

Домашняя работа по алгебре и началам анализа за 10 класс

к учебнику «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс»
под ред. А.Н. Колмогорова, М.: «Просвещение», 2001 г.

StudyPort.ru
учебно-практическое
пособие

Содержание

Глава I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.....	4
§1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА.....	4
1. Синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение).....	4
2. Тригонометрические функции и их графики.....	14
§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ.....	21
3. Функции и их графики.....	21
4. Четные и нечетные функции.	
Периодичность тригонометрических функций.....	30
5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы.....	39
6. Исследование функций.....	49
7. Свойства тригонометрических функций.	
Гармонические колебания.....	56
§3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ.....	70
8. Арксинус, арккосинус и арктангенс.....	70
9. Решение простейших тригонометрических уравнений.....	75
10. Решение простейших тригонометрических неравенств.....	81
11. Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений.....	88
Глава II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ.....	100
§4. ПРОИЗВОДНАЯ.....	100
12. Приращение функции.....	100
13. Понятие о производной.....	104
14. Понятие о непрерывности функции и предельном переходе.....	108
15. Правила вычисления производных.....	113
16. Производная сложной функции.....	117
17. Производные тригонометрических функций.....	122
§5. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНОЙ.....	125
18. Применение непрерывности.....	125
19. Касательная к графику функции.....	132
20. Приближенные вычисления.....	140
21. Производная в физике и технике.....	142
§6. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ.....	145
22. Признак возрастания (убывания) функции.....	145
23. Критические точки функции, максимумы и минимумы.....	154
24. Примеры применения производной к исследованию функций.....	163
25. Наибольшее и наименьшее значения функции.....	180

ГЛАВА 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГЛАВНОГО АРГУМЕНТА

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение)

1.

$$\text{а) } 45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{б) } 120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3};$$

$$36^\circ = 36^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5};$$

$$310^\circ = 310^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{31\pi}{18};$$

$$180^\circ = 180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \pi;$$

$$360^\circ = 360^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 2\pi;$$

$$\text{в) } 60^\circ = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{г) } 150^\circ = 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6};$$

$$72^\circ = 72^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{6\pi}{16};$$

$$216^\circ = 216^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{6\pi}{5};$$

$$270^\circ = 270^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{2};$$

$$90^\circ = 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}.$$

2.

$$\text{а) } \frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ;$$

$$\text{б) } \frac{2\pi}{5} = 72^\circ;$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ;$$

$$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ;$$

$$-\frac{\pi}{9} = -20^\circ;$$

$$\text{в) } \frac{\pi}{6} = 30^\circ;$$

$$\text{г) } \frac{5\pi}{4} = 225^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = 108^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ;$$

$$\pi = 180^\circ;$$

$$-\frac{7\pi}{12} = -105^\circ.$$

3.

$$\text{а) } \sin 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } 3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \pi + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = 2,5;$$

$$\text{в) } 6 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos 0 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} = 4;$$

$$\text{г) } 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 3.$$

4.

По определению $|\sin \alpha| \leq 1$, $|\cos \beta| \leq 1$, для любых α и β

а) $\sin \alpha = -0,5 \leq 1$; $\cos \beta = \sqrt{3} > 1$; $\operatorname{tg} \gamma = -2,5$;

существуют α и γ , не существует такого значения β ;

б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$; $\cos \beta = -2,2 < -1$; $\operatorname{tg} \gamma = 0,31$;

существует γ , не существует таких значений α и β

в) $\sin \alpha = 1,3 > 1$; $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{4} < 1$; $\operatorname{tg} \gamma = 5,2$;

существуют β , γ , не существует такого значения α ;

г) $\sin \beta = -\frac{7}{9} > -1$; $\cos \beta = \sqrt{2,5} > 1$; $\operatorname{tg} \gamma = -7,5$;

существует значения α и γ , не существует такого значения β .

5.

Тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

а) $\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1$, существует такое α ;

б) $0,4^2 + 0,7^2 = 0,65 \neq 1$, не существует такого α ;

в) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} + \frac{3}{9} = \frac{9}{9} = 1$, существует такое α ;

г) $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, существует такое α .

6.

Тождество: $\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1$

а) $-\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 1$, существует такое β ;

б) $(\sqrt{3}-2) \cdot (\sqrt{3}+2) = -1 \neq 1$, не существует такого β ;

в) $2,4 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = -1 \neq 1$, не существует такого β ;

г) $\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 1$, существует такое β .

7.

$$\text{a) } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right); \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -0,6;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{4};$$

$$\text{б) } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right); \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{10}}{4};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{3}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\text{в) } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right); \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{7}}{3};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{14}}{7}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2};$$

$$\text{г) } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right); \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{8}{17};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{8}{15}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{15}{8}.$$

8.

$$\text{a) } \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ = \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$\text{б) } \frac{1 - 2 \cos^2 \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = \frac{(\sin \beta - \cos \beta)(\cos \beta + \sin \beta + \cos \beta)}{\cos \beta + \sin \beta} = \sin \beta - \cos \beta,$$

если $\cos \beta + \sin \beta \neq 0$, т.е. $\beta \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$\text{в) } (\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{г) } \frac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + \operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t - 1 + \sin^2 t \cos^2 t}{\cos^4 t} = -\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = -1.$$

9.

$$\text{a) } \frac{\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} - \sin \frac{4\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{15}}{\cos 0,3\pi \cdot \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cdot \cos 0,2\pi} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\text{в) } \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cdot \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{5\pi}{18}}{\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \pi} = \frac{1}{2}.$$

10.

$$\text{а) При } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right), \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{3}{5};$$

$$\text{при } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right), \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{12}{13};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{24}{25}; \quad \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = -\frac{119}{169};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{16}{65};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{33}{65};$$

$$\text{б) При } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right), \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -0,8;$$

$$\text{при } \beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right), \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{15}{17};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,96;$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{161}{289};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{84}{85};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{77}{85}.$$

11.

a) $\frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta);$

б) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$

в) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$

г) $\operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha) + \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha.$

12.

a) $\sin \frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8}; \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3};$

$\operatorname{tg} 0,6\pi = -\operatorname{tg} 0,4\pi = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}; \quad \operatorname{ctg}(-1,2\pi) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5};$

б) $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}; \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{9}\right) = -\sin \frac{4\pi}{9} = -\cos \frac{\pi}{18};$

$\cos 1,8\pi = \cos 0,2\pi; \quad \operatorname{ctg} 0,9\pi = \operatorname{ctg}(\pi - 0,1\pi) = -\operatorname{ctg} 0,1\pi.$

13.

a) $8 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} = 4 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{3} \cdot (-1) = 2\sqrt{3};$

б) $\cos^2(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $= \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 1;$

в) $10 \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \frac{7\pi}{4} = 10 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 5;$

г) $\frac{\sin^2(\pi - t)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)} - \cos(2\pi - t) = \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} - \cos t = 1.$

14.

a) $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — верно;

б) $\cos \frac{11\pi}{24} - \cos \frac{\pi}{8} = -2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} = -\sin \frac{7\pi}{24}$ — верно;

$$\text{в) } \sin \frac{11\pi}{18} + \sin \frac{7\pi}{18} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{9} = 2 \cos \frac{\pi}{9} \text{ — не верно;}$$

$$\text{г) } \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} \text{ — верно.}$$

15.

$$\text{а) } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right) \text{ следовательно, } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right) \text{ и } \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{26}}{26}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{26};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = -5;$$

$$\text{б) } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \text{ следовательно, } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right) \text{ и } \cos \alpha < 0, \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 3.$$

$$\text{в) } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right) \text{ следовательно, } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi \right) \text{ и } \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \left(-\frac{10}{7\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{7}.$$

$$\text{г) } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right) \text{ следовательно, } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right) \text{ и}$$

$$\cos \alpha < 0, \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{15}{17},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4\sqrt{17}}{17};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = -4.$$

16.

а) $\alpha = 0,19$ (рад);

$\sin \alpha \approx 0,1889$; $\cos \alpha \approx 0,9820$; $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,1923$; $\operatorname{ctg} \alpha \approx 5,200$;

б) $\alpha = 1,37$ (рад);

$\sin \alpha \approx 0,9799$; $\cos \alpha \approx 0,1994$; $\operatorname{tg} \alpha \approx 4,9131$; $\operatorname{ctg} \alpha \approx 0,2035$;

в) $\alpha = 0,9$ (рад);

$\sin \alpha \approx 0,7833$; $\cos \alpha \approx 0,6216$; $\operatorname{tg} \alpha \approx 1,2602$; $\operatorname{ctg} \alpha \approx 0,7936$;

г) $\alpha = 1,2$ (рад);

$\sin \alpha \approx 0,9320$; $\cos \alpha \approx 0,3624$; $\operatorname{tg} \alpha \approx 2,5722$; $\operatorname{ctg} \alpha \approx 0,388$.

17.

а) $17^\circ \approx 0,2967$ (рад);

$43^\circ 24' \approx 0,7575$ (рад);

$83^\circ 36' \approx 1,4591$ (рад);

$71^\circ 12' \approx 1,2601$ (рад);

б) $0,384$ (рад) $\approx 22^\circ 6''$;

$0,48$ (рад) $\approx 27^\circ 30' 7''$;

$1,11$ (рад) $\approx 63^\circ 5' 54''$;

$1,48$ (рад) $\approx 84^\circ 47' 52''$.

18.

а) $l = \alpha \cdot R = 2 - 1 = 2$ (см);

б) $l = \frac{3\pi}{4} \cdot 6 = 4,5\pi$ (см);

в) $l = \alpha \cdot R = 0,1$ (м);

г) $l = \frac{9\pi}{10} \cdot 6 = 9\pi$ (м).

19.

а) $S = \frac{\alpha R^2}{2} = 1$ (дм²);

б) $S = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{3\pi}{2}$ (см²);

в) $S = \frac{\alpha R^2}{2} = 0,05$ (м²);

г) $S = \frac{5\pi}{6} \cdot 3^2 = \frac{15\pi}{2}$ (м²).

20.

а) $l = 2R = \alpha R$, следовательно $\alpha = 2$ (рад);

б) $P = 2R + l$ - есть периметр сектора, т.к. длина дуги равна $l = \alpha R$, таким образом $3l = P$.

Следовательно, $3\alpha R = 2R + \alpha R$, $\alpha = 1$ (рад).

10

21.

$$\text{a) } 3 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos(3\alpha - \pi) = 3 \sin \frac{\pi}{4} - 2 \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + 3 \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) &= \sin^2 \frac{\pi}{3} + 3 \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{3} - 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -\frac{9}{4}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } 4 \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 3;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 2\alpha = \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

22.

$$\text{a) } \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha;$$

Если $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то $\sin \alpha < 0$ и

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{13} : \frac{12}{13} = -\frac{5}{12};$$

$$\text{б) } \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \frac{1 + \frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = 9;$$

$$\text{в) } \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} = 1 + \sin \alpha;$$

$$\text{при } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \quad \sin \alpha < 0 \quad \text{и} \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$1 + \sin \alpha = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3};$$

$$\text{г) } \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) = -0,5.$$

23.

а) при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$\sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^{-2} \alpha}};$$

б) при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}} - \\ - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}} &= \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha; \end{aligned}$$

в) при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} &= \sqrt{\sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}}, \text{ если } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

24.

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + 1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 2;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right);$$

$$\text{г) } \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha.$$

25.

$$\text{a) } (\sin^2 t + 2 \sin t \cdot \cos t - \cos^2 t)^2 = (2 \sin t \cdot \cos t - (\cos^2 t - \sin^2 t))^2 = \\ = \sin^2 2t - 2 \sin 2t \cdot \cos 2t + \cos^2 2t = 1 - \sin 4t;$$

$$\text{б) } \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2 \cos 3\alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha (\sin 2\alpha - 1)}{2 \cos 3\alpha (\sin 2\alpha - 1)} = \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$\text{в) } \frac{1 - 4 \sin^2 t \cdot \cos^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \frac{1 - \sin^2 2t}{\cos 2t} = \frac{\cos^2 2t}{\cos 2t} = \cos 2t;$$

$$\text{г) } \frac{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$$

26.

$$\text{a) } \operatorname{cost} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}};$$

$$\text{б) } \sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}};$$

27.

$$\text{a) } \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\text{б) } \left(\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{18} \right) : \cos \frac{2\pi}{9} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{9}}{\cos \frac{2\pi}{9}} = 1;$$

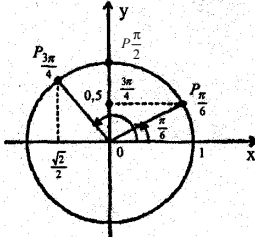
$$\text{в) } \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} - \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$\text{г) } \frac{\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{5\pi}{12}} = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2;$$

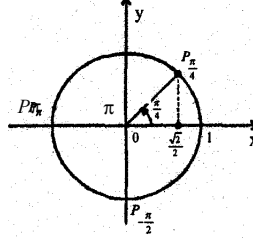
2. Тригонометрические функции и их графики

28.

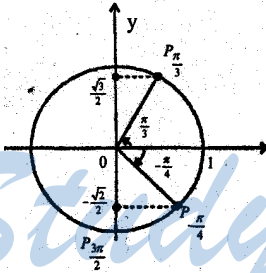
а)



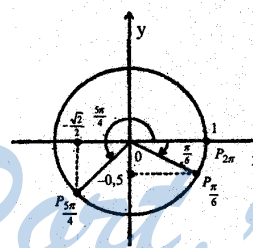
б)



в)



г)



29.

Точка P_{α} имеет следующие координаты:

а) $(0;1)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(-1;0)$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;-1)$;

в) $(0;-1)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;0)$; г) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;1)$.

30.

а) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ — I четверть;

б) $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ — III четверть;

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ — III четверть;

$\alpha \in \left(-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$ — II четверть;

$$\begin{aligned} \text{в) } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right) & \text{— IV четверть;} & \text{г) } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) & \text{— II четверть;} \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right) & \text{— IV четверть;} & \alpha \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi \right) & \text{— IV четверть;} \\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) & \text{— II четверть;} & \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right) & \text{— III четверть.} \end{aligned}$$

31.

$$\text{а) } \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{9\pi}{8} \operatorname{tg} 2,3\pi = -\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} 0,3\pi < 0;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sin 1 \cdot \cos 3 \cdot \operatorname{ctg} 5 &= \sin 1 \cdot (-\cos(\pi-3))(-\operatorname{ctg}(2\pi-5)) = \\ &= \sin 1 \cdot \cos(\pi-3) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi-5) > 0; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \sin 1,3\pi \cdot \cos \frac{7\pi}{9} \cdot \operatorname{tg} 2,9 = -\sin 0,3\pi \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}(\pi-2,9) < 0;$$

$$\text{г) } \sin 8 > 0, \quad \text{т.к. } 2,5 < 8 < 3\pi; \quad \cos 0,7 > 0, \quad \text{т.к. } \frac{\pi}{2} > 0,7 > 0;$$

$$\operatorname{tg} 6,4 > 0, \quad \text{т.к. } 2\pi < 6,4 < \frac{5\pi}{2}; \quad \text{поэтому, } \sin 8 \cdot \cos 0,7 \cdot \operatorname{tg} 6,4 > 0.$$

32.

$$\text{а) } \sin 4\pi = 0; \cos 4\pi = 1; \sin(-\pi) = 0; \cos(-\pi) = -1;$$

$$\text{б) } \sin \frac{5\pi}{2} = 1; \cos \frac{5\pi}{2} = 0; \sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = 1; \cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{в) } \sin \pi = 0; \cos \pi = -1; \sin(-2\pi) = 0; \cos(-2\pi) = 1;$$

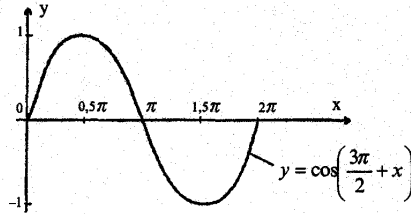
$$\text{г) } \sin \frac{9\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \cos \frac{9\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} = 1; \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

33.

$$\text{а) } y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x.$$

Таким образом, график данной функции есть синусоида, т.е. имеет период 2π .



б) $y = -\sin(\pi + x) = \sin x$

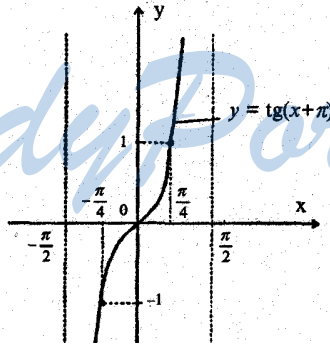
Смотри пункт а).

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Смотри пункт а).

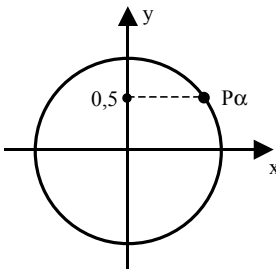
г) $y = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

Таким образом, график данной функции есть график функции $y = \operatorname{tg} x$, т.е. имеет период π .

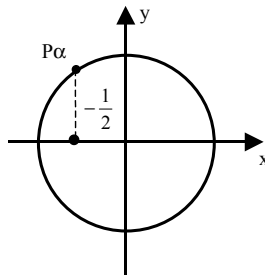


34.

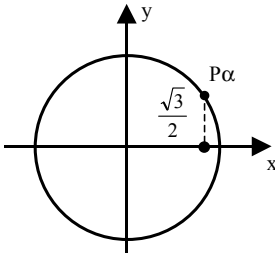
а) $P_\alpha(x; y), y = 0,5, x > 0$



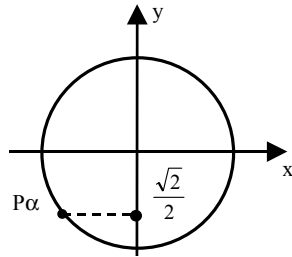
б) $x = -\frac{1}{2}, y > 0$



в) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y > 0$

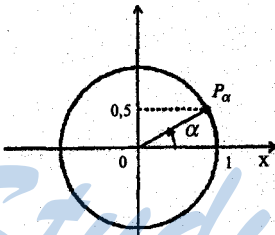


г) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x > 0$

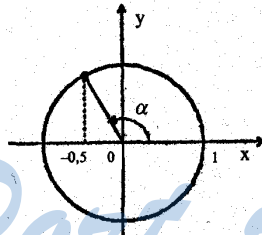


35.

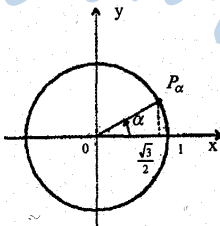
а)



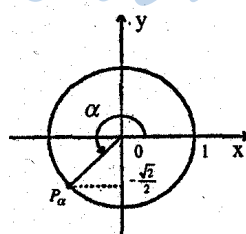
б)



в)



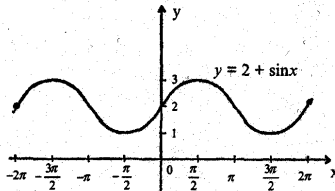
г)



36.

а) $y = \sin x + 2; D(y) = \mathbb{R};$

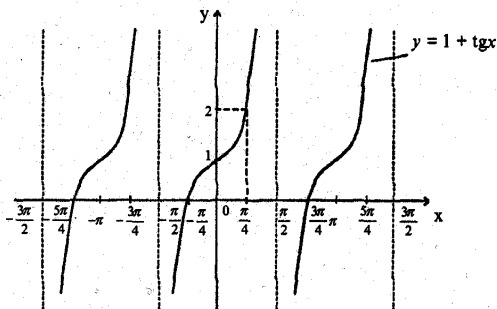
т.к. $\sin x \in [-1; 1],$ то $E(y) = [1; 3]$



б) $y = 1 + \operatorname{tg}x$;

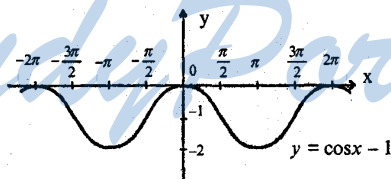
т.к. функция $y = \operatorname{tg}x$ не определена в точках вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, то

$$D(y) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in Z \right\}; E(y) = R$$



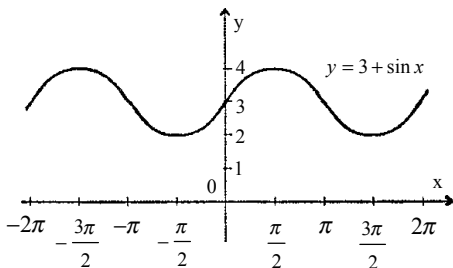
в) $y = \cos x - 1$;

$D(y) = R$; т.к. $\cos x \in [-1; 1]$, то $E(y) = [-2; 0]$



г) $y = 3 + \sin x$;

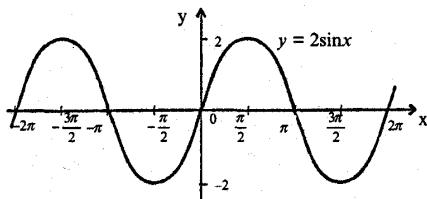
$D(y) = R$; т.к. $\sin x \in [-1; 1]$, то $E(y) = [2; 4]$



37.

