sqrt{3}R}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$;

д) $l=\frac{\pi R}{180°}\cdot 300°=\frac{\pi R\cdot 30}{18}=\frac{\pi R\cdot 10}{6}=\frac{5\pi R}{3}$;

$AB=R$, т.к. $\angle AOB=360° - 300° = 60°$; ΔAOB — равносторонний. $\frac{l}{AB}=\frac{5\pi}{3}$.

85. а) пусть меньший угол x, больший $3x$. $x + 3x = 360°$; $x = 90°$,
тогда $3x = 3 \cdot 90° = 270°$. Ответ: 90° и 270°.
б) меньший угол $5x$, больший $13x$. $5x + 13x = 360°$; $x = 20°$.
тогда $13x = 13 \cdot 20° = 260°$. Ответ: 100° и 260°.
в) меньший — x, больший $300° + x$. $300° + 2x = 360°$; $x = 30°$.
тогда $300° + x = 300° + 30° = 330°$. Ответ: 30° и 330°.
г) меньший x, больший y. $\begin{cases} y-x=90° \\ y+x=360° \end{cases}$ $\begin{cases} y=225° \\ x=135° \end{cases}$

Ответ: 135° и 225°.

86. Длина дуги $l=\frac{\pi R}{180°}\cdot\alpha$; $l_1=\frac{\pi\cdot 5}{180°}\cdot 60°$ см $=\frac{5\pi}{3}$ см.

$l_2=\frac{9\pi}{180°}\cdot 60°$ см $=3\pi$ см.

87. Длина дуги $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha$;

$l = \frac{3{,}14 \cdot 10}{180°} \cdot 57° = \frac{3{,}14 \cdot 10 \cdot 19}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 19}{6} \approx 9{,}94$ см.

88. l — длина дуги; d — длина хорды; R — радиус окружности.

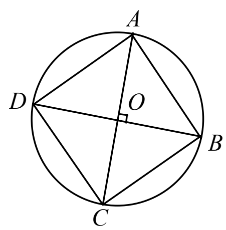
$l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha$.

а) $l = \frac{\pi R \cdot 135°}{180°} = \frac{\pi R \cdot 15}{20} = \frac{3\pi R}{4}$. Значит, $R = \frac{4l}{3\pi}$,

$d = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 135°} = R \cdot \sqrt{2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}} = R\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{4l}{3\pi} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

б) $l = \frac{\pi R \cdot 240°}{180°} = \frac{\pi R \cdot 8}{6} = \frac{4\pi R}{3}$. Значит, $R = \frac{3l}{4\pi}$;

$d = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(360° - 240°)} = R \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} \cdot l}{4\pi}$.



89. $BC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$;

длина окружности: $l = 2\pi R$;

$2\pi R - 4R - \frac{\sqrt{2}}{5} R =$

$= R\left(2\pi - 4 - \frac{\sqrt{2}}{5}\right) = R\left(\frac{10\pi - 20 - \sqrt{2}}{5}\right) =$

$= R\left(\frac{31{,}415 - 20 - 1{,}41}{5}\right) \approx 0{,}00034R$ — абсолютная погрешность.

$\frac{0{,}00034R}{2\pi R} \approx 0{,}005\%$ — относительная.

90. $r = 5$ см, r — радиус окружности. P_{OAB} — ?

$OA = OB = r$; $P_{OAB} = OA + OB + l_{AB} = 10 + l_{AB}$

Т.к. $\angle AKB = 90°$; $l_{AB} = \frac{1}{4} l_{\text{окр}} = \frac{1}{4} 2\pi r = \frac{\pi r}{2} = \frac{5\pi}{2}$;

$P_{OAB} = 10 + \frac{5\pi}{2} = \frac{5}{2}(\pi + 4)$.

§14.

91. Измеряем стороны квадратов a. $S_{\text{кв}} = a^2$

92. а) $S = AB^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$ см; б) $S = (A'B')^2 = (0{,}21)^2 = 0{,}441$ м.

93. $S_{ABCD} =$ а) 256 см^2; б) 76,8 м^2; в) 14,6 мм^2; $AB = ?$

$S_{\text{кв}} = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{S_{\text{кв}}}$.

а) 16; б) $\approx 8{,}763$; в) $\approx 3{,}8209$.

94. $S_{ABCD} = 2{,}5$ м^2; $P_{кв}$ — ?

$S_{кв} = AB^2 \Rightarrow AB \approx 1{,}58$; $P_{кв} = 4AB \Rightarrow P_{кв} \approx 6{,}324$ м.

95. а) $S_{ABCD} = 24$ см^2;

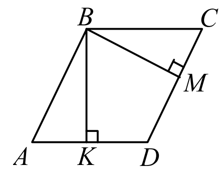
$BC = 6$; BD_1 — ?

$S_{пар} = BD_1 \cdot AD \Rightarrow BD_1 = \dfrac{S}{AD} = \dfrac{24}{6} = 4$ см.

б) $S = 41$ см^2, BK, AM — ?

$S_{пар} = BK \cdot AD = AM \cdot CD \Rightarrow AM = \dfrac{S}{CD} = \dfrac{41}{5}$; $BK = \dfrac{S}{AD} = \dfrac{41}{10} = 4{,}1$см.

96.



$BK = 4$; $BM = 1$; $S_{ABCD} = 6$; AB, AD — ?

$S_{пар} = AB \cdot BM = AD \cdot BK \Rightarrow AB = \dfrac{S}{BM} = \dfrac{6}{1} = 6$ см.

$AD = \dfrac{S}{BK} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$ см.

97. а) $AB = 4$ см, $BC = 7$ см;

б) $AB = 1{,}2$ м, $BC = 3{,}5$ м;

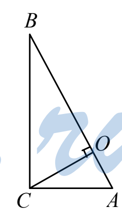
$S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \Rightarrow$ а) $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$ см^2. б) $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 3{,}5 = 2{,}1$ м^2.

98. AH — ? $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \Rightarrow AH = \dfrac{25}{BC} = \dfrac{2 \cdot 48}{32} = 3$ см.

99. $AB = 3AC$, $\dfrac{BK}{CH} = ?$ $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot BK \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot CH \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BK \cdot AC = CH \cdot AB \Rightarrow \dfrac{BK}{CH} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3AC}{AC} = 3 \Rightarrow BK : CH = 3 : 1.$

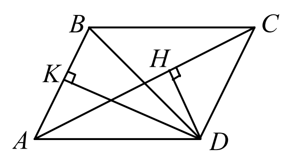
100.



$S_\Delta = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$ см^2;

$S_\Delta = \dfrac{1}{2} BH \cdot AC \Rightarrow BH \cdot AC = 48 \Rightarrow BH = \dfrac{48}{AC} = 4{,}8$ см.

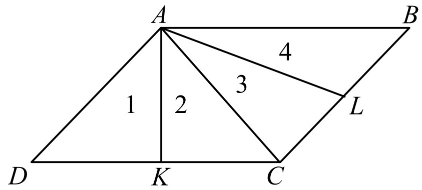
101. DM — ?



$\Delta ACD = \Delta CAB$ по 3-м сторонам (т.к. $ABCD$ — параллелограмм, AB=CD, BC=AD, AC — общая).

$S_{ACD} = \dfrac{1}{2} DH \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot 31 = 64$; $S_{ABCD} = DK \cdot AB \Rightarrow DK = \dfrac{S}{AB} = \dfrac{64}{12} = \dfrac{16}{3} \approx 5{,}3$ см.



102.

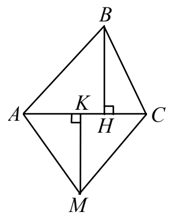
$S_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BL;$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot LC;$

$BL = LC \Rightarrow S_1 = S_2.$

Аналогично: $S_3 = S_4$.

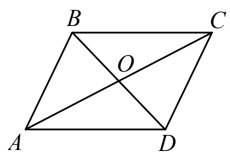
$\Delta ABC = \Delta CDA \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CDA} \Rightarrow S_{1+2} = S_{3+4} \Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$



103.
ABC — данный треугольник. Находим длину BH, центр AC — точка K. Из точки K строим перпендикуляр, равный BH, соединяем вершину перпендикуляра KM с точками A и C. ΔAMC — искомый.

104. а) $S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ см

б) $S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 150° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ см.



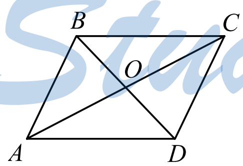
105.

$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$ см

$S_{ABD} = S_{BDC} \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 6 \cdot 2 = 12$ см.

106. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(150°) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 25$ см;

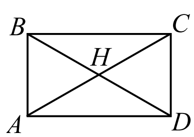
$S_{ABC} = S_{ACO} \Rightarrow S_{ABCO} = 2 \cdot 25 = 50$ см.



107.
$AC = 8$см, $BD = 6$см, $BO = OD$, $AO = OC$ (т.к. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма) $\Rightarrow AO = 4$; $BO = 3$.

$S_{ABO} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AO \cdot \sin(BOA) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

$S_{AOD} = S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin(\angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 12\sqrt{2}$.



108. $BD = 4$, $BH = HD = AH = HC = 2$ (т.к. $ABCD$ — прямоугольник);

$S_{ABH} = S_{AHD} = S_{BHC} = S_{CHD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 4 \cdot 1 = 4$ см.

109. $\alpha + \beta = 180°$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha$

$S_{EST} = \dfrac{1}{2} SE \cdot ST \cdot \sin(180 - \alpha) = \dfrac{1}{2} SE \cdot ST \cdot \sin\alpha \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{EST}} = \dfrac{AB \cdot BC}{SE \cdot ST}$. Ч.т.д.

110. CC_1 — ?

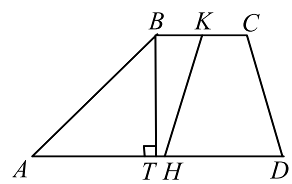
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60° = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ см^2.

$S_{C_1CB} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sin 30° \cdot CC_1 = 2CC_1$. $S_{ACC_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sin 30° \cdot CC_1 = \dfrac{5}{4} CC_1$ см^2;

$S_{ACC_1} + S_{C_1CB} = \left(\dfrac{5}{4} + 2\right) CC_1 = 10\sqrt{3} = S_{ABC}$

$\dfrac{13}{4} CC_1 = 10\sqrt{3} \Rightarrow CC_1 = \dfrac{40\sqrt{3}}{13}$ см

111. $S_{ABKH} = \dfrac{(BK + AH)}{2} \cdot BT$;



$BK = KC$; $AH = HD$;

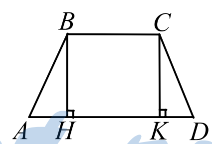
$S_{HKCD} = \dfrac{(KC + HD)}{2} \cdot BT = \dfrac{(BK + AH)}{2} \cdot BT \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABKH} = S_{HKCD}$. Ч.т.д.

112. CFH — прямоугольный треугольник, $\angle F = 45° \Rightarrow FH = CH \Rightarrow$

$\Rightarrow 2FH^2 = 25 \Rightarrow CH = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$. $S_{CDEF} = \dfrac{(CD + FE)}{2} \cdot CH = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{35}{2\sqrt{2}}$ см^2.

113.



$\angle BAH = 30° \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2} BA = \dfrac{3}{2} = CK$;

$\angle CDK = 45° \Rightarrow CK = KD = \dfrac{3}{2}$;

$\sin(\angle ABH) = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $BC = KH = 1$;

$AD = 1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$;

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right) \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{8}\left(7 + 3\sqrt{3}\right)$.

114.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5a$.

Пусть $CM \perp AB$, $OH \perp AB$, тогда $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2$;

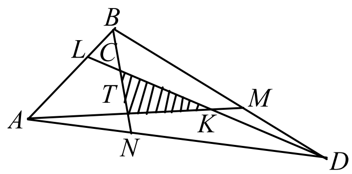
$$S_{ABC} = \frac{5a}{2} \cdot CM = 6a^2 \Rightarrow CM = \frac{12a^2}{5a} = \frac{12a}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{CB^2 - CM^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{144a^2}{25}} = \frac{9a}{5};$$

$\Delta ADH = \Delta BCM$ (по гипотенузе и катету) $\Rightarrow AH = MB \Rightarrow HM =$

$$= 5a - \frac{18a}{5} = \frac{7a}{5} = DC \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12a}{5}\left(\frac{7a}{5} + 5a\right) = \frac{6a}{5}\left(\frac{32a}{5}\right) = \frac{192a^2}{25} = 7{,}68a^2.$$

115.



$S - S(ABM) - S(ALC) -$
$- S(CKB) = S(PQR) - S(BKQ) - S(KLC) -$
$- S(APM) \Rightarrow S(PQR) = S(BKQ) + S(KLC) +$
$+ S(APM)$.

$$MF \| CK \Rightarrow \Delta AFM \sim \Delta AKC \Rightarrow AF = \frac{1}{3} AK =$$

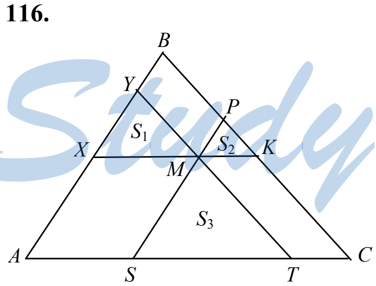
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} AB = \frac{2}{9} AB \Rightarrow FB = \frac{7}{9} AB;$$

$$\Delta FBM \sim \Delta KBQ \Rightarrow \frac{KB}{FB} = \frac{BQ}{BM} \Rightarrow \frac{BQ}{BM} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(BKQ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} S(ABM) = \frac{1}{7} S(ABM) = \frac{1}{21} S.$$

Аналогично, $S(RLC) = \frac{1}{21} S$ и $S(APM) = \frac{1}{21} S \Rightarrow S(PQR) = \frac{1}{7} S.$

116.



$S_{ABC} = S$; $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$;

$BC \| YT$; $BC \| SP \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYM \sim \Delta MPK$;

$XK \| AC \Rightarrow \angle YXM = \angle XMS = \angle MST$ и $\angle YMX = \angle MTS \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_1 \sim S_3 \Rightarrow S_1 \sim S_2 \sim S_3 \sim S \Rightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{XY^2 \cdot YM^2}; \quad \frac{S}{S_2} = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{MP^2 \cdot PK^2};$$

$$\frac{S}{S_3} = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{SM^2 \cdot MT^2} \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S}\left(\frac{XY \cdot YM + MP \cdot PK + SM \cdot MT}{AB \cdot BC}\right);$$

$$\frac{XY \cdot YM}{AB \cdot BC} + \frac{MP \cdot PK}{AB \cdot BC} + \frac{SM \cdot MT}{AB \cdot BC} = \frac{XY \cdot BP}{AB \cdot BC} + \frac{BY \cdot PK}{AB \cdot BC} + \frac{AX \cdot KC}{AB \cdot BC} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S}.$$

Ч.т.д.

117. Пусть K — середина BC;

а) $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ см;

$$AO = \frac{2}{3}AK = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{300}{9}\pi = \frac{100}{3}\pi \text{ см}^2.$$

б) Пусть $ABCDEF$ — данный 6-угольник.

