А.Н. Прокопович

Домашняя работа по геометрии за 7 класс

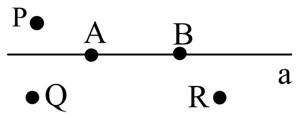
С задачами повышенной трудности

к учебнику «Геометрия, 7-9: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян и др. — 13-е изд. — М.: «Просвещение», 2003.

Глава I

§ 1. Прямая и отрезок

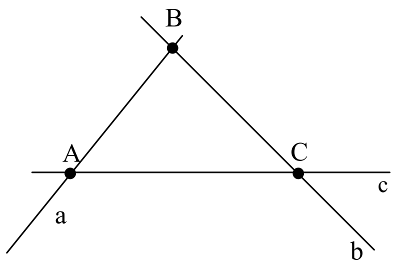
1.



$A \in a, \quad B \in a$

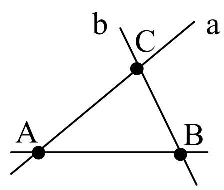
$P \notin a, \quad Q \notin a, \quad R \notin a$

2.

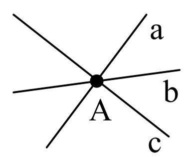


3.

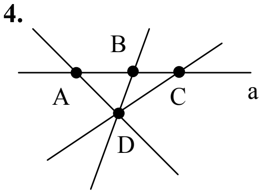
1– ый случай



2 – ой случай

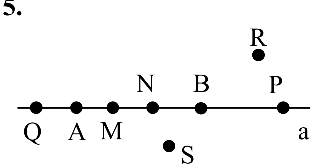


4.



Получим четыре прямые

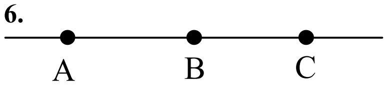
5.



$M, N \in$ отрезку AB;

$P, Q \in a, \quad R, S \notin a$

6.



Имеем: $[AB],[BC]$ и $[AC]$ – три отрезка

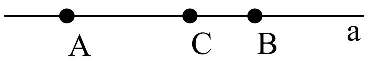
7.

а) Точка C принадлежит: $[AD],[BD],[AC],[BC]$.

б) $B \notin [CD]$

§ 2. Луч и угол

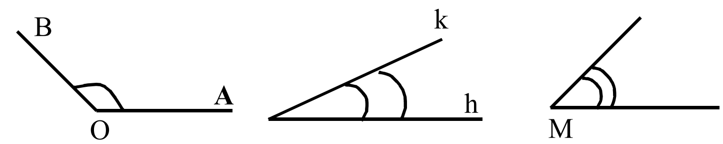
8.



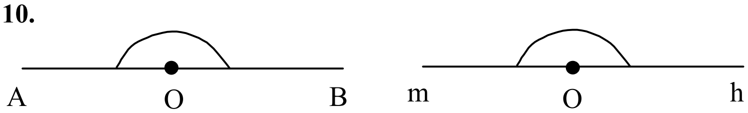
а) лучи $[AB)$ и $[AC)$ – совпадают, $[BC)$ и $[BA)$ – совпадают

б) Луч $[CB)$ – являютсяпродолжениемлуча $[CA)$

9.

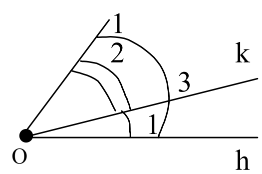


10.



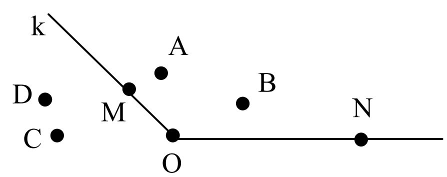
11.

Имеем: $\angle hk; \angle kl; \angle h_1$.

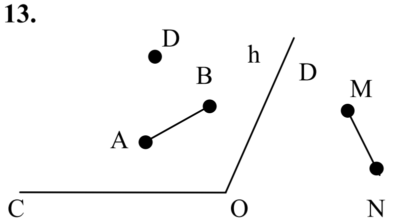


12.

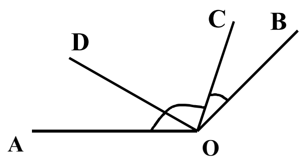
Получаем:



13.

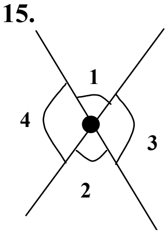


14.



Как видно из ресунка.

15.



При пересечении двух прямых образуется 4 неразвернутых угла.
$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$.

16.

Внутри угла: M, A

Вне угла: C, N

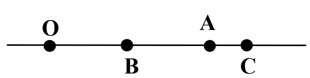
На сторонах угла: O, B

17.

Лучи l и h

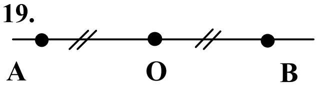
§ 3. Сравнение отрезков и углов

18.



$OB < OA$; $OB < OC$; $OC > OA$

19.



а) Т.к. $AO = OB -$ следовательно они совпадают при наложении,

б) $OA < AB$, то, отрезки ОА и АВ не совпадают при наложении.

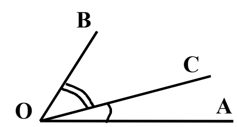
20.

а) $B -$ середина $[AC]$
$C -$ середина $[AE]$
$D -$ середина $[CE]$

б) Отрезок $[CE]$
[AE] и [BD] — имеют общую середину С.

21.

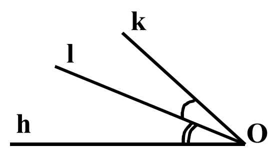
$\angle AOB > \angle AOC$



22.

а) l — биссектриса, значит, $\angle hl = \angle lk$, и углы, при наложении совпадут

б) Т.к. $\angle hl < hk$, при наложении углы не совпадут



23.

а) $OB -$ биссектриса $\angle AOC$
$OD -$ биссектриса $\angle BOF$
$OC -$ биссектриса $\angle AOE$

б) $OC -$ биссектриса углов $\angle BOD$ и $\angle AOE$

§ 4. Измерение отрезков

24

Длина учебника – 14,5 см. = 145 мм.
Ширина учебника – 22 см. = 220 мм.

25.

Толщина учебника – 1,5 см., количество листов в нем – 170л.,
Значит толщина одного листа $-\frac{1{,}5}{170} = \frac{3}{340} \approx 0{,}009$ см.

26.

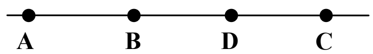
а) $CD = 6KL; EF = 5KL; PQ = 3KL; AB = 2KL.$

б) $CD = 3AB; EF = 2{,}5AB; PQ = 1{,}5AB; KL = 0{,}5AB$

27.

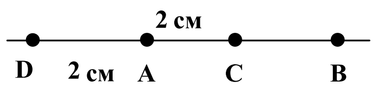
$OK = \frac{1}{2}AB; OC = \frac{1}{4}AB; OD = 2AB.$

28.



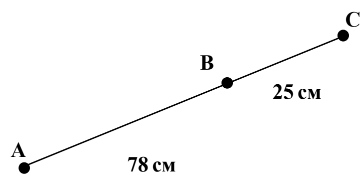
$AB = BC$ и $BD = DC.$

29.



Две точки: справа и слева от точки A. Это точка C и D.

30.



Дано: AB=7,8 см; BC=25мм

AC – ?

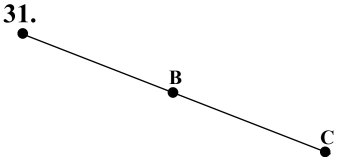
По свойству измерения отрезков имеем:

$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$

$\mathrm{AC} = 78\,\text{мм} + 25\,\text{мм} = 103\,\text{мм}.$

Ответ: 10 см., 3 см.

31.



Дано: $\begin{array}{l|l} AB = 3{,}7\text{ см} & AB = 4\text{см} \\ AC = 7{,}2\text{ см} & AC = 4\text{см} \end{array}$

BC – ?

<u>Ренение:</u> Из рисунка видим, что:

а) $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB}$

$BC = 7{,}2\,\text{см} - 3{,}7\,\text{см} = 3{,}5\,\text{см}$

б) Аналогично: $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB}$

$BC = 40\,\text{мм} - 4\,\text{мм} = 36\,\text{мм}$

Ответ: а) 3,5 см; б) 36 мм.

32.

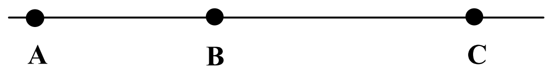
Дано: $A, B, C \in a$

$AB = 12\,\text{см.}$, $BC = 13{,}5$ мм

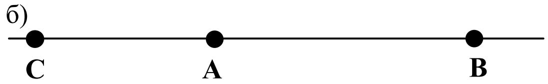
AC – ?

<u>Решение:</u> Рассмотрим два варианта а) и б):

а) $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 12\text{см} + 13{,}5\text{см} = 25{,}5\text{см}.$



б)



$AC = BC - BA = 13{,}5 см - 12 см = 1{,}5 см$

Ответ: 25,5 см; 1,5 см.

33.

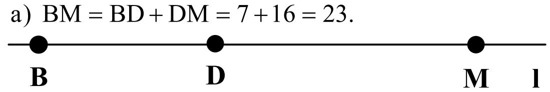
Дано: $B, D, M \in l$

$BD = 7 см., \quad MD = 16$ см

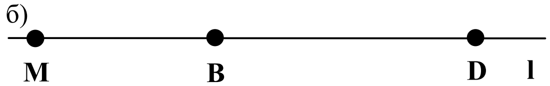
$BM - ?$

<u>Решение:</u> Рассмотрим два варианта :

а) $BM = BD + DM = 7 + 16 = 23.$



б)



$BM = DM - BD = 16 см - 7 см = 9 см$

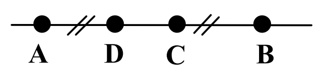
Ответ: а) 23 см; б) 9см.

34.

Дано: $CA = BC$

$AB = 64 см., D \in CA, CD = 15$ см

$CD - ?, \quad DA - ?$



<u>Решение:</u> Рассмотрим два варианта, что :

$AC = CB = 64 см : 2 = 32.$

$BD = BC - CD = 32 см - 15 см = 17 см$

$DA = AC + CD = 32 см + 15 см = 47 см$

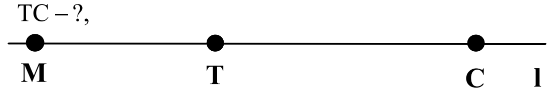
Ответ: а) 17 см; б) 47 см.

35.

Дано: $M, T, C \in l$

$MC = 650 км., MT = 170$ км

$TC - ?,$



<u>Решение:</u>

$TC = MC - MT = 65 км - 170 км = 480 км.$

Ответ: 480 км.

36.

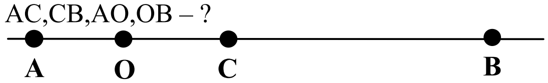
Если точка A,B,C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB,BC, и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (AC = 5 см), а AB+BC = 7 см., поэтому точки A,B,C не лежат на одной прямой.

37.

а) Дано: $AC = CB$,

AO=OC, $AB = 2\text{см}$

AC,CB,AO,OB – ?



<u>Решение:</u>

$C - \text{середина } AB, \text{ значит } AC = CB = 2:2 = 1 \text{ см}$

$O - \text{середина } AC, \text{ значит } AO = OC = 1:2 = 0{,}5 \text{ см}$

$OB = OC + CB = 0{,}5\text{см} = 1\text{см} = 1{,}5\text{см}$

Ответ: 1 см.; 1см; 0,5 см; 1,5 см.

б) Дано: $AC = BC$,

AO=OC, $CB = 3{,}2\text{м}$

AB,AC,AO,OB – ?

<u>Решение:</u>

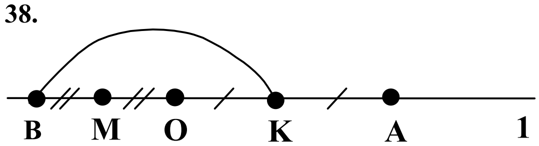
$AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 3{,}2 = 6{,}4 \text{ м}$

$AC = CB = 3{,}2\text{м}$

$AO = OC = 3{,}2 : 2\text{см} = 1{,}6\text{м}$

Ответ: 6,4 м.; 3,2 м; 1,6 м; 1,6 м.

38.



Первый вариант:

а) Дано: $OA = 12\text{см}, \quad OB = 9\text{см}, \quad O \in AB$

OK=KA,

KM – ?

<u>Решение:</u> Из условия получаем равенст

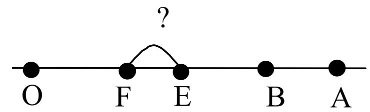
$OK = KA = 12\text{см} : 2 = 6\text{см}$

$OM = MB = 9\text{см} : 2\text{см} = 4{,}5\text{см}$

$MK = MO + OK = 6\text{см} + 4{,}5\text{см} = 10{,}5\text{см}$

Ответ: 10,5 см.

б) Второй вариант:



Дано: $O \in AB$,

$OA = 12\text{см}, \quad OB = 9\text{см},$

$OE = EA, \quad OF = FB$

$EF - ?$

Решение: Из условия получаем равенст

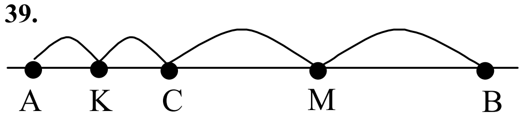
$OE = EA = 12\text{см} : 2 = 6\text{см}$

$OF = FB = 9\text{см} : 2\text{см} = 4{,}5\text{см}$

$FE = OE - OF = 6\text{см} - 4{,}5\text{см} = 1{,}5\text{см}$

Ответ: 1,5 см.

39.



Дано: $C \in AB, \quad AB = a$

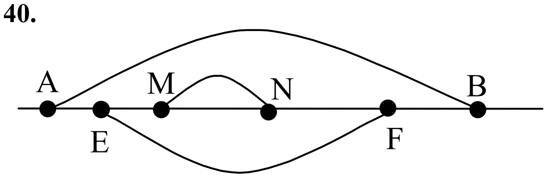
$AK = KC, \quad CM = MB$

$KM - ?$

Решение: $KM = AB - MB - AK = AB - \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC =$

$= AB - \frac{1}{2}(BC + AC) = AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

40.



Дано:

$AB = 28\text{см}$

$AE = EM, \quad NF = FB, \quad EF = 16\ см$

$MN - ?$

Решение:

$28см - 12\ см -$ *значит* $AE + FB = 12\ см$

$AM = EM, \quad FB = NF$ (*по условию*) *следует* $EM + NF = 12см,$

значит $MN = EF - (EM + NF) = 16см - 12см = 4см$

Ответ: 4 см.

§ 5. Измерения углов

41– 43.
Это практические задания. Их надо выполнять по описанию в книге.

44.
Выполняем построение по указаниям. Построение можно сделать когда угол $\angle AOB$ острый.

45.
Т.к. градусные меры углов равны, то равны и сами углы.

46.

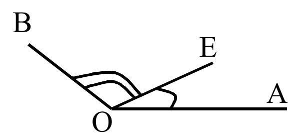
а) $\angle AOX = 40^0$, $\angle BOX = 60^0$, $\angle AOB = 20^0$, $\angle COB = 20^0$, $\angle DOX = 130^0$

б) $\angle AOB = \angle COB = 20^0$

в) $\angle XOA = \angle AOC = 40^0$, $\angle COD = \angle DOP = 50^0$, $\angle AOB = \angle BOC = 20^0$

г) $\angle AOX = 40^0$, $\angle AOB = 20^0$, $\angle AOC = 40^0$, $\angle AOD = 90^0$

47.



Дано:

$\angle AOE = 44^0$ | $\angle AOE = 12^0 37'$

$\angle EOB = 77^0$ | $\angle EOB = 108^0 25'$

$\angle AOB - ?$

Ренение: По свойству измерения углов имеем:

$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$

$\angle AOB = 44^0 + 77^0$

$\angle AOB = 121^0$; Аналогично:

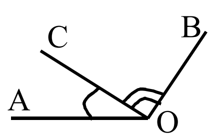
б) $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$

$\angle AOB = 12^0 37' + 108^0 25'$

$\angle AOB = 120^0 62' = 121^0 02'$

Ответ: а) 121^0; б) $121^0 02'$

48.



Дано: $\angle AOB = 78^0$,

$\angle AOC$, меньше $\angle BOC$ на 18^0

$\angle COB - ?$

Решение:

Возьмем $\angle AOC = x$, значит $\angle BOC = x + 18$,

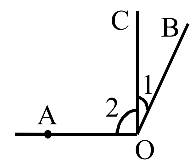
$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, следовательно

49.

Дано: $\angle AOB=155^\circ$,

$\angle AOC$ больше $\angle COB$ на 15°

$\angle AOC=?$



<u>Решение:</u>

Пусть $\angle 1=x$, тогда $\angle 2=x+15$

$\angle AOB=\angle 1+\angle 2$, значит

$155=x+x+15$; $155=2x+15$; $2x=140$; $x=70$;

$\angle AOC=x+15=85^\circ$.

Ответ: 85°.

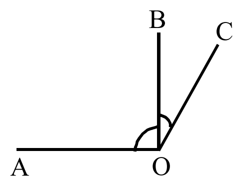
50.

Дано: угол $\angle AOB$ часть угла $\angle AOC$

$\angle AOC=108^\circ$,

$\angle AOB=3\angle BOC$

$\angle AOB=?$



<u>Решение:</u>

Пусть $\angle BOC=x$, тогда $\angle AOB=3x$

$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$, следовательно, $108=3x+x$; $108=4x$; $x=27$;

$\angle AOB=3x=81^\circ$.

Ответ: 81°.

51.

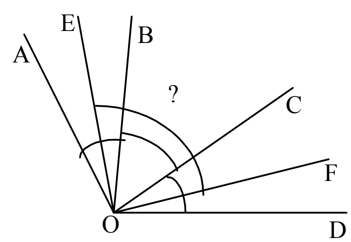
Дано: $\angle AOD=90^\circ$

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD$

OE – биссектриса $\angle AOB$

OF – биссектриса $\angle COD$

$\angle EOF=?$



<u>Решение:</u>

По условию

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD$, значит

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=90^\circ:3=30^\circ$

OE и OF – биссектрисы углов $\angle AOB$ и $\angle COD$, следовательно

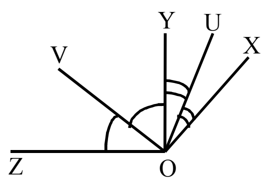
$\angle EOB=\angle COF=15^\circ$.

Далее видим, что:

$\angle EOF=\angle EOB+\angle BOC+\angle COF=15^\circ+30^\circ+15^\circ=60^\circ$.

Ответ: 60°.

52.



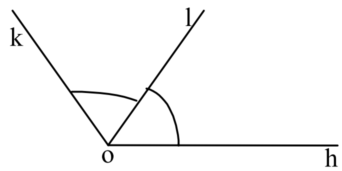
Дано: OV – биссектриса угла $\angle ZOY$
OU – биссектриса угла $\angle XOY$
$\angle UOV = 80^\circ$
$\angle XOZ = ?$

<u>Решение:</u>

$\angle ZOX = \angle ZOV + \angle VOY + \angle YOU + \angle UOX =$
$= 2\angle VOY + 2\angle YOU = 2\angle VOU = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ$.

Ответ: 160°.

53.

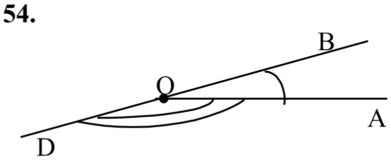


1) $\angle hl$ – не прямой
Если $\angle hl = 90^\circ$, то $\angle kh = 180^\circ$ — а это не так, потому что по условию $\angle hk < 180^\circ$

2) $\angle hl$ – не тупой. Если $\angle hl > 90^\circ$, то $\angle kh > 180^\circ$, а это не так, по условию.

§ 6. Перпендикуляр. Прямые

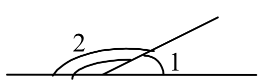
54.



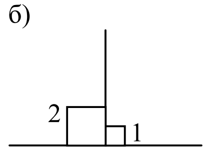
$\angle AOB$ – острый;
$\angle AOD$ – тупой.

55.

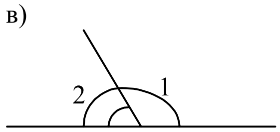
а)



б)



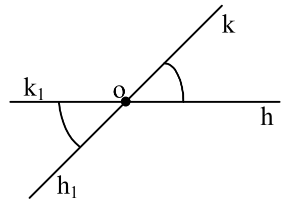
в)



На рисунке углы $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные.

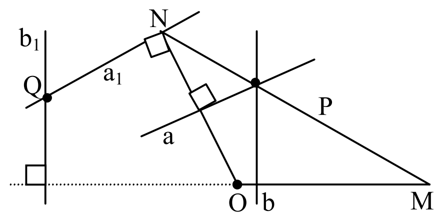
56.

Углы $\angle hk$ и $\angle h_1k_1$ – вертикальные.



57.

$b \perp OM$, $a \perp ON$
$b_1 \perp OM$, $a_1 \perp ON$

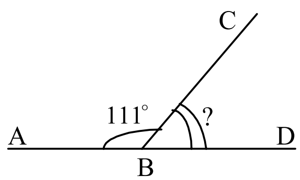


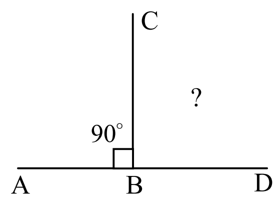
58.

Из свойств смежных углов вытекает, что:

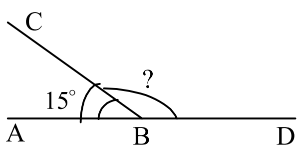
а) $\angle CBD = 180^\circ - 111^\circ$
$\angle CBD = 69^\circ$

б) $\angle CBD = 180^\circ - 90^\circ$
$\angle CBD = 90^\circ$





в) $\angle CBD = 180^\circ - 15^\circ$
$\angle CBD = 165^\circ$



59.

Прямым, т.к. $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

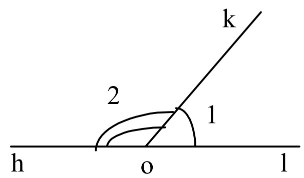
60.

Верно, т.к. $\angle 1 + \angle 1 = 180^\circ$, а отсюда $\angle 1 = 90^\circ$.

61.

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ – смежные

$\angle 1$, $\angle 2$ = ?



<u>Решение:</u>

Зная, что сумма смежных углов равна 180° имеем:

а) $\angle 2$=x, тогда $\angle 1$=x+40,
x+x+40=180;
2x=140; x=70
$\angle kh = 70^\circ$,
$\angle kl = 110^\circ$

б) Пусть $\angle 1$=x, тогда
$\angle 2 = x+120^\circ$;
$x+x+120^\circ = 180$;
2x=60; x=30;
$\angle kl = 30^\circ$, $\angle hk = 150^\circ$

в) Пусть $\angle 1$=x, тогда
$\angle 2 = x + 47^\circ 18'$
$x + x + 47^\circ 18' = 180^\circ$
$(180^\circ = 179^\circ 60')$
$2x = 179^\circ 60' - 47^\circ 18'$
$2x = 132^\circ 42'$; $x = 66^\circ 21'$
$\angle kl = 66^\circ 21'$, $\angle hk = 113^\circ 39'$

г) Пусть $\angle 1$=x, тогда $\angle 2$=3x
x+3x=180
4x=180
x=45
$\angle kl = 45^\circ$,
$\angle hk = 135^\circ$

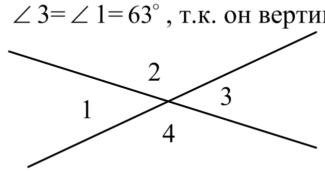
д) если $\angle 2 : \angle 1 = 5:4$, то пусть на 1 часть приходится x, тогда
$\angle 2$=5x, $\angle 1$=4x
5x+4x=180; 9x=180; x=20
$\angle kh = 100^\circ$, $\angle kl = 80^\circ$

64.

а) Т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, то $\angle 2 = \angle 4 = 117^\circ$

$\angle 1 = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$, т.к. он смежный с $\angle 2$

$\angle 3 = \angle 1 = 63^\circ$, т.к. он вертикальный с $\angle 1$.



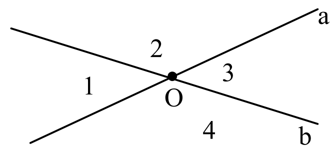
б) $\angle 1 = \angle 3 = 43^\circ 17'$ – как вертикальные

$\angle 2 = 180^\circ - 43^\circ 27' = 136^\circ 33'$, т.к. $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные

$\angle 4 = 136^\circ 33'$, т.к. $\angle 4$ и $\angle 2$ вертикальные.

65.

а) Дано:



$\angle 1 + \angle 3 = 114^\circ$

$\angle 1,\ \angle 2,\ \angle 3,\ \angle 4 = ?$

<u>Решение:</u>

Т.к. $\angle 1 = \angle 3$ вертикальные, то

$\angle 1 = \angle 3 = 114^\circ : 2 = 57^\circ$

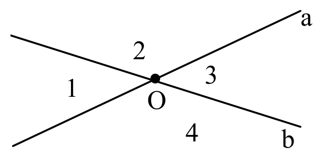
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные

$\angle 2 = 180^\circ - 57^\circ$

$\angle 2 = \angle 4 = 123^\circ$, т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные

Ответ: 57°, 123°, 57°, 123°.

б) Дано:



$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220^\circ$

$\angle 1,\ \angle 2,\ \angle 3,\ \angle 4 = ?$

<u>Решение:</u>

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$ как сумма двух развернутых углов

$\angle 4 = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$

$\angle 4 = \angle 2 = 140^\circ$ (т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные)

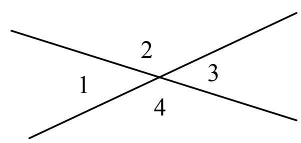
$\angle 1 + 140^\circ + \angle 3 = 220^\circ$, откуда

$\angle 1 + \angle 3 = 80^\circ$, то

$\angle 1 = \angle 3 = 40^\circ$ (т.к. $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные)

Ответ: 40°, 140°, 40°, 140°.

66.



а) $\angle 2 + \angle 4 = 220^\circ$, т.к.

$\angle 2$; $\angle 4$ – вертикальные, то

$\angle 2 = \angle 4 = 220^\circ : 2 = 110^\circ$

$\angle 1 = \angle 3 = 70^\circ$, т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные

Ответ: 70°, 110°, 70°, 110°.

б) $3 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$

т.к. $\angle 1 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - x$

Подставляем в 1-ое равенство:

$3 \cdot (x+x)=180^\circ - x+180^\circ - x$

6x=360-2x; 8x=360; x=45;

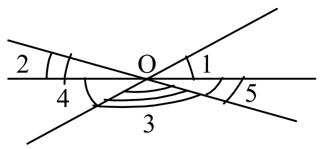
$\angle 1=\angle 3=45^\circ$; $\angle 2=\angle 4=135^\circ$.

в) $\angle 2-\angle 1=30^\circ$

$\angle 1$=x, тогда, $\angle 2=x+30^\circ$; x+x+30=180; 2x=150; x=75;

$\angle 1=75^\circ$, $\angle 2=105^\circ$

67.



Решение:

Имеем:

$\angle 1=\angle 4$ – вертикальные

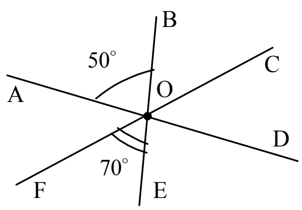
$\angle 2=\angle 5$ – вертикальные

$\angle 4+\angle 3+\angle 5=\angle AOB$ – развернутый угол, т.е. $\angle AOB=180^\circ$.

$180^\circ=\angle 4+\angle 3+\angle 5=\angle 1+\angle 3+\angle 2$.

Ответ: 180°

68.



Дано:

$\angle AOB=50^\circ$, $\angle FOE=70^\circ$

$\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle COE$, $\angle COD$=?

Решение:

$\angle EOD=\angle AOB=50^\circ$ по свойству вертикальных углов

$\angle FOD=\angle FOE+\angle EOD=$

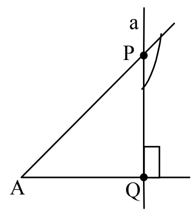
$=70^\circ+50^\circ=120^\circ$

$\angle COD=180^\circ-\angle FOD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$\angle AOB=50^\circ+70^\circ=120^\circ$; $\angle COE=60^\circ+50^\circ=110^\circ$

$\angle BOD=70^\circ+60^\circ=130^\circ$; $\angle COD=60^\circ$

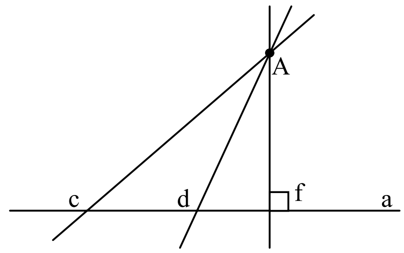
69.



Одновременно прямые AP и AQ не могут быть перпендикулярными прямой a, т.к. AP и AQ – пересекаются и, значит, не параллельны, что противоречит аксиоме параллельных прямых.

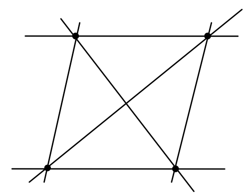
70.

Пусть $f \perp a$, $d \perp a$, $c \perp a$, тогда прямые f, d и c – не пересекаются (по теореме), а по условию c, d и f – проходят через точку A, значит, все три прямые одновременно быть перпендикулярными a не могут. Значит, только одна из трех прямых может быть перпендикулярна прямой a, а значит две не перпендикулярны прямой a.



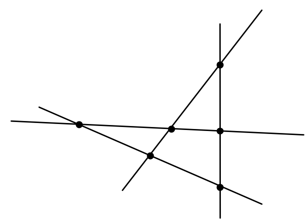
71.

Получилось 6 прямых



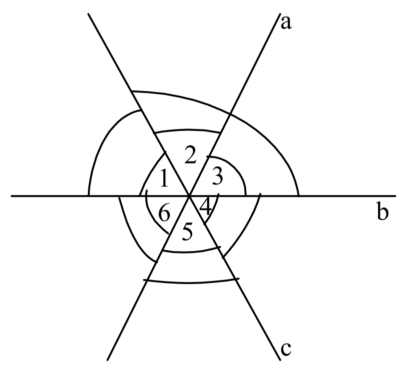
72.

Имеем 6 точек

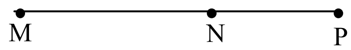


73.

Рассмотрим все углы и выберем неразвернутые. Тогда в итоге имеем 12 углов, как это показано на рисунке.



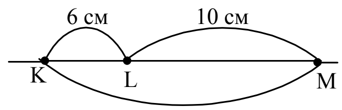
74.



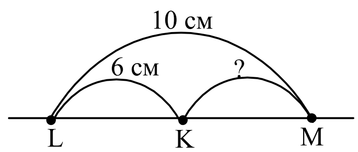
Дано: MP=24 см
NM в 2 раза больше NP
NP, NM=?

Решение:
Пусть NP=x см, тогда MN=2x см
2x+x=24, значит, 3x=24,
x=8, следовательно, NP=8 см, MN=16 см.
Ответ: 8 см, 16 см.

75.

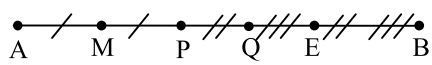


а) 1-ый случай
KM=?
Имеем:
KM=KL+LM; KM=6+10=16 см



б) 2-ой случай
KM=?
Имеем:
KM=LM-LK
KM=10-6=4 см

76.



Дано: AB=a,
AP=2PQ=2QB
QE=EB, AM=MP
AE, ME=?

Решение:
а) AP=2PQ=2QB, значит PQ=QB и Q – середина PB

значит P – середина AB, значит, AP=PB=$\frac{1}{2}$ a

Q – середина PB, то PQ=QB=$\frac{1}{4}$ a

E – середина QB, то EB=QE=$\frac{1}{8}$ a

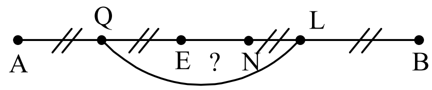
AE=AB-BE=a-$\frac{1}{8}$ a=$\frac{7}{8}$ a

б) ME=AB-AM-EB=a-$\frac{1}{4}$ a-$\frac{1}{8}$ a=$\frac{5}{8}$ a

Ответ: $\frac{7}{8}$ a; $\frac{5}{8}$ a

77.

а) Дано: AB=m, Q – середина AE,
L – середина NB
AE=EN=NB.
QL=?



Решение:

Имеем: AE=EN=NB=$\frac{m}{3}$

Q, L – середины соответственных отрезков, значит,

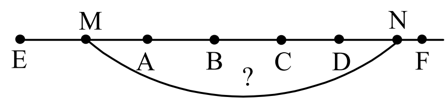
AQ=QE=NL=LB=$\frac{m}{6}$

Тогда:

QL=AB-AQ-LB; QL=m-$\frac{m}{6}$-$\frac{m}{6}$=$\frac{2}{3}$ m.

Ответ: $\frac{2}{3}$ m.

б) Дано: EF=m;
EA=AB=BC=CD=DF
EM=MA
DN=NF
MN=?



Решение:

EA=AB=BC=CD=DF, тогда, AE=AB=BC=CD=DF=$\frac{m}{5}$

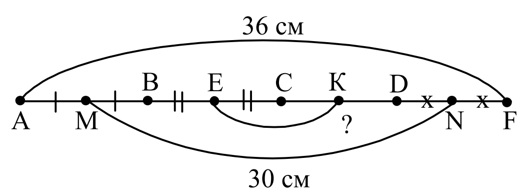
Далее:

EM=NF=$\frac{1}{2}$ AE=$\frac{1}{2}$ DF=$\frac{m}{10}$; MN=EF-EM-NF=m-$\frac{m}{5}$=$\frac{4}{5}$ m.

Ответ: $\frac{4}{5}$ m.

78.

Дано: AF=36 см,
MN=30 см
AM=MB, DN=NF,
BE=EC, CK=KD
EK=?



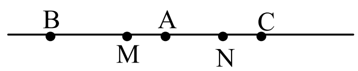
Решение:
AF=MN=(AM+NF); 36-30=6см-(AM+NF)
AM=MB
NF=ND, следовательно, AM=NF=MB+DN=6 см
BD=BC+CD=30-6=24 см, тогда,

BC=BE+EC=2EC, CD=CK+KD=2CK, EK=EC+CK=$\frac{1}{2}$ BD

Учитывая, что EK=$\frac{1}{2}$ BD получаем EK=12 см.

Ответ: 12 см.

79.



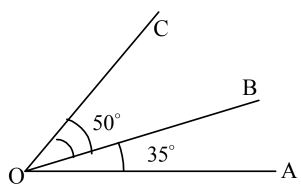
Дано: AM=MB,
AN=NC
Доказать: BC=2MN

<u>Доказательство:</u>
Пусть BM=a, NC=b
Из BM=MA следует AB=2a
Из NC=NA следует AC=2b, значит, BC=BA+AC=2a+2b=2-(a+b);
MN=MA+AN=a+b.
Тогда: BC=2 · (a+b), значит BC=2MN.
Тогда: MN=a+b.

80.