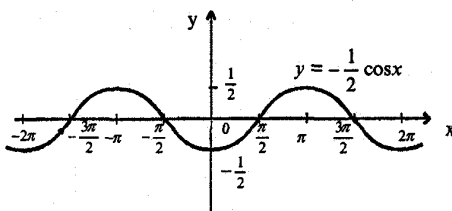
а) $y = 2 \sin x$;

$D(y) = R$; т.к. $\sin x \in [-1; 1]$, то $E(y) = [-2; 2]$



б) $y = -\frac{1}{2} \cos x$;

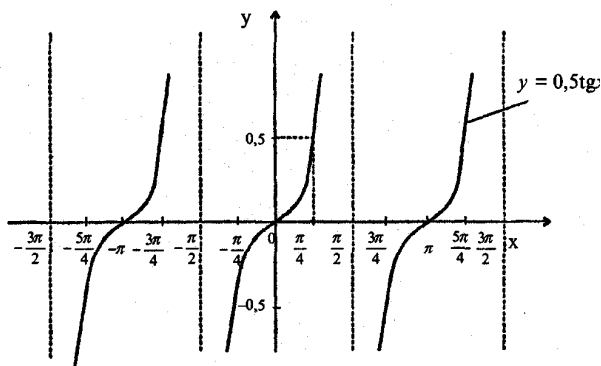
$D(y) = R$; т.к. $\cos x \in [-1; 1]$, то $E(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$



в) $y = 0,5 \cdot \operatorname{tg} x$;

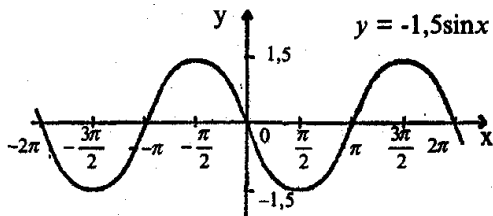
т.к. функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена в точках вида $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$D(y) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; $E(y) = R$



г) $y = -\frac{3}{2} \sin x$;

$D(y) = R$; т.к. $\sin x \in [-1; 1]$, то $E(y) = [-1,5; 1,5]$



38.

а) $y = \sin x$;

Точки пересечения графика данной функции с осями координат:
 $(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}; (0; 0)$;

б) $y = 1 + \cos x$;

Точки пересечения графика данной функции с осями координат:
 $(\pi + 2\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}; (0; 2)$;

в) $y = \cos x$;

Точки пересечения графика данной функции с осями координат:

$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right), n \in \mathbb{Z}; (0; 1)$;

г) $y = \sin x - 1$;

Точки пересечения графика данной функции с осями координат:

$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right), n \in \mathbb{Z}; (0; -1)$;

39.

а) $y = x^2 - 3x$;

пересечения с осью OX : $(0; 0)$ и $(3; 0)$;

пересечения с осью OY : $(0; 0)$;

б) $y = \sin x - 1,5$;

пересечения с осью OX *график функции не имеет*;

пересечения с осью OY : $(0; -1,5)$;

в) $y = 2,5 + \cos x$;

пересечения с осью OX *график функции не имеет*;

пересечения с осью OY : $(0; 3,5)$;

г) $y = \frac{1}{x} + 1$;

пересечения с осью OX : $(-1; 0)$;

пересечения с осью OY *график функции не имеет*.

§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

3. Функции и их графики

40.

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f(-1) = -2$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$; $f(10) = 10,1$;

б) $f(x) = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$; $f(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $f(\pi) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = \sqrt{6}$;

г) $f(x) = 2 - \sin 2x$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3$; $f(0) = 2$; $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3}{2}$.

41.

а) $f(x) = x^2 + 2x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

$f(x_0) = x_0^2 + 2x_0$;

$f(a) = \operatorname{tg} 2a$;

$f(t+1) = t^2 + 4t + 3$;

$f(b-1) = \operatorname{tg}(2b-2)$;

в) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$;

г) $f(x) = 2 \cos \frac{x}{3}$;

$f(x_0) = \frac{1}{x_0} + 1$; $x_0 \neq 0$;

$f(z) = 2 \cos \frac{z}{3}$;

$f(a+2) = \frac{a+3}{a+2}$;

$f\left(h + \pi\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{h}{3}\right)$

42.

Графиком функции называется фигура, у которой каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, поэтому:

а) и г) — являются графиками:

б) и в) — не являются графиками.

43.

а) $D(f) = R \setminus \{x : x^2 + 4x + 3 = 0\} = R \setminus \{1; 3\}$

б) $D(f) = \{x : x^2 - 9 \geq 0\} = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

в) $D(f) = R \setminus \{x : x^2 + 2x - 8 = 0\} = R \setminus \{-4; 2\}$;

г) $D(f) = \{x : 36 - x^2 \geq 0\} = [-6; 6]$

44.

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; б) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$;

в) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; г) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

45.

a) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; $D(y) = \mathbb{R}$; $E(y) = [-2; 2]$;

б) $y = 2 + \frac{4}{x-3}$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{x: x-3=0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;

$E(y) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, т.к. $\frac{4}{x-3} \neq 0$;

в) $y = \frac{3}{x+1} - 1$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{x: x+1=0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$E(y) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, т.к. $\frac{3}{x+1} \neq 0$;

г) $y = 3 + 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $D(y) = \mathbb{R}$;

$E(y) = \left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$, т.к. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$.

46.

a) $D(f) = [-5; 6]$;

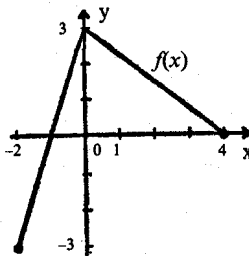
б) $D(f) = [-6; 4]$; $E(f) = [-2; 2]$;

в) $D(f) = [-6; 1,5) \cup (1,5; 6]$; $E(f) = [-3; 3]$;

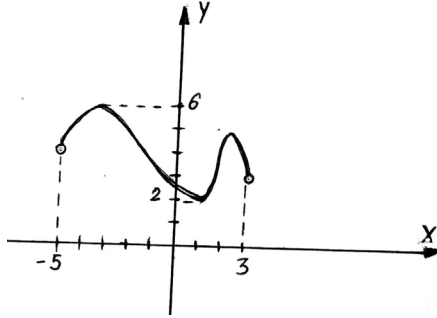
г) $D(f) = [-4; 3]$; $E(f) = (-1; 4]$.

47.

a) $D(f) = [-2; 4]$; $E(f) = [-3; 3]$;



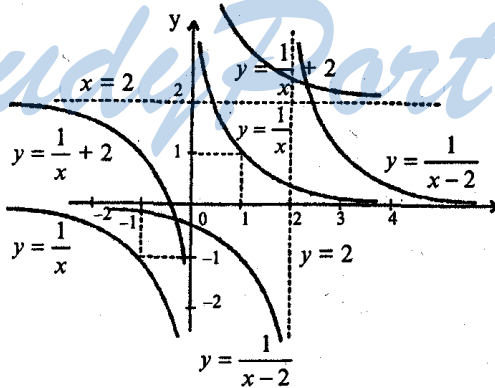
б) $D(f) = [-5; 3]$; $E(f) = [2; 6]$;



48.

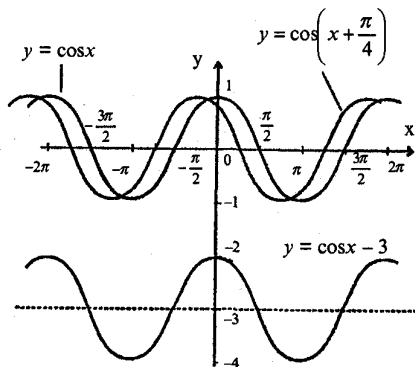
а) График функции $y = \frac{1}{x} + 2$ есть график функции $y = \frac{1}{x}$ со сдвигом на две единицы вверх вдоль оси ОУ.

График функции $y = \frac{1}{x-2}$ есть график функции $y = \frac{1}{x}$ со сдвигом на 2 единицы вправо по оси ОХ.



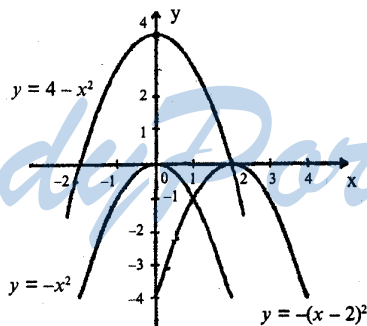
б) График функции $y = \cos x - 3$ есть $y = \cos x$ со сдвигом на 3 единицы вниз по оси ОУ.

График функции $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ есть $y = \cos x$ со сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево по оси ОХ.



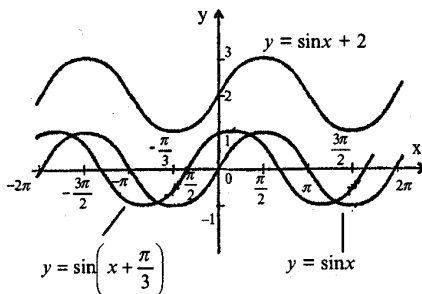
в) График функции $y = 4 - x^2$ есть $y = -x^2$ со сдвигом на 4 единицы вверх по оси OY .

График функции $y = -(x-2)^2$ есть $y = -x^2$ со сдвигом на 2 единицы вправо по оси OX .



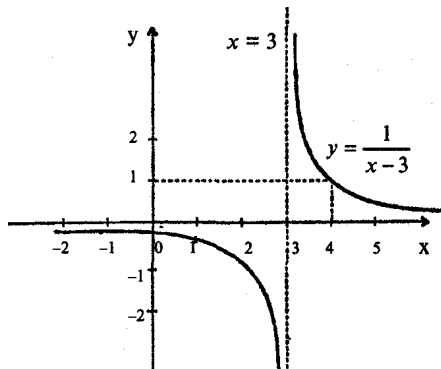
г) График функции $y = \sin x + 2$ есть $y = \sin x$ со сдвигом на 2 единицы вверх по оси OY .

График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ есть $y = \sin x$ со сдвигом на $\frac{\pi}{3}$ влево по оси OX .

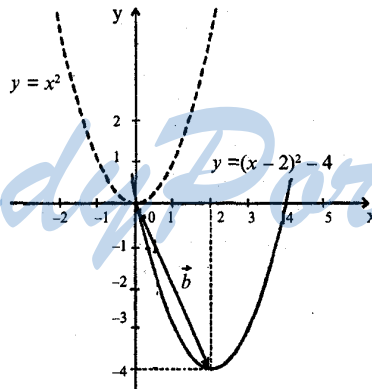


49.

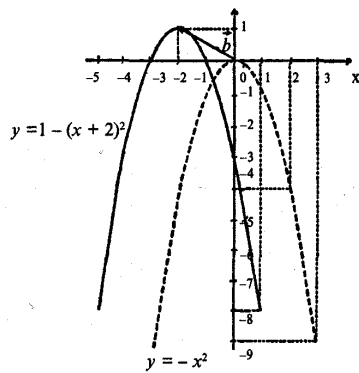
a)



б)

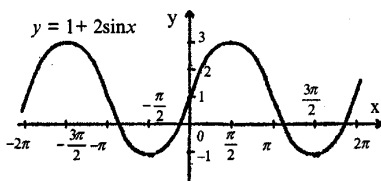


в)

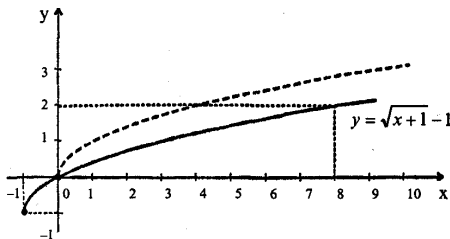


50.

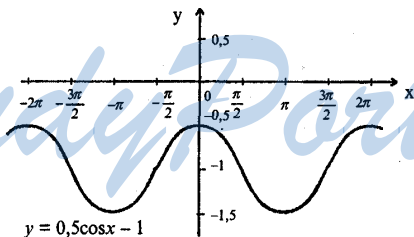
a)



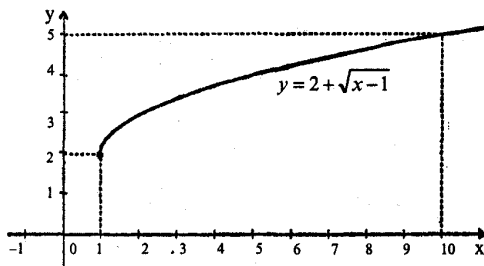
б)



в)



г)



51.

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ $f(-2) = 2$; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; $f(0) = 0$; $f(5) = 5$.

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq -1; \\ 1 - x, & x < -1. \end{cases}$ $f(-2) = 3$; $f(-1) = 0$; $f(0) = -1$; $f(4) = 15$.

$$в) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0; \\ \cos x - 1, & x \leq 0. \end{cases} \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}; \quad f(0) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$г) f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad f(-1,7) = -1; \quad f(-\sqrt{2}) = -1; \quad f(0) = 0; \quad f(3,8) = 1.$$

52.

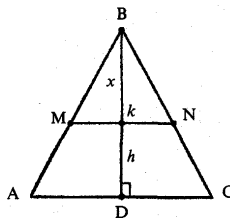
а)

$\triangle MBN \sim \triangle ABC$ и коэффициент подобия

равен $\frac{x}{n}$, т.е.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNB}} = \frac{x^2}{n^2}; \quad S_{MNB} = \frac{bh \cdot x^2}{h^2} = \frac{bx^2}{2h};$$

$$S_{MNC} = S_{ABC} - S_{MNB} = \frac{bh}{2} \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right), \quad \text{причем } x \in [0; h].$$



б) $S(x) = \frac{xR^2}{2};$

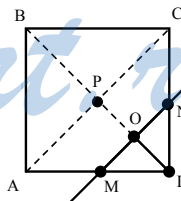
в) $P(\alpha) = 2r + l = r(\alpha + 2);$

г) $|AC| = |BD| = a\sqrt{2};$

$$|PD| = \frac{a\sqrt{2}}{2x}; \quad \frac{S_{ACD}}{S_{MND}} = \frac{2a^2}{4x^2} = \frac{a^2}{2x^2};$$

т.е. $S_{MND} = x^2;$

$$S_{MABCN} = S_{ABCD} - S_{MND} = a^2 - x^2, \quad \text{причем } x \in \left[0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right].$$



53.

а) $y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}; \quad D(y): \begin{cases} 3x-2 \geq 0; \\ x^2-x-2 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty);$

б) $y = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2};$

$D(y): \begin{cases} x^2-3x-4 \geq 0; \\ 16-x^2 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; +\infty);$

в) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{3-2x}; \quad D(y): \begin{cases} x+2 \geq 0; \\ 3-2x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = \left[-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

$$\text{r) } y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}; \quad D(y) = \begin{cases} 4-x^2 \geq 0; \\ 1-2x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = [-2; 0,5) \cup (0,5; 2].$$

54.

a) $y = 1 + \sin^2 x$; $D(y) = \mathbb{R}$; $E(y) = [1; 2]$;

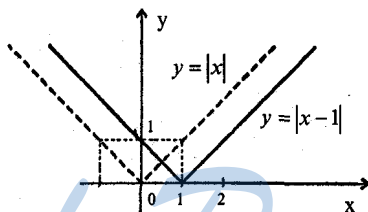
б) $y = \frac{x-1}{x}$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $E(y) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, т.к. $\frac{1}{x} \neq 0$.

в) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; $D(y) = \mathbb{R}$; $E(y) = [2; +\infty)$;

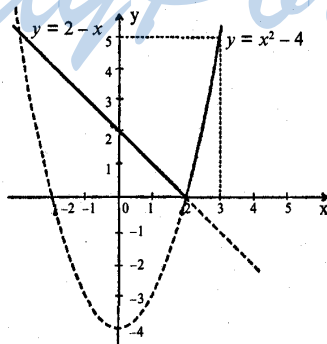
г) $y = 1,5 - 0,5 \cos^2 x$; $D(y) = \mathbb{R}$; $E(y) = [1; 1,5]$.

55.

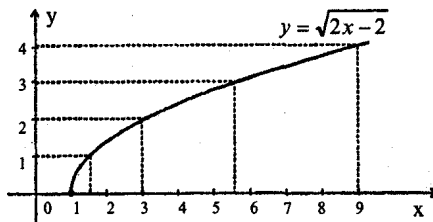
a)



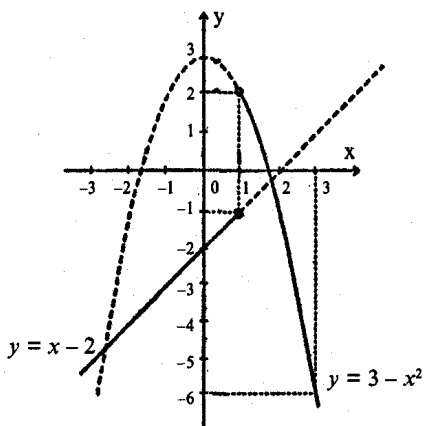
б)



в)

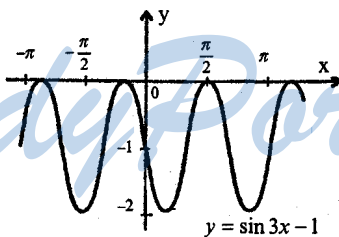


г)

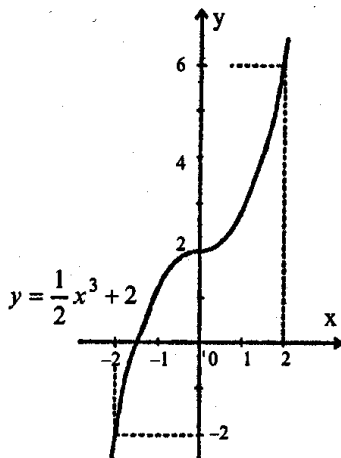


56.

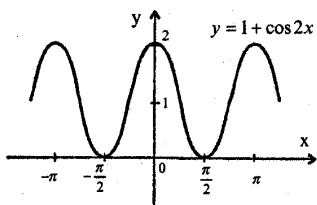
а)



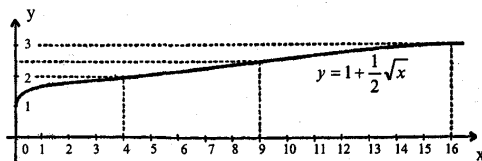
б)



в)



г)



4. Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций

57.

а) $f(x) = 3x^2 - x^4$; $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^4 = f(x)$;

б) $f(x) = x^5 \cdot \sin \frac{x}{2}$; $f(-x) = -x^5 \cdot (-\sin \frac{x}{2}) = f(x)$;

в) $f(x) = x^2 \cos x$; $f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$;

г) $f(x) = 4x^6 - x^2$; $f(-x) = 4(-x)^6 - (-x)^2 = 4x^6 - x^2 = f(x)$.

И для всех $f(x)$ (из пунктов а) б) в) г)) $D(f) = \mathbb{R}$.

58.

а) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$;

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – симметрична относительно $(0; 0)$;

$f(-x) = \frac{\cos(-5x) + 1}{|-x|} = \frac{\cos 5x + 1}{|x|} = f(x)$;

б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$;

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ – симметрична относительно $(0; 0)$;

$f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1} = f(x)$;

$$в) f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x^3};$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – симметрична относительно $(0;0)$;

$$f(-x) = \frac{2 \sin(-\frac{x}{2})}{(-x)^3} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x^3} = f(x);$$

$$г) f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2};$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ – симметрична относительно $(0;0)$;

$$f(-x) = \frac{\cos(-x^3)}{4 - (-x)^2} = \frac{\cos x^3}{4 - x^2} = f(x).$$

59.

$$а) f(x) = x^3 \sin x^2; f(-x) = -x^3 \sin(-x)^2 = -f(x);$$

$$б) f(x) = x^2(2x - x^3); f(-x) = x^2(-2x + x^3) = -f(x);$$

$$в) f(x) = x^5 \cos 3x; f(-x) = -x^5 \cos(-3x) = -f(x);$$

$$г) f(x) = x(5 - x^2); f(-x) = -x(5 - (-x)^2) = -f(x).$$

И для всех $f(x)$ (из пунктов а) б) в) г)) $D(f) = \mathbb{R}$.

60.

$$а) f(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^3};$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – симметрична относительно точки $(0;0)$;

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{-2x^3} = -\frac{x^4 + 1}{2x^3} = -f(x);$$

$$б) f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)};$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 5\}$ – симметрична относительно точки $(0;0)$;

$$f(-x) = \frac{\cos(-x^3)}{-x(25 - x^2)} = -f(x);$$

$$в) f(x) = \frac{3x}{x^6 + 2}; D(f) = \mathbb{R}; f(-x) = \frac{-3x}{(-x)^6 + 2} = -\frac{3x}{x^6 + 2} = -f(x);$$

$$г) f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9};$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ – симметрична относительно точки $(0;0)$;

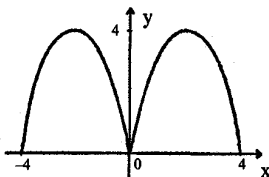
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{(-x)^2 - 9} = -\frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9} = -f(x).$$

Поэтому, функции $f(x)$ (из пунктов а) б) в) г)) являются нечетными.

61.

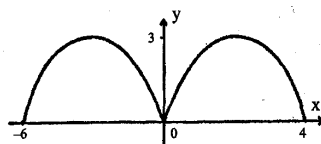
1) f -четная:

а)

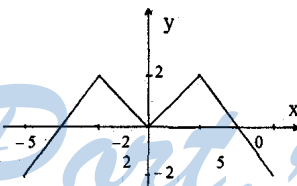
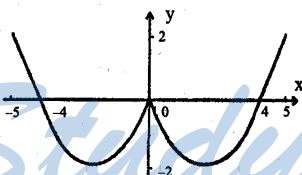


в)

б)



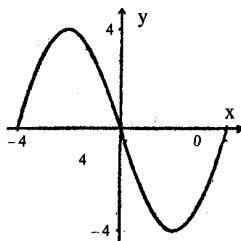
г)



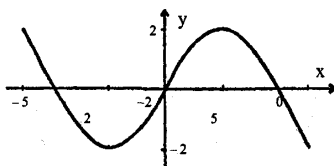
2)

f – нечетная:

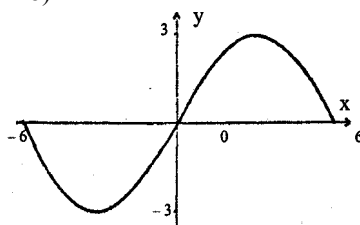
а)



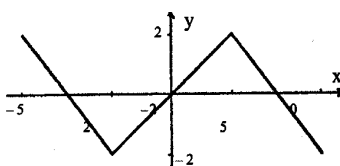
в)



б)



г)



62.

а) $f(x+T) = f(x+4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin\frac{x}{2} = f(x)$;

б) $f(x+T) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{tg}(3x + \pi) = 2\operatorname{tg}3x = f(x)$;

в) $f(x+T) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos(4x + 2\pi) = 3\cos 4x = f(x)$;

г) $f(x+T) = f(x + 3\pi) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

Поэтому, число T является периодом функции $f(x)$.