$\angle AFE = \frac{(6-2)180}{4} = 120° \Rightarrow \angle AFO = 60° = \angle FAO \Rightarrow \Delta AFO$ — равносторонний $\Rightarrow AE = FO = AO = 10 = R \Rightarrow S = \pi R^2 = 100\pi$.

$$R = \frac{AB}{2} \cdot \mathrm{ctg}\frac{45°}{2} = 5\mathrm{ctg}22{,}5° \Rightarrow S = \pi R^2 = 25\pi\mathrm{ctg}^2 22{,}5°.$$

в) Пусть $ABCDEFGH$ — данный 8-угольник и точка O — его центр, тогда по теореме косинусов имеем: $AB^2 = 2R^2\left(1 - \cos\frac{360°}{8}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 100 = 2R^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{100}{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow S = \pi \cdot \frac{100}{2-\sqrt{2}} \text{ см}^2.$$

118. а) OCD — равносторонний треугольник, OM — медиана $\Rightarrow$
$\Rightarrow OM = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3} = r \Rightarrow S = \pi r^2 = 75\pi$ см^2.

б) Пусть $ABCDEFGH$ — данный 8-угольник и точка O — его центр, и $OM \perp AB \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AB \cdot \mathrm{ctg}\frac{1}{2}\frac{360°}{8} = 5\mathrm{ctg}\frac{45°}{2} =$

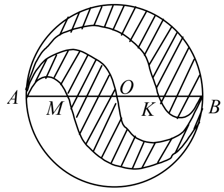
$$= 5\frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin\frac{45°}{2}} = 5\frac{2\cos^2\frac{45°}{2}}{\sin 45°} = 5\frac{\cos 45° + 1}{\sin 45°} = 5\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = r \Rightarrow S = \pi r^2 = 25\pi\frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

119. Пусть MK — данная хорда, пересекает меньшую окружность в точке O_1, а точка O — центр окружностей, тогда
$S_{\text{кольца}} = \pi OK^2 - \pi OO'^2 = \pi(OK^2 - OO_1^2)$.
ΔKO_1O — прямоугольный $\Rightarrow O_1K^2 = OK^2 - OO_1^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{\text{кольца}} = \pi O_1K^2$, т.к. MK — диаметр данного круга и $MO' = O'K$ (из ΔMOK: $MO = OK$; $O'O$ — перпендикуляр) $\Rightarrow S_{\text{круга}} = \pi O'K^2$. Ч.т.д.

120. $BDOE$ — квадрат $\Rightarrow S_{\text{кв}} = 5^2 = 25$ см^2;

$$DOE \text{ — сектор; } S_{DOE} = \frac{25\pi}{4} \Rightarrow S_{\text{фиг}} = 25 - \frac{25\pi}{4} = 25\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ см}^2.$$

121.

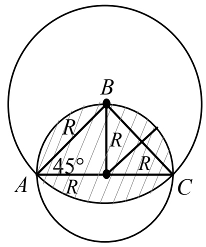


$AM = MO = OK = KB = \frac{d}{4}$; $S_{\cup AB} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8}$;

$S_{\cup AK} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{9d^2}{64} = \frac{9d^2\pi}{128}$; $S_{\cup AO} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^2}{16} = \frac{\pi d^2}{32}$;

$S_{\cup AM} = \frac{\pi d^2}{128} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi d^2}{8} - \frac{9\pi d^2}{8} + \frac{\pi d^2}{128} = \frac{1}{16}\pi d^2$;

$S_2 = \frac{\pi d^2}{32} - \frac{\pi d^2}{128} + \frac{9\pi d^2}{128} - \frac{\pi d^2}{32} = \frac{1}{16}\pi d^2$.



122.

$R_{\text{бол. окр.}} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$;

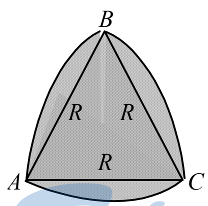
$\cup AB = \cup BC = \cup AC$; $\angle ABC = 90°$ (AC — диаметр)

$S_{\text{сектора } ABC} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}R^2\cdot 2 = R^2 \Rightarrow S_{\cup AC} = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$;

$S_{\frac{1}{2}\text{окр}} = \frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = R^2(\pi - 1)$ см^2.

123.



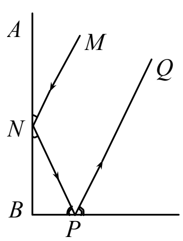
$S_{\Delta} = \frac{1}{2}R^2 sin60° = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{6} \Rightarrow S_{\cup AB} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{фиг.}} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{\pi R}{2} - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{R^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$.

Различные задачи по курсу геометрии VII—IX классов

Треугольник



1. $\angle MNP + \angle NPQ = (180° - 2\angle BNP) + (180° - 1\angle NPB) =$
$= 360° - 2(\angle BNP + \angle NPB) = 360° - 2\cdot 90° = 180°$.

Т.к. $\angle MNP$ и $\angle NPQ$ — внутренние односторонние при пересечении прямых MN и PQ секущей ND, то прямые MN и PQ параллельны, а, значит, луч изменит свое направление на противоположное.

2. $\angle AOB = \angle DOE = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

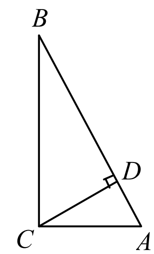
$\angle DOA = \angle EOB = 180° - \angle AOB = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

3. Допустим, что могут.

$\angle AOB = 90° = \angle DOA$, следовательно,

по предыдущей задаче $\angle A + \angle B = 180°$, что невозможно,

если $\angle C = 0° \Rightarrow$ получаем противоречие $\Rightarrow$ не могут.



4. $\angle BAC = 30°$, $AB = 32$ см.

AD — ? BD — ?

$\sin BAC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2}$; $BC = \dfrac{1}{2} AB = 16$ см;

$AC = \cos BAC \cdot AB = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 32}{2} = 16\sqrt{3}$ см.

из ΔADC: $\cos DAC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$AD = AC \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{16 \cdot 3}{2} = 24$ см;

из ΔDBC: $\dfrac{DB}{BC} = \sin DCB = \dfrac{1}{2}$; $DB = \dfrac{BC}{2} = 8$ см.

5. $AB = 2BC$;

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2} = \sin BAC = \cos ABC$, значит, $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 60°$.

6. $AB = 4CD$; O — середина AB.

$CO = AO = OB$; $CO = \dfrac{1}{2} AB$; $CD = \dfrac{1}{4} AB$; $\dfrac{CO}{CD} = 2$; $CO = 2CD$.

Значит, $\cos OCD = \dfrac{CD}{CO} = \dfrac{1}{2}$, значит, $\angle OCD = 60°$;

$\angle DOC = 90° - \angle OCD = 30°$; $\angle AOC = 180° - \angle DOC = 150°$;

$\angle OAC = \dfrac{1}{2}(180° - \angle AOC) = 15°$; $\angle ABC = 90° - \angle BAC = 75°$.

7. Соединим эти три точки. Через вершины этого треугольника проведем прямые, параллельные противолежащим сторонам. Точки пересечения этих прямых являются вершинами искомого треугольника.

8. а) $\angle A = 10°$, $\angle C = 78°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 10° - 78° = 92°$.

Т.к. напротив меньшего угла лежит меньшая сторона, то $AC > AB > BC$.

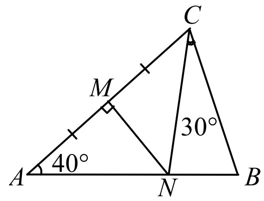
Ответ: b, c, a.

б) $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 178° - 1° = 1°$,

т.к. напротив меньшего угла лежит меньшая сторона, то $AC = BC > AB$.

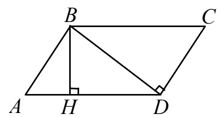
Ответ: c, $a = b$.

9. $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 67° - 78° = 35°$, т.к. напротив меньшего угла лежит меньшая сторона по следствию из теоремы синусов, то $BC < AC < AB$. Ответ: a, b, c.



10. а) т.к. NM — медиана и высота в ΔACN, то ΔACN — равнобедренный и $AN = CN$; т.к. $AN + NB = a$, то $CN + NB = a$.
Значит, $P(\Delta CBN) = CN + NB + BC = a + c$
б) $\angle MAN = \angle MCN = 40°$ (т.к. ΔACN — равнобедренный);
$\angle ABC = 180° - 40° - 30° - 40° = 70°$.
Значит, $\angle ACB = \angle ABC = 70°$.
Значит, ΔABC — равнобедренный с основанием BC.

Четырехугольник



11. $AB = BD = CD$, т.к. треугольники ABD и BDC — равнобедренные
$\angle ABD = \angle BDC = 90°$ по условию
$AD = a$, AD — большая сторона, т.к. это гипотенуза.

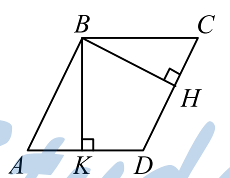
Пусть $AB = BD = x$, тогда $x^2 + x^2 = a^2$; $2x^2 = a^2$; $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Т.к. ΔABD — равнобедренный, значит, $\angle BAD = \angle BDA = 45°$.
А значит, $\angle BAH = \angle ABH = 45°$.

Пусть $AH = BH = y$; $2y^2 = x^2$; $2y^2 = \dfrac{a^2}{2}$; $y^2 = \dfrac{a^2}{4}$; $y = \dfrac{a}{2}$. Ответ: $\dfrac{a}{2}$.

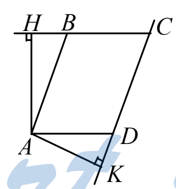
12.

а)



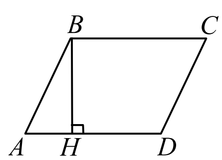
$\angle HBK = 25°$. Значит, $\angle HDK = 360° - 90° - 90° - 25° = 155°$.
Значит, $\angle BAD = 180° - 155° = 25°$.

б)



$\angle HAK = 125°$.
$\angle BCD = 360° - 180° - 125° = 55°$.
$\angle ADC = 180° - 55° = 125°$.

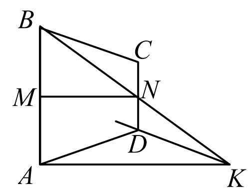
13.



Строим две параллельные прямые, удаленные друг от друга на расстояние, равное 2 см. От произвольной точки A одной из них отложим отрезок AB, равный 3 см. Затем проводим окружности с центрами в точках A и B радиусом, равным 5 см. Точки пересечения этих окружностей со второй прямой дадут остальные искомые вершины параллелограмма. Этих точек пересечения будет 4. Выберите их низ в качестве вершин либо четные, либо нечетные. Задача имеет и второе решение. Оно получается, если сначала отложить $AB = 5$ см, а затем из точек A и B провести окружности с радиусом, равным 3 см, только в качестве 2-х других вершин выберите из 4-х точек пересечения какие-нибудь две крайние.

14. см. решение задачи 13. Только здесь будет одно решение, т.к. $3 < 4$, т.е. одна из сторон параллелограмма меньше высоты.

15. $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Доказать, что $BC \| AD$.



Через точку D проведем прямую a, параллельную прямой BC.

K — точка пересечения a и BN;

$\Delta BCN = \Delta KDN$ по второму признаку ($CN = ND$, $\angle CNB = \angle DNK$ (как вертикальные), $\angle BCN = \angle KDN$ (как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и DK секущей CD)).

Значит, $BN = NK$, $BC = DK$, .к. $BN = NK$ и $AM = MB$, то MN — средняя линия, значит, $MN = \frac{1}{2} AK$.

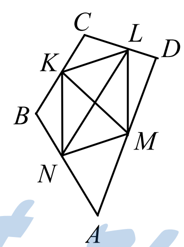
По условию $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + DK)$.

Значит $AK = AD + DK$.

Значит, точки A, D, K лежат на одной прямой.

Значит, $AD \| BC$.

16. Т.к. K — середина BC и L — середина CD, то KL — средняя линия в ΔBCD.



Аналогично, NK — средняя линия в ΔABC,

LM — средняя линия в ΔADC,

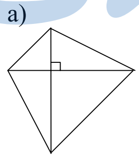
MN — средняя линия в ΔABD.

Значит, $KL \| BD \| MN$, $NK \| AC \| LM$.

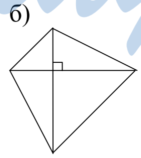
Значит, $NKLM$ — параллелограмм; диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

17.

а)



б)



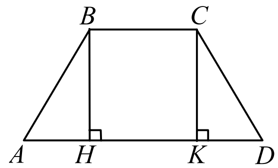
18. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

19. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

20. а) $\angle A = 3x$, $\angle B = 4x$, $\angle C = 2x$, $\angle D = 4x$, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 13x$,
$\angle A + \angle B = 7x$, $\angle C + \angle D = 6x$, $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2(\angle A+\angle B) = 2(\angle C+\angle D)$;
$13x = 14x = 12x$ — противоречие. Ответ: не могут.

б) $\angle A = 8x$, $\angle B = 7x$, $\angle C = 13x$, $\angle D = 12x$, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 40x$;

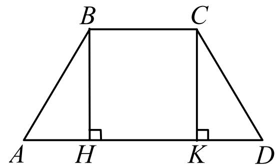
$\angle A + \angle D = 20x$, $\angle B + \angle C = 20x$, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2(\angle A + \angle D) = 40x$.
Ответ: могут.



21. $\angle BAD = 60°$, $AB = 24$ см, $BC + AD = 44$ см.
BH — высота.

$$\frac{AH}{AB} = \cos BAH = \frac{1}{2};$$

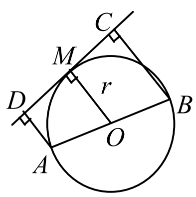
$AH = \frac{1}{2}AB = 12$ см. $AD = BC + 2AH$;
$BC + 2AH + BC = 44$ см; $BC + AH = 22$ см; $BC = 10$ см;
$AD = 44$ см $- 10$ см $= 34$ см.



22. $\angle BAD = 60°$, $BC = 15$ см, $AD = 49$ см.
BH и CK — высоты, $AH = KD$; $BC = HK$;
$AD = BC + 2AH = 49$ см;
$2AH = 49$ см $- 15$ см $= 34$ см. $AH = 12$ см;

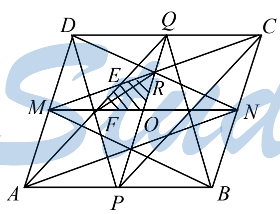
$$\frac{AH}{AB}\cos BAH = \frac{1}{2};$$

$AB = 2AH = 34$ см; $AB = CD$.
Значит, $P(ABCD) = AB + BC + CD + AD =$
$= 34$ см $+ 15$ см $+ 49$ см $+ 34$ см $= 132$ см.



23. Т.к. прямая a — касательная, то $OM \perp a$.
Т.к. $BC \perp a$ и $AD \perp a$, то $OM \| AD \| BC$.
Т.к. O — середина AB (AB — диаметр), то OM — средняя линия $ABCD$.

24.



$S(MOQD) = \frac{S}{4}$.

Т.к. FR — средняя линия, то

$S(FOR) = \frac{1}{4}S(MOQ)$ и $S(FER) =$

$= \frac{1}{4}S(MEQ) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}S(MOQ) = \frac{1}{12}S(MOQ) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(FERO) = \frac{1}{4}(MOQ) + \frac{1}{12}S(MOQ) = \frac{1}{3}(MOQ) = \frac{1}{6}S(MDQO) = \frac{1}{24}S.$

$\Rightarrow S_8 = 4 \cdot \frac{1}{24}S = \frac{1}{6}S$. Ч.т.д.

