

Найти координаты центра тяжести плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней одинакового погонного веса.

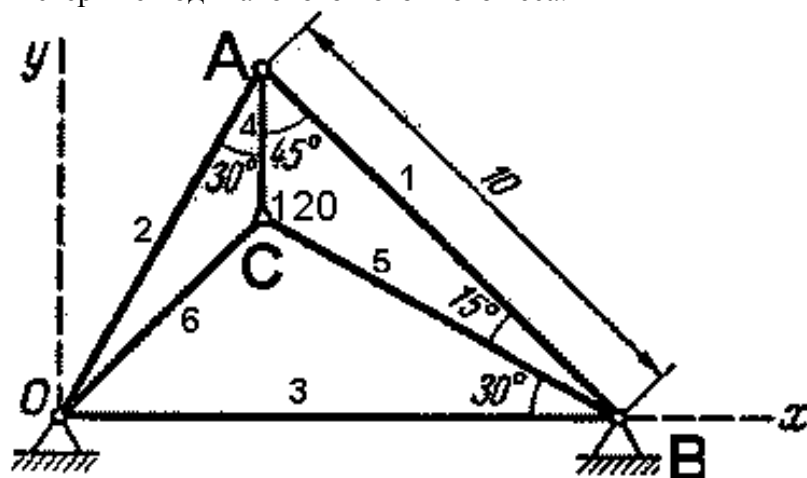


Рис.1

Решение

Определим углы в треугольниках ΔABO и ΔABC (см. рис.1):

$$\angle AOB = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) - (15^\circ + 30^\circ) = 60^\circ; \quad \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ.$$

В этих же треугольниках по теореме синусов имеем равенства:

$$\Delta ABO: \quad \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{AO}{\sin 45^\circ} = \frac{BO}{\sin 75^\circ} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_1}{\sin 60^\circ} = \frac{l_2}{\sin 45^\circ} = \frac{l_3}{\sin 75^\circ};$$

$$\Delta ABC: \quad \frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{AC}{\sin 15^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_1}{\sin 120^\circ} = \frac{l_4}{\sin 15^\circ} = \frac{l_5}{\sin 45^\circ}.$$

Определим длины стержней:

$$l_1 = AB = 10 \text{ м};$$

$$l_2 = AO = l_1 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 8.165 \text{ м};$$

$$l_3 = BO = l_1 \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 10 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{3} \approx 11.154 \text{ м};$$

$$l_4 = AC = l_1 \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} = 10 \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \approx 2.989 \text{ м};$$

$$l_5 = BC = l_1 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 8.165 \text{ м}.$$

По теореме косинусов в ΔBCO имеем $CO^2 = BO^2 + BC^2 - 2BO \cdot BC \cos 30^\circ$, отсюда

$$l_6 = CO = \sqrt{BO^2 + BC^2 - 2BO \cdot BC \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{l_3^2 + l_5^2 - 2l_3l_5 \cos 30^\circ} =$$

$$l_6 = CO = \sqrt{\left(10 \frac{2 + \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(10 \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \frac{2 + \sqrt{3}}{3} \cdot 10 \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5.774 \text{ м}.$$

Определим координаты точек A , B и C (см. рис.1):

$$x_A = \ell_2 \cos 60^\circ = 8.165 \cdot 0.5 \approx 4.082 \text{ м}; \quad y_A = \ell_2 \sin 60^\circ = 8.165 \cdot 0.5\sqrt{3} \approx 7.071 \text{ м};$$

$$x_B = \ell_3 \approx 11.154 \text{ м}; \quad y_B = 0;$$

$$x_C = \ell_3 - \ell_5 \cos 30^\circ = 11.154 - 8.165 \cdot 0.5\sqrt{3} \approx 4.082 \text{ м};$$

$$y_C = \ell_5 \sin 30^\circ = 8.165 \cdot 0.5 \approx 4.082 \text{ м}.$$

Определим координаты середин стержней, данные занесем в таблицу:

$$x_1 = 0.5 \cdot (x_A + x_B) = 0.5 \cdot (4.082 + 11.154) \approx 7.618 \text{ м};$$

$$y_1 = 0.5 \cdot (y_A + y_B) = 0.5 \cdot (7.071 + 0) \approx 3.536 \text{ м};$$

$$x_2 = 0.5 \cdot (x_A + x_O) = 0.5 \cdot (4.082 + 0) \approx 2.041 \text{ м};$$

$$y_2 = 0.5 \cdot (y_A + y_O) = 0.5 \cdot (7.071 + 0) \approx 3.536 \text{ м};$$

$$x_3 = 0.5 \cdot (x_B + x_O) = 0.5 \cdot (11.154 + 0) \approx 5.577 \text{ м};$$

$$y_3 = 0.5 \cdot (y_B + y_O) = 0.5 \cdot (0 + 0) = 0;$$

$$x_4 = 0.5 \cdot (x_A + x_C) = 0.5 \cdot (4.082 + 4.082) \approx 4.082 \text{ м};$$

$$y_4 = 0.5 \cdot (y_A + y_C) = 0.5 \cdot (7.071 + 4.082) \approx 5.577 \text{ м};$$

$$x_5 = 0.5 \cdot (x_B + x_C) = 0.5 \cdot (11.154 + 4.082) \approx 7.618 \text{ м};$$

$$y_5 = 0.5 \cdot (y_B + y_C) = 0.5 \cdot (0 + 4.082) \approx 2.041 \text{ м};$$

$$x_6 = 0.5 \cdot (x_C + x_O) = 0.5 \cdot (4.082 + 0) \approx 2.041 \text{ м};$$

$$y_6 = 0.5 \cdot (y_C + y_O) = 0.5 \cdot (4.082 + 0) \approx 2.041 \text{ м}.$$

	x_i	y_i	ℓ_i	$x_i \ell_i$	$y_i \ell_i$
1	7.618	3.536	10	76.180	35.355
2	2.041	3.536	8.165	16.667	28.868
3	5.577	0	11.154	62.201	0
4	4.082	5.577	2.989	12.201	16.667
5	7.618	2.041	8.165	62.201	16.667
6	2.041	2.041	5.774	11.785	11.785
			$\sum_i \ell_i = 46.246$	$\sum_i x_i \ell_i = 241.234$	$\sum_i y_i \ell_i = 109.341$

Определим координаты центра тяжести заданной системы стержней:

$$x_{ум} = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{241.234}{46.246} \approx 5.216 \text{ м}; \quad y_{ум} = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{109.341}{46.246} \approx 2.364 \text{ м}.$$

Ответ: $x_{ум} = 5.216 \text{ м}$, $y_{ум} = 2.364 \text{ м}$.