Дано: $\angle$AOB=35° , $\angle$BOC=50°
$\angle$AOC=?
Решение:
Рассмотрим два случая:

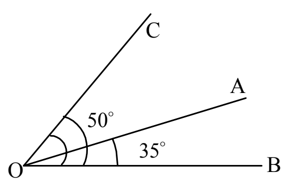
а)



$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$

$\angle AOC=35^\circ+50^\circ=85^\circ$

б)



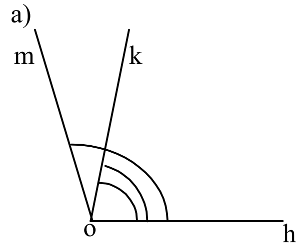
$\angle AOC=\angle BOC-\angle BOA$

$\angle AOC=50^\circ-35^\circ=15^\circ$

81.

Дано: $\angle$hk=120° , $\angle$hm=150°
$\angle$km=?
Решение:
Рассмотрим два случая:

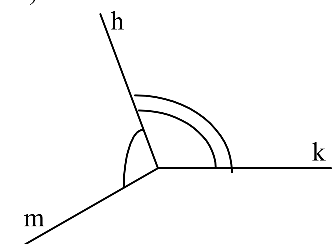
а)



$\angle km = \angle hm - \angle hk$

$\angle km = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$

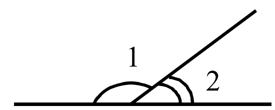
б)



$\angle km = \angle kh + \angle hm$

$\angle km = 120^\circ + 150^\circ = 270^\circ$

82.



Дано: а) $\angle 1$ больше $\angle 2$ на 45°

б) $\angle 1 - \angle 2 = 35°$

$\angle 1$, $\angle 2$=?

Решение:

а) Пусть $\angle 2 = x$, тогда

$\angle 1 = x + 45°$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (по свойству смежных углов)

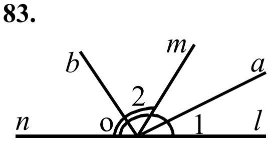
то $x + x + 45 = 180$, $2x = 135$, $x = 67°30'$

$\angle 2 = 67°30'$, $\angle 1 = 112°30'$

б) Пусть $\angle 2 = x$, тогда, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, значит, $x + x + 35 = 180$, $2x = 145$, $x = 72°30'$

$\angle 1 = 105°30'$.

83.



Дано: a,b – биссектрисы $\angle 1$, $\angle 2$

$\angle ab$=?

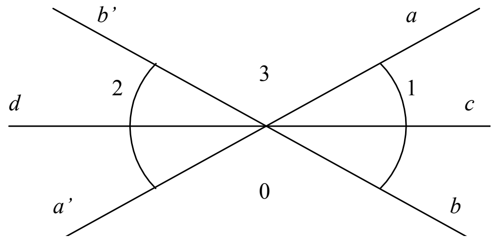
Решение:

$\angle nb + \angle bm + \angle ma + \angle al = 180° = 2\angle bm + 2\angle ma = 2\angle ab$, откуда

$\angle ab = 90°$.

Ответ: 90°.

84.



Дано: $\angle 1 = \angle 2$ – вертикальные углы

c,d – биссектрисы $\angle 1, \angle 2$ соответственно.

Доказать, что c,d лежат на одной прямой.

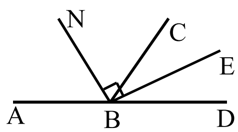
$\angle 1$ и $\angle 3$ – смежные углы, тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. (по свойству).

$\angle 1 = \angle 2$, значит $\angle ac = \angle bc = \angle b'd = \angle a'd$, значит

$\angle ab' + \angle 3 + \angle ac = 180°$, тогда

$\angle dc = 180°$ - развернутый угол и тогда согласно определению развернутого угла лучи d и c – лежат на одной прямой.

85.



Дано: BE –биссектриса угла $\angle CBD$

BN – биссектриса угла $\angle ABC$

$\angle EBN = 90°$

Доказать, что A,B,D лежат на одной прямой.

Доказательство:

$\angle EBN = 90°$; $\angle EBN = \angle EBC + \angle CBN$

Пусть $\angle EBC = x$, тогда $\angle CBN = 90° - x$

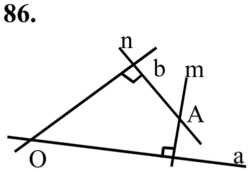
BN – биссектриса $\angle ABC$, значит $\angle ABN = \angle NBC = 90° - x$

BE – биссектриса $\angle CBD$, значит $\angle DBE = \angle EBC = x$

$\angle ABD = \angle ABC + \angle DBC = 2(90° - x) + 2x = 180 - 2x + 2x = 180°$?

значит, $\angle ABD$ – развернутый, и точки A,B,D лежат на одной прямой.

86.



Дано: $n \perp b$; $m \perp a$

Доказать, что m, n – не совпадают.

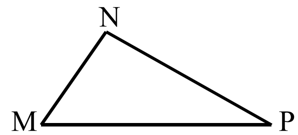
Доказательство от противного:

Пусть m и n совпадают, значит лежат на одной прямой l, тогда имеем, что $l \perp a$ и $l \perp b$, т.е. одна прямая перпендикулярна двум различным прямым a и b, тогда a и b не пересекаются согласно теореме о прямых, а это противоположно условию, что $a \cap b = 0$, значит наше предположение не верно, а верно то, что m и n не совпадают, ч.т.д.

Глава II

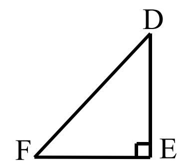
§ 1. Первый признак равенства треугольников.

87.



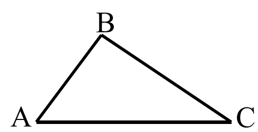
стороны: MN, NP, MP
углы: ∠NMP, ∠MPN, ∠PNM
MN=12 мм; NP=25 мм; MP=34 мм;
Значит $P_{\Delta MNP}$=71 мм.

88.



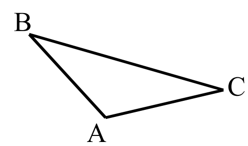
а) против углов D, E, F – лежат соответственно EF; FD; DE.
б) против сторон DE; EF; FD лежат соответственно углы F; D; E.
в) ∠D и ∠E; ∠E и ∠F; ∠F и ∠D – углы прилежащие соответственно к сторонам OE; EF; FO.

90.



Дано: AC=2AB, AB=17 см, BC=AC-10
P_{ABC}=?
Решение:
AC=2AB=2·17=34 см
BC=AC-10=34-10=24 см
P=AB+BC+AC=17+34+24=75 см
Ответ: 75 см.

91.

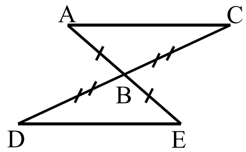


Дано: P_{ABC}=48 см, AB=18 см, BC-AC=4,6 см
BC, AC=?
Решение:
P_{ABC}=AB+BC+AC=48
18+BC+AC=48 см, тогда, BC+AC=30.
Пусть AC=x, тогда, BC=x+4,6 и 2x=25,4
x=12,7, значит, AC=12,7 см, BC=17,3 см.
Ответ: 12,7 см; 17,3 см.

92.

Нет, не могут. Если треугольники равные, то у них равные соответственные стороны, а значит равны их перпендикуляры, что не так по условию.

93.



Дано: $AB=BE$, $DB=BC$

Доказать:

а) $\Delta ABC=\Delta EBD$

б) $\angle D=47°$, $\angle E=42°$

$\angle A$, $\angle C$=?

<u>Доказательство:</u>

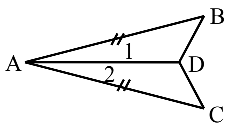
1) Рассмотрим ΔEBD и ΔABC

$AB=EB$ по условию; $CB=DB$ как вертикальные;

$\angle ABC=\angle DBE$ по 2-му признаку, значит $\Delta ABC=\Delta EBD$, тогда,

$\angle A=\angle E=42°$; $\angle D=\angle C=47°$.

94.



Дано: $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$

$AC=15$ см, $DC=5$ см

Доказать: 1) $\Delta ABD=\Delta ACD$

2) BD, AB=?

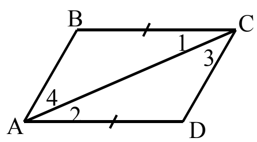
<u>Доказательство:</u>

$\angle 1=\angle 2$; $AB=AC$

сторона AD – общая, значит, $\Delta ABD=\Delta ACD$ по 1-му признаку.

Далее, т.к. $\Delta ABD=\Delta ACD$, то $BD=DC=5$ см; $AB=AC=15$ см.

95.



Дано: $BC=AD$ $\angle 1=\angle 2$

$AD=17$ см, $DC=14$ см

Доказать: 1) $\Delta ABC=\Delta CDA$

2) AB, BC=?

<u>Доказательство:</u>

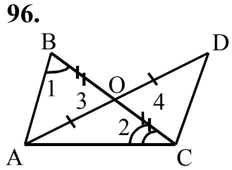
1) Рассмотрим ΔCDA и ΔABC

$BC=AD$, сторона AC – общая; $\angle 1=\angle 2$

тогда $\Delta ABC=\Delta CDA$ по 1-му признаку;

следовательно, $AB=CD$ и $AB=14$ см, $BC=17$ см.

96.



Дано: $OA=OD$, $OB=OC$

$\angle 1=74°$, $\angle 2=36°$

Доказать: 1) $\Delta AOB=\Delta DOC$

2) $\angle ACD$=?

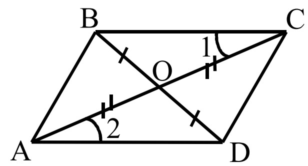
<u>Доказательство:</u>

1) Рассмотрим ΔDOC и ΔAOB

$BO=OC$; $AO=OD$; $\angle 3=\angle 4$ т.к. они вертикальные,

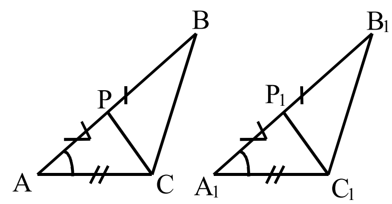
значит $\Delta AOB=\Delta DOC$ по 1-му признаку; $\angle 1=\angle OCD=74°$,
значит, $\angle ACD=\angle 2+\angle OCD=36°+74°=110°$.
Ответ: 110°.

97.



Дано: $AO=OC$, $BO=OD$
Доказать: $\Delta ABC=\Delta CDA$
Доказательство:
Рассмотрим ΔCOB и ΔAOD
$BO=OD$; $AO=OC$
$\angle AOB=\angle COD$ т.к. они вертикальные, значит $\Delta AOD=\Delta COB$ по 2-му признаку, тогда $CB=AD$ и $\angle 1=\angle 2$.
Рассмотрим ΔCDA и ΔABC
$BC=AD$, AC – общая сторона; $\angle 1=\angle 2$, значит, $\Delta ABC=\Delta CDA$
по 1-му признаку равенства Δ, ч.т.д.

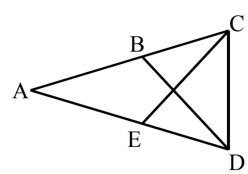
98.



Дано: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$,
$\angle A=\angle A_1$, $AP=A_1P_1$
Доказать: $\Delta BPC=\Delta B_1P_1C_1$.

Доказательство:
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC
$AC= A_1C_1$, $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$,
значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников, тогда $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$.
Рассмотрим $\Delta B_1P_1C_1$ и ΔBPC
$BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BP=B_1P_1$ т.к.
$BP=AB-AP=A_1B_1-A_1P_1=BP_1$, тогда $\Delta PBC=\Delta P_1B_1C_1$ по 1-му признаку, ч.т.д.

99.

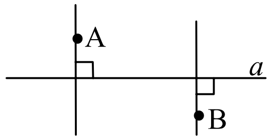


Дано: $AC=AD$, $AB=AE$
Доказать: $\angle CBD=\angle DEC$

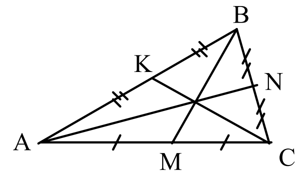
Доказательство:
Рассмотрим ΔADB и ΔACE
$AC=AD$; $AE=AB$
$\angle A$ – общий угол ΔADB и ΔACE
тогда $\Delta ACE=\Delta ADB$ по 1-му признаку
$\angle ABD=\angle AEC$ следовательно, $\angle CBD$, $\angle ABD$ – смежные, тогда $\angle CBD=180°-\angle ABD$, тогда $\angle DCE$, $\angle AEC$ – смежные, тогда $\angle CED=180°-\angle AEC$, отсюда $\angle CBD=\angle CED$, т.к. $\angle ABD=\angle AEC$.

§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

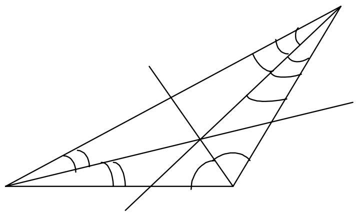
100.



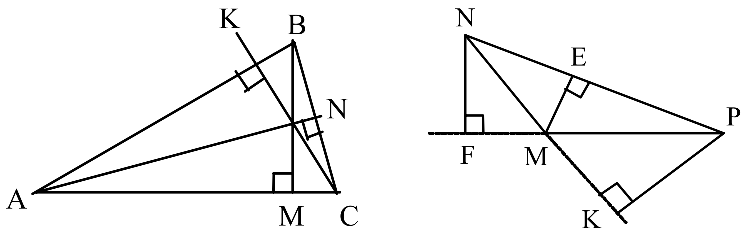
101.



102.

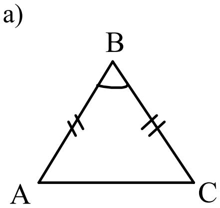


103.



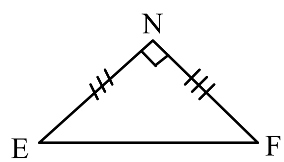
104.

а)



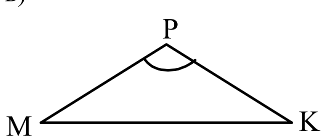
угол ∠B — острый

б)



угол ∠N — прямой

в)



угол ∠P — тупой

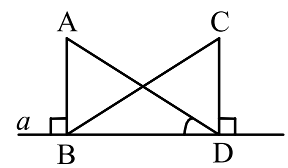
105.

Дано: AB, CD⊥a

AB=CD, ∠ADB=44°

Доказать: ΔABD=ΔCDB

∠ABC=?



Доказательство:

1) Рассмотрим ΔCDB и ΔABD

сторона BD — общая

AB=CD; ∠B=∠D=90° по условию

значит ΔABD=ΔCDB по 1-му признаку

2) тогда ∠ADB=∠CBD следовательно

∠ABC=∠ABD–∠CBD=90°–44°=46°

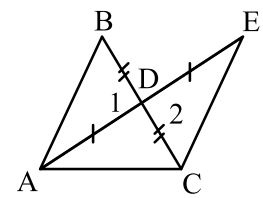
106.

Дано: AD=DE; BD=DC

∠ACD=56°, ∠ABD=40°

Доказать: ΔABD=ΔECD

∠ACE=?



Доказательство:

1) Рассмотрим ΔECD и ΔABD

BD=DC; AD=DE; ∠1=∠2 т.к. они вертикальные,

тогда ΔABD=ΔECD по 1-му признаку следовательно,

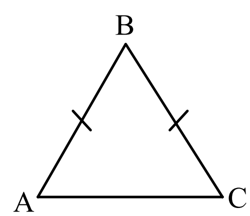
2) ∠ABD=∠ECD и ∠ACE=∠ACD+∠DCE=56°+40°=96°.

107.

Дано: AB=BC, AB=2AC

P_{ABC}=50 см

AB, BC, AC=?



Решение:

Пусть AC=x, тогда AB=BC=$2x$,

P_{ABC}=AC+AB+AC, значит, $50=x+2x+2x$,

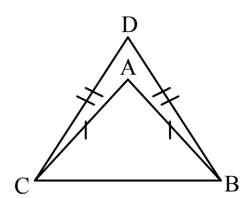
$50=5x$, $x=10$, AC=10 см, AB=BC=20 см.

Ответ: 10 см; 20 см; 20 см.

108.

Дано: AB=AC; P_{ABC}=40 см; DB=DC=BC

P_{ACD}=45 см; AB и BC=?



Решение:

P_{ABC}=AB+BC+AC=BC+2AB т.к. AB=AC

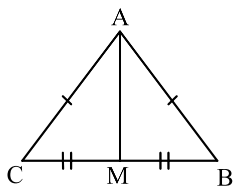
40=BC+2AB

P_{ACD}=DB+BC+CD=3BC т.к. BC=DC=BD; 45=3BC, значит,

BC=15 см и 40=15+2AB; 2AB=25, т.е. AB=12,5 см.

Ответ: 12,5 см; 15 см.

109.



Дано: AC=AB; CM=MB

P_{ABM}=24 см, P_{ABC}=32 см

AM=?

<u>Решение:</u>

P_{ABM}=AB+BM+AM; 24=AB+BM+AM;

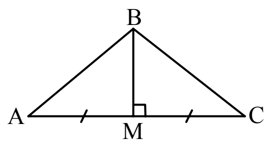
P_{ABC}=AB+BC+AC; 32=2AB+2BM

16=AB+BM; 24=AB+BM+AM=16+AM, тогда,

AM=8 см.

Ответ: 8 см.

110.



Дано: AM=CM, ∠BMC=90°

Доказать: AB=BC

<u>Доказательство:</u>

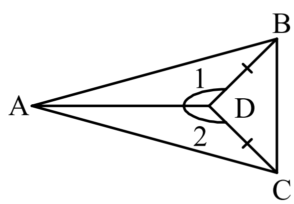
Рассмотрим ΔCBM и ΔABM

AM=MC; сторона BM – общая; ∠AMB=∠CMB=90°,

значит, ΔABM=ΔCBM по 1-му признаку

следовательно, AB=BC, ч.т.д.

111.



Дано: CD=BD, ∠1=∠2

Доказать: AB=AC

<u>Доказательство:</u>

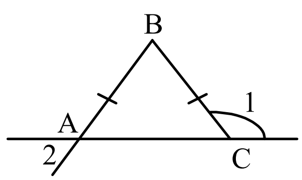
Рассмотрим ΔACD и ΔABD

сторона AD – общая

BD=DC; ∠1=∠2

значит, ΔABD=ΔACD по 1-му признаку; тогда AB=AC, ч.т.д.

112.



Дано: AB=BC, ∠1=130°

∠2=?

<u>Решение:</u>

углы ∠1 и ∠ACB – смежные, т.е.

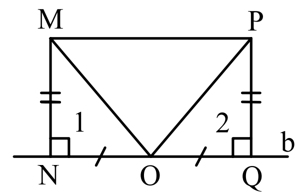
∠1+∠ACB=180°,

значит ∠ACB=180°-130°=50°; ΔABC – равнобедренный, значит,

∠BAC=∠ACB=50° как вертикальные, ∠2=∠BAC, т.е. ∠2=50°

Ответ: 50°.

113.



Дано: MN, PQ⊥b

MN=PQ, NO=OQ

∠MOP=105°

Доказать: ∠OMP=∠OPM

∠NOM=?

<u>Доказательство:</u>

1) Рассмотрим ΔPOQ и ΔHON

MN=PQ; NO=OQ; ∠N=∠O=90° — по условию,

тогда Δ MON=Δ POQ — по 1-му признаку

следовательно, ∠1=∠2, OM=OP,

тогда Δ MOP — равнобедренный, откуда ∠OMP=∠OPM.

2) ∠1+∠MOP+∠2=180° — развернутый угол, т.е.

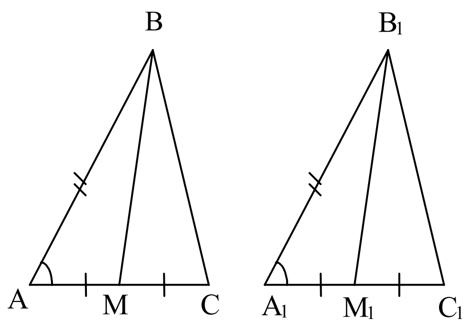
∠1+105°+∠2=180°; ∠1+∠2=75°, но ∠1=∠2, значит,

∠1=∠2=37°30′, т.е.

∠NOM=37°30′.

Ответ: 37°30′.

114.



Дано: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

BM, B_1M_1 — медианы

Доказать: $BM=B_1M_1$

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим $\Delta A_1B_1M_1$ и ΔABM

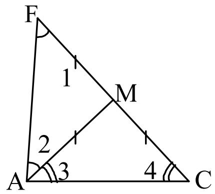
$AB=A_1B_1$; $\angle A=\angle A_1$ из равенства треугольников

$AM=A_1M_1$ потому что $AM=\frac{1}{2}AC,\ A_1M_1=\frac{1}{2}A_1C_1$

и $AC=A_1C_1$ значит, $\Delta ABM=\Delta A_1B_1M_1$ — по первому признаку

следовательно, $BM=B_1M_1$ что и требовалось доказать.

115.



Дано: BM=MC=AM

Доказать: ∠A=∠B+∠C

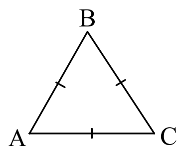
<u>Доказательство:</u>

ΔABM — равнобедренный, потому что BM=MA, тогда ∠1=∠2.

ΔAMC — равнобедренный, потому что AM=MC, тогда ∠3=∠4.

∠A=∠2+∠3=∠1+∠4, т.е. ∠A=∠B+∠C что и требовалось доказать.

116.



Дано: AB=BC=AC.

Доказать: ∠A=∠B=∠C.

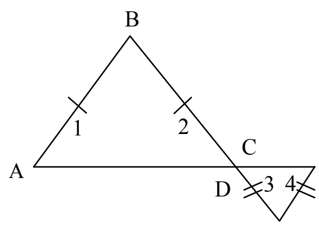
<u>Доказательство:</u>

ΔABC — равнобедренный, потому что AB=BC, тогда ∠A=∠C

ΔABC — равнобедренный, потому что AB=AC, тогда ∠B=∠C

Имеем: ∠A=∠C=∠B.

117.



Дано: AB=BC, CD=DE

Доказать: ∠BAC=∠CED

<u>Доказательство:</u>

ΔABC — равнобедренный, потому что AB=BC, тогда ∠1=∠2

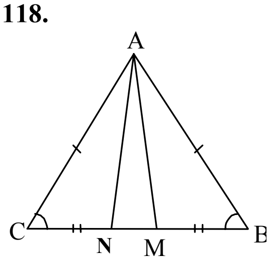
ΔCDE — равнобедренный, потому что CD=DE,тогда ∠3=∠4

углы ∠2, ∠3 — вертикальные, т.е. ∠2=∠3

Имеем: ∠1=∠2=∠3=∠4

Тогда ∠1=∠4, т.е. ∠BAC=∠CED, что и требовалось доказать.

118.



Дано: AC=AB

CN=MB

Доказать: а) ΔBAM=ΔCAN

б) ΔAMN — равнобедренный

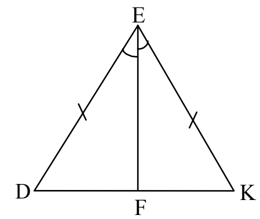
<u>Доказательство:</u>

1) Рассмотрим ΔACN и ΔABM

AB=AC BM=CN

∠B=∠C как углы при основании равнобедренного треугольника, значит ΔABM=ΔACN по первому признаку, следовательно, ΔAMN — равнобедренный, что и требовалось доказать.

119.

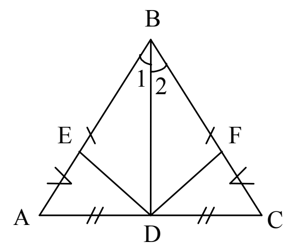


Дано: DE=EK
∠KEF=∠DEF.
DK=16 см, ∠DEF=43°
KF, ∠DEK, ∠EFD=?

<u>Решение:</u>
Так как ΔDEK — равнобедренный, то EF — медианы и высота, т.е
DF=FK и EF⊥DK, тогда ∠DEK=2 · ∠DEF; ∠DEK=2 · 43°=86°;
∠EFK=90°; KF=DF=$\frac{1}{2}DK = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8см$.

Ответ: 8 см, 86°, 90°.

120.

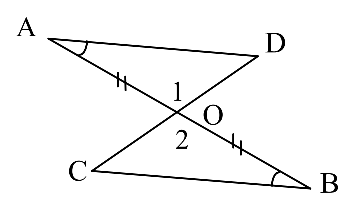


Дано: AB=BC, AE=FC,
Доказать: а) ΔBDE=ΔBDF
б) ΔADE=ΔCDF

<u>Доказательство:</u>
1) Рассмотрим ΔCDF и ΔADE:
AD=DC, AE=FC; ∠A=∠C как углы при основании равнобедренного треугольника, значит, ΔADE=ΔCDF по первому признаку
2) Рассмотрим ΔBDF и ΔBDE
сторона BD — общая
∠1=∠2 — свойство медианы в равнобедренном Δ
BE=AB – AE=AB – FC=BC – FC=BF, значит ΔBDE=ΔBDF по 1-му признаку, что и требовалось доказать.

§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников

121.



Дано: AO=OB,
∠OAD=∠OBC
CD=26 см, AD=15 см
Доказать: ΔCBO=ΔDAO
BC,CO=?

Доказательство:

Рассмотрим ΔDAO и ΔCBO

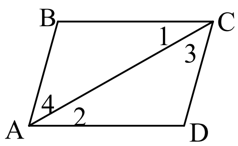
AO=OB; ∠A=∠B; ∠1=∠2 т.к. они вертикальные,

значит ΔCBO=ΔDAO по 2-му признаку, следовательно CO=OD, AD=CB, ∠D=∠C

CD=OC+OD, CO=$\frac{1}{2}CD=13см$;

т. к. CO=OD, то BC=AD следовательно, BC=15 см.

122.



Дано: ∠1=∠2; ∠3=∠4

AD=19 см, CD=11 см

Доказать: ΔABC=ΔCDA

AB, BC=?

Доказательство:

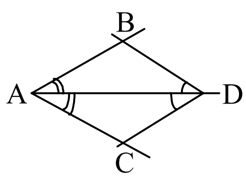
Рассмотрим ΔCDA и ΔABC

AC — общая

∠1=∠2; ∠3=∠4, значит ΔABC=ΔCDA по второму признаку

тогда AB=CD=11 см, BC=AD=19 см.

123.



Дано: ∠BAD=∠CAD

∠ADB=∠ADC

Доказать: BD=CD

Доказательство:

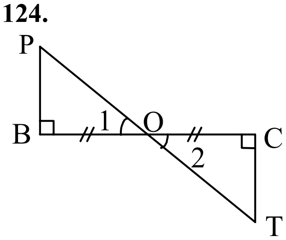
Рассмотрим ΔACD и ΔABD

∠BAD=∠CAD; ∠BDA=∠CAD; сторона AD — общая

значит ΔABD=ΔACD по 2-му признаку,

тогда BD=CD, что и требовалось доказать.

124.



Дано: BO=OC

∠B=∠C=90°

Доказать: OP=OT, ∠P=∠T

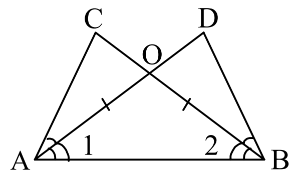
Доказательство:

Рассмотрим ΔCTO и ΔBPO

BO=OC; ∠B=∠C=90°; ∠1=∠2 т. к. они вертикальные, значит ΔBPO=ΔCTO по 2-му признаку,

тогда BP=CT, PO=OT, ∠P=∠T, что и требовалось доказать.

125.



Дано: $\angle DBC=\angle DAC$

$BO=AO$

Доказать: $\angle C=\angle D$, $AC=BD$

<u>Доказательство:</u>

Из $AO=OB$, следует ΔAOB — равнобедренный,

т.е. $\angle 1=\angle 2$.

Рассмотрим ΔBDA и ΔABC:

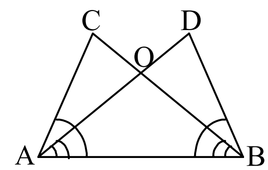
$\angle CAB=\angle DBA$ т. к $\angle CAB=\angle CAD+\angle 1$; $\angle DBA=\angle DBC+\angle 2$;

$\angle 1=\angle 2$ сторона AB — общая

значит $\Delta ACB=\Delta BDA$ (по стороне и 2 прилежащим к ней углам).

т. е. $AC=DB$, $\angle C=\angle D$, что и требовалось доказать.

126.



Дано: $\angle DAB=\angle CBA$,

$\angle CAB=\angle DBA$

$CA=13$ см

$DB=?$

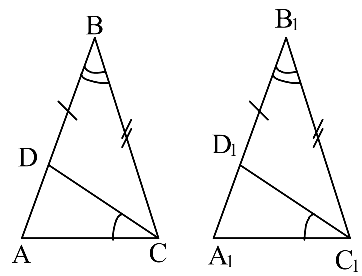
<u>Решение:</u>

Рассмотрим ΔADB и ΔACB:

$\angle CAB=\angle ABD$; $\angle ABC=\angle DBA$; сторона AB — общая

значит $\Delta ACB=\Delta BDA$ по 2-му признаку, тогда $AC=BD=13$ см.

127.



Дано: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$,

$\angle B=\angle B_1$

$\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$

Доказать: $\Delta BCD=\Delta B_1C_1D_1$

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:

$AB=A_1B_1$; $BC=B_1C_1$; $\angle B=\angle B_1$

значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку

следовательно, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$

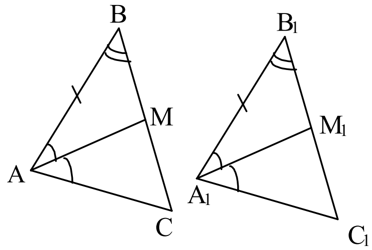
Рассмотрим $\Delta D_1B_1C_1$ и ΔDBC:

$BC=B_1C_1$; $\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$, потому что

$\angle BCD=\angle C-\angle ACD$, и $\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$;

$\angle B_1C_1D_1=\angle C_1-\angle A_1C_1D_1$; $\angle B=\angle B_1$, значит $\Delta DBC=\Delta D_1B_1C_1$ по второму признаку, что и требовалось доказать.

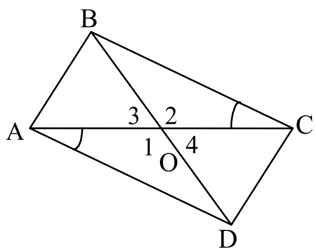
128.



Дано: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
$\angle BAM=\angle MAC$
$\angle B_1A_1M_1=\angle M_1A_1C_1$
Доказать: $AM=A_1M_1$

<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим $\Delta A_1B_1M_1$ и ΔABM:
$AB=A_1B_1$ из равенства
$\angle B=\angle B_1$ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
$\angle BAM=\angle B_1A_1M_1$ (т. к. $\angle A=\angle A_1$)
значит $\Delta ABM=\Delta A_1B_1M_1$ по 2-му признаку
следовательно, $AM=A_1M_1$, что и требовалось доказать.

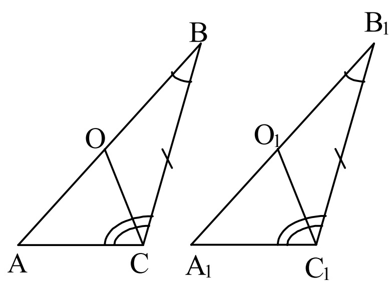
129.



Дано: $OA=OC$, $\angle BCO=\angle DAO$
Доказать: $\Delta BOA=\Delta DOC$

<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим ΔCOB и ΔAOD
$\angle A=\angle C$; $AO=OC$
$\angle 1=\angle 2$ т. к. они вертикальные, значит
$\Delta AOB=\Delta COB$ по 2-му признаку
тогда $BO=OD$
Рассмотрим ΔCDO и ΔABO:
$AO=OC$; $BO=OD$; $\angle 3=\angle 4$ как вертикальные, тогда $\Delta ABO=\Delta CDO$ по 1-му признаку.

130.



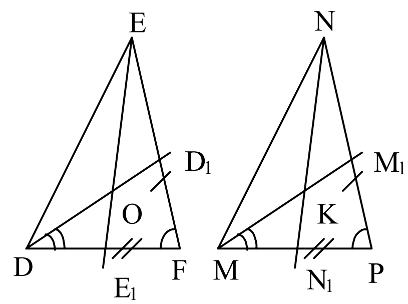
Дано: CO, C_1O_1 — медианы
$BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$
Доказать: 1) $\Delta AOC=\Delta A_1O_1C_1$
2) $\Delta BCO=\Delta B_1C_1O_1$

<u>Доказательство:</u>
1) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC
$BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$
тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 2-му признаку
значит $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AC=A_1C_1$
2) Рассмотрим $\Delta A_1O_1C_1$ и ΔAOC:
$AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$,

$AO=A_1O_1$ (т. к. $AO=\frac{1}{2}AB$, $A_1O_1=\frac{1}{2}A_1B_1$ и $AB=A_1B_1$).
значит $\Delta AOC=\Delta A_1O_1C_1$ по 1-му признаку

3) Рассмотрим $\Delta B_1C_1O_1$ и ΔBCO:
$BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$
$OB=O_1B_1$ (т. к. $OB=\frac{1}{2}AB$, $O_1B_1=\frac{1}{2}A_1B_1$ и $AB=A_1B_1$)
значит $\Delta BCO=\Delta B_1C_1O_1$ по 1-му признаку.

131.
Дано: $EF=NP$, $DF=MP$,
$\angle F=\angle P$
EE_1, DD_1 — биссектрисы
MM_1 и NN_1 — биссектрисы
Доказать: $\angle DOE=\angle MKN$.

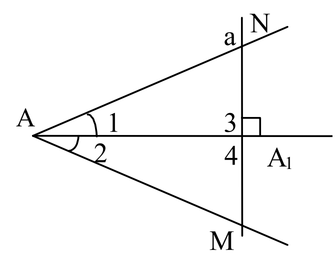


Доказательство:
Рассмотрим ΔMNP и ΔDFE:
$EF=NP$; $DF=MP$; $\underline{\angle F=\angle P}$,
значит $\Delta DEF=\Delta MNP$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle D=\angle M$, $\angle E=\angle N$, $DE=MN$.
Рассмотрим ΔMKN и ΔDOE:

$DE=MN$; $\angle EDO=\angle NMK$ (т. к. $\angle FDO=\frac{1}{2}\angle D$, $\angle MNK=\frac{1}{2}\angle M$ и $\angle D=\angle M$); $\angle DEO=\angle MNK$ (т. к. $\angle DEO=\frac{1}{2}\angle E$, $\angle MNK=\frac{1}{2}\angle N$ и $\angle E=\angle N$).

значит $\Delta DOE=\Delta MKN$ по 2-му признаку, следовательно,
$\angle DOE=\angle MKN$ что и требовалось доказать.

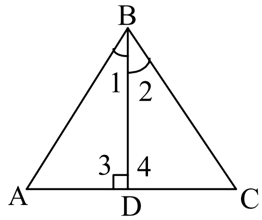
132.
Дано: $\angle NAA_1=\angle MAA_1$
$a\perp AA_1$
Доказать: $AM=AN$



Доказательство:
Рассмотрим ΔAMA_1 и ANA_1:
сторона AA_1 — общая
$\angle 1=\angle 2$ — по условию
$\angle 3=\angle 4=90°$ — по условию

тогда $\Delta ANA_1=\Delta AMA_1$ по 2-му признаку
следовательно, $AN=AM$ и значит, ΔAMN — равнобедренный, что и требовалось доказать.