25. $S^2_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2S_2}$. $AC \| A_1C_1 \| A_2C_2$;
$\Delta A_1BC_1 = \Delta A_1B_1C_1$ ($A_1BC_1B_1$ — параллелограмм) $\Rightarrow$

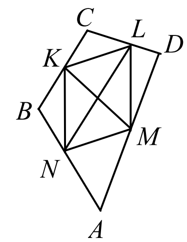
$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1 \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB^2}{A_1B^2}$, а т.к.

$\Delta AA_1B = \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow AA_1 = A_1B_1 \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B} = \dfrac{2}{1}$.

Аналогично выясняем, что

$\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ и $\dfrac{A_2B_2}{AB} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow S^2_{ABC} = 16 = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2S_2} = 4 \cdot 4$. Ч.т.д.

26.



$BD = AC$.
Доказать, что $S(ABCD) = KM \cdot NL$.
NK — средняя линия ΔABC.
Значит, $NK \| AC$.
Аналогично, $KL \| NM$.
Значит, $NKLM$ — параллелограмм.

Т.к. KL — средняя линия ΔABC, то $NK = \dfrac{1}{2} AC$.

Т.к. $AC = BD$, то $NK = KL$. Значит, $NKLM$ — ромб с диагоналями NL и KM.

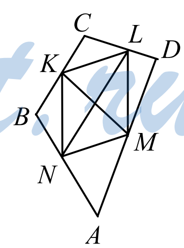
$S(NKLM) = \dfrac{1}{2} NL \cdot KM$; $\quad S_{NBC} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$; $S_{LDM} = \dfrac{1}{4} S_{ACD}$;

$S_{NBK} + S_{LDM} = \dfrac{1}{4}(S_{ABC} + S_{ACD}) = \dfrac{1}{4} S_{ABCD}$;

$S_{NKLM} = S_{ANCD} - (S_{NBK} + S_{LDM}) - (S_{CKL} + S_{ANM}) = S_{ABCD} - \dfrac{1}{4} S_{ABCD} - \dfrac{1}{4} S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$

$\dfrac{1}{2} NL \cdot KM = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$. Значит, $S_{ABCD} = NL \cdot KM$.

27.



$AC = BD = a$; $\quad KM + NL = b$.
$KLMN$ — ромб (см. предыдущую задачу).

$S(KLMN) = \dfrac{1}{2} KL \cdot MN$;

LM — средняя линия в ΔACD, значит, $LM = \dfrac{1}{2} AC = \dfrac{a}{2}$.

Аналогично, $KL = \dfrac{a}{2}$.

Пусть $KO = x$, $OL = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \\ x + y = \dfrac{b}{2} \text{ (по усл.)} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \\ x^2 + 2xy + y^2 = \dfrac{b^2}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = b \\ 2xy = \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = b \\ xy = \dfrac{b^2}{8} - \dfrac{a^2}{8} \end{cases}$$

Значит, $KO \cdot OL = \dfrac{b^2 - a^2}{8}$; $NL \cdot KM = 4KO \cdot OL = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

Значит, $S_{ABCD} = NL \cdot KM = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$ (см. предыдущую задачу).

28. Пусть $ABCD$ — данный квадрат, $MNPQ$ — данный параллелограмм, причем $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in AD$. Пусть $MN=b$, $NP=c$, $\angle BNM = \alpha$, тогда $AB = a = b\sin\alpha + c\cos\alpha$, $BC = a =$
$= b\cos\alpha + c\sin\alpha \Rightarrow$ т.к. $AB = BC = a$, то $b\cos\alpha + c\sin\alpha = b\sin\alpha + c\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)(b - c) = 0 \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

$a^2 = 2S(MBN) + 2S(NCP) + S = b\sin\alpha \cdot b \cdot \cos\alpha \cdot c + c\sin\alpha \cdot c \cdot \cos\alpha + S \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha(b^2 + c^2) + S = a^2$;

$$MP = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{2(a^2 - S)}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2(a^2 - S)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2}(a^2 - S)}.$$

Декартовы координаты на плоскости

29. $y = kx + b$, $k = 2$, т.к. искомая прямая параллельна прямой
$y_1 = 2x - 5$; то $y = 2x + b$.
Т.к. прямая проходит через точку $A(3; -1)$, то $-1 = 6 + b$, $b = -7$.
Значит, $y = 2x - 7$.

30. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.
Чтобы A, B, C лежали на одной прямой, не параллельной оси ординат, нужно, чтобы угловые коэффициенты прямых AB и AC были равны.
AB: $y = kx + b$;

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases};$$

$y_1 - y_2 = k(x_2 - x_1)$; $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; AC: $k = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

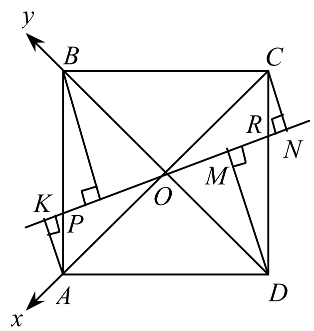
Значит, нужно, чтобы $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

Если точки A, B, C лежат на прямой, параллельной оси ординат, то $x_1=x_2=x_3$.

31. см. решение предыдущей задачи.

$\dfrac{-2-1}{3-2} = \dfrac{k-1}{0-2}$;

$-3 = \dfrac{k-1}{-2}$, $6 = k - 1$, $k = 7$.



32. Выберем систему координат так, как показано на рисунке. $AO = a$.
Значит, $A(a;\ 0)$, $B(0;\ a)$, $C(-a;\ 0)$, $D(0;\ -a)$.
Уравнение прямой KN: $y = kx$.
Общее уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $y = kx$: $y=-\dfrac{x}{k}+b$.

Уравнение прямой AK: $0=-\dfrac{a}{k}+b$. $\dfrac{a}{k}=b$.

$y=-\dfrac{x}{k}+\dfrac{a}{k}$

Найдем координаты точки K: $\begin{cases} y=-\dfrac{x}{k}+\dfrac{a}{k} \\ y=kx \end{cases}$ $\begin{cases} y=kx \\ -\dfrac{x}{k}+\dfrac{a}{k}=kx \end{cases}$

$$\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{a}{k}=x\left(k+\dfrac{1}{x}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} y=kx \\ a=x(k^2+1) \end{cases} \quad \begin{cases} y=kx \\ x=\dfrac{a}{k^2+1} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{ak}{k^2+1} \\ x=\dfrac{a}{k^2+1} \end{cases}$$

Найдем AK:

$$AK=\sqrt{\left(\frac{a}{k^2+1}-a\right)^2+\left(\frac{ak}{k^2+1}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-ak^2-a}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{ak}{k^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(ak^2\right)^2+\left(ak\right)^2}}{k^2+1}=\frac{a}{k^2+1}\sqrt{k^4+k^2}\ .$$

Уравнение прямой BL: $a=b$; $y=-\dfrac{x}{k}+a$

Найдем координаты точки L:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{x}{k}+a \\ y=kx \end{cases} \quad \begin{cases} y=kx \\ a=\dfrac{x}{k}+kx \end{cases} \quad \begin{cases} y=kx \\ a=x\left(\dfrac{k^2+1}{k}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{ak^2}{k^2+1} \\ x=\dfrac{ak}{k^2+1} \end{cases}$$

Найдем BL:

$$BL=\sqrt{\left(\frac{ak}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{ak^2}{k^2+1}-a\right)^2}=\frac{\sqrt{(ak)^2+(ak^2-ak^2-a)^2}}{k^2+1}=$$

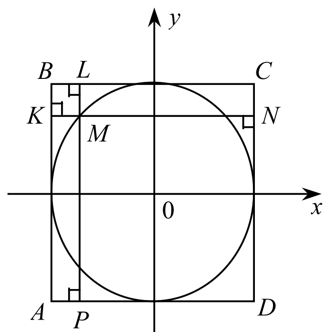
$$=\frac{\sqrt{a^2k^2+a^2}}{k^2+1}=\frac{a}{k^2+1}\sqrt{k^2+1}\ .$$

$\angle BOL=\angle DOM$ (как вертикальные).

$BO = OD$ (т.к. O — центр квадрата).
Значит, $\Delta BOL = \Delta DOM$ (по гипотенузе и острому углу).
Значит, $\underline{BL = DM}$.
$\angle BPL = \angle DRM$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей PR).
Значит $\Delta BPL = \angle DRM$ (по катету и острому углу).
Значит $BP = DR;\ \ AP = AB - BP = CD - DR = CR$
$\angle APK = \angle BPL = \angle DRM = \angle CRN$.
Значит $\Delta APK = \Delta CRN$ (по гипотенузе и острому углу).
Значит $\underline{AK = CN}$.
Значит $AK^2 + BL^2 + DM^2 + CN^2 = 2AK^2 + 2BL^2 =$

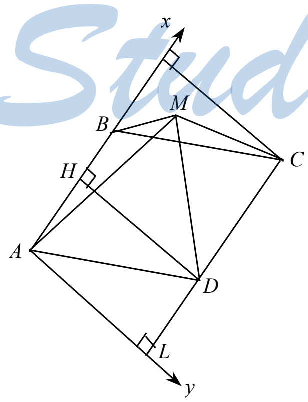
$$= 2\left(\frac{a^2k^2(k^2+1)}{(k^2+1)^2} + \frac{a^2(k^2+1)}{(k^2+1)^2}\right) = \frac{2a^2}{(k^2+1)}(k^2+1) = 2a^2$$

не зависит от k.
Значит, сумма квадратов расстояний от всех вершин квадрата до прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.



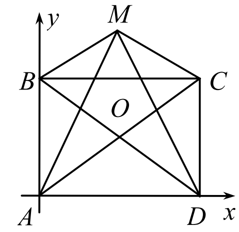
33. Т.к. радиус окружности равен R, то сторона квадрата $2R$.
Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Значит,
$A(R; -R)$, $B(R; R)$, $C(-R; R)$, $D(-R; -R)$.
Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$.
Пусть координаты точки $M(x; y)$,
$MK= R - x$, $ML = R - y$, $MN = R + x$,
$MP = R + y$, $MK^2 + ML^2 + MN^2 + MP^2 =$
$= R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - 2Ry + y^2 + R^2 + 2Rx +$
$+ x^2 + R^2 + 2Ry + y_2 = 4R^2 + 2x^2 + 2y^2 =$
$= 4R^2 + 2(x^2 + Y^2) = 4R^2 + 2R^2 = 6R^2$. Ч.т.д.

34.



Пусть $AB = a$, $AH = b$, $AL = c$.
Выберем систему координат так , как показано на рисунке:
$A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $D(b; c)$, $C(a + b; c)$.
Пусть $M(x; y)$.
$AM^2 = x^2 + y^2$, $BM^2 = (x - a)^2 + y^2$,
$CM^2 = (x - a - b)^2 + (y - c)^2$,
$DM^2 = (x - b)^2 + (y - c)^2$,
$AM^2 - BM^2 + CM^2 - MD^2 = x^2 + y^2 - (x - a)^2 -$
$- y^2 + (x - (a + b))^2 + (y - c)^2 - (x - b)^2 - (y - c)^2 =$
$= x^2 - (x - a)^2 + (x - (a + b))^2 - (x - b)^2 =$
$= (x-x+a)(x+x-a)+(x-a-b-x+b)(x-a - b + x - b) =$
$= a(2x - a) - a(2x - 2b - a) =$
$= 2ax - a^2 - 2ax + 2ab - a^2 = -2a^2 + 2ab$,
не зависит от x и y, значит не зависит от выбора точки M.

35.



Выберем систему координат так, как показано на рисунке.

$A(0; 0)$, $D(a; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; b)$.

Пусть $M(x; y)$.

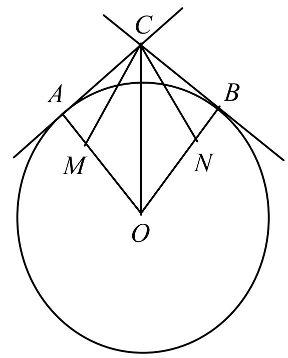
$AM^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2$

$BM^2 + MD^2 = x^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + y^2$

Значит $AM^2 + MC^2 = BM^2 + MD^2$ всегда.

Значит ГМТ — вся плоскость.

36. а) $\angle AOB = 60°$.



Проведем $CM \| OB$ и $CN \| OB$.

$\angle AMC = \angle AOB = 60°$ (т.к. $MC \| OB$);

$\angle ACM = 90° - \angle AMC = 30°$;

$\angle OCA = 90° - \angle AOC = 90° - 30° = 60°$;

$\angle MCO = \angle ACO - \angle ACM = 60° - 30° = 30°$;

$\angle MCO = \angle MOC$.

Значит, ΔOMC — равнобедренный.

Значит $OM = MC$

Значит, четырехугольник $ONCM$ — ромб, т.к. $\angle ACM = 30°$, то в прямоугольном

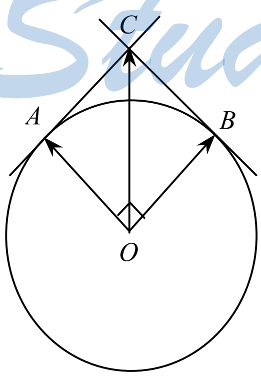
ΔMAC $AM = \dfrac{1}{2} MC$.

Значит, $AM = \dfrac{1}{2} MO$; $AO = MO + AM = \dfrac{3}{2} OM$.

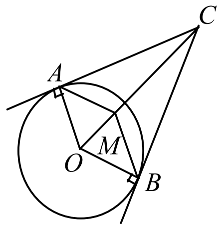
Значит, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. Аналогично $\overrightarrow{ON} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

б)

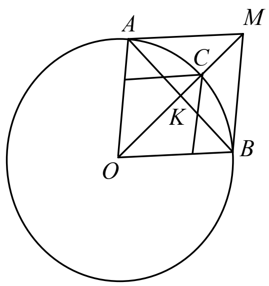


$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;



в) $AM \| OB$, $BM \| OA$;
$\angle AOM = \angle MOB = \angle OMB = \angle AMO = 60°$;
$\angle OAM = \angle OBM = 60°$.
Значит $\Delta OAM = \Delta OBM$ — равносторонний.
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $OB = OM;$
$\angle OCB = 90° - \angle MOB = 30°$;
$OB = \frac{1}{2}OC$. Значит, $OM = \frac{1}{2}OC$;
$\overline{OC} = 2\overline{OM} = 2(\overline{OA} + \overline{OB})$.

37. а) $AM \| OB$, $BM \| OA$.