63.

Функции $f(x)$ (из пунктов а) б) в) г)) есть линейные комбинации элементарных тригонометрических функций ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), которые являются периодическими. Поэтому и функции $f(x)$ являются периодическими.

64.

а) $y_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$;

Наименьший положительный период функции $y = \sin x$ есть 2π , поэтому наименьший положительный период функции $y_1(x)$ равен

$$T = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi;$$

б) $y_1 = 3\operatorname{tg} \frac{3x}{2}$; $T = \frac{\pi}{3/2} = \frac{2\pi}{3}$;

в) $y_1 = 4 \cos 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y_1 = 5\operatorname{tg} \frac{x}{3}$; $T = \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$.

65.

а) $y = \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

б) $y = \sin x \sin 4x - \cos x \cos 4x = -\cos 5x$; $T = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$;

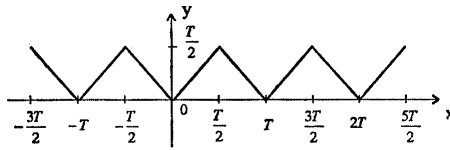
в) $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y = \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \sin 4x$; $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

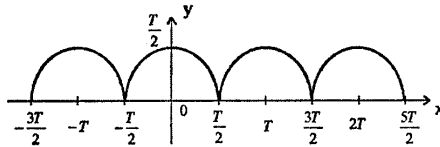
где T – наименьший положительный период функции $y(x)$.

66.

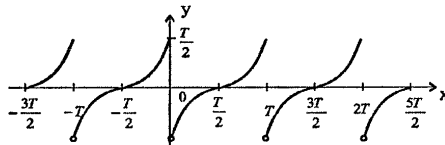
a)



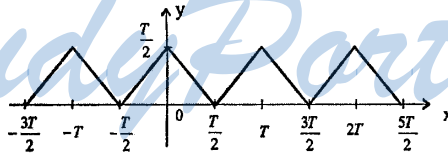
б)



в)

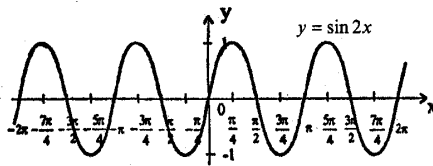


г)

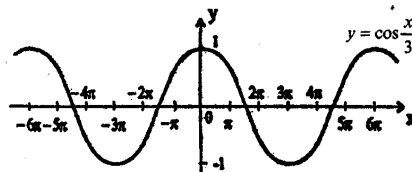


67.

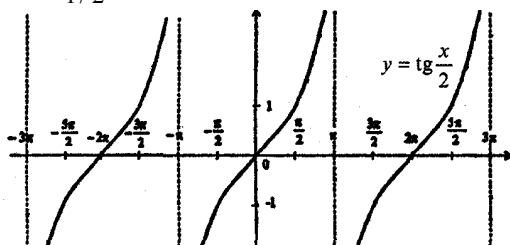
a) $y = \sin 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;



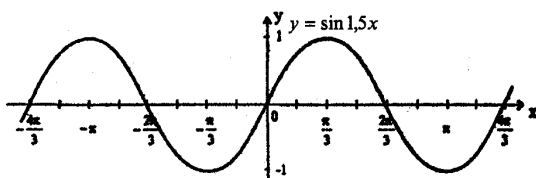
б) $y = \cos \frac{x}{3}$; $T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$;



в) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $T = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi$;



г) $y = \sin 1,5x$; $T = \frac{2\pi}{1,5} = \frac{4}{3}\pi$;



где T — наименьший положительный период функции $y(x)$.

68.

а) не прав, т.к. T должно удовлетворять равенству $f(x+t) = f(x)$ для $\forall x \in D(f)$;

б) не прав; в) не прав; г) не прав.

69.

а) $y = \sin x + \operatorname{ctg} x - x$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$;

$y(-x) = -\sin x - \operatorname{ctg} x + x = -y(x)$ — функция нечетная;

б) $y = \frac{|x|}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cdot |x|}{\sin 2x}$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \right\}$;

$y(-x) = -\frac{2|x|}{\sin 2x} = -y(x)$ — функция нечетная;

в) $y = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$y(-x) = (-x)^4 + \operatorname{tg}^2(-x) + (-x) \sin(-x) = y(x)$ — функция четная;

г) $y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{|x|}$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$;

$$y(-x) = \frac{-tg + ctgx}{|-x|} = -y(x) \text{ функция нечетная.}$$

70.

а) $y = \frac{\sin x}{x^3 - 1}$;

$D(y) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ — несимметричная относительно нуля, поэтому $y(x)$ — функция общего вида;

б) $y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$y(-x) = \frac{-x - \sin x}{-x + \sin x} = y(x)$ — функция является четной;

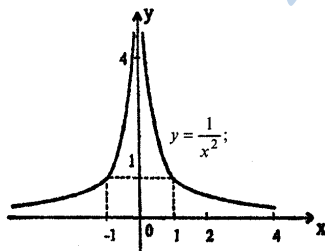
в) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$; $D(y): \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D(y) = [-1; 1) - \text{не симметрична}$

относительно нуля, т.е $y(x)$ — функция общего вида.

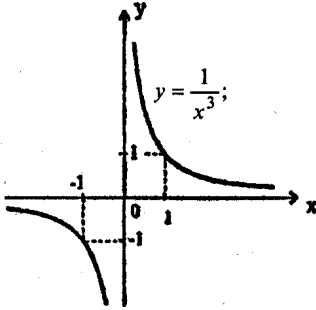
г) $y = \frac{x + tgx}{x \cos x}$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0; \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$y(-x) = \frac{-x - tgx}{-x \cdot \cos x} = \frac{x + tgx}{x \cos x} = y(x)$ — функция является четной.

71.



а) из графика видим, что функция симметрична относительно оси Ox , поэтому функция является четной.



б) Из графика видим, что функция симметрична относительно точки $(0;0)$, поэтому функция является нечетной.

72.

а) $h(x)=f(x)g^2(x)$, где f - четная и g - нечетная функции;

$$h(-x)=f(-x) \cdot g^2(x) = f(x) \cdot g^2(x) = h(x).$$

т.е. $h(x)$ - четная функция;

б) $h(x)=f(x)g(x)$, где f и g четные функции,

$$h(-x)=f(-x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) = h(x),$$

т.е. $h(x)$ - четная функция;

в) $h(x)=f(x)+g(x)$, где f и g нечетные функции;

$$h(-x)=f(-x)+g(-x) = -(f(x)+g(x)) = -h(x).$$

т.е. $h(x)$ нечетная функция;

г) $h(x)=f(x)g(x)$, где f и g нечетные функции;

$$h(-x)=f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = h(x),$$

т.е. $h(x)$ - четная функция.

73.

а). $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

б). $y = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x = 1$, причем $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

Очевидно, что $T = \frac{\pi}{2}$;

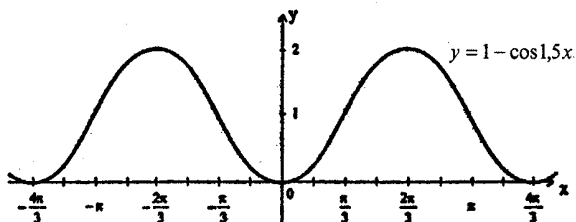
в) $y = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 1 + \sin x$; $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$;

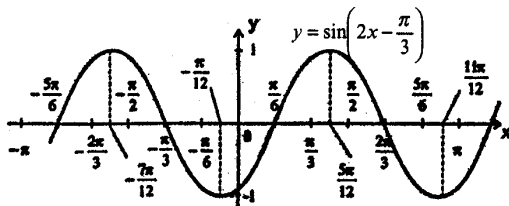
где T - наименьший положительный период функции $y(x)$.

74.

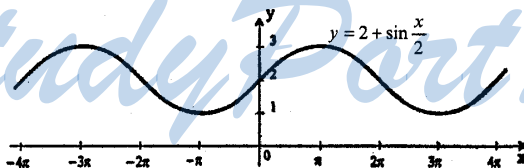
a)



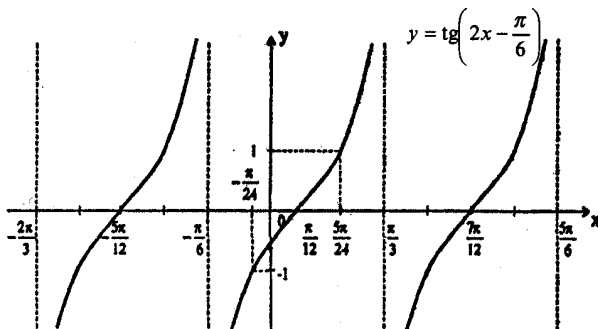
б)



в)



г)



75.

Допустим, функция $y=f(x)$ имеет период T , т.е. $y(x \pm T)=y(x)$, тогда для функции $y_1=af(x)+b$:

$y_1(x \pm T) = a(y(x \pm T)) + b = ay(x) + b = af(x) + b = y_1(x)$. Причем $D(y_1) = D(y)$.
Поэтому $y_1(x)$ является периодической.

76.

а) $y = x^2 - 3$; при $x=1$ ($\in D(y)$):

$y(x+2) = y(3) = 6 \neq 1 = y(2)$.

Т.е. $T=2$ не период функции $y(x)$;

б). $y = \cos x$; При $x = \pi$ ($\in D(y)$):

$y(x+2) = \cos(\pi+2) = -\cos 2 \neq -1 = \cos(\pi) = y(\pi)$.

Т.е. $T=2$ - не период функции $y(x)$;

в) $y = 3x + 5$ есть функция не периодическая, т.е. $T=2$ не период функции $y(x)$

г) $y = |x|$ есть функция не периодическая, т.е. $T=2$ — не период функции $y(x)$.

5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы.

77.

а) $x \in [-7; -5] \cup [1; 5]$ — промежуток возрастания ;

$x \in [-5; 1] \cup [5; 7]$ — промежуток убывания;

$x_{\max 1} = -5; y_{\max 1} = 5; x_{\max 2} = 5; y_{\max 2} = 3; x_{\min 1} = 1; y_{\min 1} = -3;$

б) $x \in [-6; -4] \cup [-2; 4]$ — промежуток возрастания;

$x \in [-4; -2] \cup [4; 5]$ — промежуток убывания;

$x_{\max 1} = -4; y_{\max 1} = 3; x_{\max 2} = 4; y_{\max 2} = 5; x_{\min 1} = -2; y_{\min 1} = -2;$

в) $x \in [-3; 3]$ — промежуток возрастания;

$x \in [-\infty; 3] \cup [3; +\infty)$ — промежуток убывания;

$x_{\max 1} = 3; y_{\max 1} = 2; x_{\min} = -3; y_{\min} = -2;$

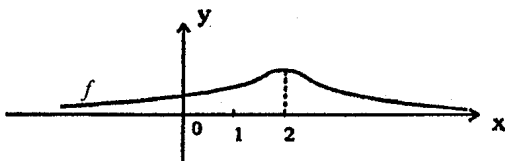
г) $x \in [-4; -2] \cup [0; 2] \cup [4; 6]$ — промежуток возрастания;

$x \in [-6; -4] \cup [-2; 0] \cup [2; 4]$ — промежуток убывания;

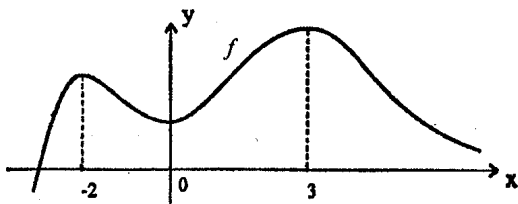
$x_{\max 1} = -2; y_{\max 1} = 3; x_{\max 2} = 2; y_{\max 2} = 3; x_{\min 1} = -4; y_{\min 1} = -2; x_{\min 2} = 0;$
 $y_{\min 2} = 0; x_{\min 3} = 4; y_{\min 3} = -2;$

78.

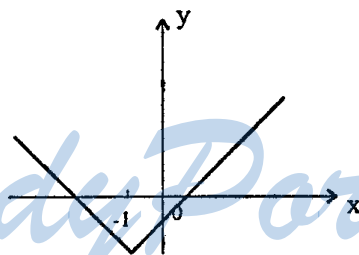
а)



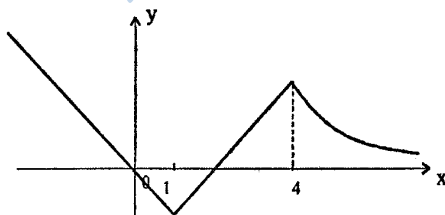
б)



в)

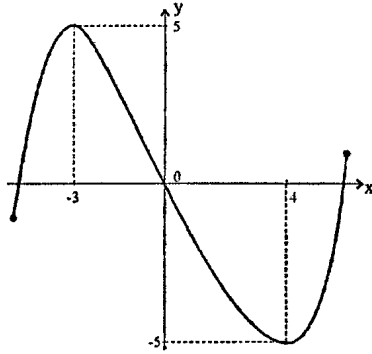


г)

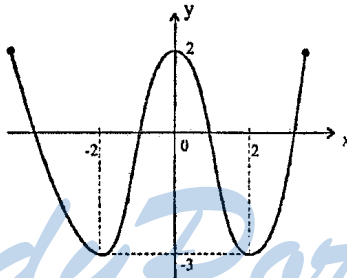


79.

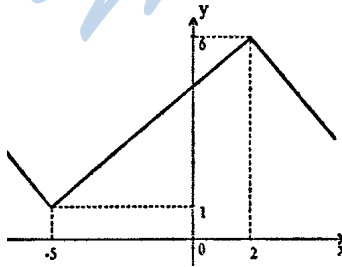
а)



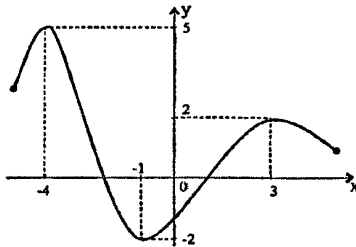
б)



в)

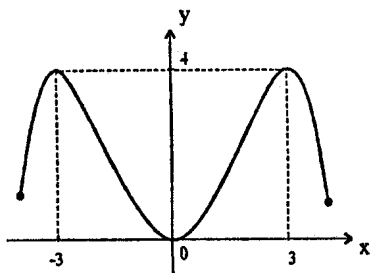


г)

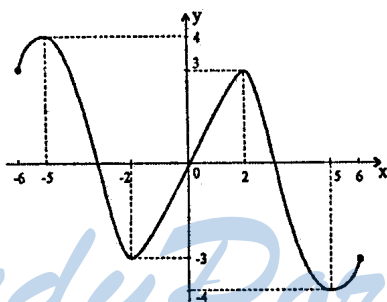


80.

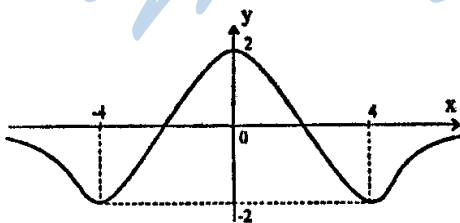
a)



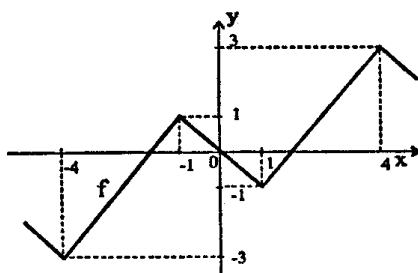
б)



в)



г)



81.

Пусть $x_2 > x_1$, тогда $y(x_2) - y(x_1) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1)$.

а) $k > 0$, то $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т.е. функция возрастает на \mathbb{R} ;

б) $k < 0$, то $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т.е. функция убывает на \mathbb{R} .

(т.к. x_1, x_2 любые точки на \mathbb{R}).

82.

а) $y = -x^2 + 6x - 8 = 1 - (x - 3)^2$.

Очевидно, $x_{\max} = 3, y_{\max} = 1$.

Если $x \in (-\infty; 3]$, то функция возрастает;

Если $x \in [3; +\infty)$, то функция убывает.

б) $y = (x + 2)^4 + 1$.

Очевидно, $y_{\min} = 1$ и $x_{\min} = -2$.

При $x \in (-\infty; -2]$, функция убывает и

при $x \in [-2; +\infty)$ функция возрастает.

в) $y = x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.

Очевидно, что $x_{\min} = 2; y_{\min} = -4$

При $x \in (-\infty; 2]$ функция убывает;

при $x \in [2; +\infty)$ функция возрастает.

г) $y = (x - 3)^4$;

Очевидно, что $y_{\min} = 0; x_{\min} = 3$

При $x \in (-\infty; 3]$ функция убывает;

при $x \in [3; +\infty)$ функция возрастает.

83.

а) $y = \frac{3}{x - 2}; D(y) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

При $x_1 < x_2 < 2$: $y(x_2) - y(x_1) = \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} < 0$, т.е. на $(-\infty; 2)$ функция

убывает; аналогично на $(2; +\infty)$ функция убывает.

$y = \frac{3}{x - 2}$ убывает на каждом из промежутков $D(y)$, следовательно,

она не имеет точек минимума и максимума;

б) $y = -(x + 3)^5; D(y) = \mathbb{R}$;

то для $x_1 < x_2$: $(-x_1 - 3)^5 < (-x_2 - 3)^5$, т.е.

$y(x_1) < y(x_2)$ — функция убывает на \mathbb{R} . Следовательно, не имеет точек максимума и минимума;

в) $y = -\frac{1}{x + 3}; D(y) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$x_1; x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 < -3$, то

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{-x_2 + x_1}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} < 0 \text{ функция возрастает на } (-\infty; -3).$$

Аналогично, она возрастает на $(-3; +\infty)$, т.к. $y = -\frac{1}{x+3}$ возрастает

на $D(y)$, то она не имеет точек максимума и минимума;

$$г) y = (x-4)^3; D(y) = \mathbb{R};$$

$$\text{то для } x_1 < x_2 : (x_1-4)^3 < (x_2-4)^3;$$

$y(x_1) < y(x_2)$, т.е. функция возрастает на \mathbb{R} и не имеет точек максимума и минимума.

84.

$$а) y = 3\sin x - 1.$$

Имеем дело с синусоидой, поэтому, на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

функция убывает;

на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] n \in \mathbb{Z}$ функция возрастает;

$$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; y_{\min} = -4, n \in \mathbb{Z}; x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; y_{\max} = 2, k \in \mathbb{Z};$$

$$б) y = -2\cos x + 1;$$

Функция убывает на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n] n \in \mathbb{Z};$

Функция возрастает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n] n \in \mathbb{Z};$

$$x_{\min} = 2\pi n, y_{\min} = -1; x_{\max} = \pi + 2\pi n; y_{\max} = 3, n \in \mathbb{Z}$$

$$в) y = 2\cos x + 1,$$

Функция убывает на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n] n \in \mathbb{Z};$

Функция возрастает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]; n \in \mathbb{Z};$

$$x_{\min} = \pi + 2\pi n; y_{\min} = -1; x_{\max} = 2\pi n; y_{\max} = 3, n \in \mathbb{Z};$$

$$г) y = 0,5\sin x - 1,5;$$

Функция убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right] n \in \mathbb{Z};$

Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]; n \in \mathbb{Z};$

$$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; y_{\min} = -2; x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; y_{\max} = -1, n \in \mathbb{Z};$$

85.

$$а) y = 1 + \operatorname{tg} x; D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Функция возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

Точек max и min нет

б) $y = \sin x + 1$; $D(y) = \mathbb{R}$;

Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$;

Функция убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$;

$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $y_{\min} = 0$; $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $y_{\max} = 2$; $n \in \mathbb{Z}$;

в) $y = -\operatorname{tg} x$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n / n \in \mathbb{Z}\right\}$;

Функция убывает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; $n \in \mathbb{Z}$;

точек max и min нет;

г) $y = \cos x - 1$; $D(y) = \mathbb{R}$;

Функция убывает на $(2\pi n; \pi + 2\pi n]$; $n \in \mathbb{Z}$;

Функция возрастает на $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$; $n \in \mathbb{Z}$;

$x_{\min} = \pi + 2\pi n$; $y_{\min} = -1$; $x_{\max} = 2\pi + 2\pi n$; $y_{\max} = 0$; $n \in \mathbb{Z}$;

86.

а) Т.к. $0 < \frac{2\pi}{9} < \frac{3\pi}{7} < \pi$, то $\cos \frac{2\pi}{9} > \cos \frac{3\pi}{7}$,

в силу убывания $y = \cos x$ на $[0; \pi]$;

б) Т.к. $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \frac{7\pi}{9} < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin \frac{5\pi}{7} > \sin \frac{7\pi}{8}$,

т.к. $y = \sin x \downarrow$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) Т.к. $\frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{5} < \frac{9\pi}{7} < \frac{3\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{9\pi}{7}$, т.к.

$y = \operatorname{tg} x \uparrow$ на $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$,

г) Т.к. $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{8} < \frac{4\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$, то $\sin \frac{3\pi}{8} > \sin \frac{4\pi}{9}$,

т.к. $y = \sin x \uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

87.

а) $\frac{\pi}{2} < \pi - 1,3 < 3,2 < 3,8 < \frac{3\pi}{2}$ и

$y = \sin x \downarrow$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin 3,8 < \sin 3,2 < \sin 1,3$;

б) $0 < 0,9 < 1,3 < 1,9 < \pi$ и $y = \cos x \downarrow$ на $[0; \pi] \Rightarrow \cos 1,9 < \cos 1,3 < \cos 0,9$;

в) $-\frac{\pi}{2} < -0,3 < 0,5 < 1,4 < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} x \uparrow$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}(-$

$0,3) < \operatorname{tg} 0,5 < \operatorname{tg} 1,4$;

г) $-\frac{\pi}{2} < -1,2 < 0,8 < 1,2 < \frac{\pi}{2}$ и $y = \sin x \uparrow$ на

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin(-1,2) < \sin 0,8 < \sin 1,2$.