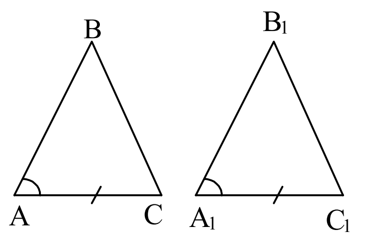
133.



Дано: $\angle ABC=\angle CBD$
$\angle ADB=90°=\angle CDB$
Доказать: $AB=BC$

Доказательство:
Рассмотрим ΔCBD и ΔABO:
сторона BD — общая
$\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4=90°$;
значит $\Delta ABD=\Delta CBD$ по 2-му признаку, тогда $AB=BC$ и ΔABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

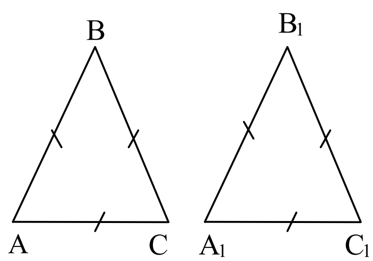
134.



Дано: $AB=BC$
$A_1B_1=B_1C_1$
$AC=A_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$
Доказать: $ABC=A_1B_1C_1$

Доказательство:
Из ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренные, следует что
$\angle A=\angle C$, $\angle A_1=\angle C_1$
из $\angle A=\angle A_1$, следует $\angle C=\angle C_1$ тогда, $AC=A_1C_1$; $\angle A=\angle A_1$; $\angle C=\angle C_1$
значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 2-му признаку

135.



Дано: $AB=BC=AC$
$A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1$
$AB=A_1B_1$
Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

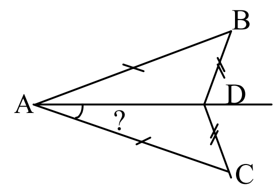
Доказательство:
Имеем: $AB=AC=BC$ и $A_1B_1=A_1C_1=B_1C_1$
т. к. $AB=A_1B_1$
то $BC=B_1C_1$ и $AC=A_1C_1$, тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 3-му признаку, что и требовалось доказать.

136.

Дано: AB=BC

BD=DC ∠BAC=50°

∠CAD=?



Решение:

1) Рассмотрим ΔACD и ΔABO:

AB=AC; BD=DC

сторона AP — общая

значит ΔABD=ΔACD по 3-му признаку

и тогда ∠BAD=∠CAD

имеем: ∠CAD+∠BAD=∠BAC; 2∠CAD=∠BAC

$\angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$.

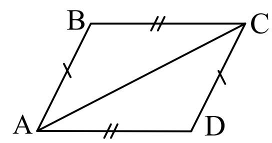
Ответ: 25°.

137.

Дано: BC=AD

AB=CD

Доказать: ∠B=∠D



Доказательство:

Рассмотрим ΔCDA и ΔABD:

AB=CD; BC=AD

сторона AC — общая; значит ΔABC=ΔCDA по 3-му признаку, следовательно, ∠B=∠D что и требовалось доказать.

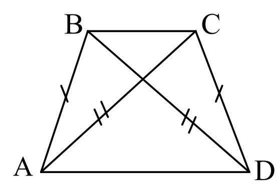
138.

Дано: AB=CD

BD=AC

Доказать: 1) ∠CAD=∠ADB

2) ∠BAC=∠CDB



Доказательство:

Рассмотрим ΔDCA и ΔABC:

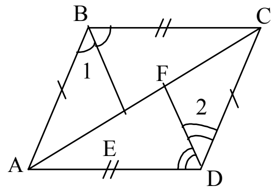
AB=CD; BD=AC; сторона AD — общая

значит ΔABD=ΔDCA по 3-му признаку, тогда ∠ADB=∠CAD, из равенства треугольников ∠BAD=∠CDA

∠BAC=∠BAD – ∠CAD, но ∠BAD=∠CDA, а ∠CAD=∠ADB

∠CDB=∠CDA – ∠ADB; ∠BAC=∠CDB, что и требовалось доказать.

139.



Дано: AB=CD, AD=BC

$\angle ABE=\angle CBE$

$\angle ADF=\angle CDF$

Доказать: 1) $\angle ABE=\angle ADF$

2) $\Delta ABE=\Delta CDF$

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔCDA и ΔABC

AB=CD; BC=AD; сторона AC — общая,

значит $\Delta ABC=\Delta CDA$ по 3-му признаку $\angle B=\angle D$,

тогда: $\angle BAC=\angle DCA$, $\angle ACB=\angle CAD$

Далее:

$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC$; $\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$

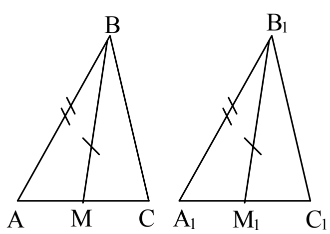
значит $\angle ABE=\angle ADF$, т. к. $\angle B=\angle D$.

Рассмотрим ΔCDF и ΔABE:

AB=CD; $\angle BAC=\angle DCA$; $\angle 1=\angle 2$, т. к. $\angle ABE=\angle ADF=\angle CDF$

значит $\Delta ABE=\Delta CDF$ по 2-му признаку.

140.



Дано: AM=CM

$A_1M_1=C_1M_1$

$BM=B_1M_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

<u>Доказательство:</u>

Из $AC=A_1C_1$ т. е. $\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}A_1C_1$, получаем $AM=A_1M_1$

Рассмотрим ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$:

$AB=A_1B_1$; $BM=B_1M_1$; $AM=A_1M_1$

значит $\Delta ABM=\Delta A_1B_1M_1$ по 3-му признаку

следовательно, $\angle A=\angle A_1$

Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC

$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$,

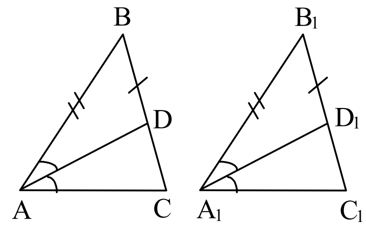
значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку.

141.

Дано: AD, A_1D_1 — биссектрисы

$AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$, $AD=A_1D_1$

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$



<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим $\Delta A_1B_1D_1$ и ΔABD

$AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$,

$BD=B_1D_1$, значит $\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$ по 3-му признаку

следовательно, $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$, $\angle B=\angle B_1$

Из AD и A_1D_1 — биссектрисы, получаем $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$

Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:

$AB=A_1B_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$

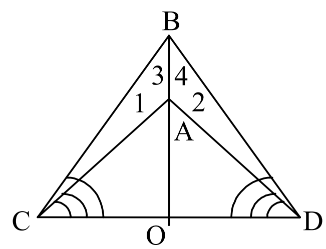
тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

142.

Дано: BC=BD, AC=AD

Доказать: а) $\angle ADB=\angle ACB$

б) DO=OC



<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔABD и ΔABC

CB=BD; AC=AD

сторона BA — общая

тогда $\Delta ABC=\Delta ABD$ по 3-му признаку

следовательно, $\angle ACB=\angle ADB$; $\angle CBA=\angle DBA$

Рассмотрим ΔDBO и ΔCBO:

сторона BO — общая;

BC=BD; $\angle CBO=\angle DBO$, тогда $\Delta CBO=\Delta DBO$ по 1-му признаку и значит CO=OD, что и требовалось доказать.

§ 4. Задачи на построение

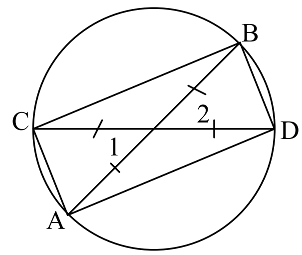
143.

а) хорды окружности: MN; CD; AB;

б) диаметр: AB;

в) радиусы: OP; OA;BO

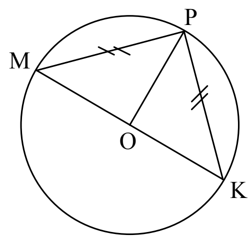
144.



Дано: AB, CB — диаметры
Доказать: а) BD=AC
б) AD=BC
в) $\angle BAD=\angle BCD$

<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим ΔBOD и ΔAOC
OA=OB=R — радиус
CO=OD=R — радиус
$\angle 1=\angle 2$ т. к. они вертикальные
значит $\Delta AOC=\Delta BOD$ по 1-му признаку, следовательно, AC=BD.
Также из $\Delta AOB=\Delta BOC$ следует AD=BC.
Рассмотрим ΔABD и ΔOBC; сторона DB — общая;
BC=AD; PC=AB, значит $\Delta ABC=\Delta ABD$ и тогда $\angle DAB=\angle ABD$.

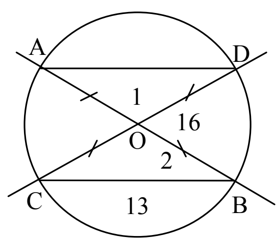
145.



Дано: MK — диаметр
MP=KP
$\angle POM$=?

<u>Решение:</u>
Из MP=PK следует, что ΔMPK — равнобедренный
Т. к. MO=OK — радиусы, то PO — медиана равнобедренного ΔMPK, опущенная на основание, тогда PO — биссектриса и высота (по свойству равнобедренного треугольника) и $\angle MOP=90°$.
Ответ: 90°.

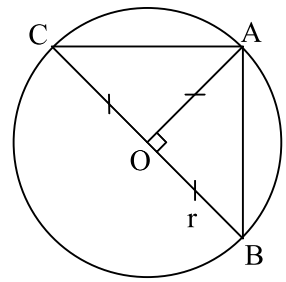
146.



Дано: AB, CD — диаметры
CB=13 см, AB=16 см
P_{AOD}=?

<u>Решение:</u>
Рассмотрим ΔCOB и ΔAOD:
AO=OB=OC=OD (как радиусы)
$\angle 1=\angle 2$ т. к. они вертикальные
значит $\Delta AOD=\Delta COB$ по 2-му признаку
следовательно, AD=CB=13 см и AO=OB=OC=OD=8 см, тогда
P_{AOD}=AO+OD+AD=8+8+13=29 см
Ответ: 29 см.

147.



Дано: $\angle AOB=90°$

BC — диаметр.

Доказать: $AC=AB$

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔBOA и ΔCOA:

сторона OA — общая

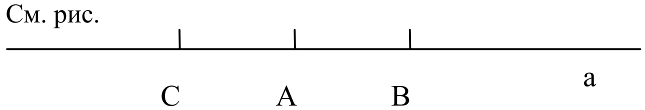
$CO=OB$ — радиусы; $\angle COA=\angle BOA=90°$

значит $\Delta COA=\Delta BOA$ по 1-му признаку

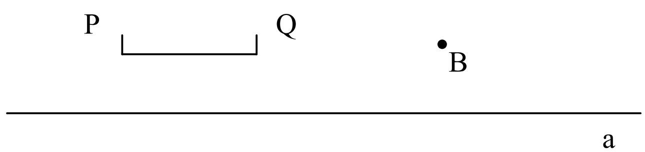
и $AC=AB$, что и требовалось доказать.

148.

См. рис.

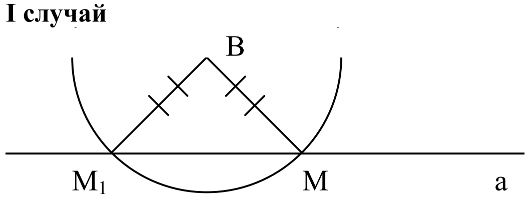


149.



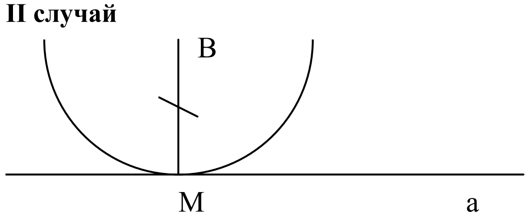
Возможны три случая:

I случай



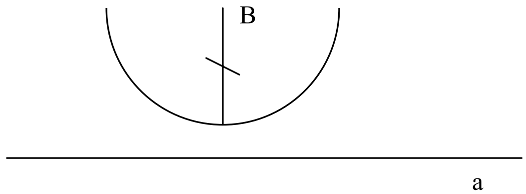
на прямой есть 2 точки, удаленные от B на расстояние PQ.

II случай



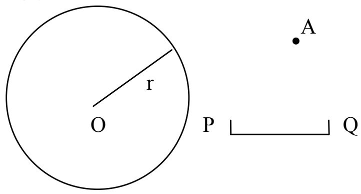
одна точка на прямой, которая удалена от B на расстояние PQ.

III случай



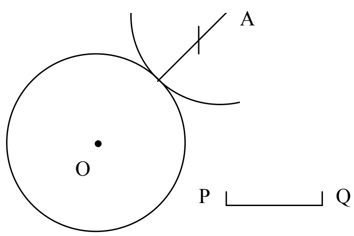
не существует такой точки на прямой *a*.
PQ=BM — радиус окружности с центром в точке B, так мы строим M. В третьем случае задача не имеет решения.

150.



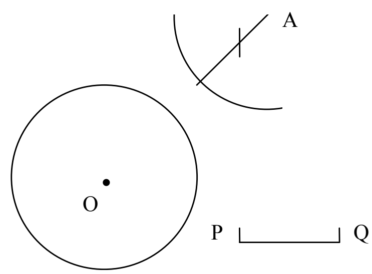
Снова возможны 3 случая:
Построение делаем как и в предыдущей задаче. И опять задача не всегда имеет решение, пример — 3 случай.
AM=AM′=PQ

2 точки



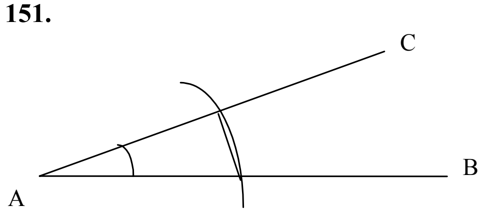
AM=PQ

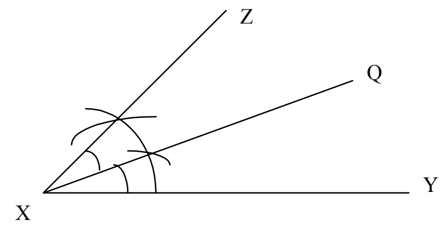
1 точка



не существует такой точки M.

151.

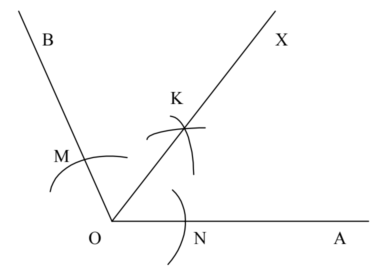




Построение:

С помощью циркуля построим $\angle YXQ=\angle BAC$, от луча XQ при помощи циркуля отложим еще раз $\angle QXZ=\angle BAC$ и получим $\angle YXZ=2\angle BAC$

152.



Построение:

Построим окружность с центром в O любого радиуса. Окружность пересечет стороны угла в точках N и M.

Построим 2 окружности с одинаковым радиусом, большим половины длины отрезка MN. Одна окружность с центром M, а другая с центром N. Эти окружности пересекутся в точке K. OK и есть искомый луч.

153.

Построение приведено в учебнике.

154.

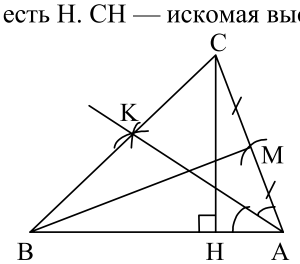
Построение:

а) Построение биссектрисы AK приведено в задаче о построении биссектрисы угла.

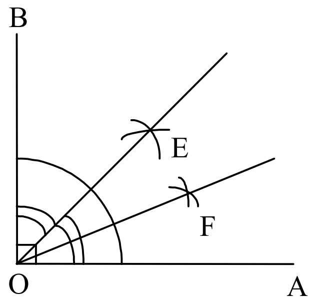
б) Строим точку M — середину CA (по задаче о построении середины отрезка).

в) Построим прямую a так, чтобы $C \in a$ и $a \perp AB$ (задача 153).

Пересечение AB и a есть H. CH — искомая высота.

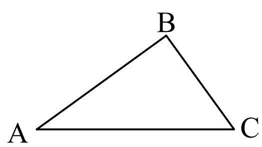


155.



Построение:
С помощью треугольника построим $\angle AOB=90°$ - прямой.
Построим биссектрису OE, имеем: $\angle AOE=\angle BOE=45°$.
Построим OF — биссектрису $\angle AOE$. Имеем:
$\angle AOF=\angle EOF=22°30'$.
Что и требовалось построить.

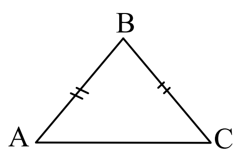
156.



Дано: $P_{ABC}=15$ см
$BC=AB+2$, $AC=AB+1$
AB, BC, AC=?

<u>Решение:</u>
Пусть $AB=x$ см, т. к. $P_{ABC}=AB+BC+AC$, то $15=x+x+2+x+1$, $3x=12$, $x=4$ см
Ответ: BC=6 см, AC=5 см, AB=4 см.

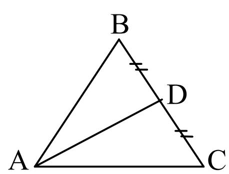
157.



Дано: AB=BC
AC=AB+2
AC+3=AB+BC
AB, BC, AC=?

<u>Решение:</u>
Пусть $AB=BC=x$ см, тогда $AC=x+2$ см и $x+2+3=x+x$, $x=5$ значит, AB=BC=5 см, AC=7 см.
Ответ: 5 см; 5 см; 7 см.

158.



Дано: AB=BC, AC=8 см
$P_{ABD}=P_{ADC}+2$ см; BD=CD.
AB=?

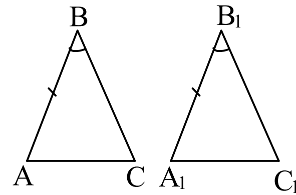
<u>Решение:</u>
$P_{ABD}=AB+BD+AD$ значит $P_{ABD}-P_{ADC}=2$ см
$P_{ADC}=AC+CD+AD$ значит $AB+BD+AD-AC-CD-AD=2$
$AB-AC=2$; из AC=8, следует $AB-8=2=10$ см
Ответ: 10 см.

159.

Дано: $AB=BC$; $A_1B_1=B_1C_1$

$AB=A_1B_1$, $\angle B=\angle B_1$

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$



<u>Доказательство:</u>

Имеем $AB=BC=A_1B_1=B_1C_1$ — из условия

Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:

$AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку.

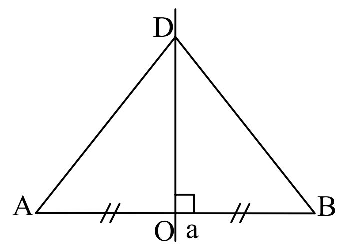
160.

Дано: $AO=OB$, $\angle AOD=\angle BOD=90°$

Доказать: 1) $AD=DB$

2) если $AD=DB$, то $D\in a$.

<u>Доказательство:</u>



1) Рассмотрим ΔBDO и ΔADO

сторона DO — общая,

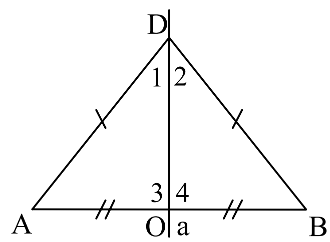
$AO=OB$

значит $\angle AOD=\angle BOD=90°$

$\Delta AOD=\Delta BOD$ по 2-му признаку

тогда $AD=DB$.

2)



Докажем обратное

если $AB=AD$, то $D\in a$

Рассмотрим ΔBDO и ΔABO:

$AD=BD$, $AO=OB$, сторона DO — общая, значит $\Delta ADO=\Delta BDO$ по 3-му признаку, следовательно, $\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$; $\angle 3$, $\angle 4$ — смежные и $\angle 3=\angle 4$, значит, $\angle 3=\angle 4=90°$ и, значит, $DO\perp AB$, и DO и a совпадают, т.е. $D\in a$.

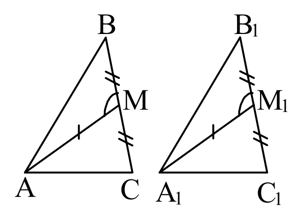
161.

Дано: AM, A_1M_1 — медианы,

$AM=A_1M_1$, $BC=B_1C_1$,

$\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1=\Delta ABC$



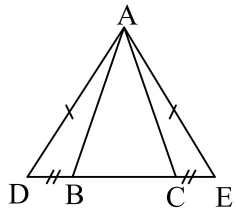
<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим $\Delta A_1B_1M_1$ и ΔABM:

$AM=A_1M_1$, $BM=B_1M_1$ (т. к. $BM=\frac{1}{2}BC$; $B_1M_1=\frac{1}{2}B_1C_1$ и $BC=B_1C_1$)

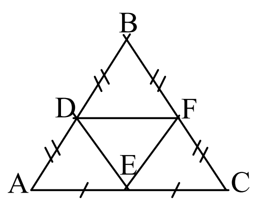
$\angle M=\angle M_1$, значит $\Delta ABM=\Delta A_1B_1M_1$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle B=\angle B_1$, $AB=A_1B_1$.
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC
$AB=A_1B_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BC=B_1C_1$, тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку, что и требовалось доказать.

162.



Дано: $AD=AE$
а) $BD=CE$
Доказать: $\angle CAD=\angle BAE$, $AB=AC$
б) $\angle CAD=\angle BAE$
Доказать: $BD=CE$, $AB=AC$
а) Рассмотрим ΔAEC и ΔADB:
$AD=AE$, $DB=CE$, $\angle D=\angle E$ углы при основании равнобедренного треугольника, тогда $\Delta ADB=\Delta AEC$ по 1-му признаку, значит $AC=AB$.
Рассмотрим ΔEBA и ΔDAC
$AD=AE$, $AC=AB$; $DC=BE$, потому что $BD=CE$ и BC — общая сторона, тогда $\Delta DAC=\Delta EBA$ по 3-му признаку, значит $\angle CAD=\angle BAE$.
б) Рассмотрим ΔADC и ΔEAB
$AD=AE$, $\angle D=\angle E$ при основании равнобедренного треугольника,
$\angle CAD=\angle BAE$ значит, $\Delta DAC=\Delta EAB$ (по стороне и2 прилежащим углам), следовательно, $DC=BE$, $AC=AB$.
Что и требовалось доказать.

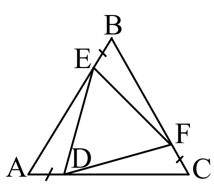
163.



Дано: $AB=BC$
E, D, F — середины AC, AB, BC
Доказать: ΔDFE — равнобедренный.

<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим ΔCEF и ΔADE:
$AD=FC$, $AE=EC$, $\angle A=\angle C$ углы при основании равнобедренного треугольника, значит $\Delta ADE=\Delta CEF$ по 1-му признаку, тогда $DE=EF$ и значит ΔDFE — равнобедренный.

164.

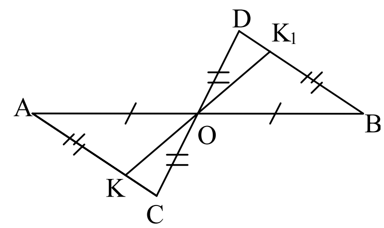


Дано: $AB=BC=AC$
$EB=FC=AD$
Доказать: $EF=FD=DE$
<u>Доказательство:</u>
Из $AB=BC=AC$, $EB=FC=AD$ следует, что
$AE=BF=CD$.

Далее:
AD=EB=FC, AE=BF=DC, ∠A=∠B=∠C (как углы равнобедренного треугольника), значит ΔAED=ΔEBF=ΔDFC по 1-му признаку, тогда DE=EF=DC и значит ΔDEF — равносторонний.

165.

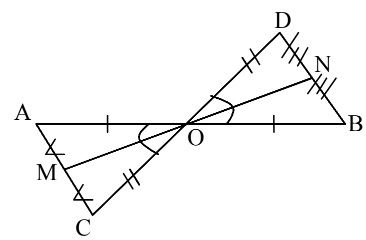
Дано: AO=OB, CO=OD, AK=BK_1
Доказать: а) OK=OK_1
б) O ∈ KK_1



Доказательство:
Рассмотрим ΔBOD и ΔAOC:
AO=OB, CO=OD,
∠AOC=∠BOD т. к. они вертикальные, значит ΔAOC=ΔBOD по 1-му признаку, следовательно, ∠A=∠B.
Рассмотрим ΔBK_1O и ΔAKO:
AK=BK_1, AO=OB, ∠A=∠B, тогда ΔAKO=Δ BK_1O по 1-му признаку, значит ∠AOK=∠BOK_1, KO=OK, ∠AOK=∠BOK_1 AB — лежит на прямой, тогда ∠AOK, ∠BOK_1 — вертикальные, и тогда O, K, K_1 лежат на одной прямой.

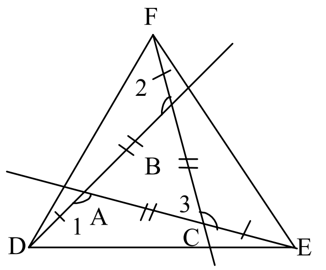
166.

Дано: AO=OB, CO=CD, AM=MC, BN=ND
Доказать: OM=ON



Доказательство:
1) Рассмотрим ΔBOD и ΔAOC:
AO=OB, CO=OD
∠AOC=∠BOD т. к. вертикальные,
значит ΔAOC=ΔBOD по 1-му признаку, следовательно, AC=BD, ∠C=∠D, ∠A=∠B
2) Рассмотрим ΔDON и ΔMOC:
OC=OD, ∠C=∠D,
MC=DN (т. к. MC=$\frac{1}{2}$ AC, DN=$\frac{1}{2}$ BD и AC=BD),
значит ΔMOC=ΔDON по 1-му признаку, и значит OM=ON, что и требовалось доказать.

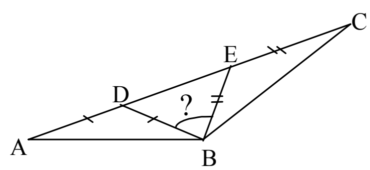
167.



Дано: AB=BC=AC, BF=CE=AD
Доказать: ΔDEF — равносторонний.

Доказательство:
Из ΔABC — равносторонний, следует ∠A=∠B=∠C, ∠1 и ∠A, ∠2 и ∠B, ∠3 и ∠C — смежные, значит, ∠1=∠2=∠3.
Рассмотрим ΔFEC и ΔDEA и ΔDBF
BF=CE=AD
DB=FC=AE (AB=BC=AC и DA=BF=CE), ∠1=∠2=∠3, значит ΔDBF=ΔFEC=ΔDEA по 1-му признаку, следовательно, FD=FE=DE и ΔDFE — равносторонний.

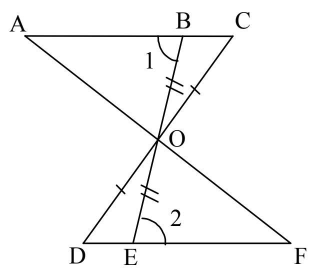
168.



Дано: ∠A=38°, ∠B=110°, ∠C=32°
BD=DA, BE=EC, ∠DBE=?

Решение:
т. к. ΔADB — равнобедренный, то ∠A=∠DAB=∠ABO=38°
т. к. ΔBEC — равнобедренный, то ∠C=∠BCE=∠CBE=32°
∠B=∠ABD+∠DBE+∠CBE или 110°=38°+∠DBE+32°, т.е. ∠DBE=40°.
Ответ: 40°.

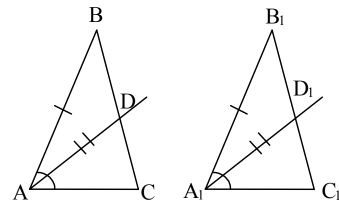
169.



Дано: OC=OD, BO=OE
Доказать: AB=EF

Доказательство:
Рассмотрим ΔEOD и ΔBOC:
BO=OE; CO=OD; ∠BOC=∠EOD т. к они вертикальные, значит ΔBOC=ΔEOD по 1-му признаку, следовательно, ∠B=∠E, ∠1, ∠B — смежные, значит, ∠1=180° – ∠B, ∠2, ∠E — смежные, значит, ∠2=180° – ∠E.
Из ∠B=∠E. следует ∠1=∠2.
Рассмотрим ΔFEO и ΔABO:
BO=OE; ∠1=∠2; ∠AOB=∠FOE т. к. они вертикальные, значит ΔABO=ΔFEO по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

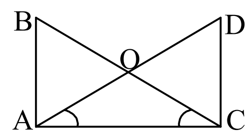
170.



Дано: $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$,
AD, A_1D_1 — биссектрисы;
$A_1D_1=AD$.
Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

<u>Доказательство:</u>
Из $\angle A=\angle A_1$ следует $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$
т. к. AD, A_1D_1 — биссектрисы.
Рассмотрим $\Delta B_1A_1D_1$ и ΔBAD:
имеем: $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$, значит $\Delta BAD=\Delta B_1A_1D_1$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle B=\angle B_1$.
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:
имеем: $AB= A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, значит $\angle B=\angle B_1$, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

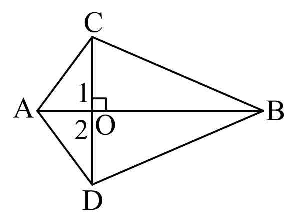
171.



Дано: $BC=AD$,
$\angle OAC=\angle OCA$
Доказать: $\Delta ABO=\Delta CDO$

<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим ΔACD и ΔABC:
сторона AC — общая, $BC=AD$, $\angle C=\angle A$, значит $\Delta ACB=\Delta ACD$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $AB=CD$.
Рассмотрим ΔDOC и ΔAOB: $AB=CO$
имеем: $\angle B=\angle D$, $\angle BAO=\angle DCO$
(т. к. $\angle BAO=\angle A-\angle DAC$, $\angle DCO=\angle C-\angle ACB$ и $\angle A=\angle C$, $\angle DAC=\angle ACB$)
значит $\Delta AOB=\Delta DOC$ по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

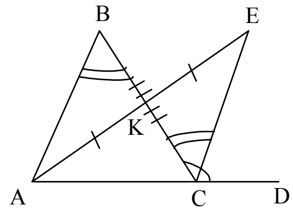
172.



Дано: $AC=AD$, $AB\perp CD$
Доказать: $BC=BD$, $\angle ACB=\angle ADB$

Доказательство:
ΔDAC — равнобедренный, потому что $AD=AC$, AO — высота, проведенная к основанию, значит AO — биссектриса и медиана ΔDAC и значит, $\angle 1=\angle 2$, $CO=OD$.
Рассмотрим ΔADB и ΔACB:
сторона AB — общая, $AC=AD$, $\angle 1=\angle 2$, $\Delta ACB=\Delta ADB$ по 1-му признаку, следовательно, $BC=BD$, $\angle ACB=\angle ADB$.

173.

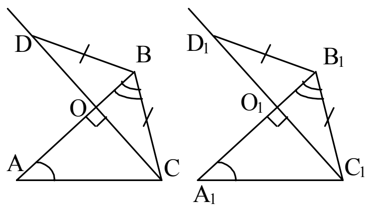


Дано: $\angle BCD$ — смежный с $\angle ACB$.
Доказать: $\angle BCD > \angle 1$, $\angle BCD > \angle 2$.

Доказательство:

$\angle ACB + \angle BCD = 180°$ следует из определения смежного угла
из ΔABC имеем
$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180°$
значит $\angle BCD = \angle CAB + \angle ABC$, но $\angle CAB > 0$ и $\angle ABC > 0$,
значит $\angle BCD < \angle CAB$, $\angle CBD < \angle ABC$, что и требовалось доказать.

174.

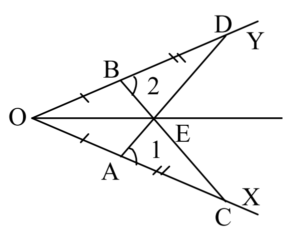


Дано: $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$
$BC = B_1C_1$
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Выполним дополнительное построение:
$\angle ABD = \angle ABC$ и $BD = BC$: $\angle A_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1$ и $B_1D_1 = B_1C_1$;
$\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники, BO, B_1O_1 — биссектрисы, тогда они медианы и высоты. а значит $DO = OC = D_1O_1 = O_1C_1$, $BO \perp DC$, $B_1O_1 \perp D_1C_1$.
Рассмотрим $\Delta A_1O_1C_1$ и ΔAOC:
$OC = O_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит $\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$ (по катету и острому углу), следовательно, $AO = A_1O_1$ значит, $AB = AO + OB = A_1O_1 + O_1B_1 = A_1B_1$ следовательно, $AB = A_1B_1$.
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:
$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку

175.



Дано: $OA = OB$, $AC = BD$
Доказать: OE — биссектриса $\angle XOY$

Доказательство:

Рассмотрим ΔBCO и ΔAOD:
угол $\angle O$ — общий, $OA = OB$, $OD = OC$ (т.к. $OD = OB + BD = OA + AC = OC$)
значит $\Delta ADO = \Delta BCO$ по 1-му признаку
следовательно, $\angle D = \angle C$, $\angle OAD = \angle OBC$

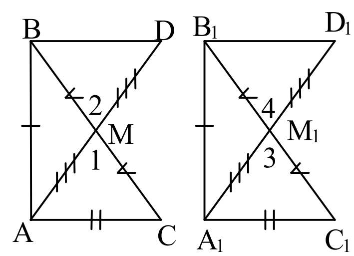
$\angle AOD$ и $\angle 1$ — смежные, следовательно, $\angle 1=180° - \angle OAD$,
$\angle OBC$ и $\angle 2$ — смежные, следовательно, $\angle 2=180° - \angle OBC$,
т. к. $\angle OAD=\angle OBC$, то $\angle 1=\angle 2$.
Рассмотрим ΔAEC и ΔBED:
$\angle 1=\angle 2$; $\angle D=\angle C$; $BD=AC$, значит $\Delta BED=\Delta AEC$ по 2-му признаку, следовательно, $DE=EC$.
Рассмотрим ΔOCE и ΔOED:
сторона OE — общая, $OD=OC$, $DE=EC$, значит $\Delta OED=\Delta OCE$ по 3-му признаку, следовательно, $\angle DOE=\angle COE$ и значит OE — биссектриса $\angle XOY$, что и требовалось доказать.

Описание способа построения биссектрисы угла, используя эту задачу.

1) построить окружность с центром в вершине угла любого радиуса. Окружность пересечет стороны угла в точках A и B.
2) построить окружности с центрами в точках A и B одинакового радиуса. Окружность с центром A и радиусом R пересечет сторону угла в точке C, также окружность с центром B и радиусом R пересечет сторону угла в точке D. Значит:
3) Построим отрезки AD и BC.
4) Они пересекутся в точке E.
5) Соединим лучом вершину угла и точку E. Полученный луч и будет биссектрисой.

176.

Дано: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$
AM. A_1M_1 — медианы
$AM=A_1M_1$
Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$



Доказательство:
1) дополнительное построение: проведем AM и A_1M_1 за точки M и M_1 и отметим на продолжениях точки D и D_1, чтобы $AM=AD$, $A_1M_1=M_1D_1$
2) Рассмотрим ΔBMD и ΔAMC:
$AM=MD$, $BM=MC$, $\angle 1=\angle 2$ т. к. они вертикальные, значит $\Delta AMC=\Delta BMD$ по 1-му признаку, следовательно, $AC=BD$ следует из $AC=A_1C_1$, $BD=B_1D_1$.
Рассмотрим $\Delta B_1M_1D_1$ и $\Delta A_1M_1C_1$:
$A_1M_1=M_1D_1$, значит $B_1M_1=M_1C_1$, $\angle 3=\angle 4$ т.к. они вертикальные,

значит $\Delta A_1M_1C_1 = \Delta B_1M_1D_1$ по 1-му признаку, следовательно, $A_1C_1 = B_1D_1$

3) Рассмотрим $\Delta A_1B_1D_1$ и ΔABD:

$AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ следует из $AM=A_1M_1$, $BD=B_1D_1$, значит $\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$, т. е. медианы BM и B_1M_1 треугольников опущены на соответственно равные стороны AD и A_1D_1.