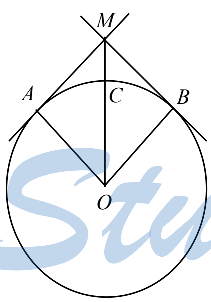
$OAMB$ — ромб (доказательство аналогичное доказательству в предыдущей задаче).
ΔOAB — равносторонний (т.к. $OA=OB = r$, $\angle AOB = 60°$).

$$OK = \sqrt{OB^2 - KB^2} = \sqrt{r^2 = \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

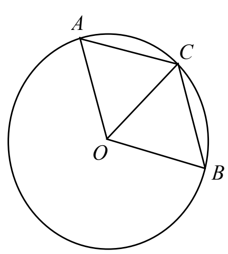
$OM = OK = r\sqrt{3}$; $OC = r$. $\overline{OM} = \overline{OC} \cdot \sqrt{3}$;

$\overline{OC} = \frac{\overline{OM}\sqrt{3}}{3}$; $\overline{OM} = (\overline{OA} + \overline{OB})$;

$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\overline{OA} + \overline{OB})$;



б) $AM \| OB$, $BM \| OB$;
$OAMB$ — квадрат;
$OM = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$;
$\overline{OM} = \overline{OC} \cdot \sqrt{2}$;
$\overline{OC} = \frac{\overline{OM} \cdot \sqrt{2}}{2}$;
$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$;
$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$;



в) $AC \| OB$, $BC \| OA$;
$\angle AOC = \angle COB = \angle OCB = \angle ACO = 60°$;
$\angle OAC = \angle OBC = 60°$.
Значит $\Delta OAC = \Delta OBC$ — равносторонний.
$OACB$ — ромб.
$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$.

38. M — середина BC: $M\left(0;\dfrac{7}{2}\right)$. N — середина CA: $N\left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

P — середина AD: $P\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. $\overline{MN}\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{NP}\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\overline{PM}\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

39. $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$, $C(1; 1)$

а) пусть $D(x; y)$. $\overline{AB}=\overline{DC}$. $\overline{CB}=\overline{DA}$

$\begin{cases}-3=-x+1\\1=-y+1\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$ $D(0; 4)$.

б) $CB = AD$

$\begin{cases}-2=x-2\\3=y-3\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ $D(0; 6)$.

в) $\overline{AB}=\overline{CD}$.

$\begin{cases}-3=x-1\\1=y-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$ $D(-2; 2)$

40. $A(0; -1)$,$B(3; 1)$, $C(1; -2)$.

A_1 — середина BC; $A_1\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$;

B_1 — середина AC; $B_1\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$;

C_1 — середина AB; $C_1\left(\dfrac{3}{2};0\right)$;

$\overline{AA_1}\left(2;-\dfrac{1}{2}\right)$; $\overline{BB_1}\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$; $\overline{CC_1}\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

41. $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(2; -1)$, $D(0; -4)$;

$\overline{AB}(4;6)$, $\overline{CD}(-2;-3)$, $\overline{AB}=-2\overline{CD}$,

т.к. $-2 < 0$, то $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены.

42. $2x + my - 1 = 0$, $mx + 8y + 2 = 0$, $my = -2x + 1$, $8y = -mx - 2$,

$y=-\dfrac{2}{m}x+\dfrac{1}{m}$, $y=-\dfrac{m}{8}x-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{2}{m}=\dfrac{m}{8}$, $m^2 = 16$, $m = \pm4$.

Ответ: ±4.

43. $\overline{a}\perp\overline{b}$. $|\overline{a}|=|\overline{b}|$;

$\overline{a}\,(x_0; y_0)$, $\overline{b}\,(x; y)$;

x — ? y — ?

Т.к. $\overline{a}\perp\overline{b}$ и $|\overline{a}|=|\overline{b}|$, то $\begin{cases}x\cdot x_0+yy_0=0\\x_0^2+y_0^2=x^2+y^2\end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{yy_0}{x_0} \\ x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{y^2 y_0^2}{x_0^2} + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{yy_0}{x_0} \\ x_0^2 + y_0^2 = y^2\left(\dfrac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{yy_0}{x_0} \\ y^2 = x_0^2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x_0 \\ x = -y_0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x_0 \\ x = y_0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\overline{b}\,(-y_0; x_0)$ или $\overline{b}\,(y_0; -x_0)$.

44. $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-1; 4)$.

AA_1; BB_1; CC_1 — медианы;

A_1 — середина $BC \Rightarrow A_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

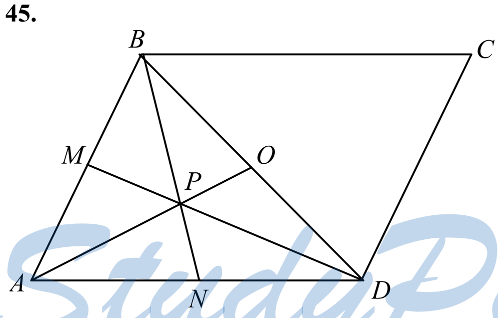
B_1 — середина AC $\Rightarrow B_1\left(0; \frac{5}{2}\right)$;

C_1 — середина $AB \Rightarrow C_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, тогда

$\overline{AA_1}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overline{BB_1}\left(-2; \frac{7}{2}\right)$, $\overline{CC_1}\left(\frac{5}{2}; -4\right)$, значит,

$AA_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BB_1 = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$, $CC_1 = \sqrt{\frac{25}{4} + 16} = \frac{\sqrt{89}}{2}$.

45.



По свойству медиан треугольников.

$\frac{BP}{PN} = \frac{2}{1}$, $PN = \frac{1}{3}BN$, $MP = \frac{1}{3}MD$, $S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABD}$, т.к. высоты у этих треугольников одинаковые, а основание ΔAMD в 2 раза меньше основания ΔABD.

$S_{AMP} = \frac{1}{3}S_{AMD}$, т.к. высоты у этих треугольников, опущенные из точки A, равны, а основание ΔAMP в 3 раза меньше ΔAMD.

Значит, $S_{AMP} = \frac{1}{3}S_{AMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{6}S_{ABD} = \frac{1}{12}S_{ABCD}$.

Преобразования фигур.

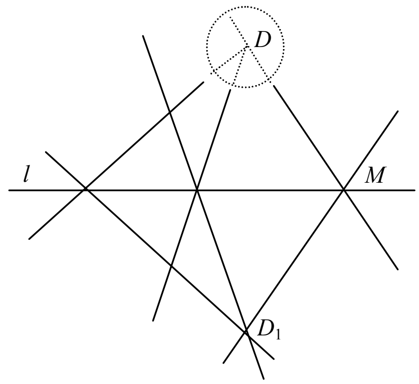
46. Искомой является общая хорда данной окружности и окружности, ей симметричной относительно данной точки.

47. Строим произвольную ломаную *ABCD* так, что *ABCD* — выпуклый четырехугольник, и отображаем все ее точки относительно *AD*.

48. Центр симметрии *ABCD* — *O*. Через точку *C* проходят прямые, параллельные сторонам и делящие высоты параллелограмма пополам $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ строим точку *O*.

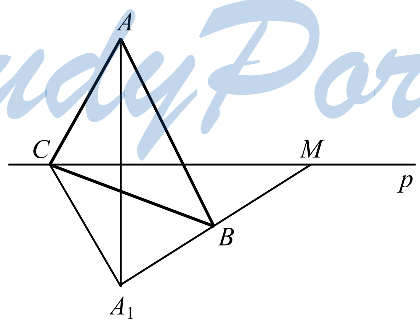
49. Осей симметрии — не больше 4, т.к. ось либо содержит диагональ, либо является общим серединным перпендикуляром для противолежащих сторон. 4 оси содержит квадрат, 2 — ромб и прямоугольник, 1 — равнобедренная трапеция. 3 оси не имеет ни одна из фигур с 4 углами.

50.



Через точку *M* проведем прямую *l*. D_1 симметрична *D* относительно $l \Rightarrow$ MD_1 — образ искомой прямой.

51.



Пусть A_1 — симметрична точке *A* относительно *p*. Проведем A_1B, пересекающую *p* в точке *M*. Точка *M* — искомая.

52. Да — точка пересечения прямых.

53. Строим треугольник ABC по 2-м сторонам и углу между ними. Затем отображаем его относительно серединного перпендикуляра, получаем ΔADC, причем $\angle ADC = \angle ABC = \alpha - \beta$. Пусть $\angle DOA = \gamma$, тогда $\angle AOC = \pi -$

$\gamma \Rightarrow \angle OAC = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \angle DAC = \pi - \alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADB = \alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}$. Постройте $\alpha + \beta$, затем $\pi - \alpha - \beta$. Затем треугольник по 2-м сторонам и углу между ними.

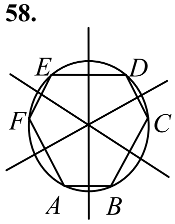
54. Не может, т.к. в этом случае количество вершин, лежащих с одной стороны, должно быть равно количеству с другой, что в 5-угольнике невозможно.

55. см. 54.

56. Проведите прямую. Отложите на ней данные углы, а на их сторонах отрезки a и c. Затем проведите окружность с центром в конце отрезка a и радиусом, равным b. Затем прямую, параллельную первой, через конец отрезка c. Через точку пересечения прямой с окружностью провести прямую, параллельную c. Получим искомый четырехугольник.

57. Ось симметрии пятиугольника проходит через вершину и середину противоположной стороны, тогда l_3 симметрична l_2 относительно$l_1 \Rightarrow l_5$ — ось симметрии. Аналогичное доказательство и для l_4 и l_5.

58.



Нет.

59. Проведите прямые a_1, a_2, a_3 через центр окружности перпендикулярно данным прямым. Но OM — произвольный радиус, а OM_1 — симметричный ему относительно a_1, OM_2 симметричен OM_1 относительно a_2, OM_3 — симметричен OM_2 относительно a_3, тогда биссектриса $\angle MOM_3$ проходит через вершину искомого треугольника. Далее проведите через нее 2 прямых, параллельные данным, а затем соедините точки их пересечения с окружностью.

60. Пусть AB — хорда данной длины. Построим окружность с центром в точке O и радиусом OM. Пусть она пересекает AB в точках C и D. Поверните AB на угол COM. Задача не имеет решения если AB больше диаметра окружности.

61. Такой четырехугольник является равнобокой трапецией $\Rightarrow$ есть ось симметрии — прямая, соединяющая середины оснований.

62. см. задачу 59.

63. Параллельно любой из диагоналей прямоугольника.

64. По формуле Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c и d — стороны, p — полупериметр.

65. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а точка O — данная точка. Поверните одну из окружностей на 60° вокруг точки O. Пусть она пересечет вторую в точках A и B и пусть их образами являются точки C и D соответственно, тогда ΔCOA и ΔDOB — искомые.

Преобразования подобия.

66. Т.к. центры гомотетий различны и произведение коэффициентов равно 1, то это параллельный перенос.

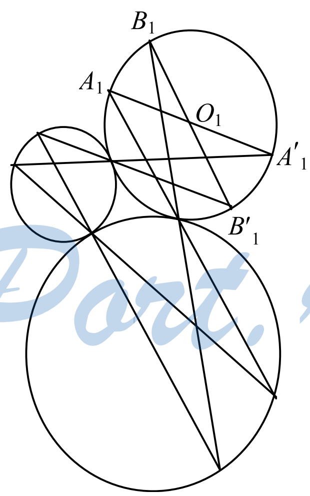
67. Если произведение коэффициентов не равно 1, то результирующее преобразование гомотетия $\Rightarrow$ прямые, проходящие через центр этой гомотетии. Если результирующее преобразование — параллельный перенос, то прямые, параллельные вектору этого переноса.

68. Т.к. $\Delta ABM \sim \Delta CDM$, то они гомотетичны $\Rightarrow$ гомотетичны и окружности, описанные около них.

69. см. задачу 68.

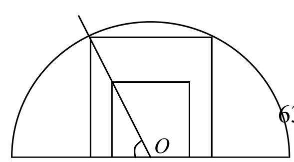
70. Треугольник, образованный средними линиями, подобен данному с коэффициентом $\frac{1}{2} \Rightarrow R_1=\frac{R}{2}$.

71. Т.к. точки касания заданы, то проведя построения, показанные на рисунке, получим точку O_1 — центр одной из окружностей. Аналогично можно получить и другие центры.



72. Пусть MN — данная хорда, точка O — ее центр. Постройте произвольный квадрат $ABCD$ так, чтобы точка O была центром стороны AD. Пусть OB и OC пересекают дугу в точках P и Q. Опустите из них перпендикуляры на MN и проведите отрезок PQ.

73. Пусть AOB — данный сектор. Постройте произвольный квадрат $MNPQ$ так, чтобы

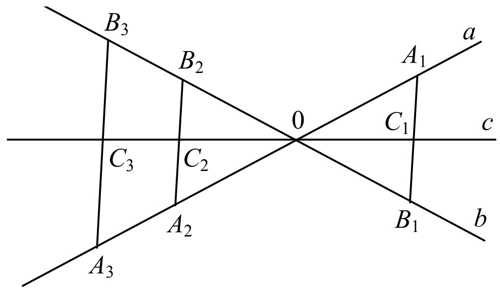


$AB||MN||PQ$. Пусть ON и OP пересекает дугу в точках KL. Проведите отрезок KL. Затем через точки K и L прямые, параллельные NP и MQ, пусть они пересекаются с радиусами в точках S и R соответственно, тогда $SKLR$ — искомый квадрат.

74. Пусть AOB данный сектор. Постройте произвольный квадрат $MNPQ$ так, чтобы $M \in AO$, а P, $Q \in OB$. Пусть ON пересекает дугу в точке C. Опустите из точки C перпендикуляр на OB — получим точку D. Пусть $CE||MN$ пересекает AO в точке E. Пусть $EQ \perp OB$, тогда $GECD$ — искомый квадрат.

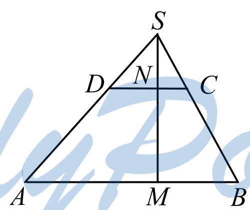
Пропорциональные отрезки

75.



Точка C_2 перейдет в точку C_1 и точка C_3 в точку C_1 (при гомотетии с центром в точке O и $k_1 = \frac{-OA_2}{OA_1}$ и $k_2 = \frac{-OA_3}{OA_1}$) $\Rightarrow$ точки O, C_1 и C_2 — лежат на одной прямой и точки P, C_1 и C_3 — аналогично $\Rightarrow$ C_1,C_1, C_3 лежат на одной прямой, проходящей через точку O.

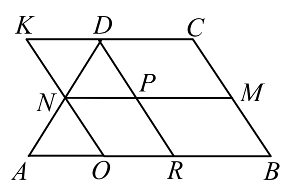
76.



Пусть $AD \nparallel CD$

Гомотетия с центром S и $k = \frac{SD}{SA}$ переводит точку B в точку B_1, а точку M в точку M_1. Средняя линия ΔCDB_1 не параллельна основанию, что невозможно $\Rightarrow$ $AB||CD$.

77.



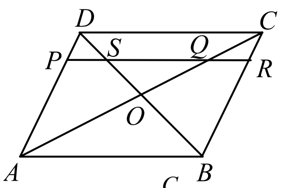
$KO||CB$; $\Delta ANO \sim \Delta DNK$ (по двум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AO}{KD} = \dfrac{AN}{ND} = k$, $DR \| BC$

$OR{=}AO = KD \Rightarrow \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AO}{OR} = \dfrac{AO}{NP} = \dfrac{a-d}{d-b} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{a-d}{d-b}$ и $d = \dfrac{a+kb}{1+k}$.