88.

а) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$x_1 < x_2 < 2$, то $\frac{1}{(x_1-2)^2} < \frac{1}{(x_2-2)^2} \Rightarrow$ функция возрастает на $(-\infty; 2)$;

Аналогично, функция убывает на $(2; +\infty)$;

Точек \max и \min нет.

б) $y = 4|x - x^2|$;

$y = \begin{cases} 4x - x^2, x \geq 0; \\ -4x - x^2, x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} -(x-2)^2 + 4, x \geq 0; \\ -(x-2)^2 + 4, x < 0; \end{cases}$

Т.е. функция возрастает при $x \in (0; -2] \cup [0; 2]$;

убывает при $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$;

$x_{\max} = 2$; $y_{\max} = 4$; $x_{\min} = -2$; $y_{\min} = 4$;

$x_{\min} = 0$; $y_{\min} = 0$.

в) $y = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$; $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Если $x_1 < x_2 < -1$, то $\frac{1}{(x_1+1)^3} > \frac{1}{(x_2+1)^3}$, т.е. функция убывает

на $(-\infty; -1)$;

Аналогично, функция убывает на $(-1; +\infty)$;

Точек \max и \min нет.

$$r) y = x^2 - 2|x|; y = \begin{cases} (x-1)^2 - 1, x \geq 0; \\ (x+1)^2 - 1, x < 0; \end{cases}$$

Т.е. функция возрастает при $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$;

убывает при $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1]$;

$$x_{\min} = 1; y_{\min} = -1; x_{\min} = -1; y_{\min} = -1; x_{\max} = 0; y_{\max} = 0.$$

StudyPort.ru

89.

а) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$; $D(y) = \mathbb{R}$;

$$(x' + \frac{\pi}{4})_{\max} = 2\pi n; \quad x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad y_{\max} = 1; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(x + \frac{\pi}{4})_{\min} = \pi + 2\pi n; \quad x_{\min} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad y_{\min} = -1; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функция убывает на $[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

возрастает на $[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $y = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{3})$; $D(y) = \mathbb{R}$;

$$x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad y_{\min} = 0; \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad y_{\max} = 2; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функция убывает на $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

возрастает на $[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

в) $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$; $D(y) = \mathbb{R}$;

$$x_{\min} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \quad y_{\min} = -1; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad x_{\max} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad y_{\max} = 1; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функция возрастает на $[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

убывает на $[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

г) $y = 2 + \cos(x - \frac{\pi}{3})$; $x_{\min} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad y_{\min} = 1; \quad n \in \mathbb{Z}.$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad y_{\max} = 3; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функция убывает на $[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

возрастает на $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

90.

а) $\cos \frac{25\pi}{9} = \cos \frac{7\pi}{9}; \sin \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{3\pi}{10}; \cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right);$

т.к. $0 < \frac{3\pi}{10} < \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9} < \frac{7\pi}{9} < \pi$ и

$y = \cos x \downarrow$ на $[0; \pi] \Rightarrow \cos \frac{25\pi}{9} < \cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) < \cos \frac{4\pi}{9} < \sin \frac{4\pi}{9}$.

б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}; \operatorname{ctg} \frac{15\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right);$

т.к. $-\frac{\pi}{2} < -\frac{7\pi}{16} < -\frac{3\pi}{8} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ и

$y = \operatorname{tg} x \uparrow$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right) < \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} < \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8};$

$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{ctg} \frac{15\pi}{8} < \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.

в) $\operatorname{ctg} \frac{12\pi}{5} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{6\pi}{5} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5};$

$0 < \frac{3\pi}{10} < \frac{2\pi}{5} < \frac{7\pi}{15} < \frac{9\pi}{10} < \pi$ и $y = \operatorname{ctg} x \downarrow$ на $(0; \pi)$, то

$\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{10} < \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{15} < \operatorname{ctg} \frac{12\pi}{5} < \operatorname{tg} \frac{6\pi}{5}$.

г) $\cos \frac{13\pi}{24} = \sin\left(-\frac{\pi}{24}\right); \sin \frac{17\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6};$

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{5\pi}{12} < -\frac{\pi}{24} < \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{24} < \frac{\pi}{2}$ и $y = \sin x \uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) < \cos \frac{13\pi}{24} < \sin \frac{17\pi}{6} < \sin \frac{5\pi}{24}$.

91.

а) $f(x) = x^4 + 3x;$

Пусть $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$ и $x_1 < x_2$, то $x_1^4 + 3x_1 < x_2^4 + 3x_2;$

$f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функция возрастает.

б) $f(x) = -x^3 - 2x;$

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$, то $-x_1^3 - 2x_1 > -x_2^3 - 2x_2;$

$f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функция убывает.

в) $f(x) = x^6 - 0.5$;

Пусть $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$ и $x_1 < x_2$, то $(+x_2)^6 - 0.5 < (+x_1)^6 - 0.5$;

$f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функция убывает.

г) $f(x) = x^5 + 1.5x$;

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$, то $x_1^5 + 1.5x_1 < x_2^5 + 1.5x_2$;

$f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функция возрастает.

92.

а) Если f – четная функция, то $f(x_0) = f(-x_0)$, следовательно, если x_0 – точка максимума, то и $(-x_0)$ – точка максимума.

б) Пусть f – нечетная функция и на $[a; b]$ $f(x) \downarrow$, т.е. для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) > f(x_2)$. Тогда в силу нечетности, для любых $-x_1$ и $-x_2$, $x_1, x_2 \in [-b; -a]$, что $x_1 > x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. $f(x) \downarrow$ на $[-b; -a]$.

в) Если f – нечетная функция, то $f(x_0) = -f(-x_0)$, следовательно, если x_0 – точка максимума, то $(-x_0)$ – точка минимума.

г) Пусть f – четная функция и на $[a; b]$ $f(x) \uparrow$, т.е. для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$, что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$. Тогда в силу четности для любых $-x_1$ и $-x_2$ из $[-b; -a]$, что $x_2 < x_1$: $f(-x_1) < f(-x_2)$, т.е. на $[-b; -a]$ функция убывает.

6. Исследование функций

93.

а) $D(f) = [-8; 5]$; $E(f) = [-2; 5]$; $f(x) = 0$, если $x = 1$; $f(0) = 2.5$;

$f(x) > 0$ на $[-8; 1]$; $f(x) < 0$ на $(1; 5]$;

$f(x) \downarrow$ на $[-8; -5] \cup [-1; 3]$; $f(x) \uparrow$ на $[-5; -1] \cup [3; 5]$.

$x_{\min} = -5$; $y_{\min} = 1$; $x_{\min} = 3$; $y_{\min} = -2$;

$x_{\max} = -1$; $y_{\max} = 3$.

$f(5) = 0$, $f(-8) = 5$.

б) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

$f(x) = 0$, если $x = 0$; $f(0) = 0$;

$f(x) > 0$ на $[-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; $f(x) < 0$ на $(-2; 0)$;

$f(x) \uparrow$ на $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;

$y = 2$ – горизонтальная асимптота;

$x = -2$ – вертикальная асимптота.

в) $D(f) = [-6; 6]$; $E(f) = [-2; 2]$;

$f(-x) = -f(x)$, следовательно функция нечетная;

$f(x) = 0$, если $x = 0; \pm 4$; $f(0) = 0$;

$f(x) > 0$ на $(-4;0) \cup (4;6]$; $f(x) < 0$ на $[-6;-4) \cup (0;4)$;

$f(x) \uparrow$ на $[-6;-2] \cup [2;6]$; $f(x) \downarrow$ на $[-2;2]$.

$x_{\min} = 2$; $y_{\min} = -2$; $x_{\max} = -2$; $y_{\max} = 2$.

$f(-6) = -2$, $f(6) = 2$.

г) $D(f) = [-5;7]$; $E(f) = [-3;3]$;

$f(x) = 0$, если $x = 5, -4, \pm 1$; $f(0) = 1$;

$f(x) > 0$ на $[-5;-4) \cup (-1;1) \cup (5;7]$; $f(x) < 0$ на $(-4;1) \cup (1;5)$;

$f(x) \downarrow$ на $[-5;-3] \cup [0;3]$; $f(x) \uparrow$ на $[-3;0] \cup [3;7]$.

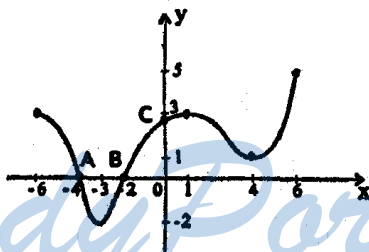
$x_{\min} = -3$; $y_{\min} = -2$; $x_{\max} = 3$; $y_{\max} = -3$;

$x_{\max} = 0$; $y_{\max} = 1$.

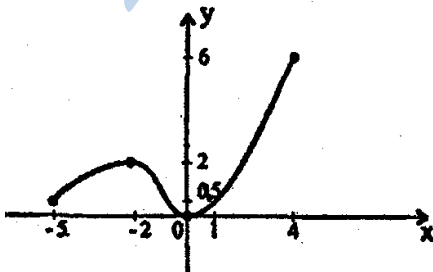
$f(7) = 3$, $f(-2) = -1$.

94.

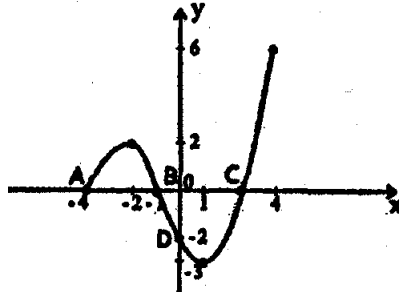
а)



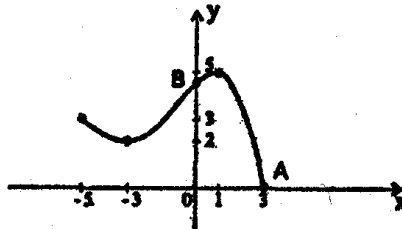
б)



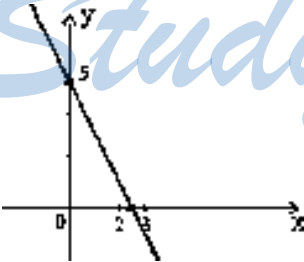
в)



г)



95.



а) $f(x) = 5 - 2x$;
 $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = \mathbb{R}$;
 $f(x) = 0$, если $x = \frac{5}{2}$; $f(0) = 5$;

$f(x) > 0$ если $x \in (-\infty; \frac{5}{2})$;

$f(x) < 0$ если $x \in (\frac{5}{2}; +\infty)$;

Функция убывает на \mathbb{R} . Точек max и min нет.

б) $f(x) = 3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2$;

$D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = (-\infty; 4]$;

$f(x) = 0$, если $x = -3$; $x = 1$; $f(0) = 3$;

$f(x) > 0$ на $(-3; 1)$;

$f(x) < 0$ на $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$;

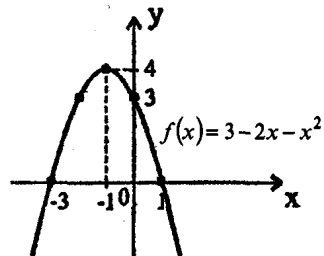
$f(x) \uparrow$ на $(-\infty; -1]$;

$f(x) \downarrow$ на $[-1; +\infty)$;

$x_{\max} = -1$;

$y_{\max} = 4$;

в) $f(x) = 3x - 2$;



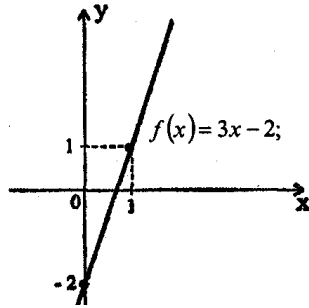
$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = \mathbb{R};$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{2}{3}; f(0) = -2;$$

$$f(x) < 0 \text{ если } x \in (-\infty; \frac{2}{3});$$

$$f(x) > 0 \text{ если } x \in (\frac{2}{3}; +\infty);$$

Функция возрастает на \mathbb{R} .
Точек \max и \min нет.



$$r) f(x) = x^2 - 3x + 2 = -0.25 + (x - \frac{3}{2})^2;$$

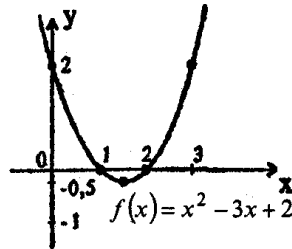
$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-\frac{1}{4}; +\infty);$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = 1; x = 2; f(0) = 2;$$

$$f(x) > 0 \text{ на } (-\infty; 1) \cup (2; +\infty);$$

$$f(x) < 0 \text{ на } (1; 2);$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } (-\infty; \frac{3}{2}); f(x) \uparrow \text{ на } [\frac{3}{2}; +\infty).$$



$$x_{\min} = \frac{3}{2}; y_{\min} = -\frac{1}{4}.$$

96.

$$a) f(x) = \frac{1}{x} - 2;$$

$$D(f) = \mathbb{R} / \{0\}; E(f) = \mathbb{R} / \{-2\};$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = 0 \text{ и } x = 5;$$

$$f(x) < 0 \text{ если } x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2};$$

$+\infty)$;

$$f(x) > 0 \text{ если } x \in (0; \frac{1}{2});$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

$y = -2$ и $x = 0$ – асимптоты. Точек \max и \min нет.

$$b) f(x) = -(x-3)^4;$$

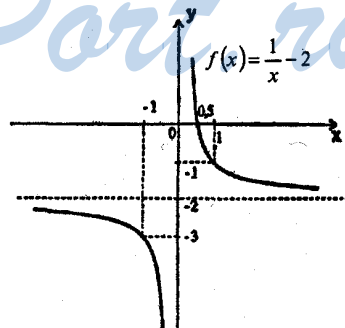
$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = \mathbb{R};$$

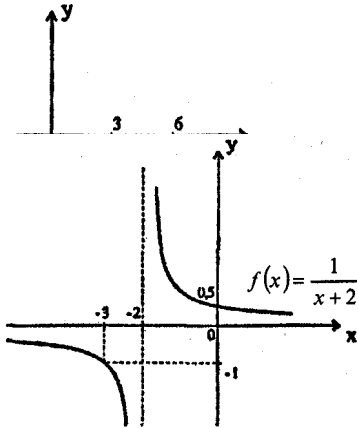
$$f(x) = 0, \text{ если } x = 0 \text{ и } x = 5; f(0) = -81;$$

$$f(x) < 0 \text{ на } D(f) / \{3\};$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } [3; +\infty);$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } (-\infty; 3];$$





$$x_{\max} = 3; y_{\max} = 0.$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{x+2};$$

$$D(f) = \mathbb{R} / \{-2\}; E(f) = \mathbb{R} / \{0\};$$

$$f(x) \neq 0; f(0) = \frac{1}{2};$$

$$f(x) < 0 \text{ если } x \in (-\infty; -2);$$

$$f(x) > 0 \text{ если } x \in (-2; +\infty);$$

$y = 0$ и $x = -2$ – асимптоты.

Точек max и min нет.

$$\text{г) } f(x) = x^3 - 1;$$

$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = \mathbb{R};$$

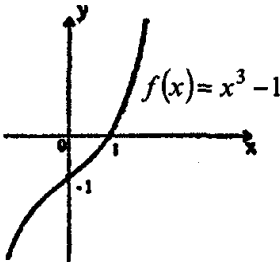
$$f(x) = 0 \text{ при } x = 1; f(0) = -1;$$

$$f(x) < 0 \text{ если } x \in (-\infty; 1);$$

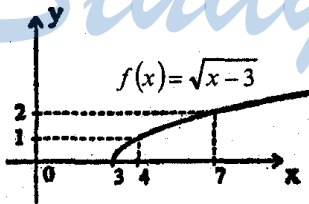
$$f(x) > 0 \text{ если } x \in (1; +\infty);$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } \mathbb{R};$$

Точек max и min нет.



97.



$$\text{а) } f(x) = \sqrt{x-3};$$

$$D(f) = [3; +\infty); E(f) = [0; +\infty);$$

$f(x) = 0$ при $x = 3$; $f(0)$ не определено;

$$f(x) > 0 \text{ если } x \in (3; +\infty);$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } D(f);$$

$$\text{б) } f(x) = 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2;$$

$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = (-\infty; 4];$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = 0 \text{ или } x = 4;$$

$$f(x) < 0 \text{ если } x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty);$$

$$f(x) > 0 \text{ если } x \in (0; 4);$$

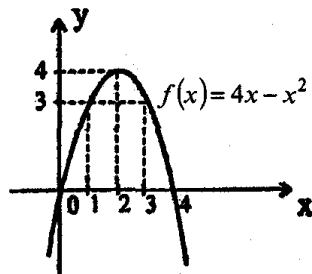
$$f(x) \downarrow \text{ на } [2; +\infty);$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } (-\infty; 2];$$

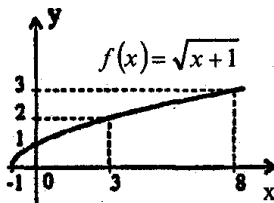
$$x_{\max} = 2;$$

$$y_{\max} = 4.$$

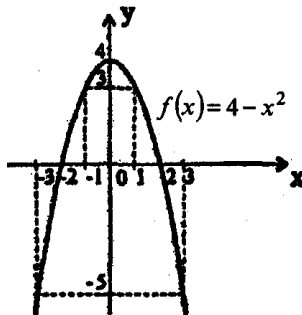
$$\text{в) } f(x) = \sqrt{x+1};$$



$D(f) = [-1; +\infty)$; $E(f) = \mathbb{R}^+$;
 $f(x) = 0$ при $x = -1$; $f(0) = 1$;
 $f(x) > 0$ если $x \in (-1; +\infty)$;
 $f(x) \uparrow$ на $D(f)$;
 Точек max и min нет.

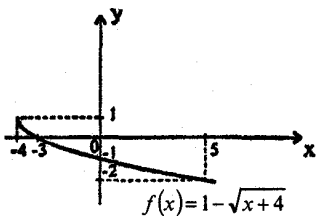
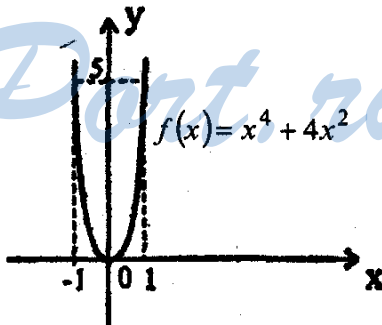


г) $f(x) = 4 - x^2$;
 $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = (-\infty; 4]$;
 $f(-x) = f(x)$ – четная функция;
 $f(x) = 0$, если $x = \pm 2$; $f(0) = 4$;
 $f(x) < 0$ если $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;
 $f(x) > 0$ если $x \in (-2; 2)$;
 $f(x) \uparrow$ на $(-\infty; 0]$;
 $f(x) \downarrow$ на $[0; +\infty)$;
 $x_{\max} = 0$.
 $y_{\max} = 4$;



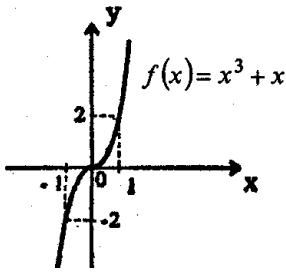
98.

а) $f(x) = x^4 + 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4$;
 $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = \mathbb{R}^+$;
 $f(-x) = f(x)$ – функция четная;
 $f(x) = 0$, если $x = 0$;
 $f(x) > 0$ если $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 $f(x) \downarrow$ на \mathbb{R}^- ;
 $f(x) \uparrow$ на \mathbb{R}^+ ;
 $x_{\min} = 0$.
 $y_{\min} = -4$;
 б) $f(x) = 1 - \sqrt{x+4}$;
 $D(f) = [-4; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 1]$;

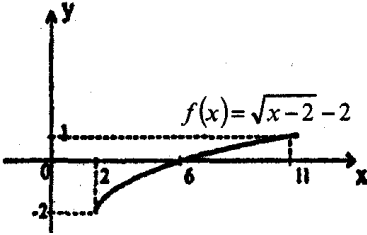


$f(x) = 0$, если $x = -3$; $f(0) = -1$;
 $f(x) < 0$ если $x \in (-3; +\infty)$;
 $f(x) > 0$ если $x \in [-4; -3)$;
 $f(x) \downarrow$ на $[-4; +\infty)$;
 $x_{\max} = -4$.
 $y_{\max} = 1$;

в) $f(x) = x^3 + x$;
 $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = \mathbb{R}$;
 $f(x) = 0$ при $x = 0$;
 $f(x) < 0$ если $x \in (-\infty; 0)$;

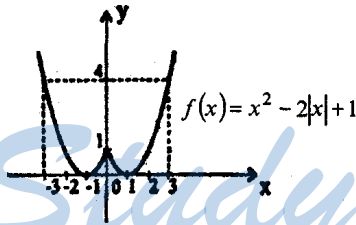


$f(x) > 0$ если $x \in (0; +\infty)$;
 $f(x) \uparrow$ на \mathbb{R} ;
 Точек \max и \min нет.



г) $f(x) = \sqrt{x-2} - 2$;
 $D(f) = [2; +\infty)$; $E(f) = [-2; +\infty)$;
 $f(x) = 0$, если $x = 6$;
 $f(x) < 0$ если $x \in [2; 6)$;
 $f(x) > 0$ если $x \in (6; +\infty)$;
 $f(x) \uparrow$ на $D(f)$;
 $x_{\min} = 2$;
 $y_{\min} = -2$.

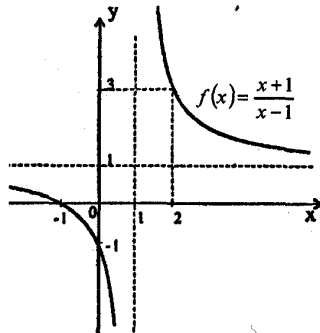
99.



а) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1 =$
 $= (|x|)^2 - 2|x| + 1 = (1 + |x|)^2$;
 $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = \mathbb{R}^+$;
 $f(-x) = f(x)$ — четная функция;
 $f(x) = 0$, если $x = \pm 1$; $f(0) = 1$
 $f(x) > 0$ если
 $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$f(x) \downarrow$ на $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$;
 $f(x) \uparrow$ на $[-1; 0] \cup (1; +\infty)$;
 $x_{\min} = \pm 1$;
 $y_{\min} = 0$;
 $x_{\max} = 0$;
 $y_{\max} = 1$.

б) $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$;
 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
 $f(x) = 0$, если $x = -1$; $f(0) = -1$
 $f(x) < 0$ если $x \in (-1; 1)$;
 $f(x) > 0$ если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
 $y = 1$ и $x = 1$ — асимптоты.
 Точек \max и \min нет.
 $f(x) \downarrow$ на $D(f)$.



$$в) f(x) = |x| - x^2 = 0.25 - (|x| - \frac{1}{2})^2;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = (-\infty; \frac{1}{4}];$$

$f(-x) = f(x)$ – четная функция;

$f(x) = 0$, если $x \pm 1$; $x = 0$;

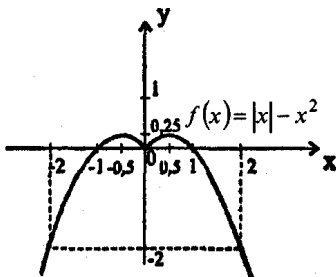
$f(x) > 0$ если $x \in (-1; 1)$;

$f(x) < 0$ если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

$f(x) \downarrow$ на $[-\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$; $f(x) \uparrow$ на $[0; \frac{1}{2}] \cup (-\infty; -\frac{1}{2}]$;

$$x_{\min} = 0; y_{\min} = 0;$$

$$x_{\max} = \pm \frac{1}{2}; y_{\max} = \frac{1}{4}.$$



$$г) f(x) = 2 + \frac{1}{x};$$

$$D(f) = \mathbb{R} / \{0\}; E(f) = \mathbb{R} / \{-2\};$$

$f(x) = 0$, если $x = -\frac{1}{2}$;

$f(x) < 0$ если $x \in (-\frac{1}{2}; 0)$;

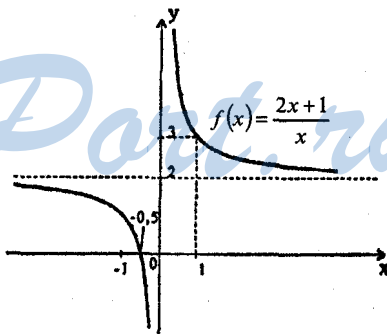
$f(x) > 0$ если

$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; +\infty)$;

$y = 2$ и $x = 0$ – асимптоты.

Точек \max и \min нет.

$f(x) \downarrow$ на $D(f)$.



7. Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания.

100.

$$а) \operatorname{tg} \frac{18\pi}{5} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}; \quad \sin \frac{28\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3};$$

$$б) \cos(-\frac{15\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{8}; \quad \operatorname{ctg}(-\frac{8\pi}{5}) = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5};$$

$$\text{в) } \sin\left(-\frac{14\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}; \quad \operatorname{tg}\frac{15\pi}{8} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8};$$

$$\text{г) } \cos\frac{20\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}; \quad \operatorname{ctg}\frac{35\pi}{9} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}.$$

101.

а) $D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-4; 2];$
 б) $D(f) = \mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{3}n / n \in \mathbb{Z} \right\}; E(f) = \mathbb{R};$
 в) $D(f) = \mathbb{R} / \left\{ \pi + 2\pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}; E(f) = \mathbb{R};$
 г) $D(f) = \mathbb{R}; E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right].$

102.

а) $f(x) = -\sin 3x;$
 $f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$
 $f(x) < 0$ если $x \in \left(\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z};$
 $f(x) > 0$ если $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z};$
 б) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{2x}{3};$
 $f(x) = 0$, если $x = \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$
 $f(x) < 0$ если $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}; \frac{3\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z};$
 $f(x) > 0$ если $x \in \left(\frac{3\pi n}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z};$
 в) $f(x) = \cos\frac{x}{2};$
 $f(x) = 0$, если $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $f(x) > 0$ если $x \in (-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n), n \in \mathbb{Z};$
 $f(x) < 0$ если $x \in (\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n), n \in \mathbb{Z};$
 г) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x;$
 $f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$

$$f(x) < 0 \text{ если } x \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z;$$

$$f(x) > 0 \text{ если } x \in \left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z.$$

103.

а) $f(x) = 4\cos 3x$;

$$f(x) \uparrow \text{ на } \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}\right], n \in Z;$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } \left[\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in Z.$$

$$x_{\min} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; y_{\min} = -4; n \in Z;$$

$$x_{\max} = \frac{2\pi n}{3}; y_{\max} = 4; n \in Z.$$

б) $f(x) = 0.5\text{ctg} \frac{x}{4}$; $f(x) \downarrow \text{ на } \mathbb{R} \setminus \{4\pi n, n \in Z\}$;

Точек \max и \min нет.

в) $f(x) = 2\text{tg} \frac{x}{2}$; $f(x) \uparrow \text{ на } \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi n, n \in Z\}$;

Точек \max и \min нет.

г) $f(x) = 0.2\sin 4x$;

$$f(x) \uparrow \text{ на } \left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z;$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } \left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right], k \in Z.$$

$$x_{\min} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; y_{\min} = -0.2; n \in Z;$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; y_{\max} = 0.2; n \in Z.$$

104.

а) $f(x) = 0.5\cos \frac{x}{3}$;

$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right];$$

$f(-x) = f(x)$ – четная функция;
периодическая: $T = 6\pi$;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z;$$

$$f(0) = \frac{1}{2};$$

$$f(x) > 0 \text{ на } \left(-\frac{3\pi}{2} + 6\pi n; \frac{3\pi}{2} + 6\pi n\right), n \in Z;$$

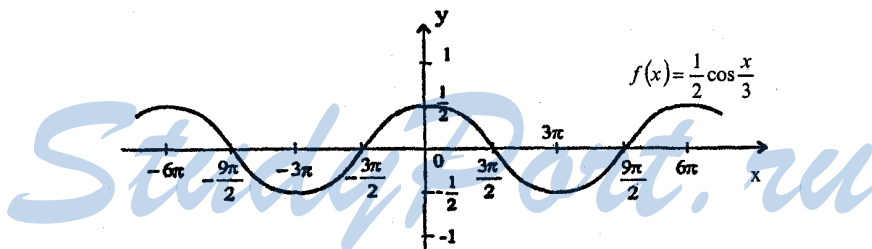
$$f(x) < 0 \text{ на } \left(\frac{3\pi}{2} + 6\pi n; \frac{9\pi}{2} + 6\pi n\right), n \in Z;$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } [-3\pi + 6\pi n; 6\pi n], n \in Z;$$

$$f(x) \downarrow \text{ на } [6\pi n; 3\pi + 6\pi n], n \in Z.$$

$$x_{\min} = 3\pi + 6\pi n, n \in Z; y_{\min} = -\frac{1}{2};$$

$$x_{\max} = 6\pi n, n \in Z; y_{\max} = \frac{1}{2}.$$



$$\text{б) } f(x) = -2 \sin 2x;$$

$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-2; 2];$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ — нечетная функция;}$$

$$\text{периодическая с } T = \pi;$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z;$$

$$f(0) = 0;$$

$$f(x) > 0 \text{ на } \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z;$$

$$f(x) < 0 \text{ на } \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z;$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } \left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z;$$

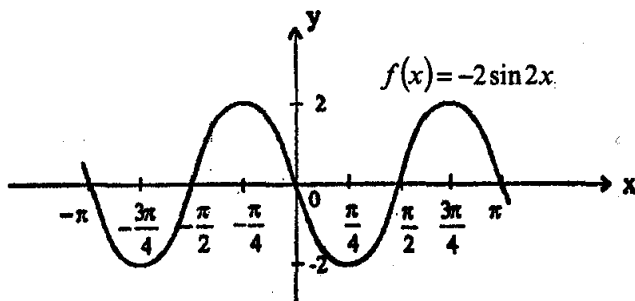
$$f(x) \downarrow \text{ на } \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z.$$

$$x_{\min} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

$$y_{\min} = -2;$$

$$x_{\max} = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

$$y_{\max} = 2.$$



в) $f(x) = -1.5 \cos 3x$;

$$D(f) = R; E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right];$$

$f(-x) = f(x)$ – четная функция;

периодическая с $T = \frac{2}{3}\pi$;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; f(0) = -\frac{3}{2};$$

$$f(x) > 0 \text{ на } \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n\right), n \in Z;$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } \left[\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in Z;$$

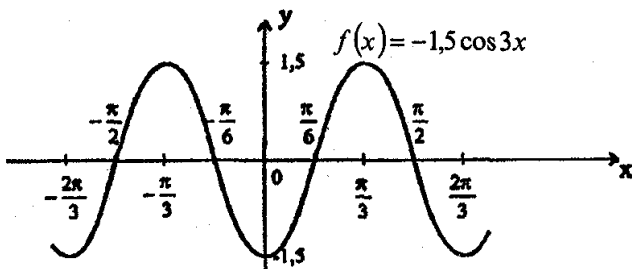
$$f(x) \downarrow \text{ на } \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}\right], k \in Z.$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z;$$

$$y_{\max} = \frac{3}{2}.$$

$$x_{\min} = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z;$$

$$y_{\min} = -\frac{3}{2};$$



г) $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2}$;

$D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = [-3; 3]$;

$f(-x) = -f(x)$ – нечетная функция;

периодическая с $T = 4\pi$;

$f(x) = 0$, если $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$f(x) > 0$ на $(4\pi k; 2\pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

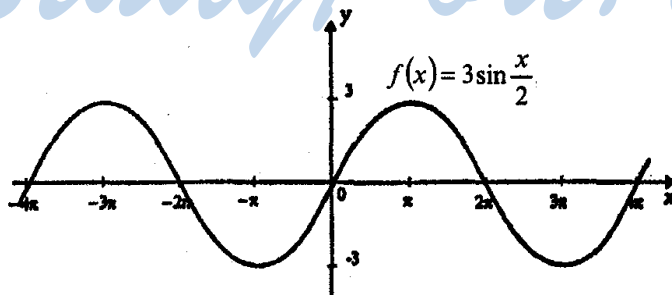
$f(x) < 0$ на $(-2\pi + 4\pi k; 4\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$f(x) \uparrow$ на $[-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

$f(x) \downarrow$ на $[\pi + 4\pi k; 3\pi + 4\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;

$x_{\max} = \pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y_{\max} = 3$;

$x_{\min} = -\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y_{\min} = -3$.



105.

а) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$;

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$; $E(f) = \mathbb{R}$;

$f(-x) = -f(x)$ – нечетная функция;

периодическая с $T = \frac{\pi}{2}$, поэтому достаточно исследовать ее на одном периоде;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$$

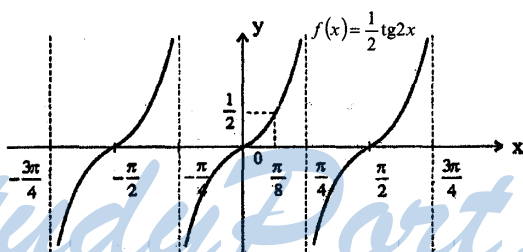
$$f(0) = 0;$$

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \right), n \in Z;$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \right), k \in Z$$

Функция возрастает на каждом из интервалов $D(f)$;

Точек max и min нет.



б) $f(x) = -3 \cos \frac{3x}{2};$

$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-3; 3];$$

$$f(-x) = f(x) - \text{четная функция};$$

$$\text{периодическая с } T = \frac{4\pi}{3};$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z;$$

$$f(0) = -3;$$

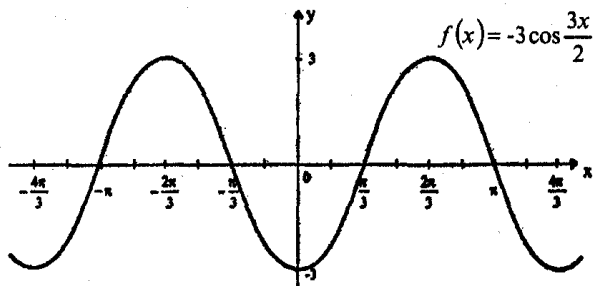
$$f(x) > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}; \pi + \frac{4\pi n}{3} \right), n \in Z;$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k; \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k \right), k \in Z;$$

$$f(x) \uparrow \text{ при } x \in \left[\frac{4\pi k}{3}; \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3} \right], k \in Z; f(x) \downarrow \text{ при } x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}; \frac{4\pi n}{3} \right], k \in Z.$$

$$x_{\max} = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in Z; y_{\max} = 3;$$

$$x_{\min} = \frac{4\pi}{3}n, n \in Z; y_{\min} = -3.$$



в) $f(x) = -2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3};$

$D(f) = R \setminus \{3\pi n, n \in Z\}; E(f) = R;$

$f(-x) = -f(x)$ – нечетная функция;

периодическая с $T = 3\pi;$

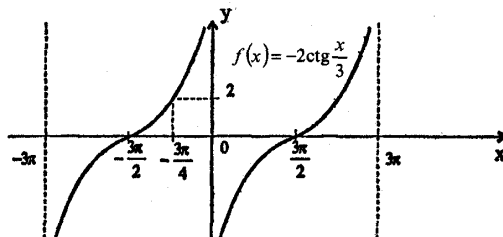
$f(x) = 0$, если $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z;$

$f(x) < 0$ при $x \in \left(3\pi k; \frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right), k \in Z;$

$f(x) > 0$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 3\pi n; 3\pi n\right), n \in Z;$

Функция возрастает на каждом из интервалов $D(f);$

Точек max и min нет.



г) $f(x) = \frac{5}{2} \sin \frac{4x}{3}; D(f) = R; E(f) = \left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right];$

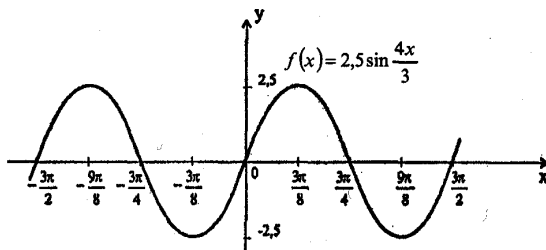
$f(-x) = -f(x)$ – нечетная функция; периодическая с $T = \frac{3\pi}{2};$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{3\pi n}{4}, n \in Z;$$

$$f(0) = 0; f(x) > 0 \text{ на } (0; \frac{3\pi}{4}); f(x) < 0 \text{ на } (-\frac{3\pi}{4}; 0);$$

$$f(x) \uparrow \text{ на } [-\frac{3\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}]; f(x) \downarrow \text{ на } [\frac{3\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}].$$

$$x_{\max} = \frac{3\pi}{8}; y_{\max} = \frac{5}{2}; x_{\min} = -\frac{3\pi}{8}; y_{\min} = -\frac{5}{2}.$$



106.

$$\text{а) } x(t) = \frac{7}{2} \cos 4\pi t; A = \frac{3}{2} \text{ (см); } \omega = 4\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{2} \text{ (с);}$$

$$x\left(\frac{1}{12}\right) = 1.75 \text{ (см).}$$

$$\text{б) } x(t) = 5 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right); A = 5 \text{ (см); } \omega = 3\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{3} \text{ (с);}$$

$$x\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2} \text{ (см).}$$

$$\text{в) } x(t) = 1.5 \cos 6\pi t; A = 1.5 \text{ (см); } \omega = 6\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{3} \text{ (с);}$$

$$x\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2} \text{ (см).}$$

$$\text{г) } x(t) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right); A = \frac{1}{2} \text{ (см); } \omega = \frac{\pi}{2} \text{ (рад/с); } T = 4 \text{ (с);}$$

$$x(8) = \frac{1}{4} \text{ (см).}$$

107.

$$\text{а) } I(t) = \frac{1}{4} \sin 50\pi t; A = \frac{1}{4} \text{ (А); } \omega = 50\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{25} \text{ (с).}$$

$$\text{б) } I(t) = 5 \sin 20\pi t ; A = 5(\text{A}); \omega = 20\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{10} \text{ (с).}$$

$$\text{в) } I(t) = \frac{1}{2} \sin 10\pi t ; A = \frac{1}{2} (\text{A}); \omega = 10\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{5} \text{ (с).}$$

$$\text{г) } I(t) = 3 \sin 30\pi t ; A = 3(\text{A}); \omega = 30\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{15} \text{ (с).}$$

108.

$$\text{а) } U(t) = 220 \cos \pi t ; A = 220(\text{В}); \omega = 60\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{30} \text{ (с).}$$

$$\text{б) } A = 110(\text{В}); \omega = 30\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{15} \text{ (с).}$$

$$\text{в) } A = 360(\text{В}); \omega = 20\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{1}{10} \text{ (с).}$$

$$\text{г) } A = 180(\text{В}); \omega = 45\pi \text{ (рад/с); } T = \frac{2}{45} \text{ (с).}$$

109.

$$\text{а) } \cos(-12.5) = \cos(4\pi - 12.5);$$

$$\cos 9 = \cos(7 - 2\pi); \cos 4 = \cos(2\pi - 4);$$

$$0 < 4\pi - 12.5 < 7 - 2\pi < 2\pi - 4 < 9 - 2\pi < \pi, \text{ то}$$

$$\cos 9 < \cos 4 < \cos 7 < \cos(-12.5),$$

$$\text{т.к. } y = \cos x \downarrow \text{ на } [0; \pi]$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}(-8) = \operatorname{tg}(3\pi - 8);$$

$$\operatorname{tg} 4 = \operatorname{tg}(4 - \pi); \operatorname{tg} 16 = \operatorname{tg}(16 - 5\pi);$$

$$-\frac{\pi}{2} < 16 - 5\pi < 4 - \pi < 1.3 < 3\pi - 8 < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{tg} 16 < \operatorname{tg} 4 < \operatorname{tg} 1.3 < \operatorname{tg}(-8), \text{ т.к. } y = \operatorname{tg} x \uparrow \text{ на } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{в) } \sin 6.7 = \sin(6.7 - 2\pi); \sin 10.5 = \sin(3\pi - 10.5);$$

$$\sin(-7) = \sin(2\pi - 7); \sin 20.5 = \sin(7\pi - 20.5);$$

$$-\frac{\pi}{2} < 3\pi - 10.5 < 2\pi - 7 < 6.7 - 2\pi < 7\pi - 20.5 < \frac{\pi}{2};$$

$$\sin 10.5 < \sin(-7) < \sin 6.7 < \sin 20.5,$$

$$\text{т.к. } y = \sin x \uparrow \text{ на } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg}(-9) = \operatorname{ctg}(4\pi - 9); \operatorname{ctg} 15 = \operatorname{ctg}(15 - 3\pi);$$

$$\pi < 3.5 < 4\pi - 9 < 5 < 15 - 3\pi < 2\pi, \text{ то}$$

$$\operatorname{ctg} 15 < \operatorname{ctg} 5 < \operatorname{ctg}(-9) < \operatorname{ctg} 3.5, \text{ т.к. } y = \operatorname{ctg} x \downarrow \text{ на } (\pi; 2\pi).$$

110.

а) $D(y): \sin x \neq 1$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $D(y): \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \geq 0; x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

в) $D(y): \cos x \neq 1$, т.е. $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

г) $D(y): \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 0; \sin 2x > 0; x \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

111.

а) $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}); E(y) = [-2; 2]$.

б) $y = \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3 \cos^2 x$; причем $\cos x \neq 0$; $E(y) = (0; 3]$.

в) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$; $E(y) = [0; \sqrt{2}]$.

г) $y = \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 2 \sin^2 x$; причем $\sin x \neq 0$; $E(y) = (0; 2]$.

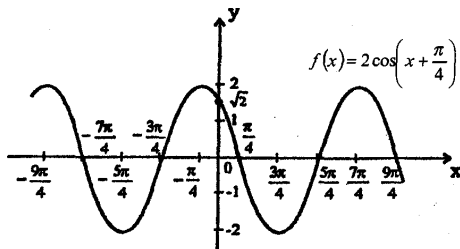
112.

а) $f(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4}); D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-2; 2]$;

периодическая с $T = 2\pi$;

$f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $f(0) = \sqrt{2}$;

$x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $y_{\max} = 2$; $x_{\min} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $y_{\min} = -2$.

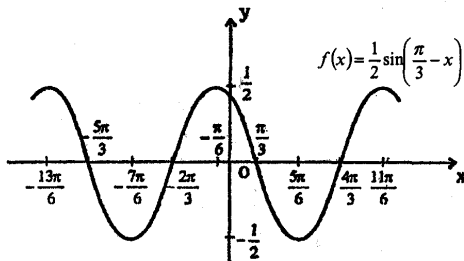


б) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3} - x); D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$;

периодическая с $T = 2\pi$;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; f(0) = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; y_{\max} = \frac{1}{2}; x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$



в) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}); D(f) = \mathbb{R} / \{ \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z \}; E(f) = \mathbb{R};$

$$f(-x) = -f(x) - \text{нечетная функция};$$

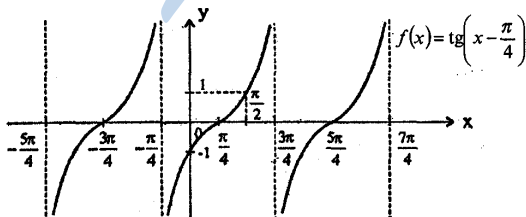
периодическая с $T = \pi;$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$f(0) = -1;$$

Функция возрастает на каждом из интервалов $D(f);$

Точек max и min нет.