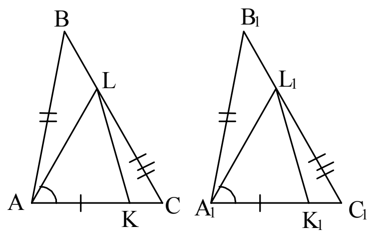
Из $BM=B_1M_1$, следует $BC=B_1C_1$ т.к. ($BC=2BM$; $B_1C_1=2\,B_1M_1$).

4) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:

$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$.

Имеем: $BC= B_1C_1$, значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 3-му признаку, что и требовалось доказать.

177.



Дано: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AK=A_1K_1$, $LC=L_1C_1$.

Доказать: а) $KL=K_1L_1$

б) $AL=A_1L_1$

<u>Доказательство:</u>

1) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:

$AB=A_1B_1$.

Имеем: $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, значит $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $BC=B_1C_1$.

2) Рассмотрим $\Delta L_1C_1K_1$ и ΔLCK:

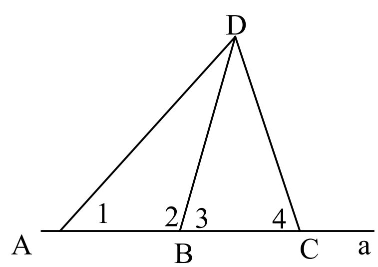
$LC=L_1C_1$.

Имеем: $\angle C=\angle C_1$, $KC=AC - AK= A_1C_1 - A_1K_1=K_1C_1$, значит $\Delta LCK=\Delta L_1C_1K_1$ по 1-му признаку, следовательно, $LK=L_1K_1$.

3) Рассмотрим $\Delta A_1B_1L_1$ и ΔABL:

$AB= A_1B_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BL=BC - LC=B_1C_1 - L_1C_1=B_1L_1$, значит $\Delta ABL=\Delta A_1B_1L_1$ по 1-му признаку, следовательно, $AL=A_1L_1$, что и требовалось доказать.

178.



Дано: см.рисунок

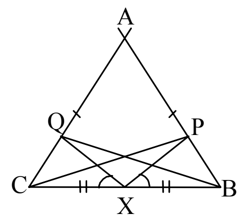
Доказать: хотя бы два из трех отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

<u>Доказательство:</u>

Допустим, что $AD=BD=CD$

ΔABD, ΔBDC и ΔADC — равнобедренные, и тогда

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $\angle 1=\angle 4$, откуда $\angle 2=\angle 3$, но $\angle 2$, $\angle 3$ — смежные, значит $\angle 2=\angle 3=90°$, а это противоречит теореме о том. что через точку не лежащую на прямой можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой, значит наше предположение неверно, а верно то, что надо доказать.



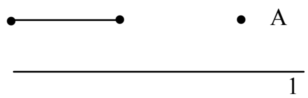
179.

Дано: AB=AC, BX=XC, $\angle PXB=\angle QXC$.
Доказать: BQ=CP.

<u>Доказательство:</u>
ΔABC — равнобедренный, следует $\angle B=\angle C$.
Рассмотрим ΔBPX и ΔCQX:
CX=BX

Имеем: $\angle QXC=\angle PXB$, $\angle C=\angle B$, значит $\Delta CQX=\Delta BPX$ по 2-му признаку, следовательно, CQ=PB, QX=XP.
Рассмотрим ΔBPC и ΔCQB:
CQ=PB, сторона CB — общая, $\angle C=\angle B$, значит $\Delta COB=\Delta BPC$ по 2 – му признаку следовательно, QB=BC ч.т.д.

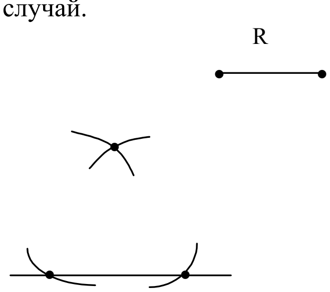
180.



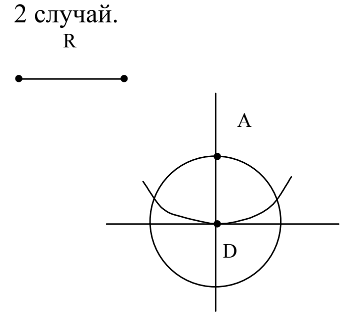
План построения:
1) построим окружность с центром в точке A и радиусом R.
2) Эта окружность пересечет прямую 1 в двух точах; в одной точке или не пересечет.
3) Значит будет иметь два решения, одно или не одного.

3 случая

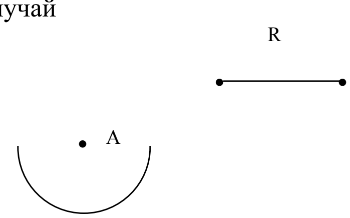
1случай.



2 случай.

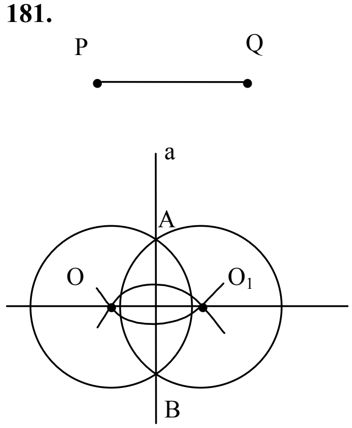


3 случай



1) центр искомой окружности может быть или B, или C. Т.е. задача имеет 2 решения.
2) центр искомой окружности D. Т.е. задача имеет одно решение.
3) задача не имеет решения. На прямой 1 нет точки, удаленной от A на расстояние R.

181.



Планы построения:

1) построим окружность с центром в A и радиусом PQ и окружность с центром в B тем же радиусом.
2) Эти окружности пересекутся в точках O и O_1, в точке O или не пересекутся.
3) Значит будем иметь два решения, одно или не одного.

1 случай

1) если AB<2PQ, то центр искомой окружности может быть или O, или O_1. 2 решения.

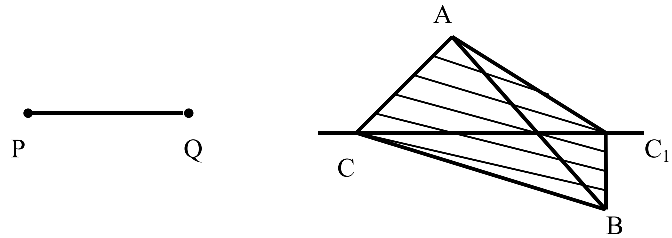
2 случай

2) если AB=2PQ, то центр искомой окружности O. Одно решение.

3 случай

1) если AB>2PQ, то задача не имеет решения.

182.



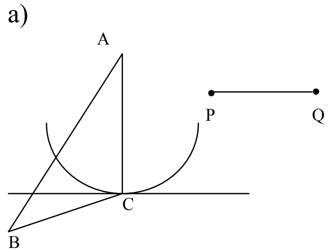
Построить: ΔABC чтобы $C \in \alpha$, $AC=PQ$

План построения:

1) построим окружность в A и радиусом PQ.
2) Окружность пересечет прямую *a* в двух точках в одной точке, *a* может и не пересекать окружность. Обозначим эти точки C и C_1.
3) Соединим точки A, B, C, и A, B, C_1, получим треугольники ΔABC и ΔABC_1. Эти треугольники удовлетворяют требованиям задачи. Данная задача имеет два решения. Также может иметь одно или ни одного решения.

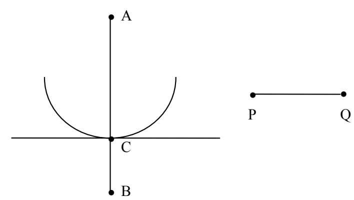
Например:

а)



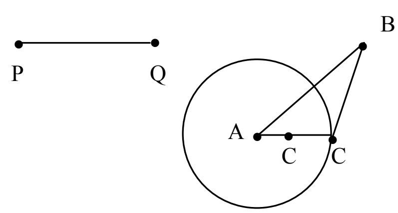
Одно решение.

б)



Не имеет решения , т.к. ABC-отрезок.

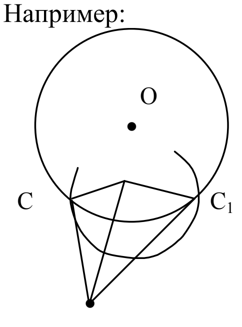
183.



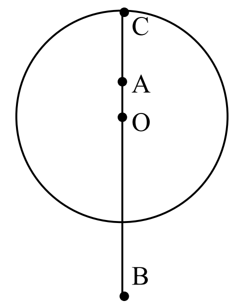
План построения:

1) построим окружность с центром в A и радиусом PQ.
2) Данная и построенная окружности пересеклись в C.
3) Соедеим точки A; B; C и получим ΔABC. Задача может иметь два или ни одного решения

Например:



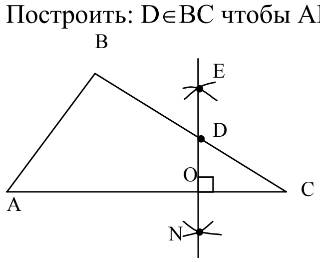
ΔABC и ΔABC_1 – искомые



Задача не имеет решения. Т.к. ABC – отрезок.

184.

Построить: $D \in BC$ чтобы $AD=DC$.



План построения:

1) построим две окружности с центром в A и в C равными радиусам, но больше половины AC.
2) Окружности пересекутся в точках E и N.
3) EN и BC пересекутся в точке D которая и есть искомая точка.

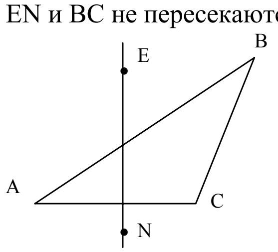
<u>Доказательство:</u>

В ΔADC, DO – серединный перпендикуляр, т.е. ΔADC – равнобедренный, значит $AD=AC$.

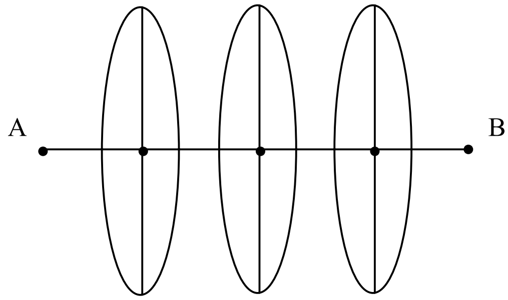
Задача может и не иметь решения.

Например:

EN и BC не пересекаются, т.е. нет такой точки $D \in [BC]$, что $AD=DC$.



185

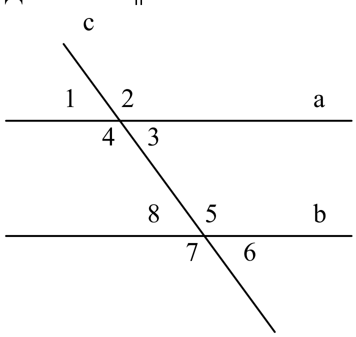


План решения:
Делим отрезок паполам, и его каждую половину – паполам.

Глава III

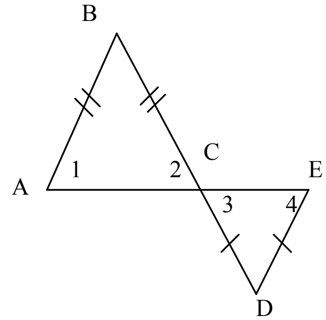
§1. Признаки параллельности двух прямых.

186
Дано:
а) $\angle 1 = 37^0$, $\angle 7 = 143^0$
б) $\angle 1 = \angle 6$
в) $\angle 1 = 45^0$, $\angle 7 = 3\angle 3$
Доказать: a||b.



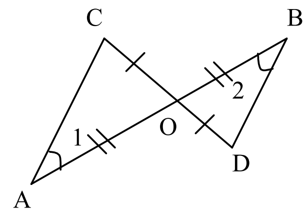
а) Доказательство:
$\angle 1=\angle 3=37^0$ т.к. они вертикальные
$\angle 7=\angle 5=143^0$ т.к. они вертикальные
$\angle 3$, $\angle 5$ – соответственные углы при прямых a, b и секущей c
и $\angle 3+\angle 5=37^0+143^0=180^0$, значит по признаку параллельности прямых a||b.
б) Доказательство:
$\angle 1=\angle 3$ т.к. они вертикальные
$\angle 6=\angle 8$ т.к. они вертикальные
$\angle 1=\angle 6$ отсюда $\angle 3=\angle 8$
так как $\angle 3$ и $\angle 8$ накрест лежащие при прямых a, b и секущей c и
$\angle 3+\angle 5=45^0+135^0=180^0$ следовательно a||b.
в) Доказательство:
$\angle 1=\angle 3=45^0$ т.к. $\angle 1$ и $\angle 3$ - вертикальные
$\angle 7=3\angle 3$, следует $\angle 7=135^0$
$\angle 5=\angle 7=135^0$ - $\angle 5$ и $\angle 7$ – вертикальные
$\angle 3$, $\angle 5$ – соответственные углы при прямых a, b и секущей c и
$\angle 3+\angle 5=45^0+135^0=180^0$ следовательно a||b.

187.
Доказать: AB||DE.



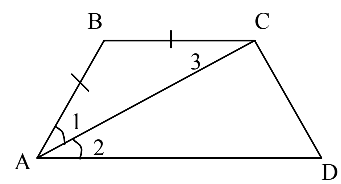
Доказательство:
ΔABC – равнобедренный, потому что AB=BC, ∠1=∠2 как углы при основании равнобедренного треугольника.
ΔCDE –равнобедренный, потому что CD=ED.
Следовательно ∠3=∠4, ∠2=∠3 т.к. они вертикальные, ∠1=∠2, ∠3=∠4 откуда, ∠1=∠2=∠3=∠4, т.е. ∠1 и ∠4 – накрест лежащие при прямых AB, DE и секущей AE, и значит AB||DE, по признаку параллености.

188.
Дано:
AO=OB, CO=OD.
Доказать: AC||BD



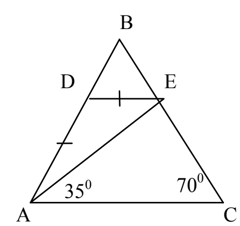
Доказательство:
Рассмотрим ΔBDO и ΔACO: AO=OB.
Имеем: CO=OD, ∠COA=∠DOB т.к. они вертикальные, значит , ΔAOC=ΔBOD по 1-му признаку равенства Δ.
Следовательно ∠1=∠2, а так как ∠A и ∠B – накрест лежащие при прямых AC, BD и секущей AB, то AC||BD.

189.
Доказать: BC||AD.



Доказательство:
Рассмотрим ΔABC:
AB=BC, следовательно
∠1=∠3 как углы при основании равнобедренного Δ.
∠1=∠2, ∠1=∠3 значит ∠2=∠3, ∠2 и ∠3 – накрест лежащие при прямых BC, AD и секущей AC, значит BC||AD.

190.
Дано: AB=BC, AD=DE, ∠C=70^0 ∠EAC=35^0.
Доказать: DE||AC.



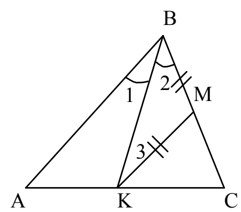
Доказательство:
AB=BC, значит ∠A=∠C=70^0 как углы при основании равнобедренного Δ.

$\angle EAC=35^0$

Из $\angle A=70^0$ следует $\angle DAE=35^0$

ΔADE – равнобедренный, значит, $\angle DEA=\angle EAC=35^0$, $\angle DEA$ и $\angle EAC$ – накрест лежащие при прямых DE и AC и секущей AE, следовательно DE||AE ч.т.д.

191.



Дано: $\angle CBK=\angle ABK$, BK=KM

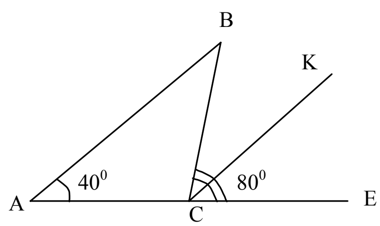
Доказать: KM||AB.

<u>Доказательство:</u>

Из BM=MK, следует ΔBMK – равнобедренный, тогда $\angle 2=\angle 3$ по св-ву равнобедренного Δ.

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 2=\angle 3$, тогда, $\angle 1=\angle 3$, $\angle 1$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при прямых AB и KM, и секущей BK, значит AB||KM, по признаку.

192.



Дано: $\angle A=40^0$,

$\angle BCE$, $\angle ACB$ – смежные углы

$\angle BCE=80^0$

$\angle BCK=\angle ECK$

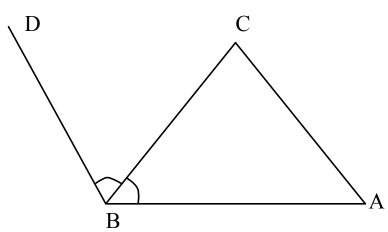
Доказать: AB||CK

<u>Доказательство:</u>

$\angle BCK=\angle KCE=\frac{1}{2}\angle BCE=40^0$

$\angle BAC$ и $\angle KCE$ –соответственные при прямых AB, CK и секущей AC и $\angle BAC=\angle KCE=40^0$, значит AB||CK ч.т.д.

193.



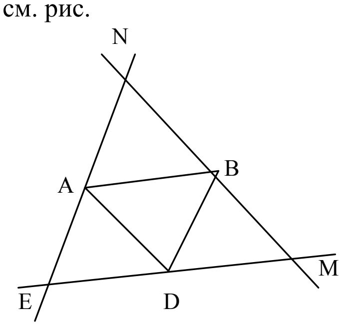
<u>Доказательство:</u>

$\angle ABC=70^0$, то $\angle DBA=140^0$ (т.к. BC — биссектриса)

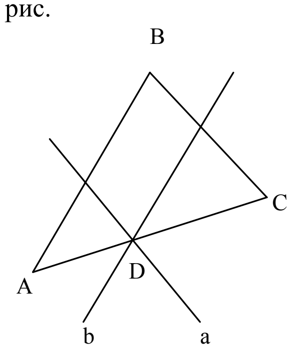
$\angle DBA$ и $\angle A$ – односторонние при прямых AC, BD и секущей AB,

$\angle DBA+\angle A=140^0+40^0=180^0$, значит DB||AC по признаку параллельности прямых, ч.т.д.

194.
см. рис.



195.
см. рис.

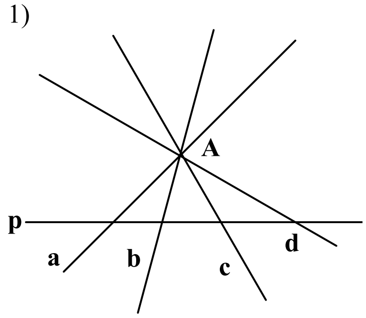


§ 2. Аксиома параллельных прямых

196.
Ответ: одну прямую || AB.

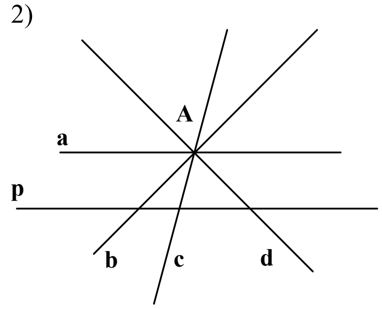
197.
Имеем 2 случая:

1)



4 прямые

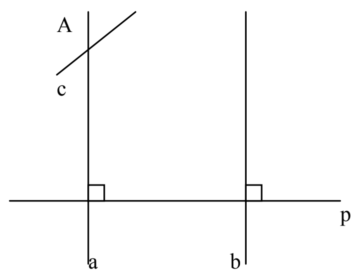
2)



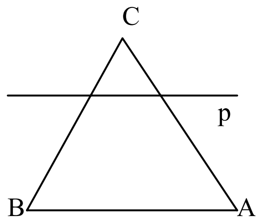
3 прямые

198.

<u>Доказательство:</u>
a⊥p и b⊥p, следует, что
b||a (по признаку параллельности двух прямых). Если с пересекает a, то по аксиоме с пересекает и b, ч.т.д.



199.



Дано: p||Ab,

Доказать: $BC \cap p$ и $AC \cap p$

Доказательство:

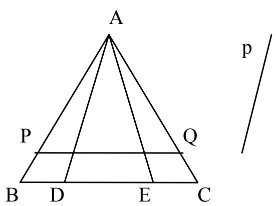
$BC \cap AB = B$

AB||p, значит по следствию из аксиомы

$BC \cap p$

Аналогично $AC \cap p$

200.



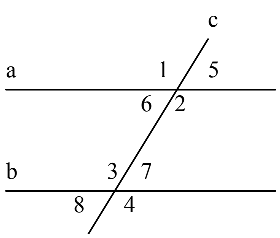
Дано: AP||p, PQ||BC

Доказать: p – пересекает AB, AE,BC, PQ.

Доказательство:

Прямая AP пересекает AB, AE, AC, BC и PQ. Значит, по следствию прямая P пересекает AB, AE, AC, BC и PQ ч.т.д.

201.



Дано:

$\angle 2+\angle 3=210^0$, a||b; $\angle 1$, $\angle 2$, … $\angle 8$=?

Решение:

$\angle 2$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при параллельных прямых.

Значит $\angle 2$-$\angle 3$

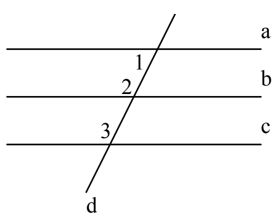
$\angle 2=\angle 3=210^0:2=105^0$ (т.к. $\angle 2+\angle 3=210^0$)

$\angle 1=\angle 2=105^0$ т.к. эти углы вертикальные, $\angle 3=\angle 4=105^0$; $\angle 2$, $\angle 6$ – смежные, следовательно, $\angle 2+\angle 6=180^0$ т.е.

$\angle 6=180^0-105^0=75^0$, $\angle 5=\angle 6=75^0$ (т.к. они вертикальные) при параллельных, $\angle 7=\angle 6=75^0$, $\angle 8=\angle 7=75^0$ т.к. они вертикальные.

Ответ: 105^0, 105^0, 105^0, 105^0, 75^0, 75^0, 75^0, 75^0.

202.



Дано: $\angle 1=42^0$, $\angle 2=140^0$, $\angle 3=138^0$

Какие из a, b, c –параллельны ?

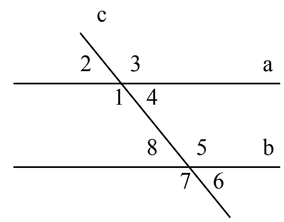
Решение:

$\angle 1$, $\angle 2$ – односторонние при a, b и секущей d

и $\angle 1+\angle 2=42^0+140^0=182^0\neq 180^0$, т.е. $a \nparallel b$

$\angle 1$, $\angle 3$ – односторонние при a, c и секущей d и $\angle 1+\angle 3=42^0+138^0=180^0$, т.е. a||c, $\angle 2$, $\angle 3$ – односторонние при b, c и секущей d и $\angle 2\neq\angle 3$, т.е. a b.
Ответ: две прямые a и c.

203.

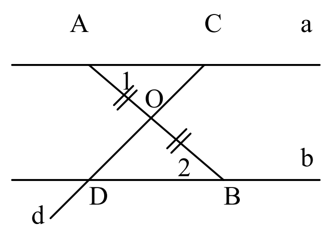


Дано: a||b,
а) $\angle 1=150^0$
б) $\angle 1=\angle 4+70^0$
$\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 8=?$

<u>Решение:</u>
а) $\angle 1=150^0$ следовательно, $\angle 3=\angle 1=150^0$ т.к. они вертикальные,
$\angle 5=\angle 1=150^0$ (как накрест лежащие при параллельных)
$\angle 7=\angle 5=150^0$ – вертикальные, $\angle 1$, $\angle 4$ – смежные, следовательно,
$\angle 1+\angle 4=180^0$, $\angle 4=180^0-150^0=30^0$, $\angle 2+\angle 4=30^0$ т.к. они вертикальные,
$\angle 8=\angle 4=30^0$ (как накрест лежащие при параллельных)
$\angle 6+\angle 8=30^0$ – вертикальные.
Ответ: 30^0, 150^0 ,30^0, 150^0 ,30^0, 150^0, 30^0.
б) Пусть $\angle 1=x$, тогда $\angle 4=x-70$
$\angle 1$, $\angle 4$ – смежные, следовательно, $x+x-70=180$, $2x=250$, $x=125$,
$\angle 1=125^0$, $\angle 4=\angle 1-70=55^0$.
По примеру пункта а) имеем:
$\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=125^0$, $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=55^0$.
Ответ: 125^0, 55^0.

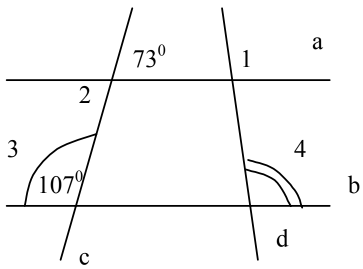
204.

Дано: a||b, AO=OB
Доказать: CO=OD



<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим ΔBOD и ΔAOC:
AO=BO
$\angle AOC=\angle BOD$ т.к. они вертикальные
$\angle 1=\angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных a и b)
Значит, ΔAOC=ΔBOD по 2-му признаку равенства Δ.
Следовательно CO=OD, ч.т.д.

205.

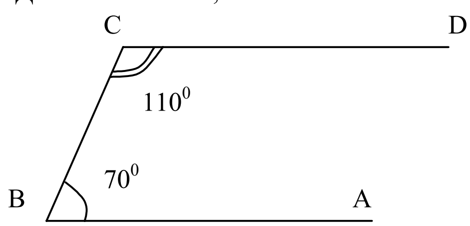


$\angle 1=?$

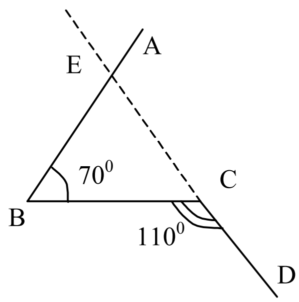
<u>Доказательство:</u>
$\angle 2$ и угол 73^0 вертикальные следовательно $\angle 2=73^0$
$\angle 2$, $\angle 3$ – односторонние при прямых a, b и секущей c
и $\angle 2+\angle 3=73^0+107^0=180^0$ следовательно по признаку параллельности прямых a||b.
$\angle 1$, $\angle 4$ – соответственные углы при параллельных a и b следовательно $\angle 1=\angle 4=92^0$.
Ответ: 92^0.

206.

Дано: $\angle ABC=70^0$, $\angle BCD=110^0$



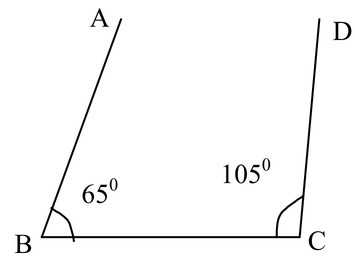
<u>Решение:</u>
1) $\angle C$ и $\angle B$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC,
и $\angle B+\angle C=70^0+110^0=180^0$, следовательно , AB||CD по признаку параллельности прямых.
Значит, AB и CD могут быть параллельными.
Рассмотрим другую ситуацию:



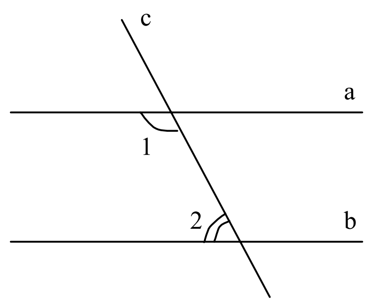
2) Здесь прямые AB и CD пересекаются в E, значит AB и CD могут пересекаться.

207.

Дано: $\angle ABC=65^0$, $\angle BCD=105^0$.
$\angle B$ и $\angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC,
и $\angle B+\angle C=65^0+105^0=170^0\neq 180^0$,
следовательно, AB $\nparallel$ CD, т.е. AB и CD не могут быть параллельны.
И значит они пересекаются



208.



Дано:a||b

$\angle 1$-$\angle 2$=50^0, $\angle 1$, $\angle 2$=?

Решение:

Из a||b следует, что $\angle 1+\angle 2=180^0$.

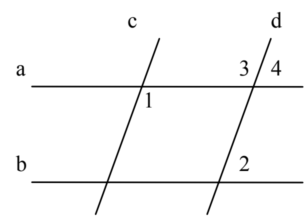
Пусть $\angle 1$=x, тогда $\angle 2=x-50$

и $x+x$-x-50=180, 2x=230, x=115, т.е.

$\angle 1=115^0$, $\angle 2=55^0$

Ответ: 115^0, 55^0.

209.



Дано: a||b, c||b

$\angle 4=45^0$

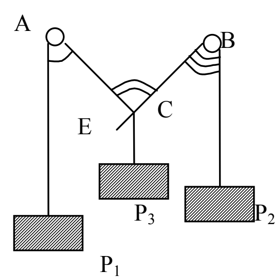
$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$=?

Решение:

$\angle 3$, $\angle 4$ – смежные, следовательно $\angle 3+\angle 4=180^0$, значит $\angle 3+45^0=180^0$, тогда $\angle 3=135^0$, $\angle 1$, $\angle 3$ – накрест лежащие при c||d и секущей, тогда $\angle 1=\angle 3=135^0$ (по свойству); $\angle 2$, $\angle 4$ – соответственные при a||b и секущей d, тогда $\angle 2=\angle 4=45^0$ (по свойству).

Ответ: 135^0, 45^0, 135^0.

210.



Дано: $AP_1||BP_2||CP_3$.

Доказать: $\angle ACB=\angle CAP_1+\angle CBP_1$.

Доказательство:

$AP_1||CP_3$, значит, $\angle P_1AC+\angle ACP_3=180^0$;

$CP_3||BP_2$, значит, $\angle P_2BC=\angle P_3CE$

и $\angle P_1AC+\angle P_3CE+\angle ACE=180^0$

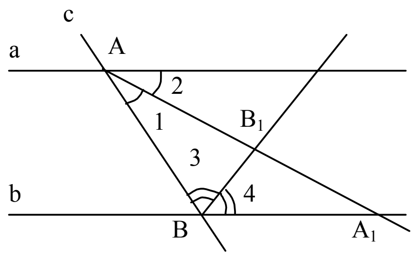
$(\angle P_1AC+\angle P_2BC)+\angle ACE=180^0$ (1)

$\angle ACE$ и $\angle ACB$ – смежные, следовательно, $\angle ACE+\angle ACB=180^0$ (2)
сравнивая (1) и (2) получим $(\angle P_1AC+\angle P_2BC)+\angle ACE=180^0$,
$\angle ACE+\angle ACB=180^0$, $\angle ACB=\angle P_1AC+\angle P_2BC$ ч.т.д.

211.

а) Дано: $a \| b$; AA_1 – биссектриса $\angle A$; BB_1 — биссектриса $\angle B$.
Доказать: а) $AA_1 \| BB_1$; б) $AA_1 \perp BB_1$.

Доказательство:
$\angle A=\angle B$ как накрест лежащие при параллельных
Из AA_1 и BB_1 – биссектрисы равных углов, следует, что
$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$; $\angle 2$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при прямых AA_1 и BB_1 и секущей с и $\angle 2=\angle 3$, следовательно, $AA_1 \| BB_1$.



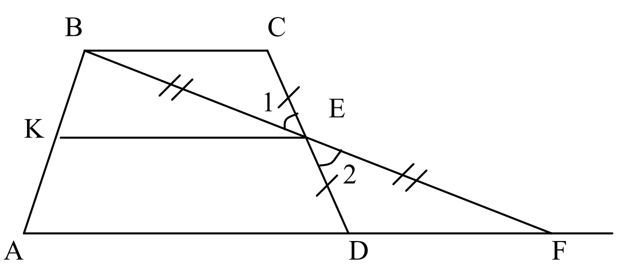
б)
Доказательство:
Т.к. они односторонние при параллельных a и b.
$\angle A+\angle B=180^0$
Из AA_1 и BB_1 – биссектрисы равных углов $\angle A$ и $\angle B$, следует
Что $\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$.
Рассмотрим ΔAB_1B:
$\angle 1+\angle 3+\angle B_1=180^0$ по теореме о сумме углов Δ, тогда,
$\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)+\ \angle B_1=180^0$, следовательно, $\frac{1}{2}\,180^0+\angle B_1=180^0$ или $90^0+\angle B_1$, т.е. $\angle B_1=90^0$, откуда получаем, что $AA_1 \perp BB_1$ ч.т.д.

212.

Решение приведено в учебнике.

213.

Дано: $CE=ED$, $BE=EF$, $KE \| AD$.
Доказать: $KE \| BC$.



Доказательство:

Рассмотрим ΔFDE и ΔBCF, BE=EF, E=ED $\angle 1=\angle 2$ – как вертикальные, значит $\Delta BCE=\Delta FDE$ по 1-му признаку равенства Δ.

Тогда $\angle CBE=\angle DFE$, $\angle CBE$ и $\angle DFE$ – накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BF и $\angle CBE=\angle DFE$ следовательно BC||AD по признаку параллельности прямых.

KE||AD, BC||AD сдедовательно, KE||BC по свойству параллельных прямых ч.т.д.

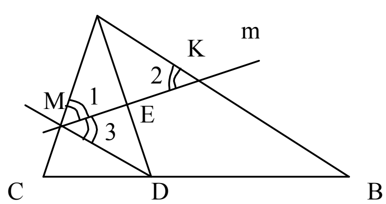
214.

Дано:

AD – биссектирса $\angle A$

AE=ED

Доказать: MD||AD



Доказательство:

Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔMAE и ΔKAE, сторона AE – общая, $\angle MAE=\angle KAE$, значит Δ MAE = ΔKAE (по катету и острому углу), следовательно, $\angle 1=\angle 2$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔAME и ΔDME, сторона ME – общая, AE=ED.

Значит $\Delta AME=\Delta DME$ (по 2 равным катетам), следовательно $\angle 1=\angle 3$

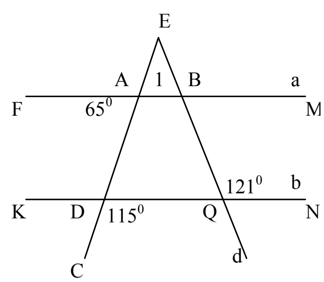
$\angle 2=\angle 3$ – накрест лежащие при прямых AB и MD и секущей MK, и $\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$ откуда $\angle 2=\angle 3$, и значит, AB||MD (по признаку параллельности прямых).

215.

Дано: см. рис.

$\angle 1=?$

Решение:



$\angle KDA=\angle CDQ=115^0$ т.к. они вертикальные

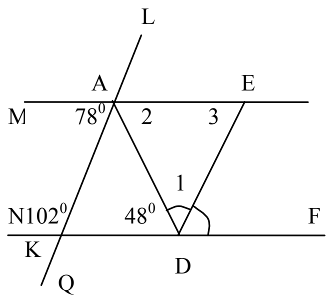
$\angle FAD$ и $\angle KDA$ – односторонние при прямых a и b

и секущей с и $\angle FAD+\angle KDA=$ $=65^0+115^0=180^0$, следовательно, a||b, $\angle DAB$ и $\angle BQN$ – смежные, тогда $\angle DOB=180^0-121^0=59^0$.