78. $PR \| AB \Rightarrow$

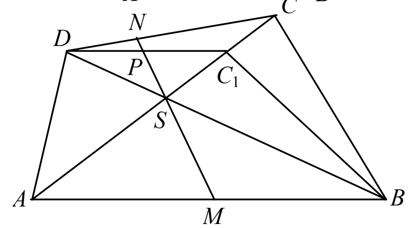


$\Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta PDS$ и $\Delta ACB \sim \Delta QCR$;

$\dfrac{AB}{PS} = \dfrac{AD}{PD}$ и $\dfrac{AB}{QR} = \dfrac{BC}{CR}$, т.к. $AD \| CB \|$PR, то

$AD = BC$ и $PD = RC$, учитывая эти пропорции, $PS = QR \Rightarrow PQ = SR$. Ч.т.д.

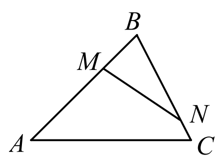
79.



Пусть $DC \not\| AB$ и M, N, S — лежат на одной прямой. Проводим $DC_1 \| AB$ и $C_1 \in AC$. $MN \cap DC_1 = P$, причем P— середина $DC_1 \Rightarrow NP$ — средняя линия ΔDCC_1 и $NP \| CC_1$, что противоречит условию $S \in NP \Rightarrow DC \| AB$.

Подобие фигур

80.

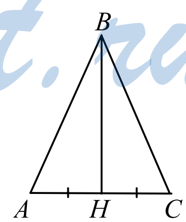


$MN \not\| AC$ и $\Delta ABC \sim \Delta MBN$

такое возможно, например, $\angle B = \angle B$, $\angle A = \angle N$, $\angle C = \angle M$. И невозможно, если ΔABC — равносторонний, т.к. в этом случае

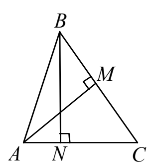
$\angle M = \angle N = \angle C = \angle A \Rightarrow MN \| AC$.

81.



Предположим, что $\Delta ABH \sim \Delta CBH$, из этого автоматически следует равенство всех углов $\Rightarrow BH$ — медиана и высота $\Rightarrow$

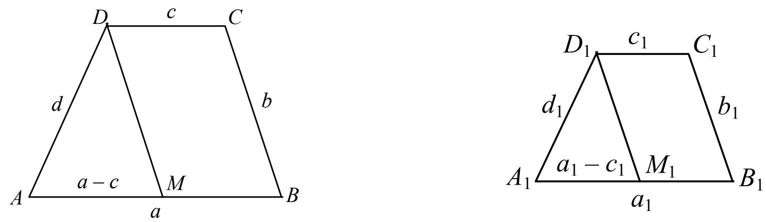
$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta CBH \Rightarrow$ условие невыполнимо.



82.

$AB = BC \Rightarrow \angle BCA = \angle BAC$ и $\angle AMC = \angle ANB = 90°$;
$\Delta AMC \sim \Delta ABN$ по двум углам.

83.



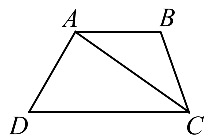
Построим прямые DM и D_1M_1, $\parallel CB$ и C_1B_1 в $\Delta\ ADM$ и $A_1D_1M_1$

$$\frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a-c}{a_1-c_1}$$

$$\left(\text{т.к. } \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1},\quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} \text{ и } \frac{a-c}{c} = \frac{a_1-c_1}{c_1};\quad \frac{a-c}{a_1-c_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1}\right) \Rightarrow \text{ они}$$

подобны по 3-ему признаку $\Rightarrow \angle A = \angle A_1$.

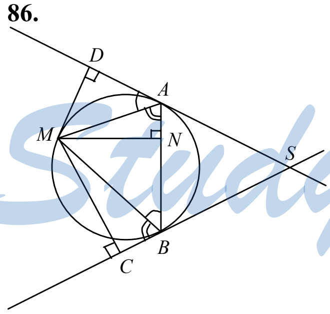
84.



$$\Delta BAC \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot DC \Rightarrow d^2 = ab \Rightarrow d = \sqrt{ab}\ .$$

85. Строим прямоугольный треугольник по отношению гипотенузы к катету, потом строим ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

86.



$AS = SB$ по свойству касательных;

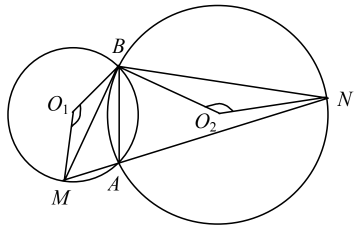
$\angle MAD = \angle MBN$ и MBC = $\angle$MBN по свойствам углов, образованных хордами и касательными $\Rightarrow$ $\Delta MAD \sim \Delta MBN$ и $\Delta MBC \sim \Delta MAN$ по 2-м углам $\Rightarrow$

$$\frac{MD}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{AD}{BN} \text{ и } \frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MC} = \frac{NA}{CB} \Rightarrow$$

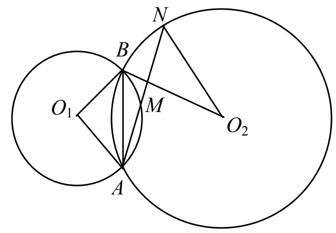
$$\Rightarrow \frac{MD}{MN} = \frac{MN}{MC} \Rightarrow MN = \sqrt{MD \cdot MC}\ .\ \text{Ч.т.д.}$$

87.

а)



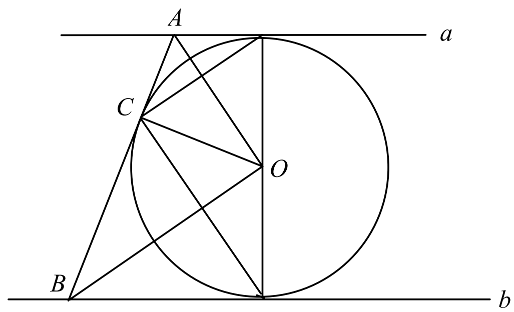
б)



$\angle BAM$ и $\angle BAN$ либо совпадают, либо являются смежными $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BO_1M = \angle BO_2N$ (центральные) $\Rightarrow \dfrac{BM}{BN} = \dfrac{R_1}{R_2}$.

88.



ΔAOB — прямоугольный, $CO = R \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = \sqrt{m^2 + R^2}$; $BO = \sqrt{n^2 + R^2}$ $\Rightarrow AB = \sqrt{m^2 + n^2 + 2R^2} = (m + n) \Rightarrow$

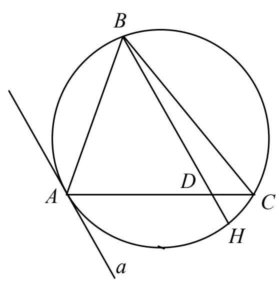
$\Rightarrow m^2 + n^2 + 2R^2 = m^2 + n^2 + 2mn \Rightarrow R = \sqrt{mn} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ расстояние между a и b, равное $2R$, равно $2\sqrt{mn}$.

89.

Треугольники подобны $\Rightarrow \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc \Rightarrow$ по теореме Пифагора $a_1{}^2 + b_1{}^2 = c_1{}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow kaa_1 + kbb_1 = kcc_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = cc_1$. Ч.т.д.



90.

В ΔABD и ΔABC:

$\angle BAC$ — общий, $\angle KAB = \angle ACB$, т.к. они опираются на одну дугу, т.к. $a \parallel BD$, то $\angle KAB = \angle ABD$ (как внутренние накрест лежащие) $\Rightarrow$ $\angle ABD = \angle ACB \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD$. Ч.т.д.

Вписанные и описанные многоугольники

91. $(2 + 3 + 4)\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 40° \Rightarrow \cup KB = 80°$, $\cup BC = 120°$, $\cup AC = 160°$, т.к. $\angle BAC$, $\angle BCA$, $\angle ABC$ — вписанные $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\cup BC = 60°;\ \angle BCA = \frac{1}{2}\cup AB = 40°;\ \angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC = 80°.$$

92. $\cup AB = 24°51' \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2}\cup AB = 12°25'30'' = \angle BAC$.

Т.к. треугольник равнобедренный $\Rightarrow \angle ABC = 180° - 24°51' = 155°9'$.

93. Проведите перпендикуляр к прямой, равный высоте. Затем постройте медиану. Через точку ее пересечения с прямой проведите перпендикулярную прямую. Найдите точку пересечения этой прямой и биссектрисы. Затем проведите серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этой точке и вершине треугольника. Проведите окружность с центром в точке пересечения серединного перпендикуляра с серединным перпендикуляром к стороне треугольника и радиусом, равным расстоянию до вершины треугольника. Точки пересечения окружности с прямой будут другими вершинами треугольника.

94.

а) $AB = 20$ см, $BC = 21$см.

По теореме Пифагора: $AC = 29$ см $\Rightarrow 2R = 29 \Rightarrow R = 14{,}5$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 210$ см^2.

$$S_\Delta = r^2 + \frac{1}{2}(20 - r)\cdot r + \frac{1}{2} r \cdot 29 + \frac{1}{2} r(21 - r) = 210$$

$2r^2 + 20r - r^2 + 29r + 21r - r^2 = 420$; $r = 6$см.

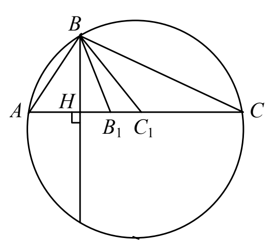
б) 40 и 30 см, решаем аналогично а)

$R = 25$см, $r = 10$см.

95. AC — диаметр окружности, т.к. $\angle ABC = 90°$;

по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 25 \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = 12{,}5$см.

96.

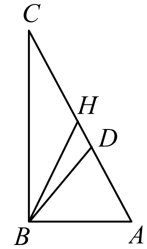


ΔABC — прямоугольный (AC — диаметр) $\Rightarrow \angle ABC = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABH = 22°30' \Rightarrow \angle BAC = 67°30' \Rightarrow \angle BCA = 22°30'$.

97.

BD — биссектриса; $AH = HC = BH = R$ (описываем окружности) $\Rightarrow \angle ABH$=55° $\Rightarrow \angle HAB = 55° \Rightarrow \angle ACB = 35°$.



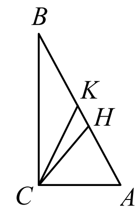
98.

$AK = AB = CK = R$

CH — биссектриса $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACH = 45° \Rightarrow \angle ACK = \angle CAB = 52° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 38°$.

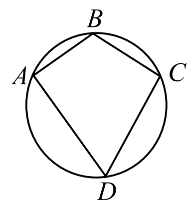


99.

1) Пусть $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle ADC = 4\alpha$, $\angle BAD = 3\alpha$.

Т.к. $ABCD$ — вписанный $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \angle ABC = 60°$; $\angle BAD = 90°$; $\angle ADC = 120°$; $\angle BCD = 90°$.



2) Пусть $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle BAD = 4\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180° = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 36° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 72°$, $\angle ADC = 108°$, $\angle BAD = 140°$ и

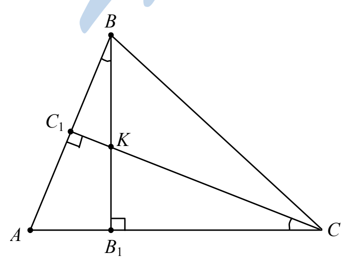
$\angle BCD = 180° - \angle BAD = 36°$.

3) Пусть $\angle ABC = 3\alpha$, $\angle ADC = 4\alpha$, $\angle BAD = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180° =$

$= 7\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{7} \Rightarrow \angle ABC = \frac{540°}{7}$, $\angle ADC = \frac{720°}{7}$, $\angle BAD = \frac{360°}{7}$, и

$\angle BCD = 180° - \angle BAD = \frac{900°}{7}$.

100.



Доказать: A, B_1, K, C_1 — лежат на одной окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB_1KC_1$ — описанный четырехугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сумма противоположных углов — по 180°

$\angle AC_1C = \angle AB_1B = 90°$ — по условию $\Rightarrow \angle AC_1C + \angle AB_1B = 180°$

$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$ ($\angle B_1 = \angle C_1 = 90°$, $\angle A$ — общий) $\Rightarrow \angle ABB_1 = \angle ACC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle B_1KC = 90° - \angle ACC_1$ и $\angle BAC = 90 - \angle ACC_1 \Rightarrow \angle BAB_1 = \angle B_1KC$;

$\angle C_1KB_1 = 180° - \angle B_1CH \Rightarrow \angle BAB_1 + \angle C_1KB_1 = \angle BAB_1 + 180° - \angle BAB_1 = 180° \Rightarrow$

суммы противоположных углов равны $\Rightarrow$ можно описать окружность.

Геометрические неравенства

101. Пусть в ΔABC $AB = AC$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, AA_1 и BB_1 — медианы.

$B_1D \perp BC \Rightarrow CD = \frac{a}{4}$, $BD = \frac{3a}{4} \Rightarrow B_1D = \frac{AA_1}{2} = \frac{a}{4 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$;

$\angle B_1BD = \beta$ при возрастании α уменьшается $\Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 = 2B_1D = 2BB_1 \cdot \sin\beta$, $\alpha = 60° \Rightarrow \beta = 30°$, $AA_1 = BB_1$;

если $\alpha < 60°$, то $AA_1 > BB_1$.

102. $0 \le \alpha \le 90°$, $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$

По формуле $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \le \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \le 1$, что истинно.

103. m_a, m_b — медианы $\Rightarrow m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$;

$$m_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 \Rightarrow \frac{m_b^2}{m_a^2} = \frac{a^2 + \frac{b^2}{4}}{\frac{a^2}{4} + b^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^2 + b^2}{4a^2 + 16b^2}\right) > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m_b}{m_a} > \frac{1}{2},$$

аналогично, $\frac{m_a}{m_b} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m_a}{m_b} < 2$. Ч.т.д.

104.

$$\cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 - l_c^2}{2a\left(\frac{ca}{a+b}\right)} \Rightarrow$$

$$l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}\left((a+b)^2 - c^2\right) = \frac{2abp}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = p\left(\left(1 - \frac{c}{a+b}\right)\frac{2ab}{a+b} + \left(1 - \frac{b}{a+c}\right)\frac{2ac}{a+c} + \left(1 - \frac{a}{b+c}\right)\frac{2bc}{b+c}\right)$$

Т.к. $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$ (аналогично для других сторон)
$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p\,((a + b - c) + (a + c - b) + (b + c - a)) = p^2$.

105. $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = pr \Rightarrow r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$.

Известно, что $(p - a)(p - b)(p - c) \le \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow r \le \frac{p}{3\sqrt{3}} \Rightarrow S = r{\cdot}p \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

106. По формуле Герона $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) = \frac{h^2a^2}{4}$;
$a^2 \ge a^2 - (b - c)^2 = 4(p - b)(p - c) \Rightarrow$
$\Rightarrow h_A = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}} \le \sqrt{p(p-a)}$.

107. см. задачу 104.
$l_a^2 = \frac{2bcp}{(p+c)^2}(b + c - a) = \frac{4bc}{(p+c)^2}\ p(p - a)$.
Т.к. $4bc \le (b + c)^2 \Rightarrow l_a^2 \le p(p - a)$.

108. $S_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \le \frac{bc}{2}$

Т.к. $bc \le \frac{b^2+c^2}{2}$ (неравенство Коши) $\Rightarrow S \le \frac{b^2+c^2}{4}$.

109. $S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b+c}$;

$R = \frac{c}{2} \Rightarrow R + r = \frac{(a+b)^2 + c(a+b)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} = \sqrt{2S}$.