г) $f(x) = 1.5 \cos(\frac{\pi}{6} - x);$

$$D(f) = \mathbb{R}; E(f) = [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}];$$

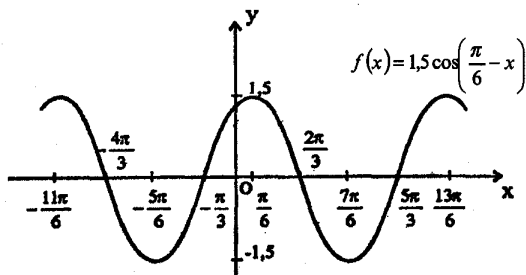
периодическая с $T = 2\pi;$

$$f(x) = 0, \text{ если } x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$f(0) = \frac{3\sqrt{3}}{4};$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; y_{\max} = 1.5;$$

$$x_{\min} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; y_{\min} = -1.5.$$



113.

a) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right);$

$D(f) = R; E(f) = [-1; 1];$

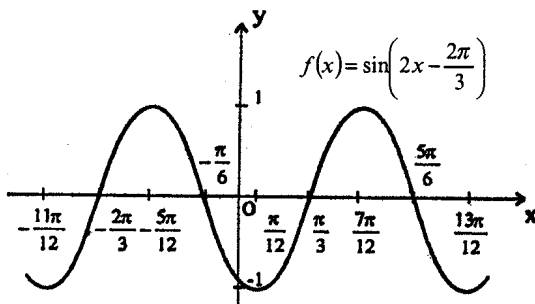
периодическая с $T = \pi;$

$f(x) = 0,$ если $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

$f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$x_{\max} = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z; y_{\max} = 1;$

$x_{\min} = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z; y_{\min} = -1.$



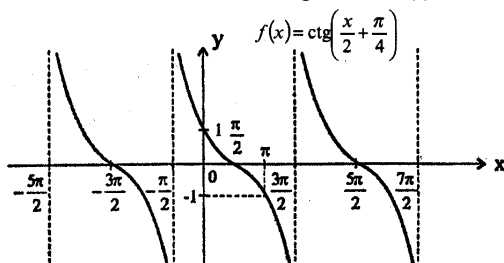
б) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$

$$D(f) : \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0; x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; E(f) = R;$$

периодическая с $T = 2\pi$;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; f(0) = 1;$$

Функция убывает на каждом из интервалов $D(f)$;



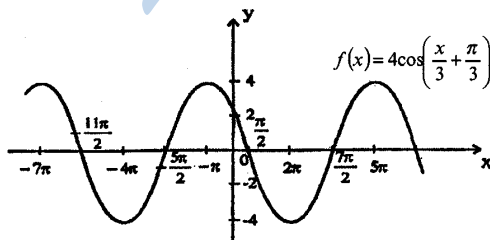
$$в) f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right); D(f) = R; E(f) = [-4; 4];$$

периодическая с $T = 6\pi$;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2} + 3\pi k, k \in Z; f(0) = 2;$$

$$x_{\max} = -\pi + 6\pi n, n \in Z; y_{\max} = 4;$$

$$x_{\min} = 2\pi + 6\pi k, k \in Z; y_{\min} = -4.$$



$$г) f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right);$$

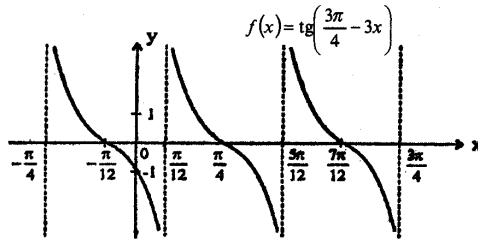
$$D(f) : \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) \neq 0; x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z;$$

$$E(f) = R;$$

периодическая с $T = \frac{\pi}{3}$;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; f(0) = -1;$$

Функция убывает на каждом из интервалов $D(f)$;
Точек \max и \min нет.



114.

а) $A = 15(\text{A})$; $T = \frac{2}{5}(\text{с})$; $\omega = 5\pi$ (рад/с); $I = 15 \sin 5\pi t$;

б) $A = 90(\text{В})$; $T = \frac{2}{25}(\text{с})$; $\omega = 25\pi$ (рад/с); $U = 90 \sin 25\pi t$;

в) $A = 12(\text{А})$; $T = \frac{6}{5}(\text{с})$; $\omega = \frac{5\pi}{3}$ (рад/с); $I = 12 \sin \frac{5\pi}{3} t$;

г) $A = 100(\text{В})$; $T = \frac{4}{5}(\text{с})$; $\omega = \frac{5\pi}{2}$ (рад/с); $U = 100 \sin \frac{5\pi}{2} t$.

StudyPort.ru

§3 РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ.

8. Арксинус, арккосинус и арктангенс.

116.

а) График функции $y=x^7 \uparrow$ на \mathbb{R} , поэтому, $x^7=3$ имеет один корень;

б) График функции $y=\frac{3}{x-1} \downarrow$ на $(-\infty;1)$, $E(y) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

поэтому уравнение $\frac{3}{x-1} = -5$ имеет один корень;

в) График функции $y=x^6 \downarrow$ на $(-\infty;0]$, $E(y) = \mathbb{R}^+$,
поэтому, $x^6 = 4$ имеет один корень;

г) График функции $y=\frac{5}{x+2} \downarrow$ на $(-2;+\infty)$,

поэтому уравнение $\frac{5}{x+2} = 2$ имеет один корень.

117.

а) $(x-3)^3 = 4$ имеет один корень на \mathbb{R} ,
т.к. функция $y = (x-3)^3 \uparrow$ на нем.

б) $2\sin x = 1.5$ имеет один корень на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,

т.к. функция $y = 2\sin x \uparrow$ на этом промежутке.

в) $(x+2)^4 = 5$ имеет один корень на $[-2;+\infty)$,

т.к. функция $y = (x+2)^4 \uparrow$ на нем.

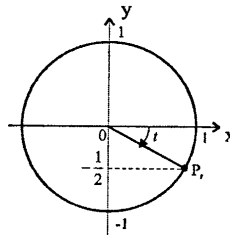
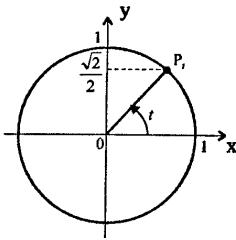
г) $0.5 \cos x = -\frac{1}{4}$ имеет один корень на $[0;\pi]$,

т.к. функция $y = 0.5 \cos x \downarrow$ на этом промежутке.

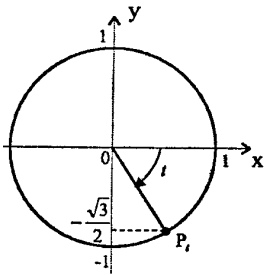
118.

а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t = \frac{\pi}{4};$

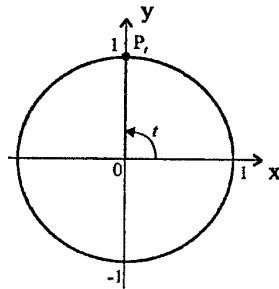
б) $\sin t = -\frac{1}{2}; \quad t = -\frac{\pi}{6};$



$$b) \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad t = -\frac{\pi}{3};$$

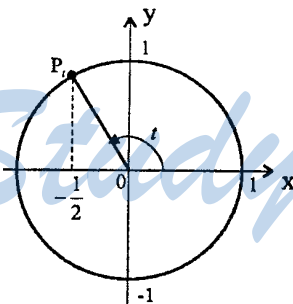


$$r) \sin t = 1; \quad t = \frac{\pi}{2};$$

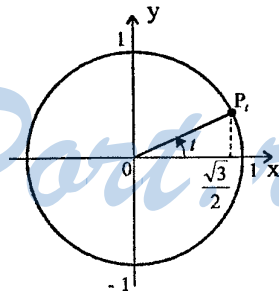


119.

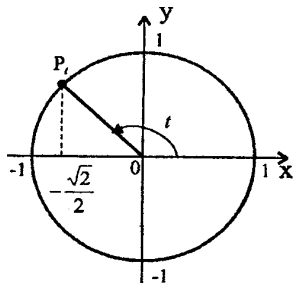
$$a) \cos t = -\frac{1}{2}; \quad t = \frac{2\pi}{3};$$



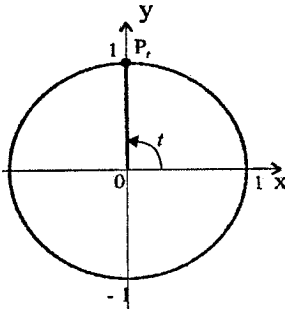
$$b) \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad t = \frac{\pi}{6};$$



$$b) \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t = \frac{3\pi}{4};$$

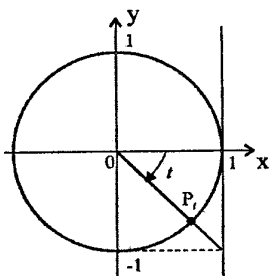


$$r) \cos t = 0; \quad t = \frac{\pi}{2};$$

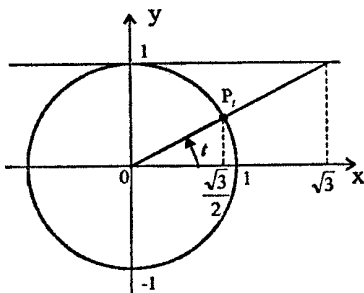


120.

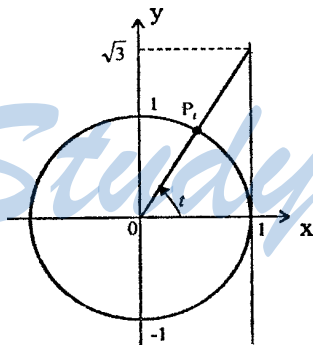
a) $\operatorname{tg} t = -1; \quad t = -\frac{\pi}{4};$



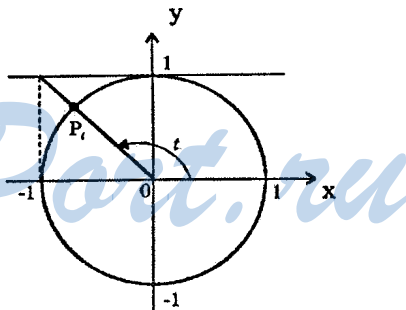
б) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}; \quad t = \frac{\pi}{3};$



в) $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}; \quad t = \frac{\pi}{6};$



г) $\operatorname{ctg} t = -1; \quad t = \frac{3\pi}{4};$



121.

a) $\arcsin 0 = 0; \quad \text{б) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3};$

в) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; \quad \text{г) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$

122.

a) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}; \quad \text{б) } \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4};$

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}; \quad \text{г) } \arccos 1 = 0.$

123.

а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}0 = 0$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

124.

а) $D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $-\frac{2}{3} \in D(\arcsin x)$.

Следовательно выражение имеет смысл.

б) $D(\arccos x) = [-1; 1]$; $\arccos \sqrt{5}$ не имеет смысла,

т.к. $\sqrt{5} \notin D(\arccos x)$.

в) $D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $\arcsin 1.5$ не имеет смысла.

г) $D(\arccos x) = [-1; 1]$; $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ имеет смысл.

125.

а) $\arccos \pi$ не имеет смысла.

б) $\arcsin(3 - \sqrt{20})$ не имеет смысла.

в) $\arccos(-\sqrt{3})$ не имеет смысла.

г) $\arcsin \frac{2}{7}$ имеет смысл.

126.

а) $\arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}$;

в) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$; г) $\arcsin(-1) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

127.

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1) = \frac{5\pi}{4}$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; г) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{12}$.

128.

а) $\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{12}$; б) $\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}0 = -\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

129.

а) Т.к. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; то $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) Т.к. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$;

в) Т.к. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; то $\arcsin 1 > \operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

г) Т.к. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$; $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; то $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \arcsin\frac{1}{2}$.

130.

а) $\arcsin 0.3010 \approx 0.3057$; б) $\arccos 0.6081 \approx 0.9171$;

$\operatorname{arctg} 2.3 \approx 1.1607$; $\operatorname{artg} 0.3541 \approx 0.3403$;

в) $\arcsin 0.7801 \approx 0.8948$; г) $\operatorname{arctg} 10 \approx 1.4711$;

$\arccos 0.8771 \approx 0.5010$; $\arcsin 0.4303 \approx 0.4448$.

131.

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\pi}{3}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{8\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 = \pi$;

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\pi}{2}$.

132.

а) Если $\arcsin x_1 = \alpha_1$ и $\arcsin x_2 = \alpha_2$, то $\sin \alpha_1 = x_1$, $\sin \alpha_2 = x_2$.

Т.к. на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $y = \sin x$ возрастает, то $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$,

следовательно, $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$;

б) Если $\arccos x_1 = \alpha_1$, $\arccos x_2 = \alpha_2$, то т.к. функция $y = \cos x$ убывает на $[0; \pi]$, то $\arccos x_1 > \arccos x_2$.

133.

а) Т.к. $\operatorname{arctg} x_1 = \alpha_1$; $\operatorname{arctg} x_2 = \alpha_2$, то $\operatorname{tg} \alpha_1 = x_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2 = x_2$.

Т.к. функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$;

б) Т.к. $\operatorname{arctg} x_1 = \alpha_1$; $\operatorname{arctg} x_2 = \alpha_2$, то $\operatorname{ctg} \alpha_1 = x_1$ и $\operatorname{ctg} \alpha_2 = x_2$,

т.к. функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на $(0; \pi)$, то $\operatorname{arctg} x_1 > \operatorname{arctg} x_2$.

134.

а) Т.к. $-1 < -0,3 < \frac{\pi}{6} < 0,9 < 1$, то $\operatorname{arcsin}(-0,3) < \operatorname{arcsin} \frac{\pi}{6} < \operatorname{arcsin} 0,9$;

б) Т.к. $-1 < -0,7 < -0,5 < \frac{\pi}{8} < 1$, то $\operatorname{arcsin}(-0,7) < \operatorname{arcsin}(-0,5) < \operatorname{arcsin} \frac{\pi}{8}$;

в) Т.к. $-1 < -0,8 < -0,2 < 0,4 < 1$, то $\operatorname{arccos} 0,4 < \operatorname{arccos}(-0,2) < \operatorname{arccos}(-0,8)$;

г) Т.к. $-1 < -0,6 < \frac{\pi}{5} < 0,9 < 1$, то $\operatorname{arccos} 0,9 < \operatorname{arccos} \frac{\pi}{5} < \operatorname{arccos}(-0,6)$.

135.

а) Т.к. $-5 < 0,7 < 100$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на \mathbb{R} , то $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg} 0,7 < \operatorname{arctg} 100$;

б) Т.к. $-5 < 1,2 < \pi$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ убывает на \mathbb{R} , то $\operatorname{arctg} \pi < \operatorname{arctg} 1,2 < \operatorname{arctg}(-5)$;

в) Т.к. $-95 < 3,4 < 17$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на \mathbb{R} , то $\operatorname{arctg}(-95) < \operatorname{arctg} 3,4 < \operatorname{arctg} 17$;

г) Т.к. $-7 < -2,5 < 1,4$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ убывает на \mathbb{R} , то $\operatorname{arctg} 1,4 < \operatorname{arctg}(-2,5) < \operatorname{arctg}(-7)$.

9. Решение простейших тригонометрических уравнений.

136.

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

137.

a) $2\cos x + \sqrt{3} = 0;$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

б) $2\cos x + \sqrt{2} = 0;$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

б) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0;$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

г) $2\cos x - 1 = 0;$

$$\cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

138.

a) $\sin x = \frac{1}{2};$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

б) $\sin x = -\frac{1}{2};$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

г) $\sin x = -1;$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

139.

a) $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0;$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

б) $2\sin x - 1 = 0;$

$$\sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0;$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

г) $2\sin x + \sqrt{2} = 0;$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

140.

a) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3};$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

в) $\operatorname{tg} x = 1$;

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

г) $\operatorname{tg} x = 0$;

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

141.

а) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3};$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

в) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$;

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

б) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

$$\operatorname{ctg} x = -1;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

г) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$;

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

142.

а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

б) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;

$$x = 3 \left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm 2\pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

в) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

$$x = 4 \left((-1)^k \frac{2\pi}{3} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \frac{8\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

г) $\cos 4x = 0$;

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

143.

а) $\sin x = -0,6$;

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin 0,6 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

б) $\operatorname{ctg} x = 2,5$;

$$x = \operatorname{arccotg} 0,4 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

в) $\cos x = 0,3$;

$$x = \pm \arccos 0,3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

г) $\operatorname{tg} x = -3,5$;

$$x = -\operatorname{arctg} (3,5) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

144.

$$\text{a) } \sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$-\frac{x}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{b) } \cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg} 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{r) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1;$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

145.

$$\text{a) } 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3};$$

$$x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x = 4\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = 3\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2};$$

$$x = \frac{\pi}{12} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{r) } \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0;$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

146.

$$\text{a) } \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1;$$

$$\frac{\pi}{6} - 2x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3};$$

$$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + (-1)^k \frac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - x}{4} \right) &= -1; & \text{г) } 2\cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) &= \sqrt{2}; \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; & 3x - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x &= \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; & x &= \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

147.

$$\text{а) } \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } \sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = 1;$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{x}{2} = -1;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}; \quad \text{г) } \sin \frac{x}{3} \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 4x = -\frac{1}{2}; \quad \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{5} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = (-1)^n \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{3\pi}{5} + (-1)^k \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

148.

$$\text{а) } x = \frac{9\pi}{2} : 2\cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -1, \text{ т.е. точка пересечения } \left(\frac{9\pi}{2}; -1 \right);$$

$$x = \frac{9\pi}{2} : \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \text{ т.е. точка пересечения } \left(\frac{9\pi}{2}; 1 \right);$$

$$\text{б) } \text{Имеем: } 2\cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -1;$$

$$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Т.е. точка пересечения } \left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; -1 \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Имеем: } \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 1; x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{т.е. точка пересечения } \left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; -1 \right), n \in \mathbb{Z};$$

в) Имеем: $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

т.е. точка пересечения $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

Имеем: $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

т.е. точка пересечения $\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi n; 1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) Имеем:

$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

т.е. точка пересечения $\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

Имеем:

$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

т.е. точка пересечения $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

149.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

а) $x = \frac{\pi}{3}$ — наименьший положительный корень;

б) $x = -\frac{2\pi}{3}$; 0 ; $\frac{\pi}{3}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$;

в) $x = -\frac{2\pi}{3}$ — наибольший отрицательный корень;

г) $x = -\frac{2\pi}{3}$; 0 ; $\frac{\pi}{3}$.

2) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; $x = -\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $-\frac{3\pi}{8}$; в) $\frac{5\pi}{8}$; г) $-\frac{3\pi}{8}$.

150.

На $(0; \pi)$ функция $y = \text{ctg } x$ убывает. Следовательно, на $(0; \pi)$ существует единственное решение уравнения $\text{ctg } t = a : \arctg a$ и т.к. наименьший положительный период функции $\text{ctg } t$ равен π , то общее решение: $t = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

10. Решение простейших тригонометрических неравенств

151.

$$\text{а) } t_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

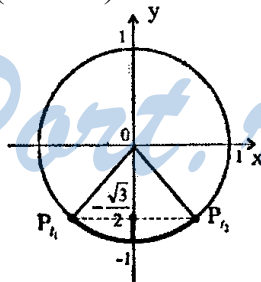
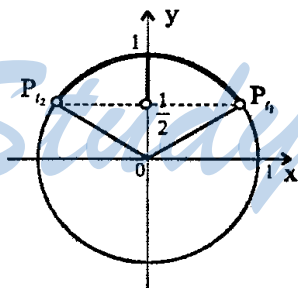
$$t_2 = \frac{5\pi}{6}; \sin t > \frac{1}{2},$$

$$t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right), t \in [0; \pi];$$

$$\text{б) } t_1 = -\frac{2\pi}{3}; t_2 = -\frac{\pi}{3};$$

$$\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$t \in \left(-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right), t \in [-\pi; 0];$$



$$\text{в) } t_1 = \frac{\pi}{4}; t_2 = \frac{3\pi}{4};$$

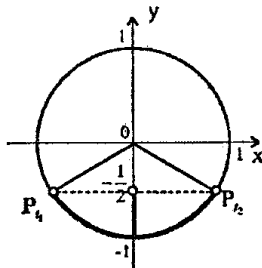
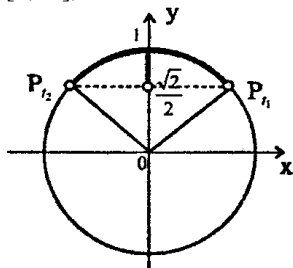
$$\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}; t \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$t \in [0; \pi];$$

$$\text{г) } t_1 = -\pi + \arcsin \frac{1}{2} = -\frac{5\pi}{6}; t_2 = -\frac{\pi}{6};$$

$$\sin t < -\frac{1}{2}; t \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right),$$

$$t \in [-\pi; 0].$$

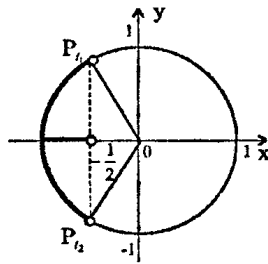
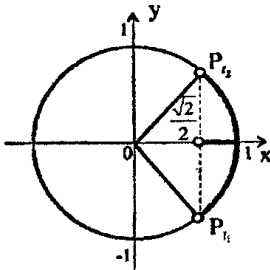


152.

a) $t_1 = -\frac{\pi}{4}; t_2 = \frac{\pi}{4}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$ б) $t_1 = \frac{2\pi}{3}; t_2 = \frac{4\pi}{3}; t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right];$

$\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}; t \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right),$

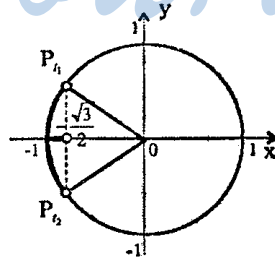
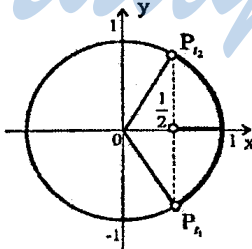
$\cos t < -\frac{1}{2}; t \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right),$



в) $t_1 = -\frac{\pi}{3}; t_2 = \frac{\pi}{3}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$ г) $t_1 = \frac{5\pi}{6}; t_2 = \frac{7\pi}{6}; t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$

$\cos t > \frac{1}{2}; t \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right),$

$\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}; t \in \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right),$



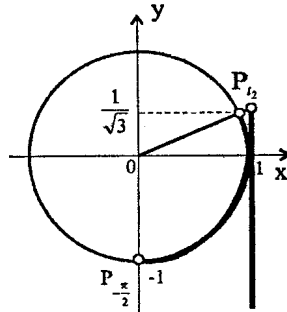
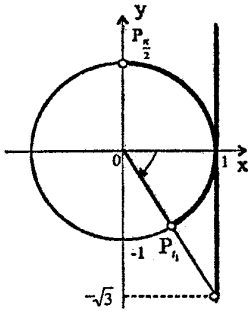
153.

a) $t_1 = -\frac{\pi}{3}; \text{Ha} \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$

б) $t_1 = \frac{\pi}{6}; \text{tg} t < \frac{1}{\sqrt{3}};$

$\text{tg} t > -\sqrt{3}; t \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right) \text{ Ha} \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$

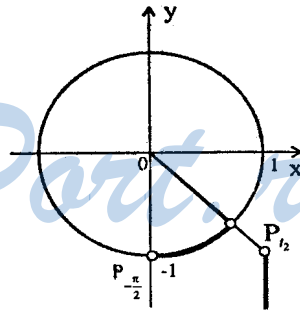
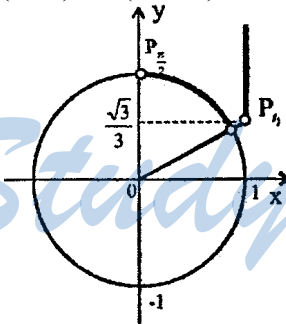


b) $t = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ Ha $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

r) $t = -\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} t < -1$;

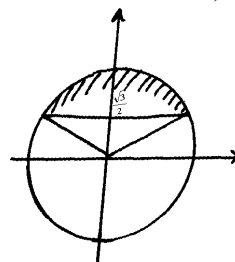
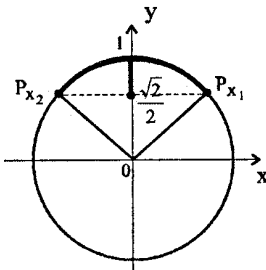
$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ Ha $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



154.