Из a||b следует, что $\angle 1=\angle DQB=59^0$ (как соответственные при параллельных прямых).

Ответ: 59^0.

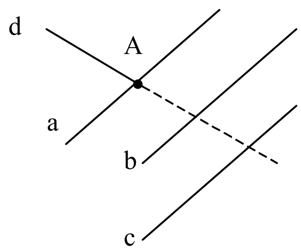
216.



Дано: DE – биссектриса угла $\angle ADF$
$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$=?

<u>Решение:</u>
$\angle MAK$ и $\angle NKA$ – односторонние при прямых ME и NF и секущей AK
и $\angle MAK+\angle NKA=78^0+102^0=180^0$
следовательно, ME||NF (по признаку параллельности прямых), $\angle KDA$ и $\angle ADF$ – смежные, тогда $\angle KDA+\angle ADF=180^0$; $48^0+\angle ADF=180^0$, т.е. $\angle ADF=132^0$.
Из DE – биссектриса $\angle ADF$, следует, что $\angle 1=\angle EDF=132^0:2=66^0$
т.к. ME||NF т.к. они накрест лежащие то $\angle 3=\angle EDF=66^0$
$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^0$ (сумма углов треугольника) или $66^0+\angle 2+66^0=180^0$, значит $\angle 2=48^0$
Ответ: 66^0, 48^0, 66^0.

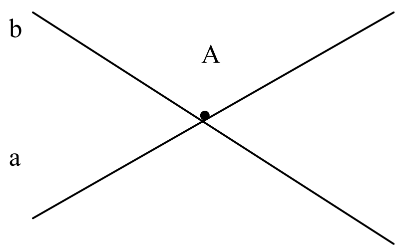
217.



Дано: a||c
b||c; c (пересекает прямую a)
Доказать: d пересекает прямую b.

<u>Доказательство:</u>
a||c, b||c , следует, что, a||b (по свойству параллельных прямых) так как a||b и $a\cap d=A$, то $d\cap b$ (свойство параллельных прямых)

218.

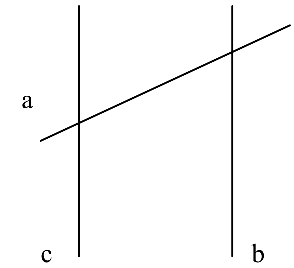


Можно ли построить прямую с: a||c; $c\cap b$.

<u>Доказательство:</u>
Возьмем любую точку M не перпендикулярную a.
Тогда по аксиоме параллельных прямых через точку M можно построить прямую с; параллельную a и только одну.
a||c
Тогда $a\cap b$, и значит $c\cap b$ (по свойству параллельных прямых)
Ответ: можно.

219.

Дано: $c \cap a$, $c \cap b$, c — произвольная.
Доказать: $a \| b$.

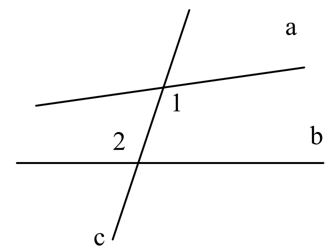


Доказательство:

Пусть $a \nparallel b$, тогда $c \| b$, $c \cap a$, и $c \not\cap b$ (так строим),
но это противоречит условию. Значит $a \| b$
ч.т.д.

220.

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ – накрест лежащие
$\angle 1 \neq \angle 2$
Доказать: $a \cap b$



Доказательство:

Если $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы при прямых $\nparallel$ и b и секущей c и $\angle 1 \neq \angle 2$, то a b, но если прямые на плоскости не параллельны, значит они пересекаются.

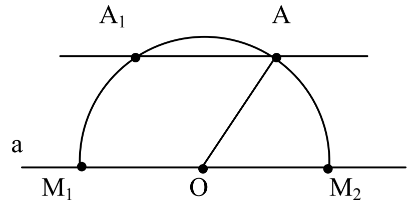
221.

Дано: $BM \cap AC = E$, $BE = EM$, $AE = EC$, $CN \cap AB = K$, $AK = KB$, $NK = KC$.
Доказать: A, N, $M \in 1$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔBCK и ΔAKN: $AK = KB$.
Имеем: $NK = KC$, $\angle NKA = \angle CKB$ т.к. они вертикальные, значит $\Delta AKN = \Delta BCK$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.
Рассмотрим ΔBEC и ΔAEM: $ME = EB$.
Имеем: $AE = EC$, $\angle AEM = \angle BEC$ – как вертикальные, значит, $\Delta AEM = \Delta BEC$ по 1-му признаку равенства Δ.
Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие углы при прямых AM и BC и секущей BM, и $\angle 3 = \angle 4$, т.е. $AM \| BC$ (1)
$\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы при прямых AN и BC и секущей NC, и $\angle 1 = \angle 2$, т.е. $AN \| BC$ (2)
Сравнивая (1) и (2) имеем:
$AM \| AN$, $AN \| BC$, значит $AM \| AN$, но так как прямые AM и AN проходят через одну точку A и параллельны одной и той же прямой BC, то, по аксиоме параллельных прямых можно утверждать, что AM и AN – совпадают, т.е. A, N, $M \in 1$.
Или A, N, M лежат на прямой *l* ч.т.д.

222.



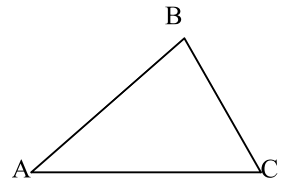
Планы построения:

1) Построим окружность с центром в O и радиусом OA
2) Окружность пересечет прямую a в M_1 и M_2
3) Окружность с центром в M_1 и радиусом OA пересекает окружность с центром в O и радиусом OA в точке A_1.
4) $AA_1 || a$, значит AA_1 – это и есть искомая нами прямая.

Глава IV

§ 1. Сумма углов треугольника.

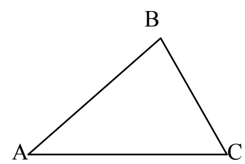
223.



Дано:
а) $\angle A=65^0$; $\angle B=57^0$;
б) $\angle A=24^0$; $\angle B=130^0$;
в) $\angle A=\alpha$; $\angle B=2\alpha$;
г) $\angle A=65^0+\alpha$; $\angle B=60^0-\alpha$.
$\angle C=?$

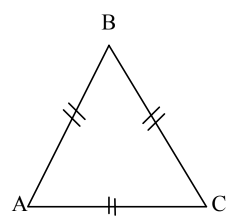
<u>Решение:</u>
$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ (по теореме о сумме углов треугольника)
а) $65^0+57^0+\angle C=180^0$, значит $\angle C=180^0-122^0=58^0$
б) $24^0+130^0+\angle C=180^0$, значит $\angle C=180^0-154^0=26^0$
в) $\alpha+2\alpha+\angle C=180^0$, значит $\angle C=180^0-3\alpha$
г) $60^0+\alpha+60^0-\alpha+\angle C=180^0$, значит $\angle C=180^0-120^0=60^0$
Ответ: 58^0; 26^0; $180^0-3\alpha$; 60^0.

224.



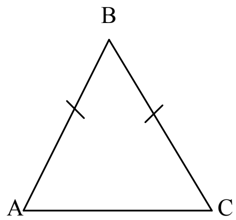
Дано:
$\angle A: \angle B: \angle C=2:3:4$
$\angle A, \angle B, \angle C=?$
<u>Решение:</u>
Пусть 1 часть – x^0, тогда $\angle A=2x^0$, $\angle B=3x^0$, $\angle C=4x^0$.
Так как $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ (по теореме о сумме углов Δ), то $2x+3x+4x=180$, $9x=180$, $x=20$.
Имеем, что 20^0 — приходится на 1 часть, следовательно,
$\angle A=2\cdot 20^0=40^0$; $\angle B=3\cdot 20^0=60^0$; $\angle C=4\cdot 20^0=80^0$
Ответ: 40^0; 60^0; 80^0.

225.



Дано: AB=BC=AC.
Доказать: $\angle A=\angle B=\angle C=60^0$.
<u>Доказательство:</u>
Из AB=BC=AC, следует
Что $\angle A=\angle B=\angle C$ (свойство углов при основании равнобедренного треугольника).
Но $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ (по теореме о сумме углов треугольника), значит $3\cdot\angle A=180^0$ или $\angle A=60^0$, $\angle B=60^0$, $\angle C=60^0$ ч.т.д.

226.



Дано:

AB=BC

Доказать: ∠A и ∠C – острые

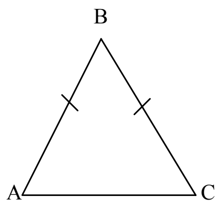
<u>Доказательство:</u>

Допустим ∠A, ∠C – не острые, тогда ∠A=∠C=90^0, или ∠A=∠C>90^0.

Значит ∠A+∠B+∠C>180^0, а это противоречит теореме о сумме углов треугольника, следовательно наше предположение неверно.

Тогда ∠A=∠C<90^0 ч.т.д.

227.



а)

Дано:

AB=BC; ∠A=2∠B

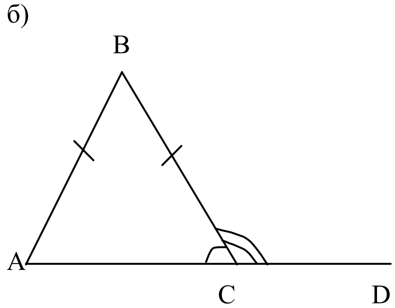
∠A, ∠B, ∠C=?

<u>Решение:</u>

Пусть ∠B=x^0, значит ∠A=∠C=$2x^0$

Из ∠A+∠B+∠C=180^0 (по теореме) следует, что 2x+x+2x=180, 5x=180, x=36 или ∠B=36^0, ∠A=∠C=72^0.

б)



Дано: AB=BC, ∠BCD=3∠C

∠A, ∠B, ∠C=?

<u>Решение:</u>

Пусть ∠C=x^0, тогда ∠A=x^0, ∠BCD=$3x^0$

Из ∠BCD=∠A+∠B (по свойству внешнего угла) следует, что

∠B=$3x$-x=$2x$

∠A+∠B+∠C=180^0 (по теореме о сумме углов треугольника)

значит x+2x+x=180, 4x=180, x=45 или ∠A=∠C=45^0, ∠B=90^0.

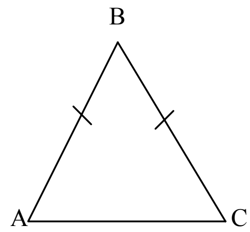
228.

а)

1) Дано: $AB=BC$,

$\angle A=40^0$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$=?



<u>Решение:</u>

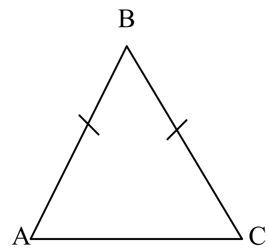
Из ΔABC – равнобедренный, следует, что $\angle A=\angle C=40^0$, тогда, $\angle B=180^0-(40^0+40^0)=100^0$. (по теореме о сумме углов треугольника)

Ответ: 40^0, 40^0, 100^0.

2)

Дано: $AB=BC$, $\angle B=40^0$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$=?



<u>Решение:</u>

$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ (по теореме), значит

$\angle A+\angle C=180^0-40^0$ или $\angle A+\angle C=120^0$

Из $\angle A=\angle C$ (по свойству углов при основаниии равнобедренного треугольника) следует $\angle A=\angle C=120^0:2=60^0$.

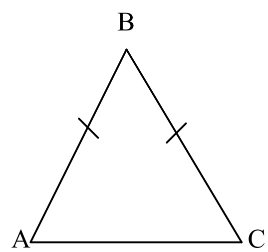
Ответ: 40^0, 60^0, 60^0.

б)

1)

Дано: $AB=BC$, $\angle A=60^0$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$=?



<u>Решение:</u>

Из ΔABC – равнобедренный, следует, что

$\angle A=\angle C=60^0$, тогда

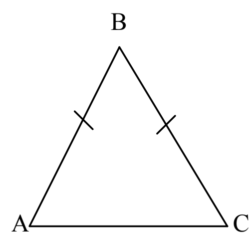
$\angle B=180^0-(60^0+60^0)=40^0$. (по теореме о сумме углов треугольника)

Ответ: 60^0, 60^0, 40^0.

2)

Дано: $AB=BC$, $\angle B=60^0$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$=?



<u>Решение:</u>

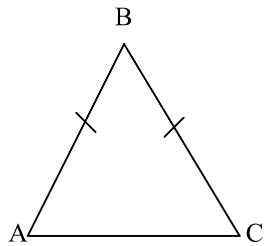
$\angle B=60^0$, значит $\angle A+\angle C=180^0-60^0$ (по теореме)

значит $\angle A+\angle C=120^0$

Из $\angle A=\angle C$ (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника, следует) $\angle A=\angle C=120^0:2=60^0$.

Ответ: 60^0,60^0,60^0.

в)



Дано: AB=BC, $\angle B=100^0$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$=?

Заметим, что $\angle A$, $\angle C<90^0$ – из ранее идущей задачи, значит именно $\angle B=100^0$

<u>Решение:</u>

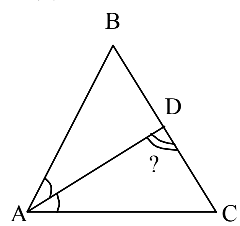
$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ (сумма углов треугольника) т.е.

$\angle A+\angle C=180^0-100^0$, тогда $\angle A+\angle C=80^0$

$\angle A=\angle C$ (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника) следует $\angle A=\angle C=40^0$.

Ответ: 100^0, 40^0, 40^0.

229.



Дано: $\angle BAD=\angle CAD$, AB=BC, $\angle C=50^0$

$\angle ADC$=?

<u>Решение:</u>

Из ΔABC – равнобедренный, следует $\angle A=\angle C=50^0$

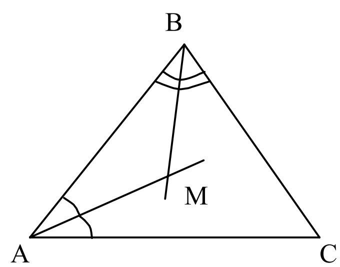
$\angle BAD=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle A=25^0$

$\angle DAC+\angle ADC+\angle C=180^0$ (сумма углов треугольника)

значит $25^0+\angle ADC+50^0=180^0$ или $\angle ADC=180^0-75^0$, т.е. $\angle ADC=105^0$.

Ответ: 105^0.

230.



Дано: $\angle ABM=\angle CBM$,

$\angle BAM=\angle CAM$,

$\angle A=58^0$, $\angle B=96^0$.

$\angle AMB$=?

<u>Решение:</u>

$\angle BAM+\angle MBA+\angle AMB=180^0$ (сумма углов треугольника)

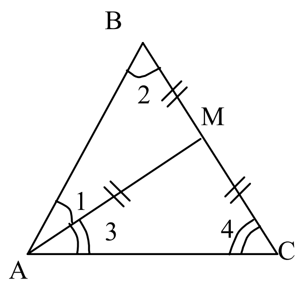
$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\angle AMB=180^0$ (т.к. AM и BM биссектрисы), значит $\frac{1}{2}58^0+\frac{1}{2}96^0+\angle AMB=180^0$,

$\angle AMB=180^0-(29^0+48^0)$, $\angle AMB=103^0$

Ответ: 103^0.

231.

Дано: $AM=\frac{1}{2}BC$; $BM=MC$.



Доказать: ΔABC прямоугольный.

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔAMC и ΔABM. Они равнобедренные, значит $BM=MA=MC$, следовательно, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.

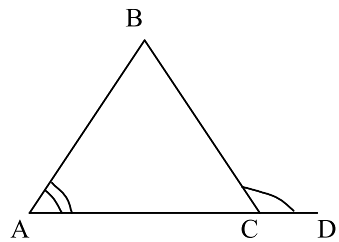
Пусть $\angle 1=\angle 2=x^0$, $\angle 3=\angle 4=y^0$, из $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

Следует $x+x+y+y=180^0$ т.е. $x+y=90^0$.

Но $\angle A=\angle 1+\angle 3=x+y=90^0$, т.е. ΔABC прямоугольный. Ч.т.д.

232.

Дано: $\angle BCD=2\angle A$.



Доказать: ΔABC – равнобедренный.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\angle A=x$, значит $\angle BCD=2x$.

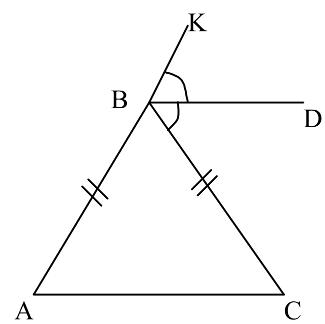
Из свойств внешнего угла имеем: $\angle BCD=\angle A+\angle B$ т.е. $2x=x+\angle B$

Т.е. $\angle B=x$ т.е. $\angle A=\angle B$ значит $AC=BC$, следовательно ΔABC – равнобедренный и обратное утверждение верно.

233.

Дано: $AB=BC$, $\angle KBD=\angle CBO$.

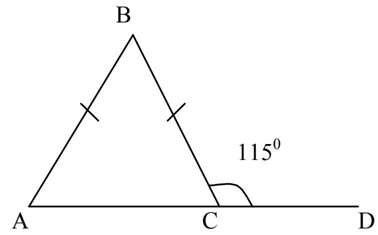
Доказать:



<u>Доказательство:</u>

Из ΔABC – равнобедренный, следует $\angle A=\angle C$, $\angle KBC$ – внешний, значит по предыдущей задаче $\angle KBC=2\angle A$, следовательно $\angle KBD=\angle DBC=\angle A$, углы $\angle DBK$ и $\angle A$ — соответственные углы при прямых BD и AC и секущей AK и $\angle DBK=\angle A$, следовательно $BD \parallel AC$ по признаку параллельности прямых.

234.



Рассмотрим 2 случая:

1) Дано: AB=BC, $\angle$BCD=115^0

$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C=?

<u>Решение:</u>

$\angle$C, $\angle$BCD – смежные, следовательно, $\angle$C=180^0-115^0=65^0, $\angle$A=$\angle$C=65^0 (как углы при основании равнобедренного тр-ка) $\angle$B=180^0-($\angle$A+$\angle$C) (по теореме о сумме углов тр-ка), значит $\angle$B=180^0-130^0=50^0.

Ответ: 65^0; 65^0; 50^0.

2) Дано: AB=BC, $\angle$CBD=115^0, $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C=?

<u>Решение:</u>

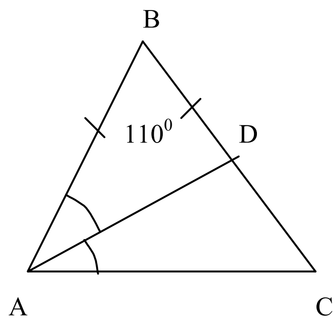
$\angle$B, $\angle$CBD – смежные, тогда $\angle$B=180^0-115^0=65^0.

Из $\angle$A=$\angle$C (углы при основании равнобедренного тр-ка).

Следует $\angle$A=$\angle$C=(180^0-65^0)$\cdot$2=$57,5^0$.

Ответ: 65^0; $57^0 30'$; $57^0 30'$.

235.



Дано: $\angle$BAD=$\angle$CAD, $\angle$ADB=110^0,

$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C=?

<u>Решение:</u>

Пусть $\angle$A=x^0, тогда $\angle$C=$2x^0$

$\angle$ADC=180^0-110^0=70^0 т.к. $\angle$AOB и $\angle$AOC смежные

$\angle$A+$\angle$D+$\angle$C=180^0 (сумма углов Δ).

значит x+70+2x=180^0, 3x=110^0

$$x = 35\frac{2}{3} = 36^0 40'$$

значит, $\angle$DAC=$36^0 40'$ $\angle$C=$2\cdot 36^0 40'$=$72^0 80'$=$73^0 20'$, (1^0=$60'$),

$\angle$A+$\angle$B+$\angle$C=180^0 (сумма углов треугольника),

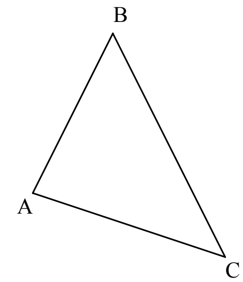
т.е. $73^0 20'$+$\angle$B+$73^0 20'$=180^0

или $\angle$B=180^0-$146^0 40'$=$179^0 60'$-$146^0 40'$=$33^0 20'$.

Ответ: $73^0 20'$; $73^0 20'$; $33^0 20'$.

§ 2. Соотношение между сторонами и углами треугольника

236.



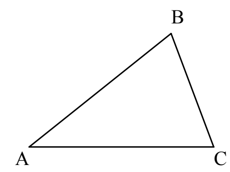
Может ли быть угол $\angle A$ тупым, если,

а) $AB>BC>AC$

AB – самая большая сторона значит, наибольшим углом может быть только $\angle C$. Но в треугольнике может быть только один тупой угол, значит $\angle A$ – не может быть тупым.

б) $AB=AC<BC$

Из $AB=BC$, следует ΔABC – равнобедренный значит $\angle C=\angle B$ и они могут быть только острыми углами $BC>AB=AC$, следовательно $\angle A>\angle C=\angle B$, и $\angle A$ может быть тупым.

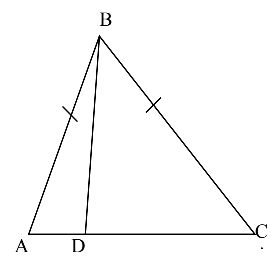


237.

а) $\angle A>\angle B>\angle C$, тогда $BC>AC>BA$;

б) $\angle A>\angle B=\angle C$, тогда $BC>AC=BA$.

238.



Дано: $AB=BC$.

Доказать: $BD<AB$.

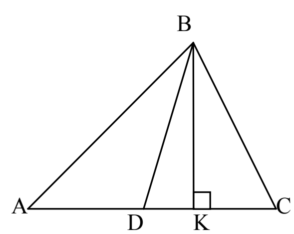
<u>Доказательство:</u>

Из ΔABC – равнобедренный, следует $\angle A=\angle C$ – острые

$\angle ADB$ и $\angle CDB$ – смежные и один из них тупой, другой острый или оба по 90^0.

Если $\angle ADB$ – тупой, то он наибольший в ΔADB, тогда $AB>BD$, если $\angle CDB$ – тупой в ΔCDB, то $BC>BD$ и $AB=BC>BD$ ч.т.д.

239.



Дано: BD – медиана, BK – высота.

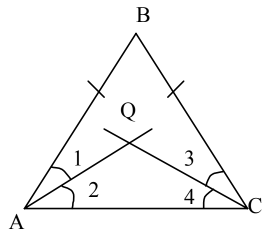
Доказать: $BK\le BD$.

<u>Доказательство:</u>

$\angle K=90^0$ – наибольший в ΔDBK, тогда из неравенства треугольника имеем $BD>BK$.

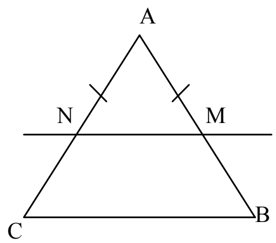
$BD=BK$ когда ΔABC равнобедренный, и медиана с высотой опущены на основание, либо когда ΔABC – равносторонний.

240.



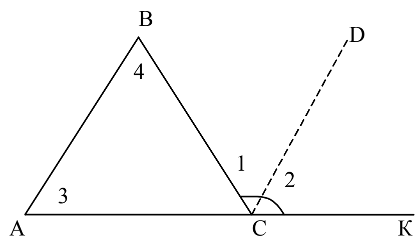
Дано: AB=BC, AO и CO – биссектрисы.
Доказать: ΔAOC – равнобедренный.
<u>Доказательство:</u>
Из ΔABC – равнобедренный, следует ∠A=∠C, AO, CO – биссектрисы равных углов, значит ∠1=∠2=∠3=∠4
т.к. ∠2=∠3 то AO=CO, следовательно ΔAOC – равнобедренный

241.



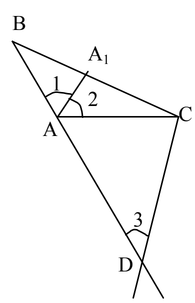
Дано: AB=AC, NM||BC.
Доказать: ΔAMN равнобедренный.
<u>Доказательство:</u>
NM||BC, значит
∠C=∠N, ∠B=∠M, как соответственные углы при параллельных прямых
Так как ΔABC – равнобедренный, то ∠B=∠C. Значит, ∠N=∠C=∠B=∠M.
Следовательно, ΔAMN — равнобедренный.

242.



Дано: CD биссектриса, угла ∠BCK, DC||AB
Доказать: ΔABC – равнобедренный
<u>Доказательство:</u>
CD||AB, значит ∠2=∠3 (соответственные при параллельных), ∠1=∠4 (накрест лежащие при параллельных).
∠2=∠3, ∠1=∠4, ∠1=∠2 тогда ∠3=∠4, и ΔABC равнобедренный по признаку

243.

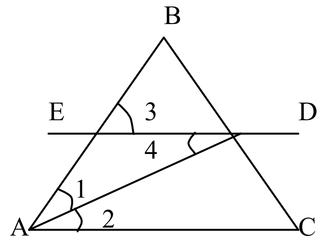


Дано: AA_1 – биссектриса ∠A, CD||AA_1.
<u>Доказать:</u> AC=AD.
<u>Доказательство:</u>
DC||AA_1 значит ∠1=∠3
(как соответственные) DC||AA_1 значит
∠A_1AD+∠3=180^0 (как односторонние)
∠2+∠CAD+∠3=180^0 (1)

$\angle 3+\angle CAD+\angle 4=180^0$ (2) (сумма углов треугольника)

Откуда из (1) и (2) $\angle 4=\angle 2$, тогда $\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$, $\angle 3=\angle 4$, т.е. AC=AD, ч.т.д.

244.



Дано: $\angle 1=\angle 2$, DE||AC.

Доказать: ΔADE – равнобедренный.

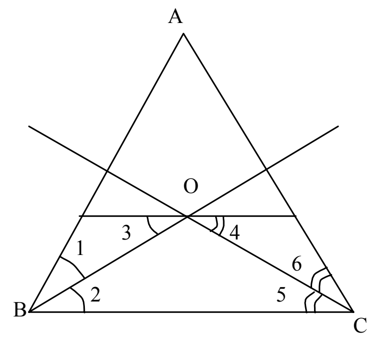
Доказательство:

AC||ED значит $\angle 1=\angle 3$ (как соответственные углы)

$\angle 2=\angle 4$ (как накрест лежащие углы)

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$, тогда $\angle 1=\angle 4$, т.е. ΔADE – равнобедренный по признаку и AE=ED.

245.



Дано: $\angle 1=\angle 2$, $\angle 5=\angle 6$, MN||BC.

Доказать: MN=BM+CN.

Доказательство:

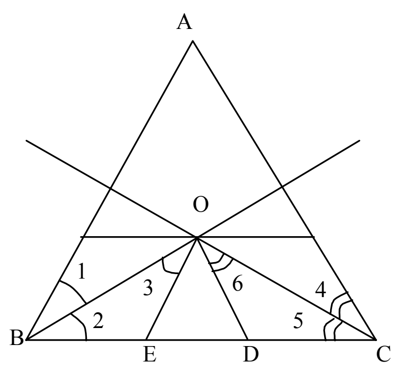
MN||BC, значит $\angle 1=\angle 3$, как накрест лежащие углы

$\angle 1=\angle 3=\angle 2$, значит

$\angle 2=\angle 3$, тогда ΔCNO – равнобедренный и CN=NO

MN||BC, значит $\angle 4=\angle 5$, как накрест лежащие углы, $\angle 4=\angle 5=\angle 6$ значит, $\angle 4=\angle 6$, тогда OM=MB. Следовательно, MN=NO+OM=CN+BM ч.т.д.

246.



Дано: $\angle 1=\angle 2$; $\angle 4=\angle 5$, OE||AB, OD||AC.

Доказать: $P_{\Delta OED}$=BC.

Доказательство:

OE||AB, значит $\angle 1=\angle 3$, как накрест лежащие углы

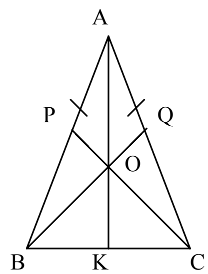
Тогда $\angle 1=\angle 2=\angle 3$

тогда $\angle 2=\angle 3$, и BE=OE (по свойству равнобедренного треугольника)

OD||AC, значит $\angle 4=\angle 6$, как накрест лежащие углы.

Тогда $\angle 4=\angle 5=\angle 6$, значит, $\angle 5=\angle 6$, и CD=OD (по свойству равнобедренного треугольника).
Тогда, $P_{\Delta OED}$=OE+ED+DO=BE+ED+DC=BC ч.т.д.

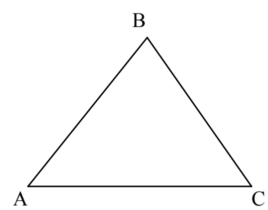
247.



Дано: AB=AC, AP=AQ.
Доказать:
а) ΔBOC – равнобедренный
б) BK=KC, AK$\perp$BC
Доказательство:
Рассмотрим ΔCQB и ΔBPC:
BP=AP-PA=AC-AQ=CQ
$\angle$B=$\angle$C (как углы при основании равнобедренного тр-ка)
сторона BC – общая, значит ΔBPC=ΔCQB по 1-му признаку равенства тр-ов, следовательно $\angle$PCB=$\angle$QBC – равнобедренный по признаку.
Рассмотрим ΔAOB и ΔAOC:
сторона AO – общая, BO=OC, AB=AC.
Значит ΔAOB=ΔAOC (по 3-му признаку равенства тр-ов)
Следовательно $\angle$BAO=$\angle$CAO, значит AO – биссектриса ΔABC равнобедренного и по свойству биссектрисы опущенной на основание, AK – медиана и высота ч.т.д.

248.
а) Не существует т.к. 1+2=3 – противоречие с неравенством треугольника
б) треугольник не существует, так как 1,2+1<2,4.

249.



Дано: AB=BC, a=25 см, b=10 см.
Какая из сторон является основанием?
B=AC=10 см, a+a=AB+BC>AC, 25+25>10 – верно;
если AC=25, то AB=BC=10, 10+10<25 – противоречие с неравенством треугольника.
Значит, основание b=10 см.

250

а) a=5 см, b=3 см, c=?

Из ΔABC – равнобедренный, следует c=5 см или c=3 см $\left[\begin{array}{l}5+5>3\\3+3>5\end{array}\right.$ — верно.

б) a=8 см, b=2 см, c=?

Из ΔABC – равнобедренный, следует c=8 см. 8+8>2 – верно.

в) a=10 см, Δb=5 см, c=?

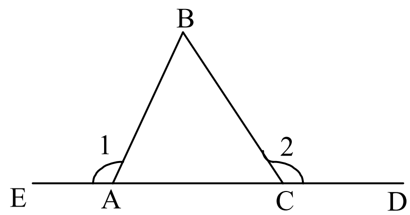
Из ΔABC – равнобедренный, следует c=10 см. 10+10>5 – верно.

251.

Решение приведено в книге

252.

Дано: ∠1>∠2, P_{ABC}=74 см,
AC=16 см, AB, BC=?



Решение

Из ∠1=∠2, следует ∠A=∠C как целые смежные с равными углами, значит, ΔABC – равнобедренный по признаку.

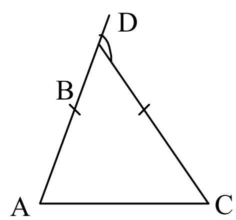
Пусть AC =16 см, и AB=BC=x см, тогда AB+BC+AC=74, или x+x+16=74, 2x=58, x=29, AB+BC=29 см; 29+29>16 – верно.

Пусть AB=BC=16 см, и AC=x см, тогда 16+16+x=74, 32+x=74, x=74-32, x=42, AC=42 см, но 16+16<42 – противоречие с неравенством треугольника, значит второе предположение неверно, а верно только первое.

Ответ: 16 см; 29 см; 29 см.

253.

Дано: AB=BC
P_{ABC}=25 см.
∠DBC – острый.
AB, BC, AC = ?



Решение

Пусть AB=BC =x см, тогда AC=x+4см

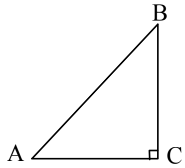
P_{ABC}=AB+BC+AC, значит

25=x+x+x+4, 21=3x, тогда x=7, следовательно, AB=BC=7 см, AC=11 см.

Ответ: 7 см, 7 см, 11 см.

§ 3 Прямоугольные треугольники

254.



Дано: AC=BC, $\angle C=90°$, $\angle A$, $\angle B$ = ?

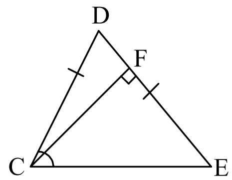
<u>Решение</u>

$\angle A+\angle B=90°$ (по свойству прямоугольного треугольника),

$\angle A=\angle B$, значит $\angle A=\angle B=90°:2=45°$.

Ответ: 45°, 45°.

255.



Дано: CD=DE, $\angle D=54°$, $\angle C=\angle E=126:2=63°$

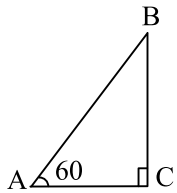
$\angle FCD=90°-\angle D$ (по свойству прямоугольного треугольника),

$\angle FCD=90°-54°=26°$,

$\angle ECF=\angle C-\angle FCD=63°-26°=37°$.

Ответ: 37°.

256.



Дано: $\angle C=90°$, $\angle A=60°$, AB+AC=26,4 см, AB=?

<u>Решение</u>

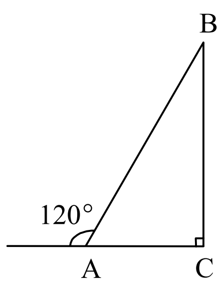
$\angle B=90°-\angle A$ (по свойству прямоугольного треугольника), $\angle B=90°-60°=30°$

Т.к. сторона, лежащая против угла 30°, равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы, то AC=$\frac{1}{2}$ AB

AB+AC=26,4 значит AB+$\frac{1}{2}$ AB=26,4, т.е. AB=17,6 см.

Ответ: 17,6 см.

257.



Дано: $\angle C=90°$, внешний при : $\angle CA=120°$, AC+AB=18 см, AC, AB=?

<u>Решение</u>

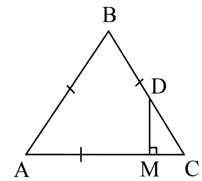
$\angle BAC=180°-120°=60°$ - по свойству смежных углов, $\angle B=90°-\angle A$ (по свойству угла прямоугольного треугольника)

значит $\angle B=90°-\angle 60°=30°$, и следовательно, по свойству прямоугольного треугольника имеем, что $AC = \frac{1}{2}AB$, AB=2AC.

AC+AB=18, значит AC+2AC=18 т.е. AC=6 см.
Ответ: 6 см; 12 см.

258.

AB=BC=AC=12 см, BD=DC, $\angle$DMC=90°.
AM=?



Решение

ΔABC – равносторонний

$\angle B=\angle A=\angle C=180°:3=60°$

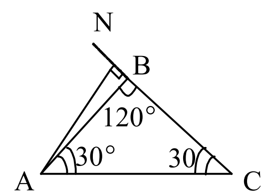
$\angle MDC=90°-\angle C$ (по свойству прямоугольного треугольника), $\angle MDC=90°-60°=30°$, и по свойству прямоугольного треугольника $MC=\frac{1}{2}DC$; BD=DC, значит $DC=\frac{1}{2}BC$, т.е.

$MC=\frac{1}{4}BC=3$ см.