Разные задачи

110.
$A_1B = A_1C$; $B_1A_1 = A_1C_1 \Rightarrow B_1B = CC_1$, $CB_1 = CB + BB_1$,
$\overline{C_1B} = \overline{BC} + \overline{CC_1} \Rightarrow \overline{CB_1} = \overline{C_1B}$

111. $\overline{MA} + \overline{AG} = \overline{MG}$; $\overline{MB} + \overline{BG} = \overline{MG}$;

$\overline{MC} + \overline{CG} = \overline{MG} \Rightarrow \overline{MG} = \frac{1}{3}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) + (\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}) =$

$= \frac{1}{3}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})$, т.к. $\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = 0$.

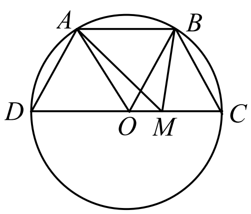
112.

Пусть O — произвольная точка плоскости $\Rightarrow$ из задачи 111:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(OA + OB + OC);\ \overline{OM_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}\right)$$

$$\overline{OM_1} - \overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC}\right)$$

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}\right).$$



113. $AB \| CD$, $AM^2 + BM^2$
из ΔAOB и ΔBOM по теореме косинусов:
$BM^2 = OM^2 + R^2 - 2OM \cdot R \cdot \cos BOM$
$AM^2 = OM^2 + R^2 - 2OM \cdot R \cdot \cos AOM$
$AB \| CD \Rightarrow \angle BAO = \angle AOC \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos BOM = -\cos AOM \Rightarrow$
$\Rightarrow BM^2 + AM^2 = 2(OM^2 + R^2)$. Ч.т.д.

114. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC};\quad \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC};$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC};$$

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)(AB^2 + BC^2 - AC^2)(AC^2 + BC^2 - AB^2)}{8AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2} =$$

$= (AB^4 - AC^4 - BC^4)(AC^2 + BC^2 - AB^2)$.

Подставим полученные выражения в равенство (*):

$$\frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)^2}{4AB^2 \cdot AC^2} + \frac{(AB^2 + BC^2 - AC^2)^2}{4AB^2 \cdot BC^2} + \frac{(AC^2 + BC^2 - AB^2)^2}{4AB^2 \cdot BC^2} +$$

$$+ \frac{(AB^4 - AC^4 - BC^4)(AC^2 + BC^2 - AB^2)}{4AB^2AC^2BC^2} =$$

считаем числитель:
$(AB^4 + AC^4 + BC^4 + 2AB^2AC^2 - 2AB^2BC^2 - 2AC^2BC^2)BC^2 +$
$+ (AB^4 + BC^4 + AC^4 + 2AB^2BC^2 - 2AB^2AC^2 - 2BC^2AC^2)AC^2 +$
$+ (AB^4 + BC^4 + AC^4 + 2AC^2BC^2 - 2BC^2AB^2 - 2AC^2AB^2)AB^2 +$
$+ (AB^4AC^2 + AB^4BC^2 - AB^6 - AC^6 - BC^2AC^4 + AB^2AC^4 - BC^4AC^2 -$

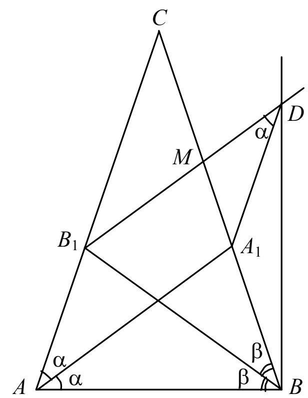
$- BC^2 + AB^2BC^4) = 4AC^2BC^2AB^2 \Rightarrow \dfrac{4AC^2BC^2AB^2}{4AC^2BC^2AB^2} = 1$. Ч.т.д.

115. Если $\angle A > \angle A_1$, то $BC > B_1C_1$
По теореме косинусов из ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \approx \cos A$
$B_1C_1{}^2 = A_1B_1{}^2 + A_1C_1{}^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos A_1$
$BC^2 - B_1C_1{}^2 = 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos A_1 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 2A_1B_1 \cdot A_1C_1(\cos A_1 - \cos A)$,

т.к. $\angle A > \angle A_1 \Rightarrow \cos A_1 > \cos A \Rightarrow BC^2 - B_1C_1^{\,2} > 0 \Rightarrow BC > B_1C_1$.

116. Аналогична задаче 115.

117.



см. формулы задачи 104.

длина биссектрисы равна: $AA_1^{\,2} = \dfrac{2bcp}{b+c}\left(1 - \dfrac{a}{b+c}\right)$; $BB_1^{\,2} = \dfrac{2acp}{c+a}\left(1 - \dfrac{b}{a+c}\right)$

где a, b, c — стороны треугольника и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

если $AA_1 = BB_1$, то $\dfrac{b}{b+c}\left(1 - \dfrac{a}{b+c}\right) = \dfrac{a}{a+c}\left(1 - \dfrac{b}{a+c}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{a+c} = ab\left[\dfrac{1}{(b+c)^2} - \dfrac{1}{(a+c)^2}\right] \Rightarrow \dfrac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)} = \dfrac{ab(a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2}$,

и учитывая, что a, b, и c — стороны треугольника и $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ положительны $\Rightarrow a = b$ (чтобы достичь равенства). Ч.т.д.

118. $\Delta ABC = \Delta EDC \Rightarrow AC = CE$ и по теореме синусов из ΔABC

$FC = CE = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

$\angle BCA = \angle DCA = \dfrac{180 - \alpha}{2} \Rightarrow \angle ACE = 2\alpha - 180°$.

По теореме косинусов из ΔACE:
$AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos(2\alpha - 180°) =$

$= 4a^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\,(1 - \cos(2\alpha - 180°)) \Rightarrow AE = 2d\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha \cdot \sqrt{2} = 0$;

$\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Решая уравнение, находим, что $\alpha = \frac{3\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{5} = 108° \Rightarrow$ пятиугольник — правильный.

119. $BCFC_1$ — прямоугольник, C_1C — диаметр, т.к. $\angle C_1BC = 90°$, $\angle BOC = 45° \Rightarrow$ по теореме косинусов:

$a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 45° = 2R^2 - \sqrt{2}R^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow C_1C = \frac{2a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$;

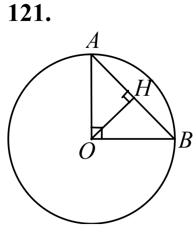
по теореме Пифагора

$BC_1{}^2 = \frac{4a^2}{2-\sqrt{2}} - a^2 = \frac{2a^2 + a^2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow BC_1 = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BCFC_1} = a^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

120. Середина искомой хорды совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на другую сторону угла. Задача не имеет решения, если расстояние от основания перпендикуляра до вершины угла меньше половины длины хорды.

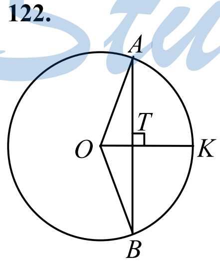
121.



По теореме Пифагора $R^2 = 32 \Rightarrow R^2 = 4\sqrt{2}$;

$AO = OB \Rightarrow AH = HB = 4 \Rightarrow$ из ΔAOH: $OH = \sqrt{32-16} = 4$ см.

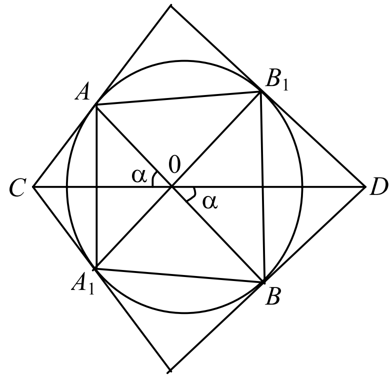
122.



Из ΔATO: $\sin OAT = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OAT = 30° = \angle OBA \Rightarrow \angle AOB = 120°$.

123. $OM = R = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $l_{\text{окр}} = 2\pi R = 10\pi$.

124.



$AB \cap CD = O$ — допустим.

По теореме синусов из ΔOAC: $\dfrac{OC}{\sin OAC} = \dfrac{AC}{\sin\alpha}$.

Аналогично: $\dfrac{OD}{\sin OBD} = \dfrac{BD}{\sin\alpha}$.

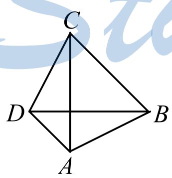
Т.к. $\sin OBD = \sin(\pi - OAC) = \sin OAC \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{AC}{BD}$;

AC, A_1C, BD, B_1D — касательные $\Rightarrow$

$AC = A_1C_1$; $BD = B_1D \Rightarrow \dfrac{A_1C}{B_1D} = \dfrac{AC}{BD}$;

$CD \cap A_1B_1 = K$ и т.к. делит CD в отношении $\dfrac{AC}{BD} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка K совпадает с точкой $O \Rightarrow CD$ проходит через точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника. Аналогично, доказываем с другой диагональю.



125. $\angle BAC$ — меньший угол, сторона AC проходит между сторонами угла BAD (иначе — противоречие выпуклости четырехугольника) $\Rightarrow AC$ пересекает BD с концами на его сторонах.
Аналогично доказываем, что $BD \cap AC \Rightarrow AC \cap BD$. Ч.т.д.

126. Концы любой стороны четырехугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей противолежащею ей сторону. В той, где находится точка пересечения диагоналей.

127. $S_{\text{п-ка}} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 24$ см^2.

128. Пусть дан ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$, $\angle B = 75°$.
CO — медиана. $S(ABC) = S(CBO) + S(CAO) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \frac{c^2}{4} \cdot \sin 150° = \frac{c^2}{8}$ (т.к. $\angle BOC = 30°$, $\angle AOC = 150°$,

а $CO = \frac{c}{2}$).

129. $OM = \sqrt{144 + 25} = 13$ см;

а) AB — медиана $\Rightarrow AB = \frac{3}{2} R = \frac{39}{2}$ см;

из ΔABC: $\sin 60° = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{39}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 13\sqrt{3}$ см;

$S_{\Delta} = 13\sqrt{3} \cdot 13\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{507\sqrt{3}}{4}$ см^2;

б) BD — диаметр $\Rightarrow BD = 26$ см;

$S_{кв} = \frac{1}{2} BD \cdot AC =\cdot 26 \cdot 26 = 338$ см^2;

в) $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 72° = \frac{169}{2} \sin 72° \Rightarrow S_{5\text{-ка}} = 5 \cdot \frac{169}{2} \sin 72° \approx 402$ см^2.

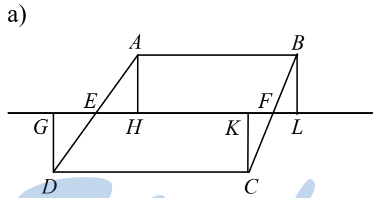
130. $OM = R = \sqrt{9 + 16} = 5$ см. $S_{пр} = \pi R^2 = 25\pi$ см^2.

131. EF — средняя линия $ABCD$;

$DC_1 = AH = a$, $CK = BL = b$.

И пусть $EC_1 = EH = x$, $EF = l$, $FK = FL = y$;

а)



$S_{ABFE} = (l + y - x)\frac{a+b}{2} - \frac{by}{2} + \frac{ax}{2}$;

$S_{CDEF} = (l - y + x)\frac{a+b}{2} + \frac{by}{2} - \frac{ax}{2} \Rightarrow$

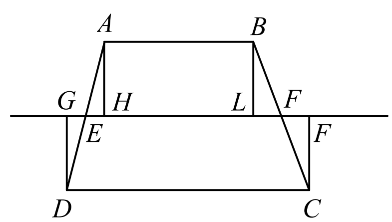
$\Rightarrow S_{1ABFE} - S_{2CDEF} = (a + b)(y - x) - by + ax = ay - bx$;

если $S_1 = S_2$, то $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow AD \| BC$;

б) $S_{1ABFE} = (l - y - x)\frac{a+b}{2} + \frac{by}{2} + \frac{ax}{2}$;

$S_{2CDEF} = (l + y + x)\frac{a+b}{2} - \frac{by}{2} - \frac{ax}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1 - S_2 = (a + b)(y + x) - by - ax =$



$= ay + bx > 0 \Rightarrow$

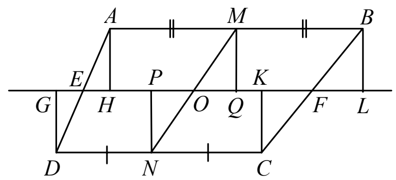
$\Rightarrow$ площади не одинаковые.

132. Введем обозначения аналогично задаче 131.

$MQ = NP = \dfrac{a+b}{2}$; $C_1 = PK$, $HQ = QL$.

$EMFN$ — параллелограмм.

а)



$PO = OQ = \dfrac{x+y}{2}$; $OE = OF = \dfrac{1}{2}$;

$S_{AMOF} = HQ\left(\dfrac{AH+M}{2}\right) + \dfrac{EH \cdot AH}{2} - \dfrac{OQ \cdot MQ}{2} =$

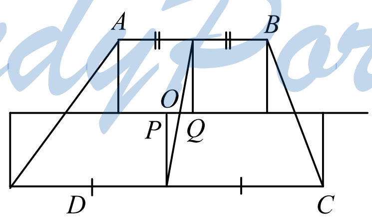
$= \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{l+x+y}{6}\right)^2 + \dfrac{a+b}{4}\left(\dfrac{l}{2} - x\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3a+b}{4} - \dfrac{bx}{4} + \dfrac{ay}{4} = \dfrac{AH}{2}EQ + \dfrac{MQ}{2}HO$,

$S(CFON) = PK\dfrac{KC+NP}{2} - \dfrac{OP \cdot PN}{2} + \dfrac{KF \cdot CK}{2} =$

$= \dfrac{KC}{2}PF + \dfrac{NP}{2}OK = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{l+x+y}{2} + \dfrac{a+b}{4}\left(\dfrac{l}{4} - 4\right) = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{a+3b}{4} + \dfrac{bx}{4} - \dfrac{ax}{4}$,

откуда $S(AMOF) + S(CFON) - \dfrac{l(a+b)}{2} = \dfrac{1}{2}(ABCD)$, т.к. по задаче 131 $S(ABCD) = l(a+b)$. Ч.т.д.

б)

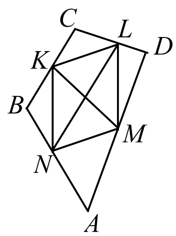


$S_{CFON} = PK\left(\dfrac{KC+NP}{2}\right) - \dfrac{OP \cdot PN}{2} + \dfrac{KF \cdot CK}{2} =$

$= \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{l+x+y}{2} + \dfrac{a+b}{4}\left(\dfrac{l}{2} - y\right) = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{a+3b}{4} + \dfrac{bx}{4} - \dfrac{ay}{4}$.

Складывая, получаем $S_1 + S_2 = \frac{l(a+b)}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, т.к. $S_{ABCD} = l(a + b)$ (см. задачу 131). Ч.т.д.

133.



$\Delta NBK \sim \Delta ABC$ ($\angle B$ — общий, $\frac{AB}{NB} = \frac{BC}{BK} = \frac{1}{2}$)$\Rightarrow$

$\Rightarrow NK \| AC$.

Аналогично: $MS \| AC$; $MN \| BD \| KS$.