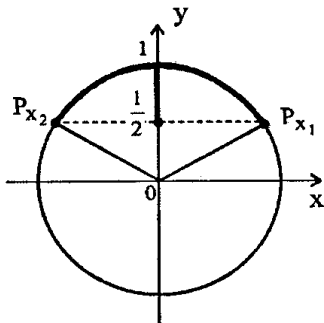
a) $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$; $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{3}$; $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$; $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;



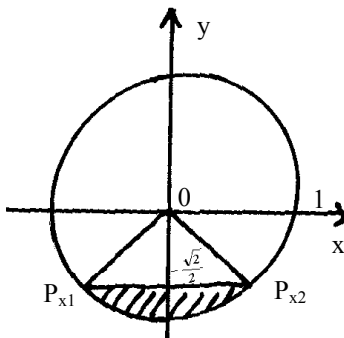
$$b) x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}; \sin x \geq \frac{1}{2};$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$



$$r) x_1 = -\frac{3\pi}{4}; x_2 = -\frac{\pi}{4}; \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$



155.

$$a) x_1 = -\frac{2\pi}{3}; x_2 = \frac{2\pi}{3}; \cos x \geq -\frac{1}{2}; x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$b) x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{7\pi}{4}; \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}; x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$b) x_1 = -\frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{\pi}{6}; \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$r) x_1 = \frac{3\pi}{4}; x_2 = \frac{5\pi}{4}; \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}; x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

156.

$$a) x = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = \arctg \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}; \operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}; x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}; \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}; x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$r) x = \arctg (-1) = -\frac{\pi}{4}; \operatorname{tg} x < -1 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

157.

a) $2\cos x - 1 \geq 0; \cos x \geq \frac{1}{2};$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

б) $2\sin x + \sqrt{2} \geq 0; \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

в) $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0; \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

г) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0; \operatorname{tg} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3};$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n; \text{то } x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

158.

a) $\sin 2x < \frac{1}{2}; 2x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

б) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{x}{3} \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi k; \frac{\pi}{2} + 6\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

в) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{x}{2} \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$

$$x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 4\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 4\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$r) \operatorname{tg} 5x > 1; 5x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \right), k \in \mathbb{Z}.$$

159.

$$a) 2\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1; \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{1}{2};$$

$$x \in \left[\pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$b) \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) < 1; \operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) < \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$b) \sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \geq 1; \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x \in [4\pi n; \pi + 4\pi n], n \in \mathbb{Z};$$

$$r) 2\cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) > \sqrt{3}; \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) > \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x \in \left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

160.

$$a) \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}; \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{1}{2};$$

$$x \in \left[-\pi + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$b) \sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) < -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x \in \left(-\pi + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$b) 4\sin 2x \cos 2x \geq \sqrt{2}; \sin 4x \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2} \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$r) \cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \left(x + \frac{\pi}{8} \right) < -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x \in \left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi k; \frac{25\pi}{24} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

161.

$$a) \operatorname{ctg} x \geq \sqrt{2}; x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$б) \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) > 1; \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) < -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x \in \left(\frac{11\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$в) \operatorname{ctg} 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}; x \in \left[\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$г) 3 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2} \right) > -\sqrt{3}; \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) < \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

162.

$$a) 3 \sin \frac{x}{4} \geq 2; \sin \frac{x}{4} \geq \frac{2}{3};$$

$$x \in \left(4 \arcsin \frac{2}{3} + 8\pi n; 4\pi - 4 \arcsin \frac{2}{3} + 8\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$б) 4 \cos \frac{x}{3} < -3; \cos \frac{x}{3} < -\frac{3}{4};$$

$$x \in \left(3 \arccos \left(-\frac{3}{4} \right) + 6\pi n; 6\pi - 3 \arccos \left(-\frac{3}{4} \right) + 6\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$в) 5 \operatorname{tg} 2x \leq 3; \operatorname{tg} 2x \leq \frac{3}{5};$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$r) \frac{1}{2} \sin 4x < -\frac{1}{5}; \sin 4x < -\frac{2}{5};$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin \frac{2}{5}}{4} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\arcsin \frac{7}{5}}{4} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

163.

$$a) \sin x \geq -\frac{1}{2}; \quad \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right]; \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right];$$

$$b) \cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right); \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0 \right];$$

$$b) \operatorname{tg} x \geq -1; \quad \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right); \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right];$$

$$r) \sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \begin{cases} x \in \left(-\frac{5\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right); \\ x \in [0; \pi]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{8} \right).$$

11. Примеры решения тригонометрических уравнений систем уравнений.

164.

$$a) 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0; t = \sin x; 2t^2 + t - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -1; \\ t = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$b) 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0; t = \sin x; 3t^2 - 5t - 2 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{3}; \\ t = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ \emptyset; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{b) } 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0; t = \sin x; 2t^2 - t - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{2}; \\ t = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\text{r) } 4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0; t = \sin x; 4t^2 + 11t - 3 = 0;$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{4}; \\ t = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \emptyset; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

165.

$$\text{a) } 6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; t = \cos x; 6t^2 + t - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{2}; \\ t = \frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\text{б) } 2\sin^2 x + 3\cos x = 0; 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0; t = \cos x; 2t^2 - 3t - 2 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{2}; \\ t = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \emptyset; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0; t = \cos x; 4t^2 - 8t + 3 = 0;$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}; \\ t = \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \emptyset; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{r) } 5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0; 5\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0; t = \cos x;$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{5}; \\ t = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

166.

а) $2\cos^2x + \sin x + 1 = 0$; $2\sin^2x - \sin x - 3 = 0$; $t = \sin x$;
 $2t^2 - t - 3 = 0$; $t = -1$; $t = 1,5$

1) $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin x = 1,5$ – не имеет решений.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n / n \in Z\right\}$.

б) $\cos^2x + 3\sin x = 3$; $\sin^2x - 3\sin x + 2 = 0$; $t = \sin x$;
 $t^2 - 3t + 2 = 0$; $t = 1$, $t = 2$;

1) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

2) $\sin x = 2$ – не имеет решений.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k / k \in Z\right\}$.

в) $4\cos x = 4 - \sin^2x$; $\cos^2x - 4\cos x + 3 = 0$; $t = \cos x$;
 $t^2 - 4t + 3 = 0$; $t = 1$, $t = 3$;

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$;

2) $\cos x = 3$ – не имеет решений.

Ответ: $\{2\pi n / n \in Z\}$.

г) $8\sin^2x + \cos x + 1 = 0$; $8\cos^2x - \cos x - 9 = 0$; $t = \cos x$;

$8t^2 - t - 9 = 0$; $t = -1$, $t = \frac{9}{8}$;

1) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos x = \frac{9}{8}$ – не имеет решений;

Ответ: $\{\pi + 2\pi n / n \in Z\}$.

167.

а) $3\operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}x - 1 = 0$; $\operatorname{tg}x = t$; $3t^2 - 2t - 1 = 0$; $t = -1$, $t = \frac{1}{3}$;

1) $\operatorname{tg}x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\operatorname{tg}x = \frac{1}{3}$; $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n / n \in Z\right\}$.

б) $\operatorname{tg}x - 2\operatorname{ctg}x + 1 = 0$; $\operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}x - 2 = 0$; $\operatorname{tg}x \neq 0$; $\operatorname{tg}x = t$;

$$t^2 + t - 2 = 0; t = -2, \quad t = 1;$$

$$1) \operatorname{tg} x = -2, \quad x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{ \operatorname{arctg}(-2) + \pi n / n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z} \}.$$

168.

$$a) 2\cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0; 2\cos x \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$1) \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k / k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$b) 4\cos^2 x - 3 = 0; \cos^2 x = \frac{3}{4};$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ либо } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$1) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Общая запись: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$в) \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0; \sqrt{3} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0; \operatorname{tg} x = 0 \text{ либо } \operatorname{tg} x = \sqrt{3};$$

$$1) \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \{ \pi k / k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + \pi k / k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$r) 4\sin^2x - 1 = 0; \sin^2x = \frac{1}{4}; \sin x = -\frac{1}{2} \text{ либо } \sin x = \frac{1}{2};$$

$$1) \sin x = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Общая формула: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi n / n \in Z \right\}.$$

169.

$$a) 3\sin^2x + \sin x \cos x = 2\cos^2x; 3\operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}x - 2 = 0; \operatorname{tg}x = t;$$

$$3t^2 + t - 2 = 0; t = -1; t = \frac{2}{3};$$

$$1) \operatorname{tg}x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) t = \frac{2}{3}, x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z; \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n / n \in Z \right\}.$$

$$b) 2\cos^2x - 3\sin x \cos x + \sin^2x = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2x - 3\operatorname{tg}x + 2 = 0; \operatorname{tg}x = t;$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0; t = 1, t = 2;$$

$$1) \operatorname{tg}x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg}x = 2, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z; \operatorname{arctg} 2 + \pi n / n \in Z \right\}.$$

$$в) 9\sin x \cos x - 7\cos^2x = 2\sin^2x;$$

$$2\operatorname{tg}^2x - 9\operatorname{tg}x + 7 = 0; \operatorname{tg}x = t;$$

$$2t^2 - 9t + 7 = 0; t = 3,5; t = 1;$$

$$1) \operatorname{tg}x = 3,5, x = \operatorname{arctg} \frac{7}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg}x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \operatorname{arctg} \frac{7}{2} + \pi n / n \in Z; \frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{r) } 2\sin^2x - \sin x \cos x &= \cos^2x; 2\operatorname{tg}^2x - \operatorname{tg}x - 1 = 0; \operatorname{tg}x = t; \\ 2t^2 - t - 1 &= 0; t = 1, t = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$1) \operatorname{tg}x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg}x = -\frac{1}{2}, x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{ОТВЕТ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in Z; \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n / n \in Z \right\}.$$

170.

$$\begin{aligned} \text{a) } 4\sin^2x - \sin 2x &= 3; \\ \sin^2x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2x &= 0; \\ \operatorname{tg}^2x - 2\operatorname{tg}x - 3 &= 0; \end{aligned}$$

$$1) \operatorname{tg}x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg}x = 3, x = \operatorname{arctg}3 + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{ОТВЕТ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z; \operatorname{arctg}3 + \pi k / k \in Z \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos 2x &= 2\cos x - 1; 1 + \cos 2x - 2\cos x = 0; \\ \cos x(\cos x - 1) &= 0; \cos x = 0 \text{ или } \cos x = 1; \end{aligned}$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$2) \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k / k \in Z; 2\pi n / n \in Z \right\}.$$

$$\text{в) } \sin 2x - \cos x = 0; 2\sin x \cos x - \cos x = 0;$$

$$2\cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2};$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n / n \in Z; 2\pi n / n \in Z \right\}.$$

$$\text{r) } \sin 2x - 4\cos^2 x = 1; 2\sin x \cos x + 4\cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0;$$

$$\text{tg}^2 x - 2\text{tg} x - 3 = 0;$$

Аналогично пункту а).

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k / k \in Z \right\}.$$

171.

$$\text{а) } 2\sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x; 2\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0;$$

$$2\text{tg} x (\text{tg} x - \sqrt{3}) = 0; \text{tg} x = 0 \text{ или } \text{tg} x = \sqrt{3};$$

$$1) \text{tg} x = 0, x = \pi n, n \in Z;$$

$$2) \text{tg} x = \sqrt{3}, x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi n / n \in Z; \frac{\pi}{3} + \pi n / n \in Z \right\}.$$

$$\text{б) } \sqrt{3} \text{tg} x - \sqrt{3} \text{ctg} x = 2; \sqrt{3} \text{tg}^2 x - 2\text{tg} x - \sqrt{3} = 0, \text{tg} x = t;$$

$$\sqrt{3} t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0, t = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t = \sqrt{3};$$

$$1) \text{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

$$2) \text{tg} x = \sqrt{3}, x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k / k \in Z; \frac{\pi}{3} + \pi k / k \in Z \right\}.$$

$$\text{в) } \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0; \text{tg} x = -\sqrt{3}; x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{3} + \pi k / k \in Z \right\}.$$

$$\text{г) } \text{tg} x = 3\text{ctg} x; \text{tg}^2 x = 3; \text{tg} x = -\sqrt{3} \text{ либо } \text{tg} x = \sqrt{3};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi n / n \in Z \right\}.$$

172.

$$\text{а) } \sin 2x + 2\cos 2x = 1; 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x;$$

$$3\text{tg}^2 x - 2\text{tg} x - 1 = 0;$$

$$1) \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}, x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n / n \in Z; \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in Z \right\}.$$

$$\text{б) } \sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}; \left(\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}; x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi k;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi k / k \in Z \right\}.$$

$$\text{в) } 3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x; \sin^2 x - 6\sin x \cos x + \cos^2 x = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = 3 - 2\sqrt{2} \text{ или } \operatorname{tg} x = 3 + 2\sqrt{2};$$

$$1) \operatorname{tg} x = 3 - 2\sqrt{2}, x = \operatorname{arctg}(3 - 2\sqrt{2}) + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg} x = 3 + 2\sqrt{2}, x = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \operatorname{arctg}(3 - 2\sqrt{2}) + \pi n / n \in Z; \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) + \pi k / k \in Z \right\}.$$

$$\text{г) } 1 - \cos x = 2\sin \frac{x}{2}; 2\sin \frac{x}{2} (2\sin \frac{x}{2} - 1) = 0;$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ или } \sin \frac{x}{2} = 1;$$

$$1) \sin \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} = \pi n, x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$2) \sin \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = \pi + 4\pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2\pi n / n \in Z; \pi + 4\pi k / k \in Z \right\}.$$

173.

$$\text{а) } \sin 4x + \sin^2 2x = 0; 2\sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 0;$$

$$\operatorname{tg} 2x (2 + \operatorname{tg} 2x) = 0; \operatorname{tg} 2x = 0 \text{ либо } \operatorname{tg} 2x = -2;$$

$$1) \operatorname{tg} 2x = 0; x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg} 2x = -2, 2x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k, x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} n / n \in Z; -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k / k \in Z \right\}.$$

$$\text{б) } \frac{3}{5\operatorname{tg}x + 8} = 1; 5\operatorname{tg}x + 8 = 3, \operatorname{tg}x \neq -\frac{8}{5}; \operatorname{tg}x = -1, \operatorname{tg}x \neq -\frac{8}{5};$$

$$\operatorname{tg}x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{в) } \frac{5}{3\sin x + 4} = 2; 6\sin x + 8 = 5; \sin x = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{г) } 1 - \sin 2x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2; 1 - \sin 2x = 1 - \sin x;$$

$$2\sin x \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = 0; \sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2};$$

$$1) \sin x = 0, x = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k / k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

174.

$$\text{а) } \cos 5x - \cos 3x = 0; -\sin x \sin 4x = 0; \sin x = 0 \text{ либо } \sin 4x = 0;$$

$$1) \sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 4x = 0, 4x = \pi k, x = \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} k / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{б) } \sin 7x - \sin x = \cos 4x; 2\cos 4x \left(\sin 3x - \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\cos 4x = 0 \text{ либо } \sin 3x = \frac{1}{2};$$

$$1) \cos 4x = 0, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 3x = \frac{1}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k / k \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$в) \sin 5x - \sin x = 0; 2\sin 2x \cos 3x = 0; \sin 2x = 0 \text{ либо } \cos 3x = 0;$$

$$1) \sin 2x = 0, 2x = \pi n, x = \frac{\pi}{2} k, k \in Z;$$

$$2) \cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} k / k \in Z; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k / k \in Z \right\}.$$

$$г) \cos 3x + \cos x = 4\cos 2x; 2\cos 2x(\cos x - 2) = 0; \cos 2x = 0;$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in Z; \text{ Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k / k \in Z \right\}.$$

175.

$$а) \begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi - y, \\ \cos x - \cos(\pi - x) = 1; \end{cases}$$

$$\cos x - \cos(\pi - x) = 1; 2\cos x = 1; \cos x = \frac{1}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\begin{cases} y = \pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi n = \frac{4\pi}{3} - 2\pi n, & n \in Z; \\ y = \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi n = \frac{2\pi}{3} - 2\pi n, & n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi n = \frac{4\pi}{3} - 2\pi n, & n \in Z; \\ y = \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi n = \frac{2\pi}{3} - 2\pi n, & n \in Z; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} - 2\pi n \right); \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} - 2\pi n \right) / n \in Z \right\}.$$

$$б) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y, \\ \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + y \right) + \sin^2 y = 2; \end{cases}$$

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + y \right) + \sin^2 y = 2; 2\sin^2 y = 2; \sin^2 y = 1;$$

$$\sin y = -1 \text{ либо } \sin y = 1;$$

$$y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \text{ либо } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$\text{если } y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \text{ то } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n + \frac{\pi}{2} = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\text{если } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + \frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n); (\pi + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) / n, k \in Z \right\}.$$

$$b) \begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pi - x, \\ \sin x + \sin(\pi - x) = 1; \end{cases}$$

$$\sin x + \sin(\pi - x) = 1; \quad 2\sin x = 1; \quad \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$y = \pi - (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \pi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \pi(n-1) / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$r) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - x, \\ \sin^2 x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 1; \end{cases}$$

$$\sin^2 x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 1; \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 1; \quad -\cos 2x = 1;$$

$$2x = \pi + 2\pi n; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi n = -\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n; -\pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

176.

$$a) \begin{cases} \sin x - \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \cos y \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases}$$

$$2\sin^2 x = 2; \quad \sin^2 x = 1; \quad \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{либо } \sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{если } \sin x = 1, \text{ то } \cos y = 1, \quad y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{если } \sin x = -1, \text{ то } \cos y = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k \right); \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi n \right) / n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$b) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{6}; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{6}; \operatorname{tg} x \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6};$$

$$6\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0; \operatorname{tg} x = t; 6t^2 - 5t + 1 = 0; t = \frac{1}{3} \text{ или } t = \frac{1}{2};$$

$$1) t = \frac{1}{3}, \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z \text{ и } y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n, n \in Z;$$

$$2) t = \frac{1}{2}, \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \text{ и } y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi k, k \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n \right); \right. \\ \left. \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi k \right) / n, k \in Z \right\}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1; \end{cases} \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ (\sin x + \cos y)(\sin x - \cos y) = 1; \end{cases} \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin x - \cos y = 1; \end{cases}$$

$$2\sin x = 2, \sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$2\cos y = 0, \cos y = 0, y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n; \right) / n, k \in Z \right\}.$$

$$\text{г) } \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = y + \frac{\pi}{6}, \\ 2\sin x \cos y = 1; \end{cases}$$

$$2\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right)\cos y = 1; 2(\sin y \cos \frac{\pi}{6} + \cos y \sin \frac{\pi}{6})\cos y = 1;$$

$$\sqrt{3} \sin y \cos y + \cos^2 y = \cos^2 y + \sin^2 y; \operatorname{ctg} y = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ или } \sin y = 0;$$

$$y = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z \text{ либо } y = \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \text{ или } x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k; \right); \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi n; \right) / n, k \in Z \right\}.$$

ГЛАВА II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ

12. Приращение функции

177.