AM=AC-MC=12-3=9 см.
Ответ 9 см.

259.

Дано: AB=BC, $\angle$B=120°; $\angle$ANB=90°;
AN=9, AC=?



Решение

AB=BC, значит $\angle BAC=\angle BCA$.

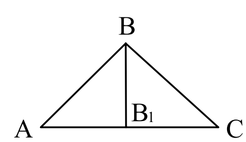
$\angle BAC+\angle BCA=180°-120°=60°$ – по теореме о сумме углов треугольника.

Тогда $\angle BAC=\angle BCA=60°:2=30°$, следовательно по свойству прямоугольного треугольника $AN=\frac{1}{2}AC$, значит $AC=AN\cdot 2$, $AC=9\cdot 2=18$ см.

Ответ 18 см.

260.

Дано: AB=BC=15,2; $\angle BB_1C=90°$, $BB_1=7{,}6$ см
$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C=?

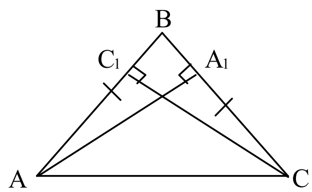


Решение

Из условия видим $BB_1=\frac{1}{2}BC$, тогда по свойству прямоугольного треугольника $\angle BCB_1=30°$, значит $\angle BAC=\angle BCA=300°$

ΔABC – равнобедренный, но $\angle ABC=180°-\angle A-\angle C=180°-30°-30°=120°$ (сумма углов треугольника).
Ответ: 30°; 30°; 120°.

261.



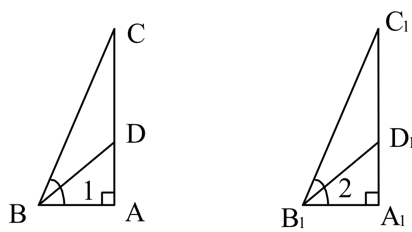
Дано: $AB=BC$, AA_1, CC_1 – высоты.
Доказать: $AA_1=CC_1$.

Доказательство

ΔABC равнобедренный, значит $\angle C_1AC=\angle A_1CA$
$\angle A_1AC=90°-\angle A_1CA=$
$=90°-\angle C_1AC=\angle ACA_1$

Рассмотрим ΔA_1AC и ΔC_1CA: сторона AC – общая
$\angle A_1AC=\angle C_1CA$, $\angle C_1AC=\angle A_1CA$ по 2-му признаку равенства треугольников.
Значит $\Delta A_1AC=\Delta C_1CA$
Следовательно, $AA_1=CC_1$
Что и требовалось доказать.

262.



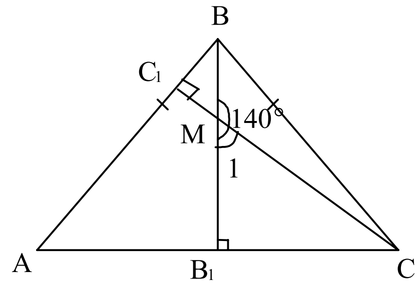
Дано: $\angle A=\angle A_1=90°$, $\angle B=\angle B_1$, BD, B_1D_1 – биссектрисы, $BD=B_1D_1$.
Доказать $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

$\angle B=\angle B_1$, BD и B_1D_1 – биссектрисы, $\angle 1=\angle 2$
Рассмотрим $\Delta A_1B_1D_1$ и ΔABD: $BD=B_1D_1$, $\angle 1=\angle 2$
Значит $\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$ (по гипотенузе и острому углу)
Следовательно $AB=A_1B_1$
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:
$AB=A_1B_1$
$\angle B=\angle B_1$
$\angle A=\angle A_1=90°$
Значит $\Delta ABC=\Delta A1B1C_1$ по второму признаку равенства треугольников.

263.

Дано: $AB=AC$, CC_1, BB_1 – высота, $\angle BMC=140°$, $\angle A$, B, $C=?$



<u>Решение</u>

$180°-140°=\angle 1$ (как смежные)

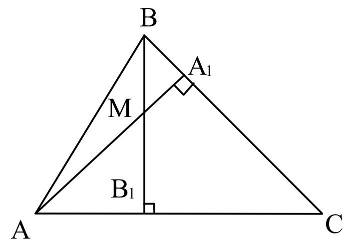
$\angle 1=40°$, значит $\angle B_1CC_1=90°-$ $-40°=50°$ (по свойству углов прямоугольного треугольника), $\angle A=90°-\angle B_1CC_1=90°-50°=40°$, $\angle B+\angle C=180°-\angle A$ (сумма углов треугольника).

Тогда $\angle B+\angle C=180°-40°140°$; т.к. $AB=AC$, то $\angle B=\angle C=70°$.

Ответ: 40°; 70°; 70°.

264.

Дано: AA_1 и BB_1 – высоты, $\angle A=55°$, $\angle B=67°$, $\angle AMB=?$



<u>Решение</u>

$\angle ABB_1=90°-\angle BAB_1=90°-55°=35°$ (свойство углов прямоугольного треугольника)

Тогда, $\angle AMB=180°-\angle BAM-\angle ABM=$ $=180°-23°-35=122$.

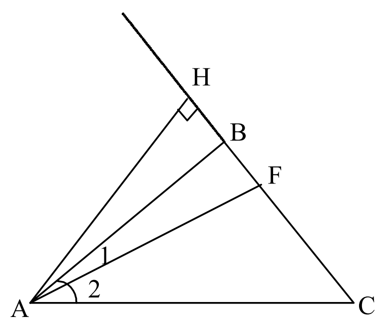
Ответ: 122°.

265.

Дано: $\angle FAH$, $\angle HFA=?$

$AB=BC$, $\angle B=112°$; $\angle 1=\angle 2$;

$\angle AHF=90°$



<u>Решение</u>

$\angle A+\angle C=180°-\angle B$;

$\angle A+\angle C=180°-112°$ (по теореме о сумме углов треугольника).

$\angle A+\angle C=68°$, $\angle A=C$,

$\angle A=\angle C=68:2=34°$ ($AB=BC$)

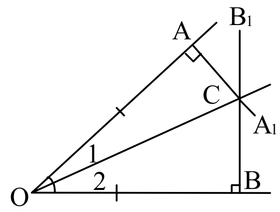
$\angle BFA=180°-\angle B-\angle BAF$, $\angle BAF=\angle 1=34°:2=17°$,

Тогда $\angle BFA=180°-112°-17°=51°$.

$\angle HAF=90°-\angle HFA=90°-51°=39°$.

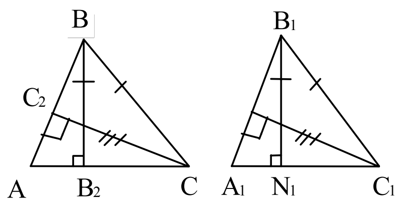
Ответ: 90°, 51°, 39°.

266



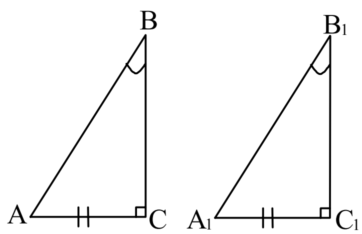
Дано: OA=OB, $AA_1=BB_1$.
Доказать: OC – биссектриса
<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим ΔOBC и ΔOAC:
Сторона OC – общая, OA=OB
Значит $\Delta OBC = \Delta OAC$ (по катету и гипотенузе), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и OC – биссектриса что и требовалось доказать.

267.



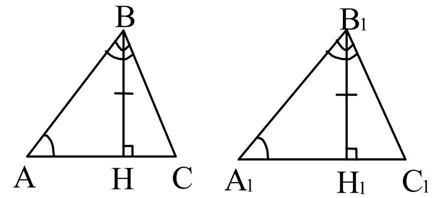
Дано:
CC_2, BB_2, C_1M_1, B_1N_1 высоты,
$BB_2=B_1N_1$, $CC_2=C_1M_1$,
$BC=B_1C_1$,
Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.
<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим $\Delta N_1B_1C_1$ и ΔB_2BC:
$BC=B_1C_1$, $BB_2=B_1N_1$.
Значит $\Delta B_2BC=\Delta N_1B_1C_1$ (по гипотенузе и катету)
Следовательно $\angle C=\angle C_1$
Рассмотрим $\Delta M_1B_1C_1$ и ΔC_2BC:
$BC=B_1C_1$, $C_2C=M_1C_1$, $\Delta C_2BC=\Delta M_1B_1C_1$ (по гипотенузе и катету).
Следовательно $\angle B=\angle B_1$
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:
$BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$
Значит ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (по 2-му признаку равенства треугольников)

268.



Дано:
$\angle C=\angle C_1=90°$
$\angle B=\angle B_1$
$AC=A_1C_1$
Доказать:
$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
<u>Доказательство:</u>
$\angle A=90°-\angle B=90°-\angle B_1=\angle A_1$
Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:
$AC=A_1C_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle A=\angle A_1$ (по второму признаку равенства треугольников)
Значит $\Delta ABC= \Delta A_1B_1C_1$ чтд.

269.



Дано: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BH = B_1H_1$ – высоты, $BH = B_1H_1$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

<u>Доказательство:</u>

$\Delta A_1B_1H_1$ и ΔABH:

$BH = B_1H_1$

$\angle A = \angle A_1$

Значит $\Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$ (по катету и острому углу)

Следовательно $AB = A_1B_1$

$\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC:

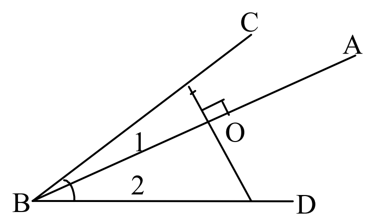
$AB = A_1B_1$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$ (по второму признаку равенства треугольников)

Значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ чтд.

270.



Построить

а – прямую через А,

где BC=BD

План построения:

построим биссектрису BM данного угла $\angle B$

через А проведем перпендикуляр CD к BM

рассмотрим ΔBOD и ΔBOC:

BO общая

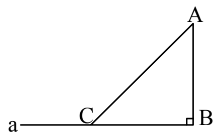
$\angle 1 = \angle 2$

Значит $\Delta BOC = \Delta BOD$ (по катету и острому углу)

Следовательно, BC=BD и прямая CD искомая.

§4. Построение треугольника по трем элементам

271.



Дано: ∠ABC=90°, AB+AC=17 см, AC-AB=1 см, AB=?

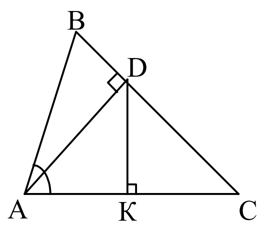
<u>Решение</u>

Пусть AB=x, AC=y, тогда

$\begin{cases} x+y=17 \\ y-x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=18 \\ 2x=16 \end{cases}$ $\begin{cases} y=9 \\ x=8 \end{cases}$ Значит AB=8 см.

Ответ 8 см.

272.



Дано: AB=BC=AC, ∠BAD=∠CAD, ∠DKA=90°, DK=6 см, AD=?

<u>Решение</u>

ΔABC – равносторонний, значит ∠BDA=∠CDA=90°, ∠A=∠B=∠C=60°.

∠DKA=90°, ∠DAK=30°, (т.к. AD – биссектриса).

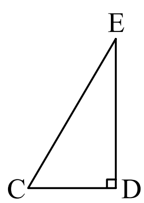
DK=6 см;

DK – лежит против угла 30°, значит AD=2DK; (по свойству)

т.е. AD=12 см

Ответ 12 см.

273.



Дано: ∠D=90°, CE+CD=31 см, CE-CD=3 см, CD=?

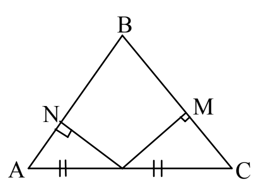
<u>Решение:</u>

Пусть CE=x см, CD=y см, тогда

$\begin{cases} x+y=31 \\ x-y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=34 \\ 2y=28 \end{cases}$ $\begin{cases} x=17 \\ y=14 \end{cases}$ значит CD=14 см.

Ответ: 14 см.

274.



Дано: AB=BC, AK=KC, KM⊥BC, KN⊥ AB

Доказать: KN=KM

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔCKM и ΔAKN:

AK=KC, ∠A=∠C (из ΔABC – равнобедренный)

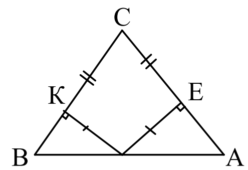
Значит, ΔAKN=ΔCKM (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно, KN=KM, чтд.

275.

Дано: AC=CB, ME⊥AC, MK⊥BC, ME=MK.

Доказать: CM⊥AB.



<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔEAM и ΔBKM:

KM=EM, ∠B=∠A (из ΔABC – равнобедренный)

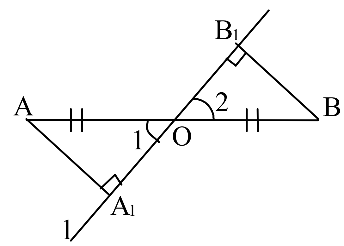
Значит ΔBKM=ΔEAM (по катету и острому углу)

Следовательно, BM=MA, значит, CM – медиана равнобедренного треугольника, опущенная на основание, CM⊥AB, по свойству равнобедренного треугольника, чтд.

276.

Дано: AO=OB, AA_1⊥BB_1⊥l.

Доказать: $AA_1=BB_1$.



<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим ΔBB_1O и ΔAA_1O:

AO=BO, ∠1=∠2 т.к. они вертикальные, значит, $\Delta AA_1O=\Delta BB_1O$ (по гипотенузе и острому углу)

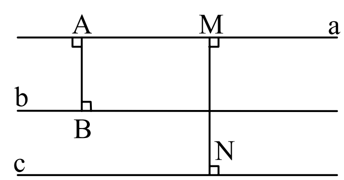
Следовательно, $AA_1=BB_1$ чтд.

277.

Дано: a││b, AB⊥a, AB=3 см,

a││c, MN⊥a, MN=5 см

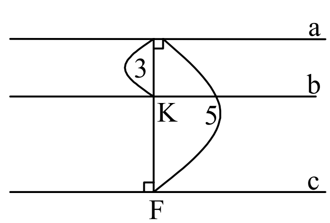
Найти: расстояние между c и b.



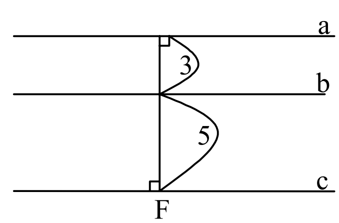
<u>Решение:</u>

a││b, a││c, b││c (по свойству параллельных прямых).

Рассмотрим 2 случая:



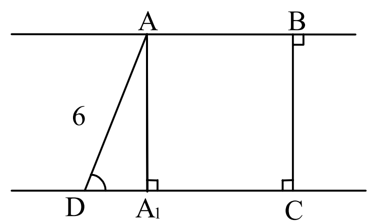
KF=5-3=2 см.



KF=3+5=8 см.

Ответ 2 см или 8 см.

278.



Дано: AB||CD, $\angle ADC=30°$, AD=6 см, $BC\perp AB$, BC=?

Решение:

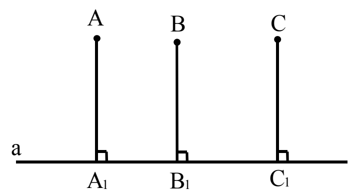
$\angle A_1=90°$, $\angle D=30°$, AA_1 лежит против угла 30°, значит

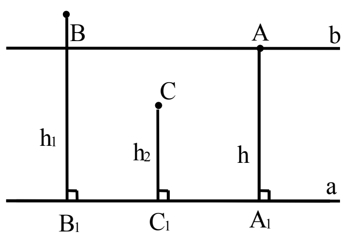
$AA_1=\frac{1}{2}AD$, $AA_1=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ см.

$AA_1=BC$, BC=3 см.

Ответ 3 см.

279.





Дано: $AA_1\perp a$, $BB_1\perp a$, $CC_1\perp a$, $AA_1=BB_1=CC_1$

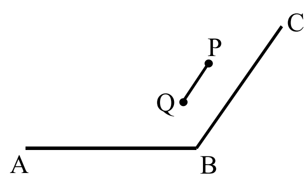
Доказать: A, B, C – принадлежат одной прямой.

Доказательство:

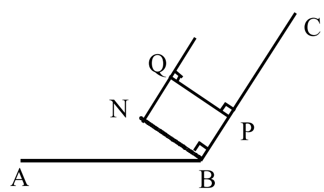
по аксиоме параллельных прямых через A проведем прямую b, b||a. Тогда, все точки b||a равноудалены от точек прямой a. Докажем, что B, $C\in b$.

Пусть $B\notin b$, $C\notin b$, значит расстояние от точки B до a и C будет больше или меньше, чем расстояние h. Но это противоречит $AA_1=BB_1=CC_1$. Следовательно, наше предположение неверно, и A, B, $C\in b$ чтд.

280.



Найти множество всех точек, внутри $\angle ABC$, удаленных от BC на расстояние PQ.

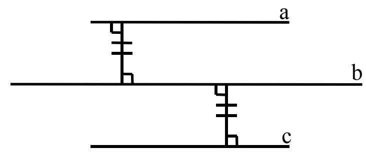


NQ||BC, $BN\perp BC$

Значит луч NQ и есть искомое множество точек.

281.

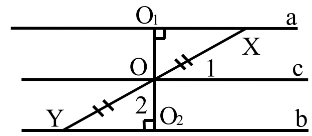
Ответ: прямая с параллельная данным и находящаяся на равных расстояниях от них (см. рис).



282.

Дано: a||b, XO=OY.

Доказать: $O \in C$, где c||a||b и $OO_1=OO_2$



<u>Доказательство:</u>

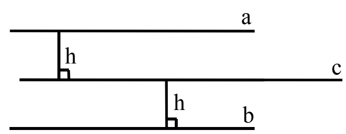
Рассмотрим ΔOO_2Y и ΔOO_1X:

$OX=OY$, $\angle 1=\angle 2$ т.к. они вертикальные, $\Delta OO_1X=\Delta OO_2Y$ (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно, $OO_1=OO_2$, O – равноудалена от a и b, значит по предыдущей задаче она лежит на прямой c||a||b.

283.

Ответ: две прямые, параллельные данной и расположенные на одном расстоянии h по разные стороны от с. См. рис.



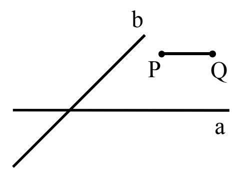
284.

Решение приведено в книге.

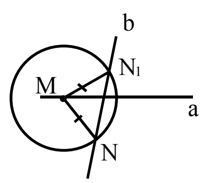
285.

Построить $M \in a$, $MN=PQ$, и $N \in b$.

Задача может и не иметь решения

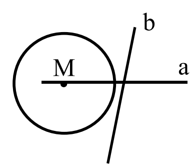


1)



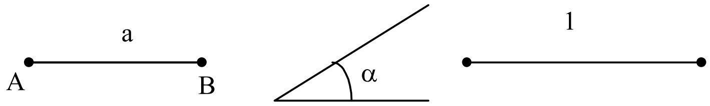
На прямой b существуют две точки N и N_1, такие, что $MN=MN_1=PQ$. См. рис. 1.

2)

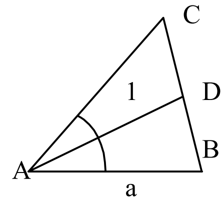


Нет решения, когда на b нет точек удаленных от M на PQ. См. рис 2.

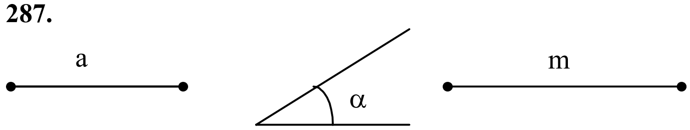
286.



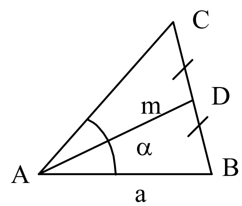
План построения:
1) отрезок AB=a
2) угол A=α
3) биссектрису AD=l
4) соединить B и D прямой
5) BD пересекает сторону угла A в точке C
6) треугольник ABC построен



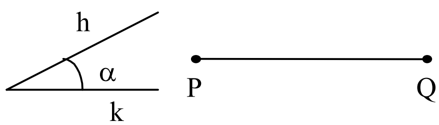
287.

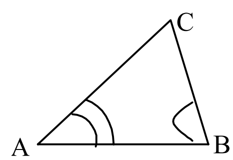


План построения:
а) отрезок AB=a;
б) угол BAD=α;
в) AD=m;
г) соединить прямой точки B и D;
д) отложим отрезок CD=BD;
е) соединим точки A и C
ж) треугольник ABC – построен.



288.



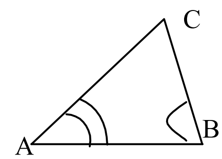


Построить ΔABC: AB=PQ,

$\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle hk$.

План построения:
а) AB=PQ
б) $\angle B=\angle hk$
в) $\angle A=\frac{1}{2}\angle hk$ – строим биссектрису
г) стороны $\angle A$ и $\angle B$ пересекаются в точке C.

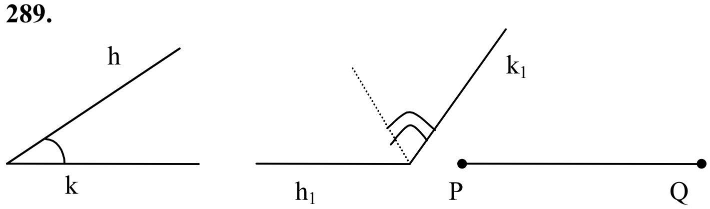
Построить ΔABC: $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{4}\angle hk$.



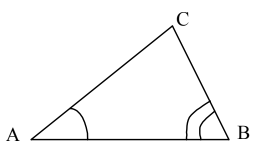
План построения:
а) $AB=PQ$
б) $\angle B=\angle hk$
в) $\angle A=\frac{1}{4}\angle hk$
г)) стороны $\angle A$ и $\angle B$ пересекаются в точке C.
д) треугольник ABC построен.

Для построения $\frac{1}{4}\angle hk$. надо построить биссектрису угла, а затем биссектрису его половинки.

289.

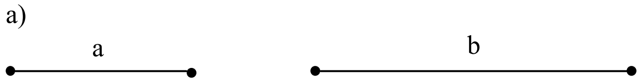


Построить ΔABC: $AB=PQ$, $\angle A=\angle hk$, $\angle B=\frac{1}{2}h_1k_1$

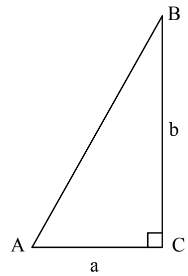


План построения:
а) $AB=PQ$
б) $\angle B=\angle hk$
в) $\angle A=\frac{1}{2}\ h_1k_1$
г) стороны углов A и B пересекаются в точке C.
д) ΔABC – искомый.

290.
а)



Построить ΔABC: $\angle C=90°$, $AC=a$, $CB=b$.



План построения:

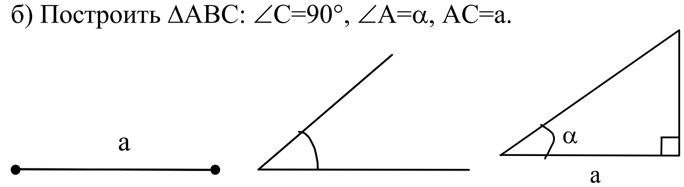
а) Построить прямой ∠C

б) На одной стороне отложить AC=a, а на другой BC=b

в) соединить A и B.

г) искомый ΔABC построен.

б) Построить ΔABC: ∠C=90°, ∠A=α, AC=a.



План построения:

а) построить прямой ∠C

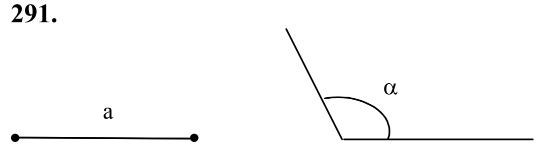
б) отложить на стороне AC=a

в) построить ∠A=α

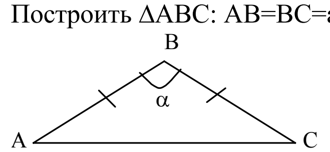
г) стороны углов A и C пересекаются в B

д) ΔABC – построен.

291.



Построить ΔABC: AB=BC=a, B=α



План построения:

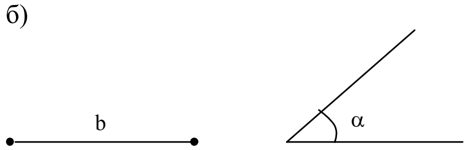
а) ∠B=α

б) на стороне угла отложить отрезки BC=a=AB

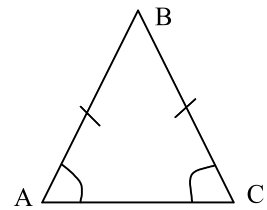
в) соединить точки A и C

г) ΔABC – построен.

б)

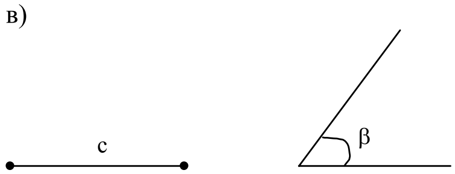


Построить ΔABC: AC=b, ∠A=∠C=α.

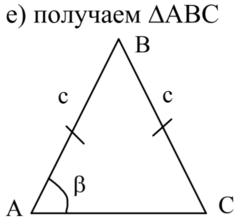


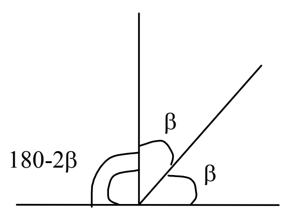
План построения:
а) AC=b
б) ∠A=∠C=α
в) Стороны пересекаются в B
г) ΔABC – построен.

в)

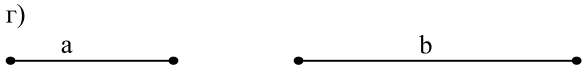


Построить ΔABC AB=BC=c, ∠A=∠C=β
План построения:
а) AB=c
б) ∠A=β
в) ∠B=180°-2β
г) на стороне угла B отложить BC=c
д) соединить A и C
е) получаем ΔABC

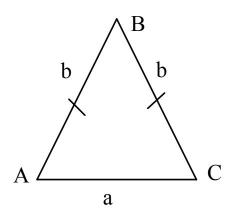




г)



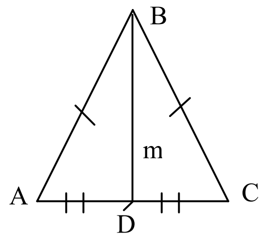
Построить ΔABC: AB=BC=b, AC=a
План построения:
а) AC=a
б) две окружности с центрами в A и C и радиусом b
в) окружности пересекутся в B
г) соединим A и B и B и C



д) получается ΔABC

д)

Построить ΔABC: $AC=a$, $AB=BC$, $BD=m$



План построения:

а) $AC=a$

б) D – середину AC

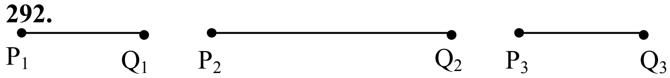
в) медиана равнобедренного треугольника является высотой, тогда построим $\angle D=90°$

г) на стороне угла D отложим $DB=m$

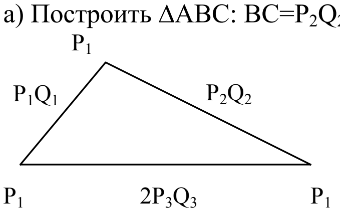
д) соединим A и B, и B и C

е) получаем треугольник ABC.

292.



а) Построить ΔABC: $BC=P_2Q_2$ $AC=2P_3Q_3$, $AB=P_1Q_1$



План построения:

а)$AB=P_1Q_1$

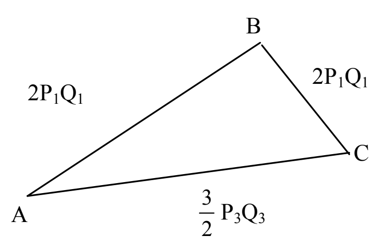
б)окружность с центром в точке A и радиусом P_2Q_2

в) окружность с центром в точке B и радиусом $2P_3Q_3$

г) окружности пересекутся в точке C

д) получаем ΔABC.

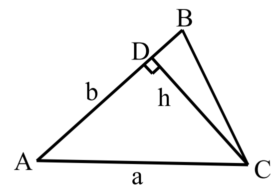
б) Построить ΔABC:$AB=2P_1Q_1$, $BC=2P_2Q_2$, $AC=\frac{3}{2}P_3Q_3$



План построения аналогичен пункту а). Задача имеет решение когда выполняется неравенство треугольника.

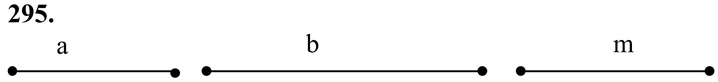
293.
Решение задачи приведено в книге.

294.
Построить ΔABC: $AB=b$, $AC=a$, $CD=c$, $CD\perp AB$.

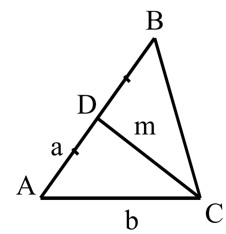


План построения:
а) $\angle D=90°$
б) На одной стороне отложить $DC=h$
в) окружность с центром в C и радиусом a
г) окружность пересечет вторую сторону $\angle D$ в точке A.
д) $AB=b$
е) получаем ΔABC.

295.

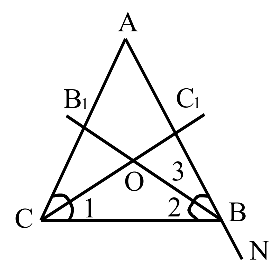


m – медиана.
Построить ΔABC.



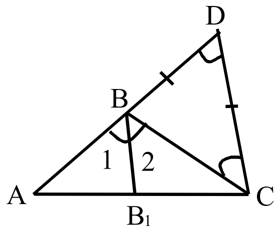
План построения:
а) $AB=a$
б) точку D – середину AB.
в) окружность с центром в D и $R=m$ и окружность с центром в точке A и радиусом b
г) окружности пересекаются в C
д) Соединить B и C.
е) получаем ΔABC.

296.
Дано: AB-BC
$\angle B=\angle C$
BB_1, CC_1 – биссектрисы
Доказать: $\angle BOC=\angle CBN$.



<u>Доказательство:</u>
$\angle BOC=180°-\angle 1-\angle 2$ (по теореме о сумме углов треугольника)
$\angle NBC=180°-\angle 3-\angle 2$ (как смежные)
$\angle B=\angle C$, CC_1 и BB_1 – биссектрисы, значит $\angle 1=\angle 3$ и $\angle BOC=\angle NBC$, что и требовалось доказать.

297.



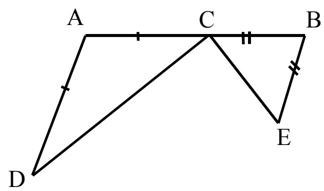
Дано: $\angle 1=\angle 2$, BD=BC, D=$\angle$C.

Доказать: $BB_1 \| DC$.

Доказательство:

$\angle D+\angle C=180°-\angle DBC=\angle 1+\angle 2$, т.е. $\angle D+\angle C=\angle 1+\angle 2$, но $\angle D=\angle C$, значит $\angle D=\angle C=\angle 1=\angle 2$, $\angle C$ и $\angle 2$ накрест лежащие при BB_1 и DC и секущей BC, значит $BB_1 \| DC$ (по признаку) чтд.

298.



Дано: AD||BE

AD=AC, $\angle ADC=\angle ACD$

CB=BE, $\angle BCE=\angle BEC$

Доказать: $\angle DCE$ – прямой.

Доказательство:

AD||BE, значит $\angle A+\angle B=\angle 180°$ (как односторонние)

$\angle A+\angle ADC+\angle ACD+\angle B+\angle BCE+\angle BEC=180°+180°=360°$

Тогда, $\angle ADC+\angle ACD+\angle BCE+\angle BEC=180°$, так как (значит $\angle A+\angle B=\angle 180°$)

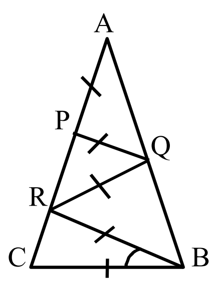
$\angle ADC=\angle ACD$, $\angle BCE=\angle BEC$, следовательно,

$\angle ACD+\angle BCE=90°$

$\angle DCE=180°-(\angle ACD+\angle BCE)=180°-90°=90°$ (как смежные)

Что и требовалось доказать.

299.



Дано: AB=AC, $\angle$ B= $\angle$ C

AP=PQ=QR=RB=RC

$\angle$ A=?

Решение:

Пусть $\angle$ C= $\angle$ B=x.

$\angle$ CBR=y.

Из Δ RQB:

$\angle R+\angle Q+\angle B=180^\circ$

значит, $180^\circ-\frac{3}{2}x+x-y+x-y=180^\circ$, $\frac{1}{2}x=2y$, x=4y

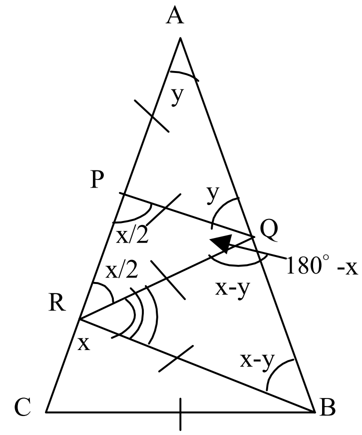
Из $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ — сумма углов треугольника равна 180°.

Значит, $4y+4y+y=180^\circ$;

$9y=180^\circ$;

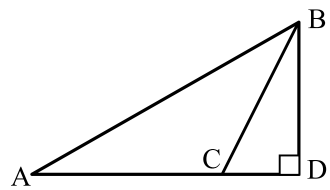
$y=20^\circ$.

Ответ: 20°.



300.

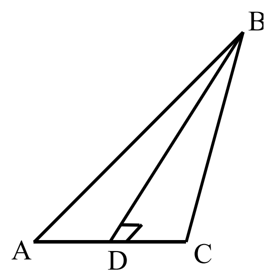
Дано: $\angle C>90^\circ$;
$BD \perp AC$.



Доказать: D лежит на продолжении отрезка AC

<u>Доказательство:</u>

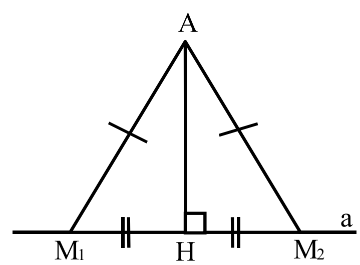
Пусть $BD \in [AC]$, значит, $\angle D=90^\circ$



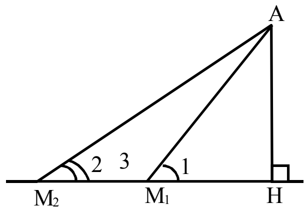
$\angle C=90^\circ$, т.е. $\angle D+\angle C>180^\circ$, а это противоречит теореме о сумме углов в треугольнике, значит, предположение неверно, а верно то, что надо доказать.

301.

Дано: $AH \perp a$, $HM_1=HM_2$
а) Доказать: $AM_1=AM_2$



Рассмотрим ΔAHM_2 и ΔAHM_1:
сторона AH – общая
$HM_1=HM_2$
Значит, $\Delta AHM_1=\Delta AHM_2$ (по двум катетам).
Следовательно, $AM_1=AM_2$.