Также очевидно: $NK = MS$; $NM = KS \Rightarrow NMKS$ — параллелограмм.

Т.к. $NK \| AC \Rightarrow \angle AOB = \angle MNK$,

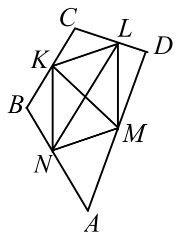
$S_{\text{пар}_2} = MN \cdot NK \cdot \sin MNK$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin AOB$;

т.к. $AC = 2NK$ и $BD = 2NM \Rightarrow S_{A\text{-}D_1} = 2NK \cdot MN \cdot \sin AOB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} S_1$. Ч.т.д.

134.



$MN = 5$см, $KS = 9$см, $BD = 5$см;

$\Delta BKM \sim \Delta ABC$ ($\angle B$ — общий, $\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BM}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow KM \| BD \| MS$ и $KM = NS$ и $KN = MS \Rightarrow$

$\Rightarrow KNSM$ — параллелограмм.

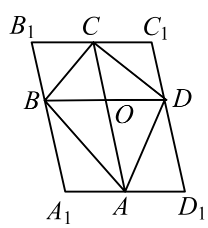
$MS = KN = \frac{1}{2} BD = 2{,}5$см $\Rightarrow$ в ΔKON по теореме косинусов:

$KN^2 = KO^2 + ON^2 - 2KO \cdot ON \cdot \cos KON$;

$\cos KON = \frac{1{,}5^2 + 2{,}5^2 - 2{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3 \Rightarrow \sin KON \approx 0{,}95 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{KMSN} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0{,}95 \approx 7 \Rightarrow$ из задачи 133: $S_{ABCD} = 2 \cdot 7 = 14$ см^2.

135.



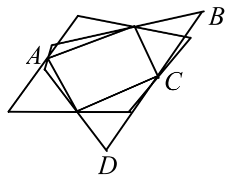
$A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм, $B_1C_1 \| BD \Rightarrow \angle CC_1D = \angle COD$;

$S_{\text{пар}} = B_1C_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin CC_1D$; $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin CC_1D$;

BB_1C_1D — параллелограмм $\Rightarrow BD = B_1C_1$, $AC = C_1D_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\text{пар}}}{S_{ABOD}} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow S_{\text{пар}} = 2S_{ABCD}$.

136.



из задачи 133 следует, что площади этих четырехугольников равны $2S_{ABCD}$ $\Rightarrow$ равны между собой.

137. а) $KM = 6$, $KL = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $LM = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$;

KL: $y = x \Rightarrow \angle LKM = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{KLM} = \dfrac{1}{2} KL \cdot KM \cdot \sin 45° = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 12.$

б) $ABCD$ — квадрат $\Rightarrow S = AB^2$

$AB = \sqrt{9+16} = 5 \Rightarrow S = 25.$

в) $PQRT$ — квадрат. $S = QR^2$

$QR = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow S = 25.$

г) $ABCD$ — трапеция;

$AB = AD = 4$, $DC = 6 \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}(AB + DC) \cdot AD = \dfrac{1}{2}(4 + 6) \cdot 4 = 20.$

д) $BE = 5$, $BCDE$ — трапеция $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{тр}} = \dfrac{1}{2}(BE + CD) \cdot CH = \dfrac{1}{2}(3 + 6) \cdot 2 = 9;$

$S_{ABE} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BE = \cdot 3 \cdot 6 = 9 \Rightarrow S_{ABCDE} = 9 + 9 = 18.$

138. Угол 10-угольника равен $\dfrac{(n-2)180}{10} = \dfrac{8}{10} \cdot 180 = \dfrac{8}{5}k$ ($k = 90°$);

5-угольника $= \dfrac{6}{5}k \Rightarrow \dfrac{8k}{5}x + \dfrac{6k}{5}y = 4k \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 2y = 10$ (x — число 10-угольников; y — 5-угольников, сходятся в одной точке). Подбором найдем целые значения x и y: $x = 1$, $y = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ В одной точке сходятся 1 десятиугольник и 2 пятиугольника $\Rightarrow$ при обходе пятиугольника около одной стороны лежит десятиугольник, около 2-й — пятиугольник, 3-ей — десятиугольник, 4 — пятиугольник, 5 — десятиугольник $\Rightarrow$ к 1 и 5 сторонам прилегают пятиугольники, что противоречит условию $\Rightarrow$ невозможно.

139. R — радиус З. шара; r — радиус ф. мяча; $l_{ш} = 2\pi R$; $l_{мяча} = 2\pi r$

стало: $2\pi R + 1$; $2\pi r + 1 \Rightarrow R' = \frac{2\pi R + 1}{2\pi}$; $r' = \frac{2\pi r + 1}{2\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow R' - R = \frac{2\pi R + 1}{2\pi} - R$; $r' - r = \frac{2\pi r + 1}{2\pi} - r$

$R' - R = \frac{1}{2\pi}$; $r' - r = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow$ зазоры одинаковы.

140. Возьмем 3 произвольные точки на окне.
$\Delta A_1B_1C_1$ определяет единственную описанную около него окружность; измерив стороны $\Delta A_1B_1C_1$ найдем радиус этой окружности и вырежем стекло.

141. Если попеременно укладывать в длину трапеции с разными основаниями, то в ряд уместится 10 трапеций, т.к. $BH = 10$, то в ширину получим 8 рядов.
И остается фанера размером 10×80 см, где поместится еще 3 трапеции $\Rightarrow$ всего трапеций $10 \cdot 8 + 3 = 83$ штуки.

142. $S_{поля} = 24$ м^2.

$S_{плитки} = 6 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 60^\circ = \frac{6 \cdot 400}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$

$\frac{S_{поля}}{S_{пл}} = \frac{240000}{600\sqrt{3}} = \frac{400\sqrt{3}}{3}$

$5\% = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ плитки нужно: $\frac{420\sqrt{3}}{3} \approx 243$ штуки.

143. $S_6 = 6 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$;

MK — медиана $\Rightarrow MK = \frac{3}{2}R$;

$\sin A = \frac{MK}{AM} \Rightarrow AM = \frac{MK \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{3R}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3R^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_ш}{S_\Delta} = \frac{2}{1} \Rightarrow$ треугольных плиток потребуется в 2 раза больше.

144. $S_1 = \pi R^2 = 100\pi$ см^2;
$S_2 = \pi r^2 = 56{,}25\pi$ см^2;

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{100}{56{,}25} \approx 1{,}8$ раза.

145. $S = \pi R^2 = 5041\pi$ мм^2;

$S_2 = \frac{2}{3}S = \frac{10082\pi}{3}$ мм^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{10082}{3}} \approx 58$ мм $\Rightarrow D_1 = 116$ мм $\Rightarrow$

$\Rightarrow 142 - 116 = 26$ мм — уменьшился диаметр.

146.

$S_{сег} = \pi R^2 = \pi 1{,}5625$ мм^2 $\approx 4{,}9$ мм^2 $\Rightarrow$ нагрузка: $4{,}9 \cdot 65 = 319$ кг.

147. $S_{двора} = 110 \cdot 150 = 16500$ м^2;

$S_{цехов} = 4 \cdot 40 \cdot 10 = 1600$ м^2;

$S_{складов} = 20 \cdot 20 \cdot 10 = 4000$ м^2.

Должно остаться расстояние (R) не менее 5 м по периметру помещений и забора, т.е.

$S_{цехов} + R = 4 \cdot 50 \cdot 20 = 4000$ м^2. $S_{скл} + R = 10 \cdot 30 \cdot 30 = 9000$ м^2.

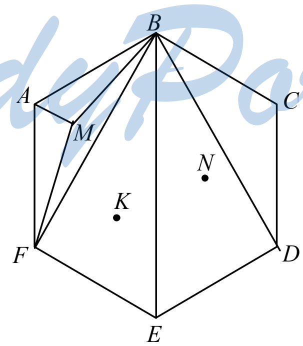
$S_{бенз} + R = \pi \cdot 15^2 \approx 707$ м^2.

$S_{забора}$=16500–(100·140)=2500⇒свободного места=16500–16207=293 м^2, в любой точке которого можно расположить центр клумбы.

148. Если бы такая прямая существовала, то число вершин по обе стороны от нее было одинаково, а т.к. многоугольник имеет 1001 угол ⇒ это невозможно.

149. Возьмем произвольно 5 точек A, B, C, D, E. Докажем, что $BCDA$ — выпуклый. По определению выпуклости, прямая, проведенная через две соседние вершины, оставляет многоугольник в одной полуплоскости. Проведя прямые AB, BC, CD и AD, убедимся в истинности утверждения.

150.



а) Если эти точки составляют выпуклый шестиугольник, то ответ очевиден, т.к. сумма всех сторон углов 720° ⇒ хотя бы один из них ≥ 120°.

б) если какие-нибудь 3, 4 или 5 точек лежат внутри этого шестиугольника. Проведем диагонали BF, BE, BD. Точка $M \in (ABF)$. Проведем прямые AM, MB, MF. Сумма этих углов $360° \Rightarrow \angle BMF$ (например) $\geq 120°$. Ч.т.д.

151. Найдем сумму внутренних углов треугольника. Если треугольник имеет вершину в данной точке, то углы в сумме составляют 360°. Т.к. точек 30, то сумма соответствующих углов равна $360° \cdot 30 = 10800°$.

Сумма углов 100-угольника: $180(100 - 2) = 17640° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Сумма внутренних углов треугольника:

$10800 + 17640 = 28440° \Rightarrow$ число треугольников: $\dfrac{28440}{180} = 158$ штук.

152. Данные точки лежат внутри и в вершинах некого n-угольника, где $n \leq 1000$. Проведенные отрезки разбивают этот n-угольник на ряд треугольников, либо совпадают с его сторонами. Число внутренних вершин треугольника: $1000 - n$. Общая сумма всех углов треугольника:

$180(n - 2) + 360(1000 - n)$.

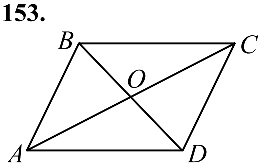
Число треугольников: $(n - 2) + 2(1000 - n) = 1998 - n$.

Число сторон: $5994 - 3n$.

Общее число k отрезков равно:

$n + \dfrac{1}{2}(5994 - 4n) = 2997 - n$, т.к. $1000 \geq n \geq 3$, то $1997 \leq K \leq 2994$.

153.



$S_{ABD_1} = S_{DBC_2}$;

$S_{ACD_3} = S_{ABC_4}$;

$S_1 + S_4 = S_1 + S_3$

$2S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOD} = S_{BOC} + 2S_{COD} + S_{AOD}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \; S_{ABO} = S_{COD} \\ \Rightarrow \; S_{AOD} = S_{BOC} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} AO \cdot BO = OC \cdot OD \\ BO \cdot OC = AO \cdot OD \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{OD}{BO} \\ \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{DO} \end{array} \Rightarrow$$

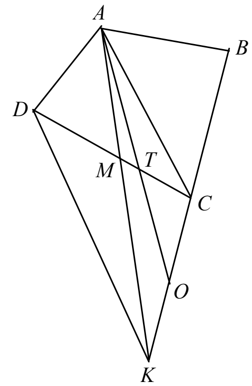
$\Rightarrow BO = OD$ и $AO = OC \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BOC = \Delta DOA \Rightarrow (BC = AD) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBD = \angle BDA$; $\angle BCD = \angle CAD \Rightarrow BC \| AD$ и $BC = AD \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.

154.



Проведем прямую $DK \| AC \Rightarrow DACK$ — трапеция $\Rightarrow$
$\Rightarrow S(AMD) = S(KMC) \Rightarrow S(DABC) = S(KAB) \Rightarrow$ точка O должна совпадать с точкой K.

155. Выберем треугольник с наибольшей площадью в данных вершинах $S \le 1$. Через каждую вершину проведем прямую, параллельную противолежащей стороне.

S_{Δ}, образованного этими прямыми, $4S \le 4$.

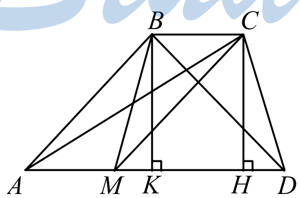
Все треугольники с заданным основанием b имеют площадь не большую чем S и заключены в пространстве между двумя прямыми, параллельными основанию и отстоящими от него на $h = \dfrac{2S}{a}$.

Искомый треугольник покрывает все n точек.

156. $S = \pi r^2$; $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ геолог выйдет из леса, если будет идти по окружности радиуса $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

157.



$AC^2 - BD^2 = AB^2 + CD^2$;

$$\left.\begin{aligned} AC^2 &= H^2 + (2a + x)^2 \\ BD^2 &= H^2 + (a + x)^2 \\ AB^2 &= H^2 + (a + x)^2 \\ CD^2 &= H^2 + x^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$H^2 + (2a + x)^2 - H^2 - (a + x)^2 = H^2 + (a + x)^2 + H^2 + x^2;$
$4a^2 + 4ax + x^2 - 2a^2 - 4ax - 2x^2 - 2H^2 - x^2 = 0;$
$2a^2 - 2H^2 - 2x^2 = 0;$

$x^2 = a^2 - H^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - H^2}$;

$\Rightarrow MD = a \pm 2\sqrt{a^2 - H^2}$;

$\Rightarrow AD = 2a + 2\sqrt{a^2 - H^2}$;

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BK = \frac{1}{2}(3a \pm 2\sqrt{a^2 - H^2}) \cdot H$

1) $a = 5$ см, $H = 4$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(15 + 6) \cdot 4 = 42$ см^2.

2) $a = 13$см, $H = 12$см $\Rightarrow$

$S_1 = \frac{1}{2}(39 + 10) \cdot 12 = 294$ см^2,

$S_2 = \frac{1}{2}(39 - 10) \cdot 12 = 174$ м^2.

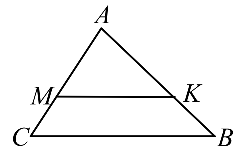
Задача имеет два решения, если $\frac{a\sqrt{2}}{2} < H < a$, при этом a должно быть меньше $R\sqrt{3}$, где R — радиус описанной окружности около $MBCD$.

Контрольные работы

К-1.

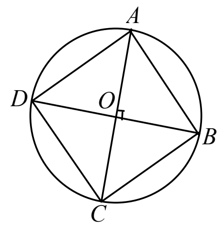
В-1.

1.



$KM \| BC \Rightarrow \angle AKM = \angle ABC$; $\angle AMK = \angle ACB \Rightarrow$
$\Rightarrow$ треугольники подобны по двум углам.
$P_{AKM} = 15$ см;
$\frac{AK}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{KM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 3AK$, $AC = 3AM$, $BC = 3KM \Rightarrow$
$\Rightarrow AB + AC + BC = 3(AK + AM + KM) = 3 \cdot 15 = 45$ см.

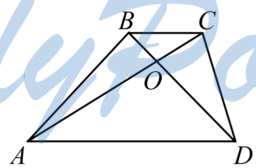
2.



$ABCD$ — квадрат, т.к. угол между AC и BD равен 90° и все углы равны 90° и стороны равны.
$AB = BC = CD = AD = 8$см; $AO = OB \Rightarrow$ по теореме Пифагора
$2AO^2 = 64 \Rightarrow AO^2 = 32 \Rightarrow AO = 4\sqrt{2}$ см $\Rightarrow AC = BD = 8\sqrt{2}$ см.