б) Доказать: $AM_1<AM_2$, если $HM_1<HM_2$.

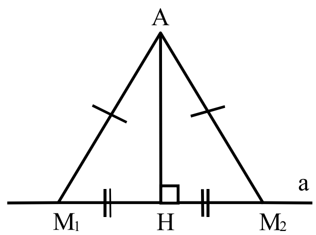
$\angle H=90^\circ$, следовательно, $\angle 1$ – острый (из ΔAHM_1)

$\angle H=90^\circ$, следовательно, $\angle 2$ – острый (из ΔAHM_2), ΔAM_1M_2, $\angle 2$ – острый. $\angle 3$ – тупой, т.к. он смежный с острым; Следовательно,$AM_2>AM_1$, ч.т.д.

302.

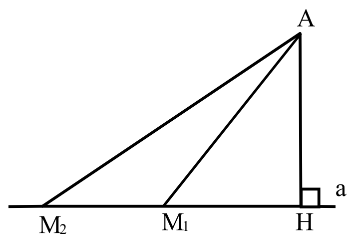
Дано: $AH\perp a$, $AM_1=AM_2$

а) Доказать: $HM_1=HM_2$



Из ΔAHM_1 и ΔAHM_2:
сторона AH – общая
$AM_1=AM_2$
Значит, $\Delta AHM_1=\Delta AHM_2$
(по двум катетам и гипотенузе).
значит, $HM_1=HM_2$.

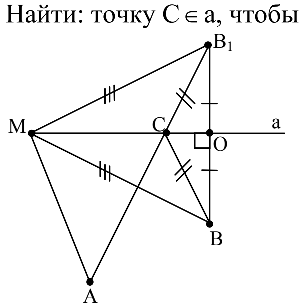
б) Доказать: $HM_1<HM_2$, когда $AM_1<AM_2$.



Пусть $HM_1>HM_2$ или $HM_1=HM_2$.
Если $HM_1=HM_2$, то получим результат из 301 (а), что противоречит $AM_1<AM_2$, значит, $HM_1=HM_2$ неверно.
Если $HM_1>HM_2$, то (по 301 (б)) получим $AM_1>AM_2$, следовательно, $HM_1>HM_2$ неверно.
Значит $HM_1<HM_2$, ч.т.д.

303.

Найти: точку $C\in a$, чтобы расстояние AC+BC было максимальным.



Решение:

Через B проведем прямую BO, $BO\perp a$, и отметим точку B_1 так, что $OB=OB_1$. Тогда $CB=CB_1$, значит $AC+BC=AC+CB_1=AB_1$, а для любой другой точки M прямой a получаем:

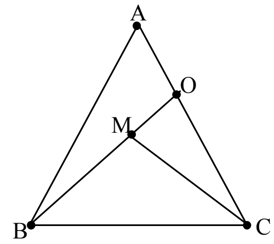
$AM+MB=AM+MB_1>AB_1$ (по неравенству треугольника).

Тогда, для точки C сумма (AC+BC) – минимальная.

304.

Дано: M лежит внутри Δ ABC.

Доказать: MB+MC<AB+AC.



Доказательство:

MC<MO+OC (неравенство треугольника в Δ MOC).

BO<BA+AO (из Δ BOA), значит

BO=BM+OM, тогда

BM+MO<BA+AO;

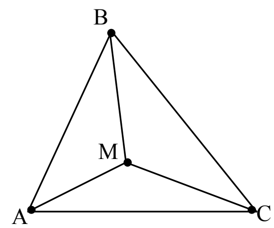
складывая неравенства имеем:

MC+BM+MO<MO+OC+BA+AO, т.е. MC+BM<OC+BA+AO.

AO+OC=AC, значит MC+MB<AB+AC, ч.т.д.

305.

Доказать: BM+CM+AM<P_{ABC}.



Доказательство:

M лежит внутри Δ ABC, значит, учитывая №301

имеем MB+MC<AB+AC,

MA+MB<AC+BC,

MA+MC<AB+BC, тогда

MB+MB+MA+MA+MC+MC<AB+AB+
+BC+BC+AC+AC,

или MB+MA+MC<AB+BC+AC=P_{ABC},

т.е. P_{ABC}>MB+MA+MC, ч.т.д.

306.

Дано: AB=AC+BC.

Доказать: A, B и C лежат на одной прямой.

Доказательство:

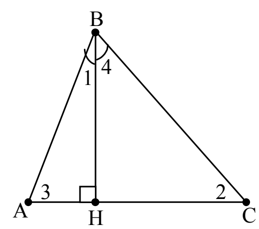
Если A, B, C не лежат на одной прямой, то они являются вершинами Δ ABC.

Значит, AB<AC+CB, что противоречит условию. Следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой, ч.т.д.

307.

Дано: $\angle AHB = 90^\circ$. $\angle B = 90^\circ$.

Доказать:



Δ ABC, Δ ABH и Δ BCH имеют равные углы соответственно.

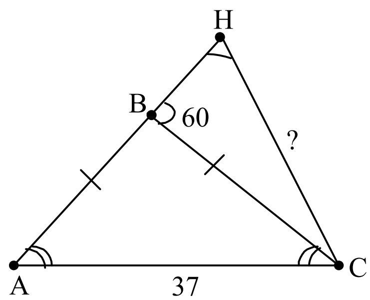
Доказательство:

Δ ABC – прямоугольный, значит, $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ (1)

$\angle 2+\angle 4=90^\circ$ (2) (т.к. Δ CBH – прямоугольный).

$\angle B=90^\circ$, следовательно, $\angle 1+\angle 4=90^\circ$ (3)
вычтем из (3) равенство (2):
$\angle 1-\angle 2$-0, значит $\angle 1=\angle 2$.
Вычтем из (3) (1):
$\angle 4-\angle 3$=0, значит $\angle 3=\angle 4$.
$\angle 1$ (в Δ ABH)= $\angle 2$ (в Δ CHB)= $\angle 2$ (в Δ ABC)
$\angle 3$ (в Δ ABH)= $\angle 4$ (в Δ CHB)= $\angle 3$ (в Δ ABC)
$\angle$ BHA (в Δ ABH)= $\angle$ CHB (в Δ CHB)= $\angle$ ABC (в Δ ABC).

308.



Дано: AB=BC, AC=37 см.
$\angle HBC=60^\circ$
$CH \perp AB$
CH=?

Решение:
$\angle A+\angle C=$ 60° (свойство внешнего угла)
$\angle A=\angle C$ (Δ ABC – равнобедренный)

тогда $2\angle A=60^\circ$,

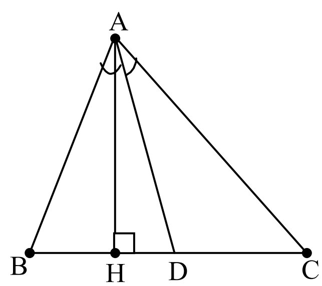
$\angle A=30^\circ$

Δ CHA – прямоугольный и $\angle A=30^\circ$, значит

CH=$\frac{1}{2}$ AC (по свойству), CH=37:2=18,5 см.

Ответ: 18,5 см.

309.



Дано:
$AB \neq AC$, AH – высота,
AD – биссектриса
Доказать:
$\angle HAD=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$

Доказательство:
AD – биссектриса, значит
$\angle CAD=\angle BAD$

Δ HAD – прямоугольный, значит, $\angle HAD+\angle ADH=90^\circ$,

$\angle HAD = 90^\circ - \angle ADH$;

$\angle ADH$ внешний к ΔADC, значит $\angle ADH = \angle CAD + \angle C$

$\angle HAD = 90^\circ - \angle CAD - \angle C$, $\angle CAD = \angle BAD$, тогда,

$\angle HAD = 90^\circ - \angle BAD - \angle C$

Складывая равенства

$\angle HAD = 90^\circ - \angle CAD - \angle C$ и $\angle HAD = 90^\circ - \angle BAD - \angle C$, получим

$2\angle HAD = 180^\circ - (\angle CAD + \angle BAD + 2\angle C)$

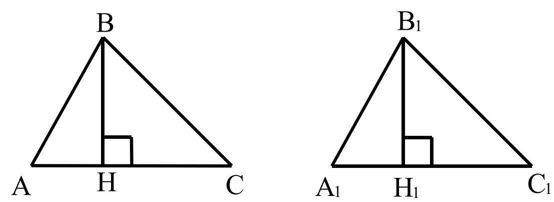
$2\angle HAD = 180^\circ - (A + 2\angle C)$, $\angle A + \angle B + \angle C =$ (сумма углов ΔABC),

$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$

$2\angle HAD = 180^\circ - (180^\circ - \angle B - \angle C + 2\angle C) = 180^\circ - 180^\circ + \angle B - \angle C =$
$= \angle B - \angle C$

т.е. $\angle HAD = (\angle B - \angle C)$.

310.



Дано: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

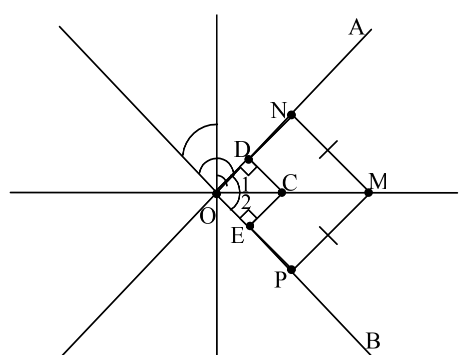
Доказать: $BH = B_1H_1$

Доказательство:

т.к. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$;

далее: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит $\Delta BHA = \Delta B_1H_1A_1$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $BH = B_1H_1$.

311.

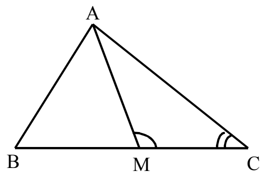


Построим биссектрисы углов, образованных при пересечении OA и OB. Возьмем любую точку C на биссектрисе. Тогда $\Delta ODC = \Delta OEC$ (OC – общая гипотенуза) и ($\angle 1 = \angle 2$), значит $CD = CE$.

Построим перпендикуляры MN и MP к OA и OB, тогда $\Delta ONM = \Delta OPM$, т.к. (OM – общая гипотенуза,

MN=MP, по условию, что M равноудалена от OA и OB).
Значит NOP=∠POM, OM – биссектриса ∠AOB.
Значит, искомое множество, это две прямые, являющиеся биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

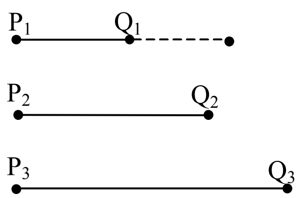
312.



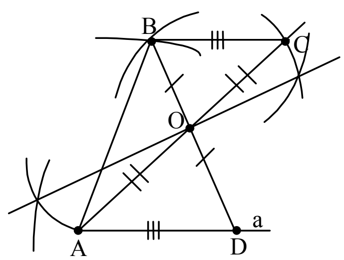
Доказать: если AC>AB, то AM<AC

<u>Доказательство:</u>
AC>AB, значит по теореме о соотношении между сторонами и углами и углами треугольника ∠B>∠C.
∠AMC=∠B+∠BAM (т.к. ∠AMC - …….), ∠B>∠C, значит
∠AMC>∠C в ΔACM ∠C<∠M, значит по теореме AM<AC, чтд.

313.

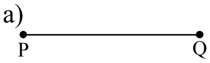


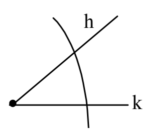
Дано: $AB=P_3Q_3$
$BC=P_2Q_2$
$BO=P_1Q_1$ – медиана.
Построить ΔABC.



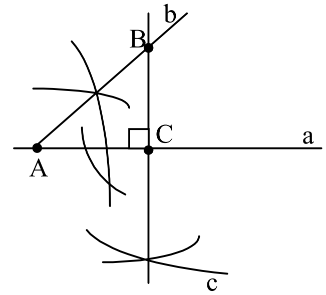
План построения:
а) строим любую прямую *a* и точку A на этой прямой;
б) строим точку D, что $AD=P_2Q_2$ и $D \in a;$
в) строим окружность с центром в A радиусом P_3Q_3 и окружность с центром в D радиусом $2P_1Q_1$;
г) окружности пересекаются в B;
д) строим O – середину отрезка BD;
е) строим прямую AO;
ж) строим C, что AO=OC;
з) получаем ΔABC.

314.
а)





а) Построить:
ΔABC прямоугольный, $\angle A=\angle hk$,
AB=PQ



План построения:

а) возьмем любую прямую a и произвольную точку A на прямой a;

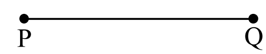
б) строим $\angle ab=\angle hk$ (задача о построении угла, равного данному);

в) строим точку B, что $B\in b$ и AB=PQ (задача об откладывании отрезка, равного данному отрезку);

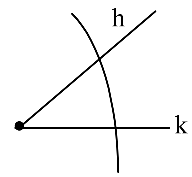
г) строим прямую c, что $B\in c$ и $c\perp a$;

д) прямая c пересекает прямую a в точке C;

е) получаем ΔABC.



б)
Построить:
прямоугольный ΔABC, $\angle A=\angle hk$,
BC=PQ.



План построения:

а) строим любую прямую a и произвольную точку A на прямой a;

б) строим $\angle ab=\angle hk$;

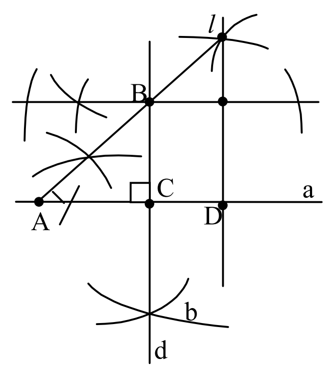
в) строим прямую c, чтобы $c \parallel a$ и расстояние между a и c равно PQ;

г) прямая c пересекает прямую 1 в B;

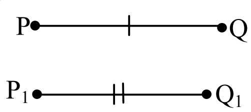
д) строим прямую d, $B\in d$ и $d\perp c$;

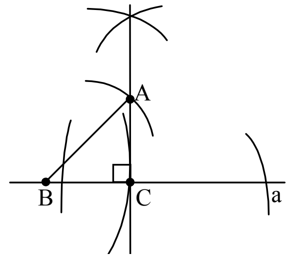
е) d пересекает прямую a в C;

ж) получаем ΔABC.



в)

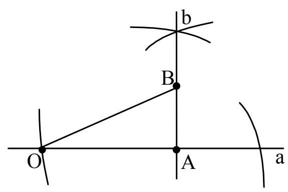




Построить:
прямоугольный ΔABC, $AB=PQ$, $BC=P_1Q_1$.

План построения:
а) строим любую прямую a и произвольную точку B на прямой a;
б) находим точку C, что $C \in a$ и $BC= P_1Q_1$;
в) строим прямую b, что $C \in b$ и $a \perp b$;
г) строим окружность w с центром в B и радиусом PQ;
д) окружность w пересекает прямую b в точке A;
е) получаем ΔABC.

315.



Построить:
угол, равный:
а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°;
д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 75°;
и) 105°.

а) План построения:
1) строим произвольную прямую a и произвольную точку A на прямой a;
2) строим прямую b, что $A \in b$ и $a \perp b$;
3) строим точку B, что $B \in b$;
4) строим окружность w с центром в B и радиусом 2AB;
5) окружность w пересекает прямую a в точке O;

ΔABC – прямоугольный (по построению) и $AB=\frac{1}{2}OB$ (по построению), значит $\angle AOB=30°$ (т.к. катет противолежащий этому углу равен половине гипотенузы).

б) получаем $\angle AOB=30°$.

$\angle OBA=60°$ (т.к. ΔAOB – прямоугольный и $\angle AOB=30°$).

в) $\angle AOB$ делим пополам, получаем 15°.

г) т.к. 120°=180°-60°, то этот угол построен в п.а) – это угол, смежный $\angle ABO$;

д) т.к. 150°=180°-30°, то этот угол построен в п.а) – это угол смежный $\angle AOB$;

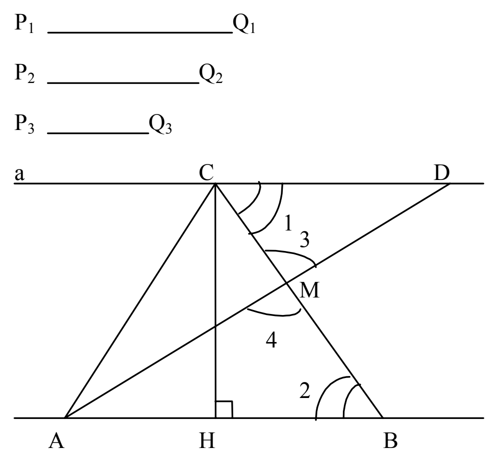
е) т.к. 135°=90°+45°, то строим две перпендикулярные прямые и один из полученных прямых углов делим пополам;

ж) т.к. 165°=180°-15°, то это угол, смежный построенному в п.в), т.е. углу в 15°.

з) т.к. 75°=90°-15°, то строим угол в 15°, потом строим перпендикуляр к одной из сторон построенного угла, проходящий через его вершину. Один из полученных углов будет 75°.

и) т.к. 105°=90°+15°, то это другой из углов, полученных в пункте

316.

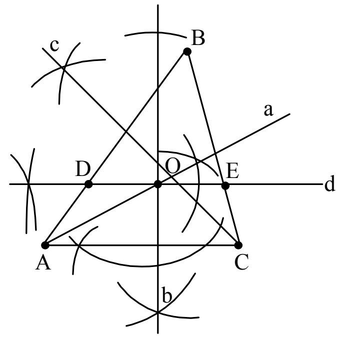


Построить: ΔABC, $CH=P_2Q_2$, $AM=P_3Q_3$, $AB=P_1Q_1$

План построения:

Строим параллельные прямые на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из них отмечаем точку A и откладываем AB, равный стороне треугольника. Строим окружность с центром A и радиусом, 2 P_3Q_3. Строим середину AD – M, где D – пересечение окружности и второй прямой, и строим прямую BM. ΔABC – искомый. BM пересекается со второй из параллельных прямых в точке C. Получаем ΔABC.

317.



Построить: DE

DE ∥ AC, $D \in AB$, $E \in BC$ и

DE=AD+CE

План построения:

а) строим биссектрису $\angle A$ – прямую *a*;

б) строим биссектрису $\angle C$ – прямую *c*;

в) прямая *a* пересекается *c* прямой с в O;

г) строим прямую *b*, что $O \in b$ и $b \perp AC$;

д) строим прямую d, что $d \perp b$ и $O \in d$;

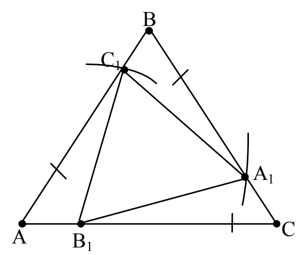
е) *a* пересекается с AB в D, *a* пересекается с CB в E;

ж) получаем отрезок DE.

<u>Доказательство:</u>

a – биссектриса $\angle A$; *c* – биссектриса $\angle C$; $d \perp b$, $b \perp AC$, значит d ∥ AC; $d \cap AB$ в D, $d \cap BC$ в E, следовательно, по задаче 245 имеем: DE=AD+CE.

318.



Дано: $B_1 \in AC$, AB=BC=AC

Построить: $A_1 \in BC$, $C_1 \in AB$, что $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний

План построения:

а) строим окружность w_1 с центром в B радиусом B_1C

б) w_1 пересекает BC в A_1

в) строим окружность w_2 с центром в A радиусом B_1C
г) w_2 пересекает AB в C_1
д) получаем $\Delta A_1B_1C_1$.

<u>Доказательство:</u>
$\angle A=\angle B=\angle C=60°$ (т.к. ΔABC – равносторонний) и AB=BC=AC, $AB_1=AC-B_1C$, $B_1C=AB-AC_1$, $CA_1=BC-BA_1$, $B_1C=AC_1=BA_1$ (по построению), значит $AB_1=BC_1=CA_1$, значит $\Delta AC_1B_1=\Delta BA_1C=\Delta CB_1A_1$ (по 2-му признаку равенства треугольников).
Тогда $B_1C_1=A_1C_1=A_1B_1$, и значит $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний, что и требовалось доказать.

319

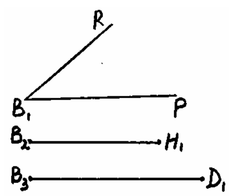


рисунок а

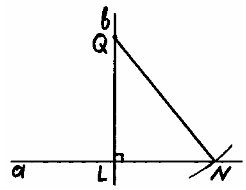


рисунок б

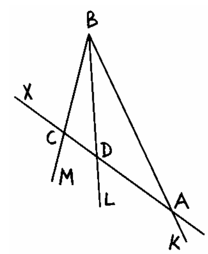


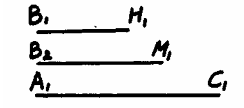
рисунок в

Пусть надо построить ΔABC, и даны уголы RB_1 P и отрезки: B_2H_1, равный высоте треугольника, B_3D_1, равный медиане треугольника (см. рис. а). Построим произвольную прямую *a*, отметим на ней точку L и через точку L проведем прямую в перпендикулярную прямой *a* (см. пункт 23 учебника). На прямой *в* от точки L отложим отрезок LQ, равный данному отрезку B_2H. Построим окружность с центром в точке Q и радиусом B_3D_1, она пересечет прямую *a* в точке N (см. рис. б). Построим произвольный луч BM, отложим от него угол MBK равный данному углу RB_1P (см. пункт 23 учебника). Построим биссектрису BL угла MBK, отложим отрезок BD равный данному отрезку B_3D_1 (см. рис. *в*). От луча DB отложим угол BDX равный углу QNL, луч DX пересечет луч BM в точке *c*. Проведем прямую CD, она пересечет луч BK в точке A. Треугольник ABC есть искомый.

Задачи повышенной трудности

320

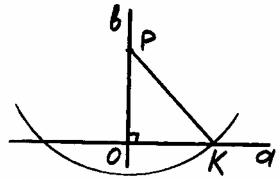
Пусть даны три отрезка B_1H_1 – высота треугольника, A_1C_1 – сторона треугольника B_2M_1 – медиана треугольника.



а)

Построим треугольник ABC по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

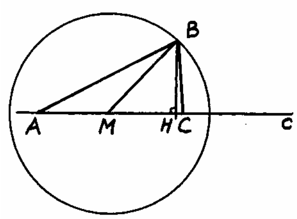
Проведем прямую *а* и построим прямую *в*, перпендикулярную прямой *а*. Пусть O – точка пересечения прямых *а* и *в*. На прямой *в* отложим отрезок $OP = B_1H_1$. Построим окружность с центром в точке P и радиусом B_2M_1, она пересечет прямую *а* в точке K.



б)

Теперь проведем прямую *с* на ней отметим отрезок $AC = A_1C_1$, построим к нему серединный перпендикуляр, который пересекает отрезок AC в точке M и AM = MC. Построим окружность с центром в точке M и радиусом B_2M_1.

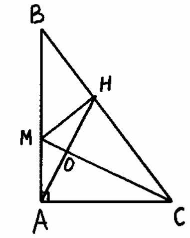
На прямой *с* от точки M отложим отрезок MH=OK. Через точку H проведем прямую перпендикулярную прямой *с*. Точка B пересечения этой прямой с окружностью является третьей вершиной искомого треугольника ABC. Однако при построении могут получиться четыре различных, но равных треугольника.



в)

321

На стороне BC от точки C отложим отрезок CH = AC. Проведем отрезок AH. Построим серединный перпендикуляр к отрезку AH, он пересечет отрезок AH в точке 0, а отрезок AB в точке M, являющейся искомой точкой, т.к. AM = MH и MH $\perp$ BC.



Дакажем это: AC = CH по построению, CM – общая, значит, ΔMAC = ΔMHC (по гипотенузе и катету), следовательно, AM=MH.

322

Из условия получаем, что AB = $a \cdot$ CD, а CD = $в \cdot$ AB, следовательно, $а = \frac{AB}{CD}$, а $в = \frac{CD}{AB}$; $а \cdot в = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{CD}{AB}$; $а = \frac{1}{в}$.

323

Из условия получаем, что AB = m $\cdot$ E_1F_1 и AB = n $\cdot$ E_2F_2, откуда m $\cdot$ E_1F_1 = n $\cdot$ E_2F_2, следовательно, $E_1F_1 = \frac{n}{m} \cdot E_2F_2$, т.е. искомое число $\frac{n}{m}$.

324

Из того, что углы $\angle hk$ и $\angle hl$ смежные следует: $\angle hk = 180° - \angle hl$;

$\angle hk + \angle hk = 180° - \angle hl + \angle hk$; $2\angle hk = 180° - \angle hl + \angle hk$; $\angle hk = \frac{1}{2}(180° - \angle hl + \angle hk)$;

$\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

Докажем второе утверждение: $\angle hl = 180° - \angle hk$;

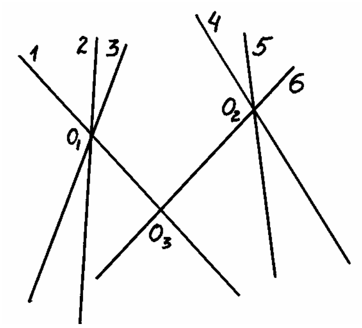
$\angle hl + \angle hl = 180° + \angle hl - \angle hk$; $2\angle hl = 180° + \angle hl - \angle hk$;

$\angle hl = \frac{1}{2}(180° + \angle hl - \angle hk)$; $\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

325

Пусть $\angle 6$ является вертикальным для $\angle 3$ а $\angle 7$ является вертикальным для $\angle 4$ тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$ а из того что вертикальные углы равны получим $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

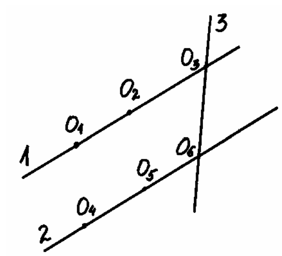
326.



Из условия следует что можно разбить наши шесть прямых на две тройки пусть прямые 1,2 и 3 пересекаются в точке O_1, а прямые 4, 5 и 6 в точке O_2, а прямые 6 и 1 пересекаяются в точке O_3. По условию через точку O_3 должна проходить еще хотя бы одна прямая, кроме прямых 6 и 1, это возможно только если все три точки O_1, O_2 и O_3 совпадают.

Предположим противное, тогда через точку O_3 проходит хотя бы одна из прямых 2,3,4 или 5, что невозможно, поскольку через две точки O_1 и O_2 или O_2 и O_3 на плоскости можно провести только одну прямую, или какие-то прямые совпадают, что противоречит условию, значит, наше предположение не верно, и все шесть прямых проходят через одну точку.

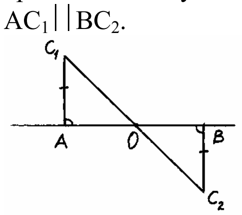
327



Из условия задачи следует, что наши шесть точек можно разбить на две тройки: пусть прямая 1 проходит через точки O_1, O_2 и O_3, а прямая 2 проходит через точки O_4, O_5 и O_6. Докажем, что прямые 1 и 2 совпадают: предположим противное.
Тогда через точки O_3 и O_6 проходит прямая 3, и, поскольку две несовподающие прямые могут пересекаться на плоскости только в одной точке, то точки O_1, O_2, O_4 и O_5 не пренадлежат прямой 3, что противоречит условию, следовательно прямые 1 и 2 совпадают, и все шесть точек лежат на одной прямой.

328

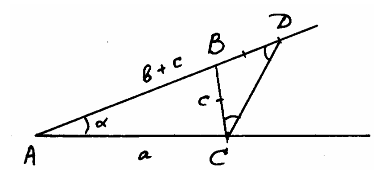
Рассмотрим прямые AC_1 и BC_2, и секущую на прямую AB, т.к. накрестлежащие углы $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$ по условию, получим, что $AC_1 || BC_2$.



$\angle AC_1C_2 = \angle BC_2C_1$ как накрестлежащие при пересечении паралельных прямых AC_1 и BC_2 секущей C_1C_2. Пусть точка O – точка пересечения прямых AB и C_1C_2. $\Delta AC_1O = \Delta BC_2O$ по стороне и двум углам ($\angle OAC_1 = \angle OBC_2$, $\angle AC_1O = \angle BC_2O$, $AC_1 = BC_2$), в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, т.е. AO = OB, что и требовалось доказать.

329

Построим треугольник по углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон. Однозначностью построения мы докажем равенство данных треугольников.



Представим, что треугольник уже построен (см. рис.) AD – это сумма двух сторон (*в* + *с*), AB = в. Тогда BD = BC = c,

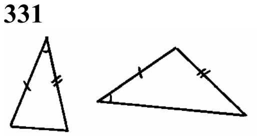
$\Rightarrow \angle BDC = \angle BCD$.

Построение: Проводим прямую, откладываем сторону *a*, откладываем сумму сторон. Соединяем точки C и D. От CD откладывем угол BDC. Находим точку B. Искомый треугольник – ABC. Построение однозначно.

330

Эти треугольники не могут быть неравными, так ка сумма углов треугольника равна 180°, то третьи углы этих треугольников тоже равны, а, следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

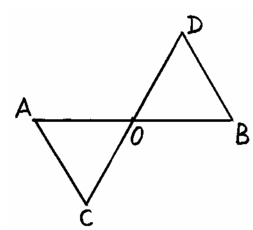
331



Могут. (см. рис.)

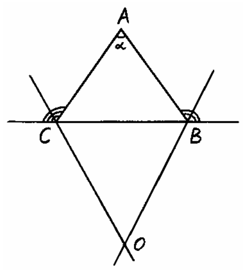
332

В треугольника AOC и BOD $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные. В ΔAOC $\angle AOC = \angle AOC$ (по свойству равнобедренного треугольника), а в ΔBOD $\angle BDO = \angle BOD$, следовательно, $\angle ACO = \angle BDO$. Из того, что сумма углов любого треугольника равна 180° следует, что $\angle DBO = \angle CAO$. Следователь-



но, ΔAOC = ΔBOD по углу и прилежащим к нему сторонам, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит OC = OD.

333

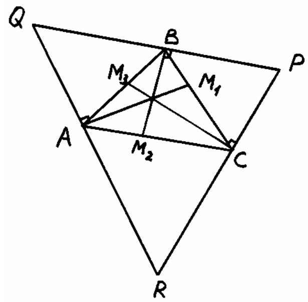


Пусть внешний угол при вершине B равен β, а угол при вершине C равен γ, тогда α = 180° – ((180° – β) + (180° – γ)) = β + γ – 180°; $\beta+\gamma=\alpha+180°$. Из треугольника BOC

$$\angle BOC=180°-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}=180°-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=$$

$$=180°-\frac{1}{2}(\alpha+180°)=180°-90°-\frac{\alpha}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}.$$

334



Пусть дан ΔABC, а прямые, перпендикулярные к биссектрисам треугольника пересекаются в точках P, Q и R. AM_1, BM_2 и CM_3 – биссектрисы ΔABC. $\angle M_1AR$ = $\angle M_1AQ$ = 90° по построению. $\angle M_1AC$ = $\angle M_1AB$ = $\frac{1}{2}\angle BAC$, т.к. M_1A – биссектриса, следовательно, $\angle CAR$ = $\angle BAQ$ = $90°-\frac{1}{2}\angle BAC$. Аналогично, $\angle BCP$ = $\angle ACR$ = $90°-\frac{1}{2}\angle BCA$ и $\angle QBA$ = $\angle PBC$ = $=90°-\frac{1}{2}\angle ABC$. Из ΔBPC: ∠BPC=180°–∠PBC–∠BCP=180° – 90°+ $+\frac{1}{2}\angle ABC-90°+\frac{1}{2}\angle BCA=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCA)=$

$=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$, анологично, $\angle CRA=90°-\frac{1}{2}\angle ABC$, $\alpha\angle AQB=90°-\frac{1}{2}\angle BCA$. Что и требовалось доказать.

335

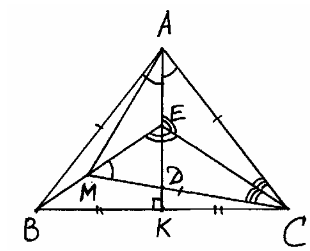
а) остроугольный;

б) остроугольный.

336

Если в треугольнике медиана равна половине стороны , к которой она проведена, то треугольник является прямоугольным, т.к. центр описанной около него окружности лежит на середине гипотенузы, следовательно, угол треугольника является острым, если медиана, проведенная из вершины этого угла больше половины противоположной стороны, и тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла меньше половины противоположной стороны.

337



Опустим высоту AK, которая является также медианой и бессектрисой, т.к. ΔABC — равнобедренный. Продолжим BM до пересечения с AK — точка E. Точка D — пересечение AK и CM. Соединим точку C и E.

$\angle ABC = \angle ACB = (180° - \angle BAC) / 2 = $
$= \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$.

ΔBEC — равнобедренный, $\Rightarrow \angle CEK = \angle BEK = 180° - \angle AKB - \angle EBK = 180° - 90° - 30° = 60°$, $\Rightarrow \angle BEC = 120°$.

$\angle ECK = \angle EBK = 30°$; $\angle ECM = \angle ECK - \angle MCB = 30° - 10° = 20°$; $\angle ACE = \angle ACB - \angle BCM - \angle ECM = 50° - 10° - 20° = 20°$; $\angle CAK = $
$= \angle CAB / 2 = \dfrac{80°}{2} = 40°$.

$\angle AEC = 180° - \angle CAK - \angle ACE = 180° - 40° - 20° = 120°$. $\Rightarrow \Delta AEC = $
$= \Delta MEC$ по второму признаку равенства треугольников (EC — общая сторона, $\angle AEC = \angle MEC = 120°$, $\angle ECM = \angle ACE = 20°$) $\Rightarrow$ AC=MC, $\Rightarrow \Delta MAC$ — равнобедренный.

$\angle ACM = \angle ACE + \angle ECM = 40°$,

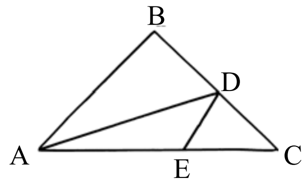
$\Rightarrow \angle AMC = \dfrac{180° - \angle ACM}{2} = \dfrac{180° - 40°}{2} = \dfrac{140°}{2} = 70°$.

338.

Рассмотрим треугольник ABC, пусть сторона AC является наибольшей стороной Δ ABC. Пусть DE – отрезок с концами на разных сторонах треугольника ABC.

Не ограничивая общности достаточно рассмотреть два возможных расположения отрезка DE:

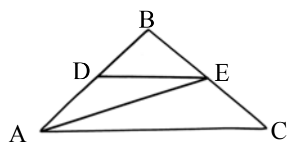
1) Один из концов отрезка лежит на наибольшей стороне треугольника (см. рисунок).



Если отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, то этот отрезок меньше большей из двух других сторон (см. задачу №312).

В ΔABC AD – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, а сторона AC – наибольшая сторона ΔABC, следовательно, $AD<AC$.

Теперь рассмотрим ΔADC, DE – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит, $DE \le AD$ или $DE \le DC$, но $AD<AC$ (по доказанному) и $DC \le BC<AC$ (так как AC – наибольшая сторона ΔABC), следовательно, $DE<AC$.

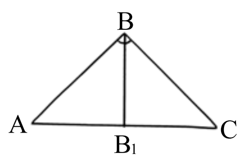


2) Ни один из концов отрезка DE не лежит на наибольшей стороне треугольника (см. рисунок).

В ΔABC AE – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит, $AE<AC$, т.к. AC – наибольшая сторона ΔABC.