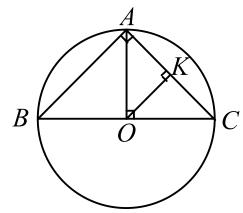
В-2.

1.



$AD \| BC \Rightarrow \angle BCO = \angle OAD$, $\angle CBO = \angle ODA \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta DOA$ по 2-м углам $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = \frac{AD}{2} = 6$см.

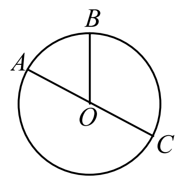
2.



$\angle BAC = 90° \Rightarrow BC$ — диаметр $\Rightarrow$
$\Rightarrow BAC$ — прямоугольный равнобедренный треугольник
Аналогично с ΔACB.
$AK = KO = KC = 4$см $\Rightarrow AC = 8 = AB$; $AO = OC$; по теореме Пифагора $2AO^2$
$= 64 \Rightarrow AO = 4\sqrt{2}$ см $\Rightarrow BC = 2AO = 8\sqrt{2}$

В-3.

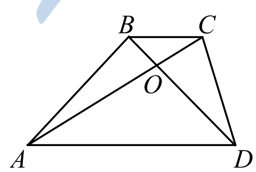
1. $AB \| MN \Rightarrow \angle ABC = \angle MNC$, $\angle BAC = \angle NMC \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNC$ по 2-м углам,
т.к. $AM : MC = 1 : 1 \Rightarrow AM = 7$см $\Rightarrow AC = 14$см, $BC = 12$см, $AB = 8$см.
2.



$\smile AB : \smile BC : \smile AC = 1:2:3$;
$\angle AOB = x \Rightarrow \angle BOC = 2x$, $\angle AOC = 3x \Rightarrow 6x = 360°$, $x = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow AC$ — диаметр $\Rightarrow ABC$ — прямоугольный треугольник
($\angle B = 90°$).
$AO = OC = OB = 10$ см $\Rightarrow$ т.к. ΔAOB — равносторонний $\Rightarrow AB = 10$см, $AC =$ 20см, по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 10\sqrt{3}$ см.

В-4.

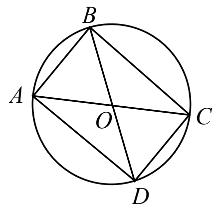
1.



а) $BC \| AD \Rightarrow \angle CBO = \angle BDA$ и $\angle BCO = \angle CAD \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta DOA$ по 2-м углам.
б) т.к. $\Delta COB \sim \Delta AOD \Rightarrow \dfrac{CO}{AO} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow OD = \frac{3OB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ см $\Rightarrow BD = BO + OD = 4 + 6 = 10$см.

2.

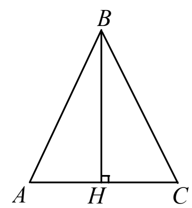


AOB — равнобедренный треугольник;
$ABCD$ — прямоугольник.
Т.к. $AB \| CD$, $BC \| AD$ и все углы равны 90°;
$BO = 4$см $\Rightarrow \angle BOC = 60°$, $BO = OC \Rightarrow BO = OC = BC = AD = 4$см,
$BD = 8$см $\Rightarrow$ по теореме Пифагора
$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow P_{ABCD} = 4 + 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8 + 8\sqrt{3}$ см.

К-2.

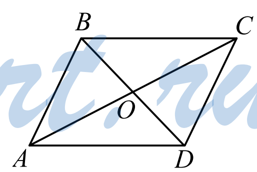
В-1.

1.



$\angle ABC$ — тупой $\Rightarrow AC = 14$ см, т.к. против большей стороны лежит больший угол. По теореме косинусов:
$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{7}{8} \Rightarrow \angle A = \arccos\frac{7}{8}$.

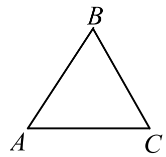
2.



AB — меньшая сторона, т.к. лежит против наименьшего из углов. Из ΔABC по теореме синусов:
$\frac{AB}{\sin 30°} = \frac{AC}{\sin 100°} = \frac{BC}{\sin 50°} \Rightarrow AC = 8\sin 100°$,
$BC = 8\sin 50°$.
Из ΔABD по теореме косинусов:
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 80° = 16 + 64\sin^2 50° \cos 80° \Rightarrow$
$\Rightarrow BD \approx 7{,}9$см.

В-2.

1.

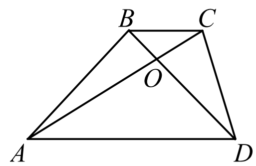


BC — меньшая сторона, т.к. лежит против меньшего угла

по теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin 60^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 40^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \dfrac{BC \cdot \sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} \approx 8{,}1.$

2.



Из ΔACD по теореме синусов

$\dfrac{CD}{\sin 25^\circ} = \dfrac{AD}{\sin ACD} = \dfrac{AC}{\sin CDA} \Rightarrow$

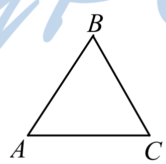
$\Rightarrow \sin ACD = \dfrac{7\sin 25^\circ}{4} \Rightarrow \angle ADC = 155^\circ - \arcsin\left(\dfrac{7\sin 25^\circ}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \dfrac{CD\sin CDA}{\sin 25^\circ} = \dfrac{4\sin\left(155^\circ - \arcsin\left(\dfrac{7}{4}\sin 25^\circ\right)\right)}{\sin 25^\circ} \approx 9$ см.

Аналогично решаем, если BC — бóльшая диагональ.

В-3.

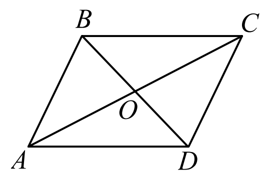
1.



$\angle ABC$ — наибольший, $\angle ACB$ — наименьший, т.к. $AB = 5$см, $AC = 8$см;

$\cos(ABC) = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{25 + 49 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \angle ABC = \arccos\dfrac{1}{7}$.

2.



По теореме косинусов из ΔAOD:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos 70° = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 70° =$
$=50 \Rightarrow AD \approx 7{,}07$см.

Аналогично из ΔABO ($\angle AOB = 110°$),
найдем $AB \approx 9{,}8$см $\Rightarrow$
$\Rightarrow P = 7{,}07 + 7{,}07 + 9{,}8 + 9{,}8 = 33{,}74$ см.

Из ΔABD по теореме синусов: $\dfrac{AD}{\sin B} = \dfrac{BD}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin D}$;

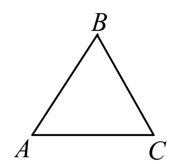
из ΔAOD: $\dfrac{AD}{\sin 70°} = \dfrac{AO}{\sin D} \Rightarrow \sin D = \dfrac{7\sin 70°}{7{,}07} \approx 0{,}93 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin A = \dfrac{BD \sin d}{AB} \approx 0{,}94 \Rightarrow \angle A \approx 71° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - \angle A = 109°$.

В-4.

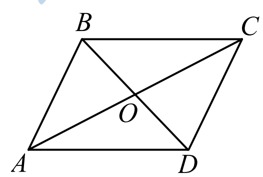
1.



$BC = 5$см (большая сторона), т.к. лежит напротив большего угла.
AB аналогично — наименьшая сторона.

По теореме синусов $\Rightarrow \dfrac{BC}{\sin 80°} = \dfrac{AB}{\sin 30°} \Rightarrow AB = \dfrac{5}{2\sin 80°} \approx 2{,}54$см.

2. см. задачу К-2.В-3 № 2.



К-3.

В-1.

1. По теореме Пифагора $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} \approx 4{,}3$ см;

BM — медиана $\Rightarrow BO = \dfrac{2}{3} BM \approx 2{,}9$ см $= \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ см.

Т.к. шестиугольник вписан в данную окружность $\Rightarrow$ его сторона равна радиусу окружности $\Rightarrow$ равна $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ см.

2. $\cup AB = 2\pi$, $\angle AOB = 120°$

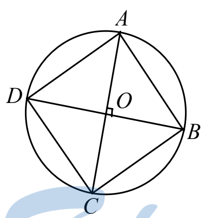
$\cup AB = R \cdot \angle AOB \Rightarrow R = \dfrac{360}{120} = 3$см;

$BO = 3$, BM — медиана $\Rightarrow BM = 4{,}5$ см.

В-2.

1. $R_{\text{окр}} = \dfrac{1}{2} AB = 2$ см.

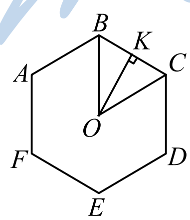
Т.к. $\dfrac{S}{p} = r$, то $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a} = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}a}{6} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ см.



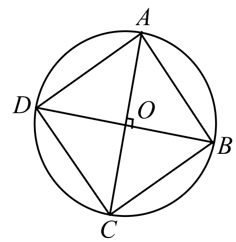
2.
$\cup BC = R \cdot \angle BOC \Rightarrow R = 8$ см;
$ABCD$ — квадрат.
По теореме Пифагора
$AB^2 = 2R^2 = 128 \Rightarrow AB = BC = CD = AD = 8\sqrt{2}$ см.

В-3.

1.



Шестиугольник правильный $\Rightarrow$
$\Rightarrow BC = CO = BO$, где BO и OC — радиусы описанной окружности.

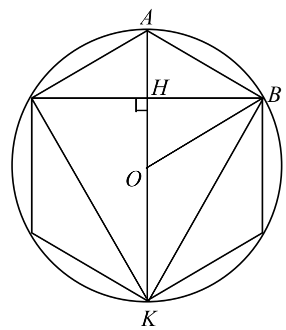


Из ΔBKO по теореме Пифагора $OK = \sqrt{100-25} = 5\sqrt{3}$ см;

$OC = 5\sqrt{3}$ см $\Rightarrow AC = 10\sqrt{3}$ см $\Rightarrow$ по теореме Пифагора

$2AD^2 = 300 \Rightarrow AD = \sqrt{150} = 10\sqrt{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{6}$ см.

2.



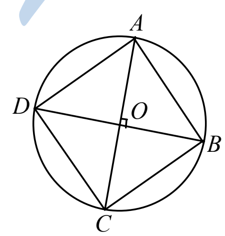
$\cup AB = 3\pi$, $\angle AOB = 60°$, т.к. $AB = OB = AO$ (см. предыдущую задачу)

$\cup AB = R \cdot \angle AOB \Rightarrow R = \dfrac{540}{60} = 9$ см.

KH — медиана и высота, $OK = 9$см $\Rightarrow KH = \dfrac{3}{2} \cdot 9 = 13{,}5$ см.

В-4.

1.



BD — диаметр; из ΔBAD по теореме Пифагора

$BD^2 = 72 \Rightarrow BD = 6\sqrt{2}$ см $\Rightarrow R = 3\sqrt{2}$ см.

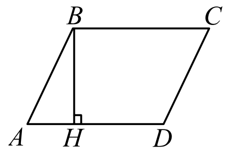
ΔKMN — правильный $\Rightarrow OP = 3\sqrt{2}$ см $\Rightarrow KP = 9\sqrt{2}$ см (т.к. KP — медиана)

$\sin 60° = \dfrac{KP}{KM} \Rightarrow KM = \dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 18\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ см.

2. см. К-3.В-2 задача 2.

К-4.

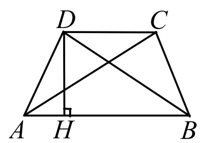
В-1.



1.
$AD \| BC \Rightarrow \angle BAD = 30°$;

а) $S_{\text{пар}} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 5 \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 20$ см^2.

б) $S_{\text{пар}} = BH \cdot AD = 20 \Rightarrow BH = \dfrac{20}{8} = 2{,}5$см.

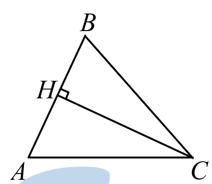


2.
По теореме Пифагора $2AH^2 = 50 \Rightarrow AH = HD = 5$см $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_\Delta = \left(\dfrac{20+12}{2}\right) \cdot 5 = 80$ см^2. $S_{\Delta_1 ADB} = \dfrac{1}{2} DH \cdot AB;$

$S_{\Delta_2 BAC} = \dfrac{1}{2} DH \cdot AB \Rightarrow S_{ABD} = S_{BAC}$.

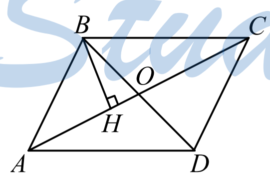
В-2.



1.

$S_\Delta = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dfrac{1}{2} = 7$ см^2;

$S_\Delta = \dfrac{1}{2} CH \cdot AB = 7 \Rightarrow CH = \dfrac{14}{4} = 3{,}5$ см.



2.
$\Delta ABC = \Delta CDA$ ($AB = CD$, $BC = AD$, AC — общая).

$S_{\Delta CAD} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dfrac{1}{2} = 14 \Rightarrow S_{\text{пар}} = 2 \cdot 14 = 28$ см^2.

$S_{ABO} = \dfrac{1}{2} AO \cdot BH;$

$S_{BCO} = \dfrac{1}{2} BH \cdot OC;$

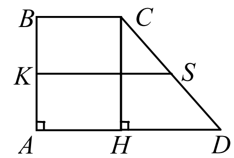
$AO = OC$ по свойству параллелограмма $\Rightarrow S_{ABO} = S_{CBO}$.

В-3.

1. а) $S_{\text{кв}} = AB^2 = 0{,}64 \Rightarrow AB = 0{,}8$ дм $\Rightarrow P_{\text{кв}} = 4AB = 3{,}2$ дм;

б) $R_{кр} = \frac{1}{2}AB = 0{,}4$дм; $S_{кр} = \pi r^2 = 0{,}16\pi$ дм^2.

2.



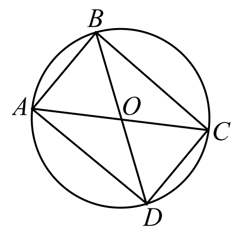
а) $KS = \frac{BC + AD}{2} \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4$см;

$BC = 4$см, $AD = 32$см;

б) $AB{=}CH = 7x{=}28 \Rightarrow S_{тр} = \left(\frac{4+32}{2}\right)\cdot 28 = 504$ см^2.

В-4.

1.



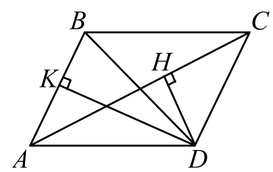
а) $S_{пр} = x \cdot 2x = 72 \Rightarrow x = 6$, $AB = 6$см, $AD = 12$см.
По теореме Пифагора из ΔABD:

$BD = \sqrt{x^2 + 4x^2} = 6\sqrt{5} = AC$

AC — диаметр круга $\Rightarrow R = 3\sqrt{5}$ см $\Rightarrow$

б) $S = \pi R^2 = 45\pi$ см^2.

2.



$S_{ABC} = S_{ACD}$, т.к. $\Delta ABC = \Delta ACD$;

$S_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot HD = \frac{1}{2}\cdot 16 \cdot 4 = 32$см^2;

$S_{пар} = 2 \cdot 32 = 64$ см^2

$S_{пр\text{-}ма} = DK \cdot AB = 64 \Rightarrow DK = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$ см.