Теперь рассмотрим ΔAEB, DE – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит, $DE \le AE$ или $DE \le BE$, но $AE<AC$ (по доказанному) и $BE \le BC<AC$ (так как AC – наибольшая сторона ΔABC), следовательно, $DE<AC$. Что и требовалось доказать.

339.



Из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача №173), следует, что $\angle BB_1C > \angle B_1BA$, так как $\angle BB_1C$ смежный с $\angle AB_1B$ треугольника ABB_1.

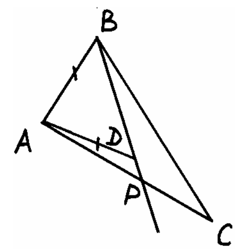
$\angle ABB_1 = \angle CBB_1$, так как BB_1 – биссектриса угла ABC. О доказанному $\angle BB_1C > \angle B_1BA$, следовательно, $\angle BB_1C > \angle CBB_1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим ΔB_1BC, по доказанному

$\angle BB_1C > \angle CBB_1$, следовательно, $BC > B_1C$.

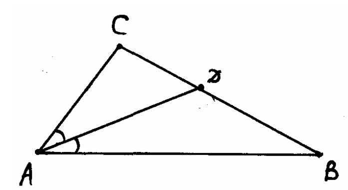
Из того, что $\angle AB_1B$ смежный с $\angle CB_1B$ треугольника CB_1B, следует, что $\angle AB_1B > \angle CBB_1$. На $\angle CBB_1 = \angle ABB_1$, следовательно, $\angle AB_1B > \angle ABB_1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим ΔAB_1B, по доказанному $\angle AB_1B > \angle ABB_1$, следовательно, $BA > B_1A$. Что и требовалось доказать.

340

Проведем луч BD, он пересечет сторону AC в точке P. В треугольнике ABP отрезок AD — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Согласно задаче №312 AD < AB или AD < AP, но по условию задачи AD = AB, следовательно, AD < AP и AB = AD, то есть AB < AP. AC= AP + PC, следовательно, AP < AC, тогда AB < AP < AC, то есть AB < AC, что и требовалось доказать.



341



По свойству биссектрисы можем записать отношение: $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

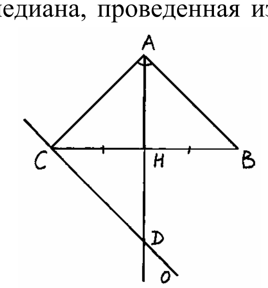
А из того, что AB > AC, можем заключить, что BD>CD.

Из того, что AB > AC, следует также, что $\angle ACB > \angle ABC$.

$\angle ADC = 180° - \angle CAD - \angle ACB$, $\angle ADC = 180° - \angle BAD - \angle ABC$, $\angle CAD = \angle BAD$, $\Rightarrow \angle ADC < \angle ADB$.

342

Рассмотрим ΔABC, AH — биссектриса и медиана, проведенная из вершины A. Проведем прямую CO||AB, точка D— точка пересечения CO с прямой AH. $\Delta AHB = \Delta DHC$ (по стороне и прилежащим к ней углам: CH=HB, т.к. AH — медиана; $\angle AHB = \angle DHC$ как вертикальные; $\angle PDC = \angle HAB$ как накрестлежащие углы при пересечении параллельных прямых CD и AB секущей AD, следовательно, $\angle HCD = \angle HBA$).

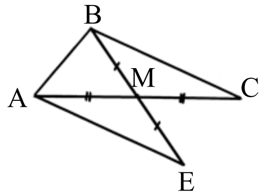


Получаем, что $\angle HDC = \angle HAB = \angle HAC$ (AH — биссектриса $\angle CAB$) и AB = CD. ΔADC — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника ($\angle CAD = \angle CDA$), следовательно, Ac = CD = AB, значит, ΔABC — равнобедренный.

Что и требовалось доказать.

343.

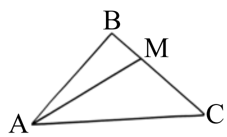
Пусть ABC – данный треугольник, AB >BC, BM – медиана.



Отметим точку E, такую, что M является серединой отрезка BE.

ΔAME=ΔCMB (по двум сторонам и углу между ними: BM=ME по построению, AM=MC, так как BM – медиана, $\angle$AME=$\angle$CMB - как вертикальные). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, а против равных сторон лежат равные углы, следовательно, AE=BC и $\angle$AEM=$\angle$CBM. Из того, что AB>BC и AE=BC следует, что AB>AE. Рассмотрим ΔABE: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, следовательно, $\angle$AEB > $\angle$ABE, но $\angle$AEB=$\angle$CBM, значит, $\angle$CBM > $\angle$ABM, что и требовалось доказать.

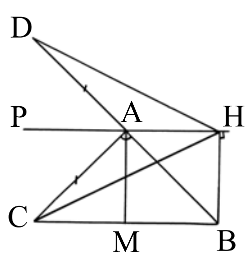
344.



Если $\angle$AMB не равен $\angle$AMC, то из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача №173), следует, что $\angle$AMB > $\angle$MCA и $\angle$AMB >$\angle$MAC, значит, у треугольника AMB и AMC не равны углы, следовательно, эти треугольники не равны.

Если $\angle$AMB=$\angle$AMC, допустим, что ΔAMB=ΔAMC, но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, AB=AC, что противоречит условию, следовательно, наше предположение было неверно и ΔAMB не равен ΔAMC. Что и требовалось доказать.

345.



Продолжим отрезок BA на отрезок AD=AC. Пусть AM – биссектриса угла CAB, следовательно, $\angle$CAM=$\angle$BAM. По условию прямая PA перпендикулярна биссектрисе AM (см. рисунок)., следовательно, $\angle BAH = 90^\circ - \angle BAM$ и

$\angle PAC = 90^\circ - \angle CAM$, но

$\angle$CAM=$\angle$BAM, следовательно,

$\angle$BAH=$\angle$PAC. $\angle$BAH=$\angle$DAP как вертикальные, значит, $\angle$PAC=$\angle$DAP. $\angle DAH = 180^\circ - \angle DAP$,

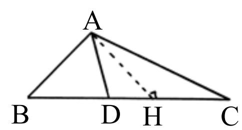
$\angle$ CAH=180° - $\angle$ PAC, следовательно, $\angle$ DAH= $\angle$ CAH.

Δ CAH= Δ DAH (по двум сторонам и углу между ними: CA=AD по построению, AH – общая сторона, $\angle$ DAH= $\angle$ CAH по доказанному). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, CH=DH. Из неравенства треугольника следует, что DH=HB>DB, но DB=DA+AB=CA+AB. По доказанному DH=CH, следовательно, CH+HB>CA+AB.

У треугольников BCH и ABC сторона CB – общая. $P_{\Delta BCH}$ =CH+HB+CB; $P_{\Delta ABC}$ =CA+AB+CB, из того, что CH+HB>CA+AB следует, что $P_{\Delta BCH}$ > >$P_{\Delta ABC}$. Что и требовалось доказать.

346.

Из доказанного в задаче №341 следует, что $\angle$ ADC > $\angle$ ADB, но $\angle$ ADC+ $\angle$ ADB=180°, следовательно, $\angle$ ADC > 90°.

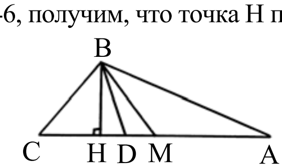


Предположим, что точка H принадлежит лучу DC, тогда $\angle$ AHD=90°, так как AH – высота Δ ABC. Рассмотрим Δ DAH. Сумма углов треугольника равна 180°, но в Δ DAH имеем: $\angle$ ADH+ $\angle$ AHD > 180°, получаем противоречие, следовательно, точка H лежит на луче DB. Что и требовалось доказать.

347.

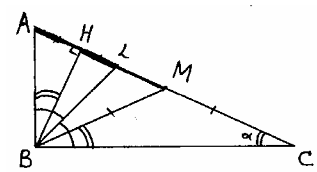
Рассмотрим треугольник ABC, у которого AB $\neq$ BC, BC $\neq$ AC, AB $\neq$ AC, пусть BH – высота Δ ABC, BD – биссектриса Δ ABC, BM – медиана Δ ABC.

НЕ ограничивая общности будем считать, что BC<AB, тогда, по доказанному в задаче №346, получим, что точка H принадлежит лучу DC.



По доказанному в задаче №341, получим, что AD>DC, но AD+DC=AC, следовательно, AD>$\frac{1}{2}\cdot$AC. BM – медиана, следовательно, CM=AM=$\frac{1}{2}\cdot$AC. Получаем, что AD>AM, т.е. точка M принадлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит лучу DA, а точка D лежит между точками H и M, что и требовалось доказать.

348



$\angle ABL = \angle LDC = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB =$
$=180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. $\angle ABH = 180° - \angle BAH - \angle AHB =$
$=180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$.

Треугольник прямоугольный, $\Rightarrow$ BM = MC, $\Rightarrow \Delta BMC$ — равнобедренный, $\Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = \alpha$, $\Rightarrow \angle BMC = 180° - 2\alpha$ (из треугольника BMC).

$\angle AMB = 180° - \angle BMC = 2\alpha$

ΔABL: $\angle ALB = 180° - 45° - (90° - \alpha) = 45° + \alpha$

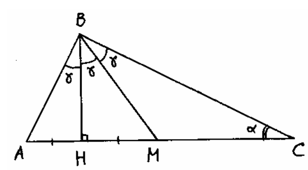
$\angle BLC$ (смежный с $\angle ALB$) $= 180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$

ΔLBM: $\angle LBM = 180° - 2\alpha - (135° - \alpha) = 45° - \alpha$

ΔHBL: $\angle HBL = 180° - 90° - 45° - \alpha = 45° - \alpha$

$\Rightarrow \angle LBM = \angle HBL$, ч.т.д.

349



Обозначим $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC$ через γ, а $\angle ACB$ через α.

BM — биссектриса ΔBCH, тгда по свойству биссектрисы имеем: $\dfrac{HM}{BH} = \dfrac{MC}{BC}$ (*)

В треугольнике ABM BH является биссектрисой и высотой, $\Rightarrow$ ΔABM — равнобедренный, $\Rightarrow$ BH — медиана $\Rightarrow$ AH = HM.

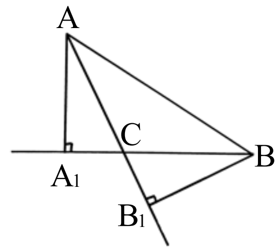
BM — медиана, $\Rightarrow$ AM = MC; AH = HM = AM/2, $\Rightarrow$ из (*):

BC = 2BH, $\Rightarrow$ т.к. ΔBHC — прямоугольный, $\angle\alpha = 30°$, $\Rightarrow \Delta BHC$:

$2\gamma = 60°$, $\Rightarrow \gamma = 30°$, $\Rightarrow \angle ABC = 3\gamma = 90°$, ч.т.д.

350.

Рассмотрим прямоугольный ΔBCB_1, с прямым углом BB_1C (так как BB_1 – высота ΔABC, следовательно, BB_1 перпендикулярна AC).



В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, т.е. $BC \geq BB_1$, учитывая, что по условию $AA_1 \geq BC$, получаем $AA_1 \geq BC \geq BB_1$. Рассмотрим прямоугольный ΔACA_1 с прямым углом AA_1C (т.к. AA_1 – высота ΔABC, следовательно, A_1 перпендикулярна BC). В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, т.е. $AC \geq AA_1$, учитывая, что по условию $BB_1 \geq AC$, получаем $BB_1 \geq AC \geq AA_1$, по доказанному $AA_1 \geq BC \geq BB_1$, следовательно, $AA_1=BB_1$.

$BB_1=AA_1 \geq BC \geq BB_1$, следовательно, $BC=BB_1$ и ΔBCB_1 равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно, $\angle BCB_1=\angle BB_1C=90^\circ$, тогда $\angle CBB_1=180^\circ -$ $- \angle BCB_1- \angle BB_1C=180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$, следовательно, BB_1 совпадает с BC. $AA_1=BB_1 \geq AC \geq AA_1$, следовательно, $AC=A_1$ и ΔACA_1 равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно, $\angle ACA_1=\angle AA_1C=90^\circ$, тогда $\angle CAA_1=180^\circ -$ $- \angle ACA_1- \angle AA_1C=180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$, значит, AA_1 совпадает с AC.

По доказанному $AC=AA_1=BB_1=BC$ и AC перпендикулярны BC, следовательно, ΔABC – равнобедренный и прямоугольный, что и требовалось доказать.

351

Решена в учебнике на стр. 95.

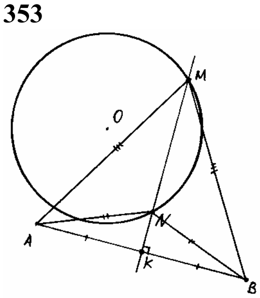
352

2 случая расположения точек.

Соединяем точки A и B. Находим середину AB — точку K. Поводим через нее перпендикуляр к AB. Находим точку M. M — искомая точкаб поскольку MK является одновременно высотой и медианой в ΔAMB, $\Rightarrow \Delta ABM$ — равнобедренный $\Rightarrow AM = MB$.

В случаях 3), 4) задача не имеет решения.

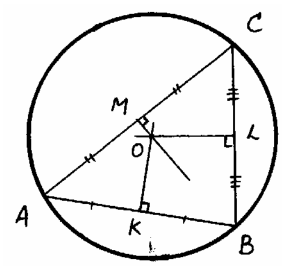
353



Соединяем точки A и B. Находим K — середину AB. Через K проводим перпендикуляр к AB. Его точки пересечения с окр-тью — искомые точки.

В случае, когда перпендикуляр касается окрестности — одно решение, когда не пересекается — нет решений.

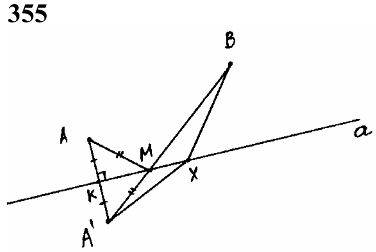
354



Соединяем точки A,B и C. Находим середины отрезков AB, BC и AC, соответственно K, L и M. Проводим перпендикуляры (серединные перпендикуляры ΔABC). Находим точку O — их точку пересечения. Проводим окружность радиуса AO = BO = CO с центром в т. O.

Вокруг треугольника всегда можно описать окружность, поэтому задача не имеет решения, лишь когда лежат на одной прямой.

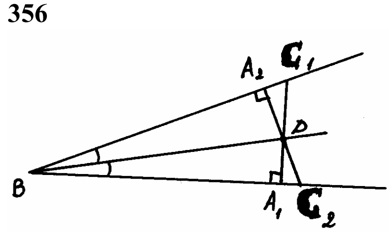
355



Из точки A опускаем перпендикуляр на *a*. Пусть K — точка пересечения. С другой стороны прямой откладываем точку A^1 с условием $AK = A^1A$. Соединяем точки A^1 и B.

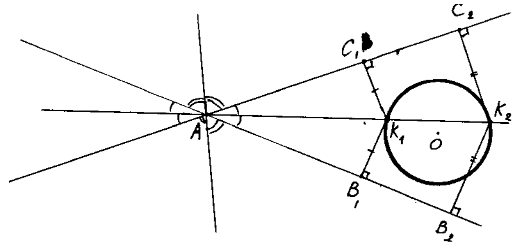
Пусть M — пересечение A^1B и пр. *a*. M — искомая точкаб поскольку выполняется неравенство треугольника: $AM+MB=A^1M+MB$ (т.к. ΔAA^1M — равнобедренный) $= A^1B < AX + XB$.

356



Откладываем угол B. Делим его пополам. Проводим биссектрису, откладываем на ней ВД. Из точки Д опускаем перпендикулярр на любую из сторон угла. Задача имеет 2 решения: ΔA_1BC_1 и ΔA_2BC_2.

357



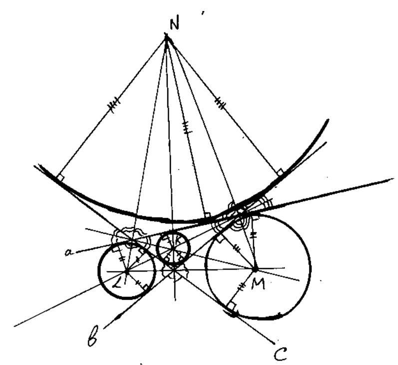
Делим углы пересекаемых прямых. Поводим биссектрисы. Точки пересечения биссектрисы с окружностью — искомые. Например $\Delta AC_1K_1 = \Delta\ AB_1K_1$ (прямоугольные треугольники с равным острым углом и общей гипотенузой), $\Rightarrow C_1K_1 = B_1K_1$.

Задача может иметь 1, 2, 3, 4 решения или не иметь решения вообще, в зависимости от расположения окружности по отношению к биссектрисе углов.

358

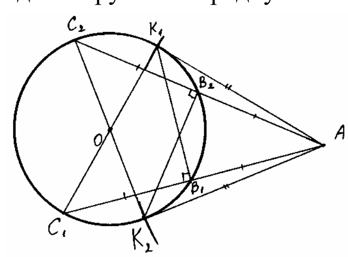
Как и в предыдущей задаче проводим биссектрису углов между пересекаемыми прямыми, а также биссектрисой смежных углов.

Получается 4 решения.



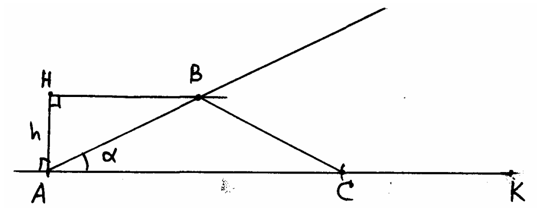
359

Пусть R — радиус окружности. Проводим окружность радиусов 2 R с центром в т. A и ищем пересечение ее с исходной окружностью — точки K_1, K_2. Через точки K_1, K_2 проводим диаметры, находим точки C_1, C_2. Соединяем A с C_1 и C_2, находим т. B_1 и B_2. В частности, $\angle C_1B_1K_1 = 90°$ (по свойству диаметра), т.е. K_1B_1 — высота ΔAC_1K_1. Но ΔAC_1K_1 — равнобедренный, т.к. $AK_1 = C_1K_1 = 2R_1 \Rightarrow K_1B_1$ — медиана, $\Rightarrow AB_1 = B_1C_1$.



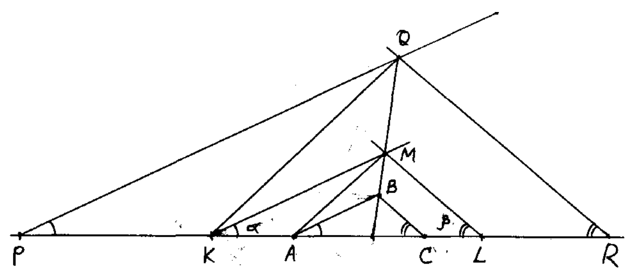
Если расстояние от т. A до окружности = 2R, то решение одно (надо лишь провести прямую OA), если > 2R — то решений нет.

360



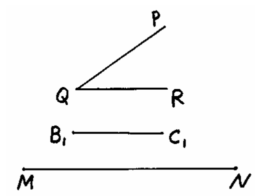
Проводим прямую. Отмечаем точку A — одну из вершин нашего треугольника на прямой отмечаем отрезок, равный периметру треугольника — находим т.к. откладываем заданный угол с вершиной в т. A. Из т. A проводим перпендикуляр к первой проведенной прямой. Откладываем на нем отрезок, равный высоте — находим т. H. От нее откладываем перпендикуляр к последней прямой, находим его пересечение с другой стороной угла. Нашли точку B. От точки K откладываем отрезок, равный AB; находим точку C. Соединяем B и C. ABC — искомый треугольник.

361

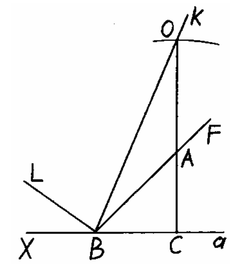


Проводим прямую. Откладываем на ней отрезок KL, равный периметру треугольника. Строим известные углы с вершинами в точках K и L. Находим пересечение их сторон — точку M. От точки K откладываем на исходную прямую отрезок, равный KM, находим т. P. Анологично находим т .R. через т. P проводи прямую, параллельную KM, через т. Q — параллельную LM. Их пересечение — т. Q. Проводим прямую QM, а также соединяем Q и K. Через точку M проводим прямую, параллельную KQ, находим т .A, через нее проводим прямую, параллельную KM до пересечения с QM, находим т. B. Через нее проводим прямую, параллельную LM, $\Rightarrow$ т. C. Из подобия треугольников ABC, KLM и PQR получаем, что AB = AK, BC = CL, т.е. AB + BC + AC = KL, т.е. ΔABC — искомый.

362



а)



б)

Пусть надо построить ΔABC, и даны ∠PQR и отрезки B_1C_1, равный стороне треугольника, и MN, равный сумме двух других сторон треугольника (см. рис. а). Проведем произвольную прямую *a*, отметим на ней точку B и точку X (см. рис. б). От луча BX отложим угол XBL равный углу PQR (см. пункт 23 учебника). От точки B отложим отрезок BC, равный данному отрезку B_1C_1. Построим биссектрису BK угла LBC (см. пункт 23 учебника). Построим окружность C радиусом равным MN и центром в точке C, она пересечет луч BK в точке O. Отложим от луча BK ∠KBF равный углу BKC. Луч BF пересечет CO в точке A. Треугольник ABC есть искомый, докажем это.

∠KAB = ∠ABC + ∠ACB (как внешний).

ΔKAB равнобедренный (т.к. ∠BKA = ∠KBA по построению).

Значит, $\angle KBA = \dfrac{180° - \angle KAB}{2} = \dfrac{180° - \angle ABC - \angle ACB}{2}$.

∠KBC = ∠KBA + ∠ABC = $\dfrac{180° - \angle ABC - \angle ACB}{2}$ + ∠ABC =

= $\dfrac{180° + \angle ABC - \angle ACB}{2}$.

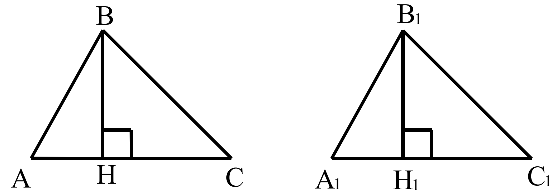
∠LBC = 2∠KBC = 180˚ + ∠ABC – ∠ACB (так как BK — биссектриса угла LBC).

∠PQR = ∠XBL = 180˚ – ∠LBC = 180˚ – 180˚ – ∠ABC + ∠ACB =
= ∠ACB – ∠ABC.

AB = AK, так как ΔKBA равнобедренный, значит, MN = KA + AC =

= AB + AC следовательно наши построения верны.

310.

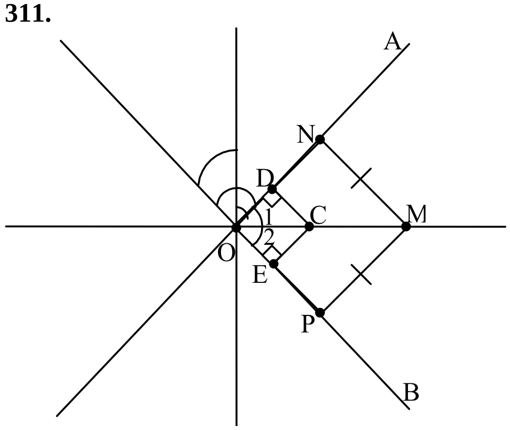


Дано: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
Доказать: $BH=B_1H_1$

Доказательство:

т.к.	$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
то	$AB=A_1B_1$
	$\angle A=\angle A_1$
далее:	$AB=A_1B_1$
	$\angle A=\angle A_1$
значит	$\Delta BHA=\Delta B_1H_1A_1$ (по гипотенузе и острому углу), тогда
	$BH=B_1H_1$

311.



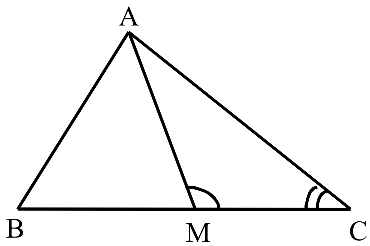
Построим биссектрисы углов, образованных при пересечении OA и OB. Возьмем любую точку C на биссектрисе. Тогда $\Delta ODC=\Delta OEC$ (OC – общая гипотенуза) и ($\angle 1=\angle 2$), значит CD=CE.

Построим перпендикуляры MN и MP к OA и OB, тогда $\Delta ONM=\Delta OPM$, т.к. (OM – общая гипотенуза, MN=MP, по условию, что M равноудалена от OA и OB).

Значит NOP=$\angle$POM, OM – биссектриса $\angle$AOB.

Значит, искомое множество, это две прямые, являющиеся биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

312.



Доказать: если AC>AB, то AM<AC

<u>Доказательство:</u>

AC>AB, значит по теореме о соотношении между сторонами и углами и углами треугольника $\angle B>\angle C$.

$\angle AMC=\angle B+\angle BAM$ (т.к. $\angle AMC$ - …….)

$\angle B>\angle C$, значит

$\angle AMC>\angle C$

в ΔACM $\angle C<\angle M$, значит по теореме AM<AC, чтд.

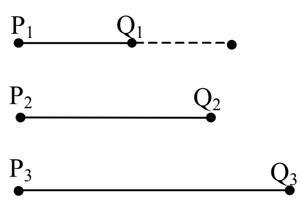
313.

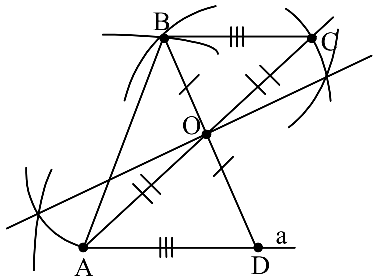
Дано: $AB=P_3Q_3$

$BC=P_2Q_2$

$BO=P_1Q_1$ – медиана.

Построить ΔABC.





План построения:

а) строим любую прямую *a* и точку A на этой прямой;

б) строим точку D, что $AD=P_2Q_2$ и $D\in a$;

в) строим окружность с центром в A радиусом P_3Q_3 и окружность с центром в D радиусом $2P_1Q_1$;

г) окружности пересекаются в B;

д) строим O – середину отрезка BD;

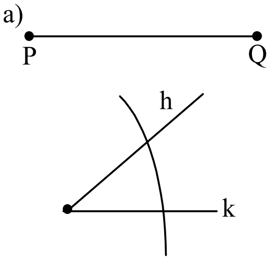
е) строим прямую AO;

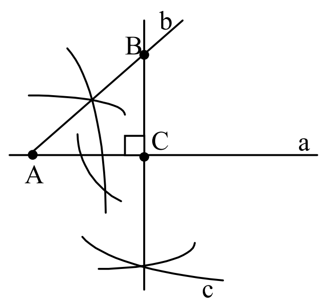
ж) строим C, что AO=OC;

з) получаем ΔABC.

314.

а)





а) Построить:

ΔABC прямоугольный

$\angle A=\angle hk$

$AB=PQ$

План построения:

а) возьмем любую прямую *a* и произвольную точку A на прямой *a*;

б) строим $\angle ab=\angle hk$ (задача о построении угла, равного данному);

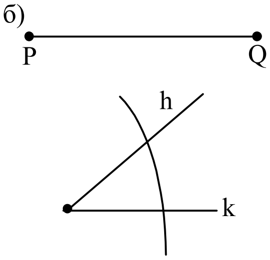
в) строим точку B, что $B \in b$ и $AB=PQ$ (задача об откладывании отрезка, равного данному отрезку);

г) строим прямую *c*, что $B \in c$ и $c \perp a$;

д) прямая *c* пересекает прямую *a* в точке C;

е) получаем ΔABC.

б)

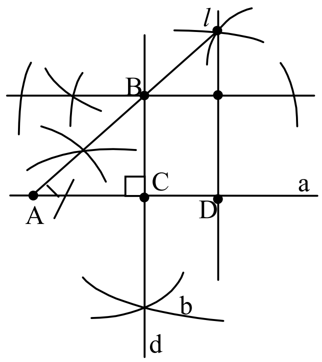


Построить:

прямоугольный ΔABC

$\angle A=\angle hk$

$BC=PQ$.



План построения:

а) строим любую прямую *a* и произвольную точку A на прямой *a*;

б) строим ∠ab=∠hk;

в) строим прямую *c*, чтобы *c* ∥ *a* и расстояние между *a* и *c* равно PQ;

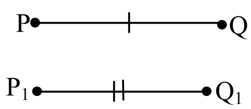
г) прямая *c* пересекает прямую 1 в B;

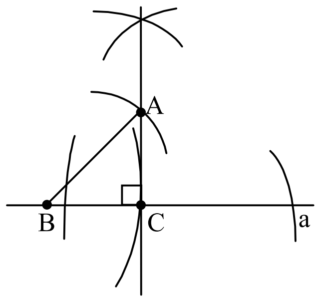
д) строим прямую *d*, B ∈ *d* и *d*⊥*c*;

е) *d* пересекает прямую *a* в C;

ж) получаем ΔABC.

в)





Построить:

прямоугольный ΔABC

AB==PQ

$BC=P_1Q_1$.

План построения:

а) строим любую прямую *a* и произвольную точку B на прямой *a*;

б) находим точку C, что $C \in a$ и $BC= P_1Q_1$;

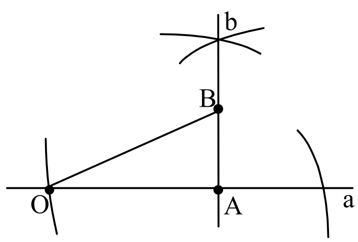
в) строим прямую *b*, что $C \in b$ и $a \perp b$;

г) строим окружность w с центром в B и радиусом PQ;

д) окружность w пересекает прямую *b* в точке A;

е) получаем ΔABC.

315.



Построить:

угол, равный:

а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°;

д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 75°;

и) 105°.

а) План построения:

1) строим произвольную прямую *a* и произвольную точку A на прямой *a*;

2) строим прямую *b*, что $A \in b$ и $a \perp b$;

3) строим точку B, что $B \in b$;

4) строим окружность w с центром в B и радиусом 2AB;

5) окружность w пересекает прямую *a* в точке O;

ΔABC – прямоугольный (по построению) и

AB=$\frac{1}{2}$ OB (по построению), значит

$\angle$AOB=30° (т.к. катет противолежащий этому углу равен половине гипотенузы).

б) получаем $\angle$AOB=30°.

$\angle$OBA=60° (т.к. ΔAOB – прямоугольный и $\angle$AOB=30°).

в) $\angle$AOB делим пополам, получаем 15°.

г) т.к. 120°=180°-60°, то этот угол построен в п.а) – это угол, смежный $\angle$ABO;

д) т.к. 150°=180°-30°, то этот угол построен в п.а) – это угол смежный $\angle$AOB;

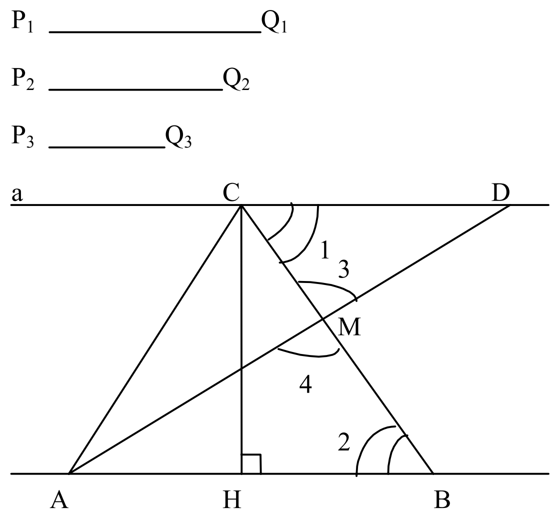
е) т.к. 135°=90°+45°, то строим две перпендикулярные прямые и один из полученных прямых углов делим пополам;

ж) т.к. 165°=180°-15°, то это угол, смежный построенному в п.в), т.е. углу в 15°.

з) т.к. 75°=90°-15°, то строим угол в 15°, потом строим перпендикуляр к одной из сторон построенного угла, проходящий через его вершину. Один из полученных углов будет 75°.

и) т.к. 105°=90°+15°, то это другой из углов, полученных в пункте

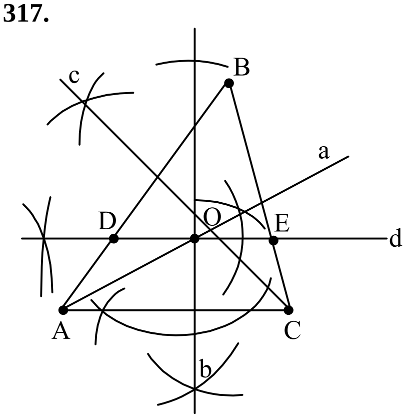
316.



Построить: ΔABC
$CH=P_2Q_2$, $AM=P_3Q_3$, $AB=P_1Q_1$

План построения:
Строим параллельные прямые на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из них отмечаем точку A и откладываем AB, равный стороне треугольника. Строим окружность с центром A и радиусом, 2 P_3Q_3. Строим середину AD – M, где D – пересечение окружности и второй прямой, и строим прямую BM. ΔABC – искомый. BM пересекается со второй из параллельных прямых в точке C. Получаем ΔABC.

317.



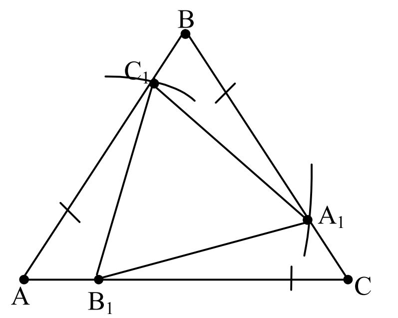
Построить: DE
$DE \parallel AC$, $D \in AB$, $E \in BC$ и
$DE=AD+CE$

План построения:
а) строим биссектрису $\angle A$ – прямую *a*;
б) строим биссектрису $\angle C$ – прямую *c*;
в) прямая *a* пересекается *c* прямой с в O;
г) строим прямую *b*, что $O \in b$ и $b \perp AC$;
д) строим прямую d, что $d \perp b$ и $O \in d$;
е) *a* пересекается с AB в D, *a* пересекается с CB в E;
ж) получаем отрезок DE.

Доказательство:
a – биссектриса $\angle A$
c – биссектриса $\angle C$

$d \perp b$, $b \perp AC$, значит $d \parallel AC$
$d \cap AB$ в D, $d \cap BC$ в E, следовательно
по задаче 245 имеем: DE=AD+CE.

318.



Дано: $B_1 \in AC$, AB=BC=AC
Построить: $A_1 \in BC$, $C_1 \in AB$, что $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний

План построения:
а) строим окружность w_1 с центром в B радиусом B_1C
б) w_1 пересекает BC в A_1
в) строим окружность w_2 с центром в A радиусом B_1C
г) w_2 пересекает AB в C_1
д) получаем $\Delta A_1B_1C_1$.

<u>Доказательство:</u>
$\angle A=\angle B=\angle C=60°$ (т.к. ΔABC – равносторонний)
и AB=BC=AC
$AB_1=AC-B_1C$
$B_1C=AB-AC_1$
$CA_1=BC-BA_1$
$B_1C=AC_1=BA_1$ (по построению), значит
$AB_1=BC_1=CA_1$, значит
$\Delta AC_1B_1=\Delta BA_1C=\Delta CB_1A_1$ (по 2-му признаку равенства треугольников).
Тогда $B_1C_1=A_1C_1=A_1B_1$, и значит $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний, что и требовалось доказать.