а) Если $a = 15$ м – длина меньшей из сторон прямоугольника, $b = 20$ м – длина большей из сторон прямоугольника, тогда имеем:

$$1) \Delta P = 2((a + \Delta a) + b) - 2(a + b) = 2\Delta a = 2 \cdot 0,11 = 0,22 \text{ м},$$

$$\Delta S = (a + \Delta a)b - ab = \Delta a \cdot b = 0,11 \cdot 20 = 2,2 \text{ м}^2;$$

$$2) \Delta P = 2(a + (b + \Delta b)) - 2(a + b) = 2\Delta b = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м},$$

$$\Delta S = a(b + \Delta b) - ab = a\Delta b = 15 \cdot 0,2 = 3 \text{ м}^2;$$

$$\text{б) } \Delta S = \pi(2 + 0,2)^2 - \pi \cdot 2^2 = 0,84\pi \text{ см}^2 \approx 2,6 \text{ см}^2,$$

$$\Delta S = \pi(2 + \Delta R)^2 - \pi \cdot 2^2 = (4\Delta R + (\Delta R)^2)\pi = 4\pi\Delta R + \pi(\Delta R)^2;$$

$$\Delta S = \pi(2 + 0,1)^2 - \pi \cdot 2^2 = 0,41\pi \text{ см}^2 \approx 1,29 \text{ см}^2,$$

$$\Delta S = \pi(2 + h)^2 - \pi \cdot 2^2 = 2\pi h + \pi h^2;$$

178.

$$\text{а) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{19};$$

$$\text{б) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -2,32;$$

$$\text{в) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0,03;$$

$$\text{г) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0,205.$$

179.

$$\text{а) } \Delta x = x - x_0 = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12};$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right) - \cos^2\frac{22\pi}{3} = \frac{1}{4};$$

$$\text{б) } \Delta x = x - x_0 = 2,6 - 2,5 = 0,1;$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = -\frac{2}{5};$$

$$\text{в) } \Delta x = x - x_0 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12};$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1;$$

$$\text{г) } \Delta x = x - x_0 = \frac{1}{8}; \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \frac{1}{10}.$$

180.

$$\text{а) } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - 3(x_0 + \Delta x)^2 - 1 + 3x_0^2 = -6x_0 \cdot \Delta x - 3(\Delta x)^2;$$

$$\text{б) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x) + b - ax_0 - b = a\Delta x;$$

$$в) f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2;$$

$$г) f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

181.

Средняя скорость равна:

$$а) V_{\text{cp}} = \frac{S(3) - S(0)}{\Delta t} = 50 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad б) V_{\text{cp}} = \frac{S(5) - S(3)}{\Delta t} = 65 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$в) V_{\text{cp}} = \frac{S(5,25) - S(3,25)}{\Delta t} = 65 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad г) V_{\text{cp}} = \frac{S(8) - S(0)}{\Delta t} = 57,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

182.

а) $\Delta x = x(2,5) - x(2) = 3,75$ – перемещение в положительном направлении оси OX ;

$$\text{Средняя скорость } V_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3,75}{2,5 - 2} = 7,5;$$

б) $\Delta x = x(8) - x(7) = -3$ – перемещение в отрицательном направлении оси OX ;

$$\text{Средняя скорость } V_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -3;$$

в) $\Delta x = x(5) - x(4) = 3 + 12 \cdot 5 - 5^2 - 3 - 12 \cdot 4 + 4^2 = 3$ – перемещение в положительном направлении оси OX ;

$$\text{Средняя скорость } V_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 3;$$

г) $\Delta x = x(8) - x(6) = 3 + 12 \cdot 8 - 8^2 - 3 - 12 \cdot 6 + 6^2 = -4$ – перемещение в отрицательном направлении оси OX ;

$$\text{Средняя скорость } V_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -2.$$

183.

$$а) \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

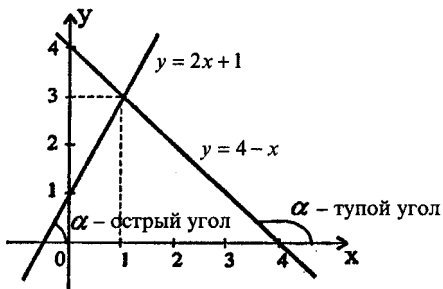
$$y = y_0 + \operatorname{tg} \alpha (x - x_0);$$

Тогда т. (x_0, y_0) и т. (x, y) , задают единственную прямую.

$$y = 3 + \operatorname{tg} \alpha (x - 1);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1, \quad x = 0: \quad y = 3 + 1 = 4;$$

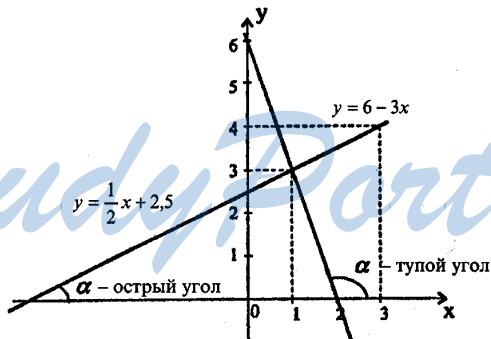
$$\operatorname{tg} \alpha = 2, \quad x = 0: \quad y = 3 - 2 = 1;$$



б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $x = 3$:

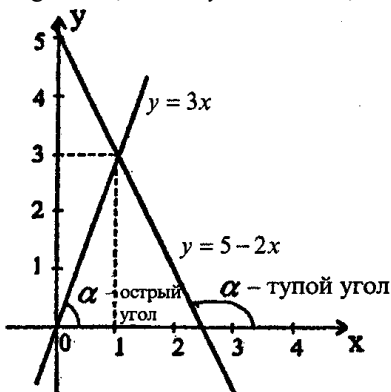
$$y = 3 + \frac{1}{2}(3 - 1) = 3 + 1 = 4;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -3, x = 0: y = 3 + 3 = 6;$$



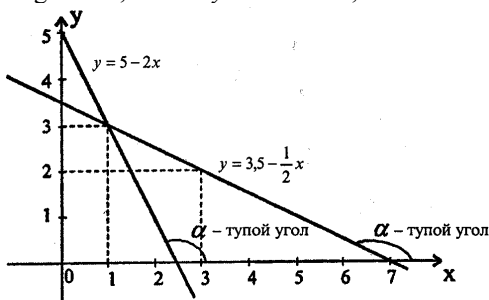
в) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $x = 0$: $y = 3 - 3 = 0$;

$$\operatorname{tg}\alpha = -2, x = 0: y = 3 + 2 = 5;$$



$$\text{r) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}, \quad x = 3: \quad y = 3 - 1 = 2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -2, \quad x = 0: \quad y = 3 + 2 = 5;$$



184.

$$\text{a) } k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2} > 0 \text{ — острый угол;}$$

$$\text{б) } k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{2} < 0 \text{ — тупой угол;}$$

$$\text{в) } k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2} > 0 \text{ — острый угол;}$$

$$\text{г) } k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ — тупой угол;}$$

185.

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) = 12x \cdot \Delta x + 6(\Delta x)^2 = 6\Delta x(2x + \Delta x).$$

186.

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ &= -x_0^3 - 3x_0^2 \cdot \Delta x - 3x_0(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 3x_0 + 3\Delta x + x_0^3 - 3x_0 = \\ &= -3x_0^2 \cdot \Delta x - 3x_0(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 3\Delta x; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3(1 - x_0^2) - 3x_0 \Delta x - (\Delta x)^2;$$

$$\text{б) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{(x_0 + \Delta x)^2 - 1} - \frac{1}{x_0^2 - 1} =$$

$$= \frac{-2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 - 1)(x_0^2 - 1)};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 - 1)(x_0^2 - 1)};$$

$$\text{в) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\Delta x = \\ = \Delta x(3x_0^2 - 2) + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 - 2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$\text{г) } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ = \frac{x_0^2 + 1 - (x_0 + \Delta x)^2 - 1}{((x_0 + \Delta x)^2 + 1)(x_0^2 + 1)} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 + 1)(x_0^2 + 1)};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2x_0 + \Delta x}{((x_0 + \Delta x)^2 + 1)(x_0^2 + 1)}.$$

187.

$$\text{а) } x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = V_0(t_0 + \Delta t) - \frac{g}{2}(t_0 + \Delta t)^2 - V_0t_0 + \frac{g}{2}t_0^2 = \\ = V_0\Delta t - gt_0\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2;$$

$$\text{Имеем: } V_{\text{cp}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = V_0 - gt_0 - \frac{g}{2}\Delta t;$$

$$\text{б) } x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = -a(t_0 + \Delta t) + b - at_0 - b = -a\Delta t;$$

$$\text{Имеем: } V_{\text{cp}} = -\frac{a\Delta t}{\Delta t} = -a;$$

$$\text{в) } x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \frac{g}{2}(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t_0^2 = gt_0\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2;$$

$$\text{Имеем: } V_{\text{cp}} = \frac{gt_0\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t;$$

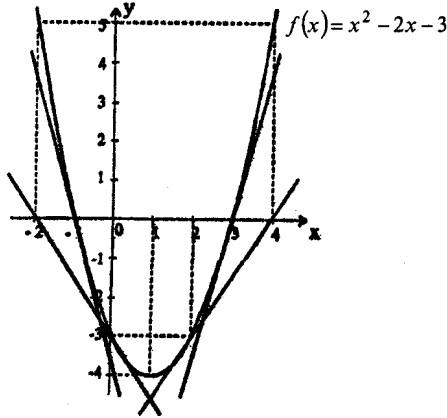
$$\text{г) } x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = a(t_0 + \Delta t) - b - at_0 + b = a\Delta t;$$

$$\text{Имеем: } V_{\text{cp}} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a.$$

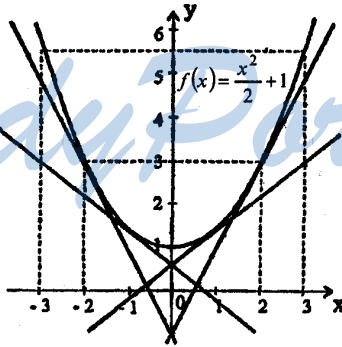
13. Понятие о производной

188.

а) Угловой коэффициент касательной к $f(x) = x^2 - 2x - 3$ в точке $x_0 = 0$; $k = -1$ — отрицательный; в т. $x_0 = 3$; $k = 2$ — положительный.



б) Угловой коэффициент касательной к $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ в точке $x_0 = -2$; $k = -1$ – отрицательный; в т. $x_0 = 1$; $k = 2$ – положительный.



189.

Пусть k – коэффициент; α – угол с OX :

а) $k(x_1) < 0$, $\alpha(x_1)$ – тупой;

$k(x_4) > 0$, $\alpha(x_4)$ – острый;

в т. x_2 и x_3 касательной не существует;

б) $k(x_1), k(x_2), k(x_3), k(x_4) > 0$;

$\alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_3), \alpha(x_4)$ – острые;

в) $k(x_1) < 0$, $\alpha(x_1)$ – тупой;

$k(x_3), k(x_4) > 0$; $\alpha(x_3), \alpha(x_4)$ – острые;

в т. x_2 касательной не существует;

г) $k(x_1), k(x_2), k(x_3), k(x_4) < 0$;

$\alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_3), \alpha(x_4)$ – тупые углы.

190.

Функция возрастает на $[a;b]$, $[c;d]$; функция убывает на $[b;c]$, $[d;e]$;
 $k(b) = 0$, $k(x_2) < 0$, $k(c) = 0$, $k(x_3) > 0$, $k(d) = 0$, $k(x_1) > 0$, $k(x_4) < 0$.

191.

$$\text{а) } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 = \\ = 2\Delta x(2x_0 + \Delta x);$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x);$$

$$\text{если } x_0 = 1, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + \Delta x);$$

$$\text{при } \Delta x = 0,5, \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + 0,5) = 5;$$

$$\text{при } \Delta x = 0,1, \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + 0,1) = 4,2;$$

$$\text{при } \Delta x = 0,01, \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + 0,01) = 4,02;$$

$$\text{б) } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \\ = \Delta x(2x_0 + \Delta x);$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$$

$$\text{если } x_0 = 1, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2 + \Delta x; \text{ если } \Delta x = 0,5, \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{5}{2};$$

$$\text{если } \Delta x = 0,1, \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2,1; \text{ если } \Delta x = 0,01, \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2,01;$$

192.

$$\text{а) } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 8x_0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0; \text{ если } x_0 = 2, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 16 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{если } x_0 = -1, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -8 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{б) } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0; \text{ если } x_0 = 1, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{если } x_0 = -21, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 1323 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{в) } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3x_0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0; \text{ если } x_0 = 4, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 12 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{если } x_0 = 1, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{г) } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -2x_0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{если } x_0 = 1, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{если } x_0 = 2, \text{ то } \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -4 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

193.

$$\text{а) } f(x) = (x^3)' = 3x^2; f'(x_0) = 3x_0^2;$$

$$f'(2) = 3 \cdot 4 = 12, f'(-1,5) = 3 \cdot 2,25 = 6,75;$$

$$\text{б) } f(x) = (4 - 2x)' = -2; f'(x_0) = -2; f'(0,5) = f'(-3) = -2;$$

$$\text{в) } f(x) = (3x - 2)' = 3; f'(x_0) = 3; f'(5) = f'(-2) = 3;$$

$$\text{г) } f(x) = (x^2)' = 2x; f'(x_0) = 2x_0; f'(2,5) = 2 \cdot 2,5 = 5, f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2;$$

194.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 - \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) - x_0^2 + 3x_0}{\Delta x} = \\ &= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x - 3; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 2x_0 - 3 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т.е. } f'(x_0) = 2x_0 - 3;$$

$$f'(-1) = -2 - 3 = -5; f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^3}{\Delta x} = \frac{6x_0^2\Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \\ &= 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + (\Delta x)^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 6x_0^2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т.е. } f'(x_0) = 6x_0^2; f'(0) = 0; f'(1) = 6;$$

$$\text{в) } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} \right) = -\frac{\Delta x}{\Delta x(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -\frac{1}{x_0^2} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т.е. } f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}; f'(-2) = -\frac{1}{4}; f'(1) = -1;$$

$$\text{г) } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4 - (x_0 + \Delta x)^2 - 4 + x_0^2}{\Delta x} = \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2x_0 - \Delta x;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -2x_0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т.е. } f'(x_0) = -2x_0;$$

$$f'(3) = -2 \cdot 3 = -6; f'(0) = 0;$$

195.

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$$

Используя то, что $k=2x_0$ и т. $(x_0; x_0^2)$ принадлежит прямой, получим:

$$x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + b = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2;$$

$y = 2x_0 \cdot x_0 - x_0^2$ – уравнение касательной к графику функции $y = x^2 b$

в точке x_0 ;

а) $x_0 = -1; y = -2x - 1;$

б) $x_0 = 3; y = 2 \cdot 3x - 3^2 = 6x - 9;$

в) $x_0 = 0; y = 2 \cdot 0x - 0^2 = 0;$

г) $x_0 = 2; y = 2 \cdot 2x - 2^2 = 4x - 4;$

196.

$$\text{а) } V_{\text{cp}}(\Delta t) = \frac{-(t_0 + \Delta t)^2 + 8(t_0 + \Delta t) + t_0^2 - 8t_0}{\Delta t} = -2t_0 - \Delta t + 8;$$

Имеем:

$$V_{\text{cp}} \rightarrow -2t_0 + 8 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0;$$

$$V_{\text{мгн}}(t_0) = -2t_0 + 8; V_{\text{мгн}}(6) = -4;$$

$$\text{б) } V_{\text{cp}}(\Delta t) = \frac{3(t_0 + \Delta t)^3 + 2 - 3t_0^3 - 2}{\Delta t} = -9t_0^2 + 9t_0 \Delta t + 3(\Delta t)^2;$$

$$V_{\text{cp}} \rightarrow -9t_0^2 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0;$$

$$V_{\text{мгн}}(t_0) = -9t_0^2; V_{\text{мгн}}(2) = 36;$$

$$\text{в) } V_{\text{cp}}(\Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2}{4\Delta t} = \frac{2t_0 + \Delta t}{4};$$

$$V_{\text{cp}} \rightarrow \frac{t_0}{2} \text{ при } \Delta t \rightarrow 0;$$

$$V_{\text{мгн}}(t_0) = \frac{t_0}{2}; V_{\text{мгн}}(4) = 2;$$

$$\text{г) } V_{\text{cp}}(\Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{5(t_0 + \Delta t) - 3 - 5t_0 + 3}{\Delta t} = 5;$$

$$V_{\text{cp}} = V_{\text{мгн}} = 5 \text{ при любом значении } t_0.$$

14. Понятие о непрерывности функции в предельном переходе

197.

а) непрерывна в т. x_1, x_2, x_3 ;

б) непрерывна в т. x_1 и x_3 ; в т. x_2 не является непрерывной;

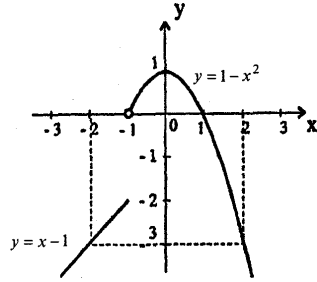
в) непрерывна в т. x_1, x_2 ; в т. x_3 не является непрерывной;

г) непрерывна в т. x_1, x_2, x_3 ;

198.

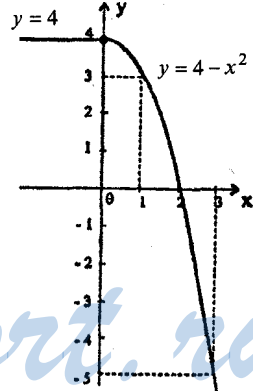
$$а) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -1, \\ 1-x^2, & x > -1; \end{cases}$$

Функция не является непрерывной в т. $x = -1$.



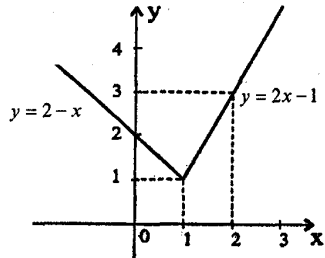
$$б) f(x) = \begin{cases} 4, & x < 0, \\ 4-x^2, & x \geq 0; \end{cases}$$

Функция является непрерывной во всех точках области определения.



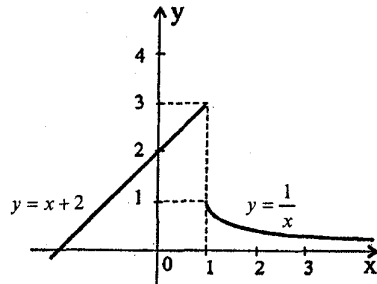
$$в) f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 1, \\ 2x-1, & x > 0; \end{cases}$$

Функция является непрерывной во всех точках области определения.



$$г) f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1, \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1; \end{cases}$$

Функция не является непрерывной в точке $x = 1$.



199.

а) $f(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$;

Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $(-\infty; +\infty)$;

б) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$;

Функция $f_1(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $(0; +\infty)$, а значит и на $[2; +\infty)$;
функция $f_2(x) = x - 1$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, а значит и на $[2; +\infty)$.

$f_2(x) = 0$ при $x = 1 \notin [2; +\infty)$, следовательно,

$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ непрерывна на $[2; +\infty)$;

в) $f(x) = x^2 + 2x - 1$,

функция $f_1(x) = x^2 = x \cdot x$ является непрерывной на R , а следовательно, и на $[-10; 20]$; функция $f_2(x) = 2x - 1$ непрерывна на R , следовательно, и на $[-10; 20]$, а следовательно, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ непрерывна на $[-10; 20]$;

г) $f(x) = 5x - \sqrt{x}$;

функция $f_1(x) = 5x$ непрерывна на R , а значит и на R^+ ;

функция $f_2(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на R^+ , а значит, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ непрерывна на R^+ .

200.

а) $f(x) = x^2 - 3x + 4 = f_1(x) + f_2(x)$,

где $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 4 - 3x$ — функции непрерывные;

если $x \rightarrow 0$, то $f_1(x) \rightarrow 0$ и $f_2(x) \rightarrow 4 - 3x \rightarrow 4$, тогда $f(x) \rightarrow 4$;

если $x \rightarrow 2$, то $f_1(x) \rightarrow 4$ и $f_2(x) \rightarrow -2$, тогда $f(x) \rightarrow 2$;

б) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = f_1(x) \cdot f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ — функции

непрерывные при $x \in R$;

если $x \rightarrow 1$, то $f_1(x) \rightarrow 1$ и $f_2(x) \rightarrow \frac{1}{2}$, то $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$;

если $x \rightarrow 4$, то $f_1(x) \rightarrow 4$ и $f_2(x) \rightarrow \frac{1}{17}$, то $f(x) \rightarrow \frac{4}{17}$;

в) $f(x) = 4 - \frac{x}{2}$ — функция, непрерывная при $x \in R$;

если $x \rightarrow -2$, то $f(x) \rightarrow 5$; если $x \rightarrow 0$, то $f(x) \rightarrow 4$;

г) $f(x) = 4x - \frac{x^2}{4} = f_1(x) \cdot f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 4 - \frac{x}{4}$ — функции

непрерывные при $x \in R$;

если $x \rightarrow -1$, то $f_1(x) \rightarrow -1$ и $f_2(x) \rightarrow 4,25$, тогда $f(x) \rightarrow -4,25$;
 если $x \rightarrow 4$, то $f_1(x) \rightarrow 4$ и $f_2(x) \rightarrow 3$, тогда $f(x) \rightarrow 12$;

201.

- а) $3f(x)g(x) \rightarrow 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -6$;
 б) $\frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} \rightarrow \frac{1 - (-2)}{1 - 2} = -3$;
 в) $4f(x) - g(x) \rightarrow 4 \cdot 1 - (-2) = 6$;
 г) $(3 - g(x))f(x) \rightarrow (3 - (-2)) \cdot 1 = 5$.

202.

- а) $\frac{f(x)}{(g(x))^2} \rightarrow \frac{3}{(-0,5)^2} = 12$;
 б) $(f(x) - g(x))^2 \rightarrow (3 - (-0,5))^2 = 12,25$;
 в) $(f(x))^2 + 2g(x) \rightarrow 3^2 + 2(-0,5) = 8$;
 г) $\frac{(g(x))^2}{f(x) - 2} \rightarrow \frac{(-0,5)^2}{3 - 2} = 0,25$.

203.

а) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x - 3}$;

$f_1(x) = x^2 + 3x + 2$ при $x \rightarrow 4$

$f_2(x) = x - 3$ при $x \rightarrow 4$

при $x \rightarrow 4$

$f_1(x) \rightarrow 4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = 30$;

$f_2(x) \rightarrow 4 - 3 = 1$;

$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow \frac{30}{1} = 30$;

б) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2x + 7}$;

при $x \rightarrow -1$

при $x \rightarrow -1$

при $x \rightarrow -1$

$f_1(x) = x^3 - 3x \rightarrow (-1)^3 - 3(-1) = 2$;

$f_2(x) = x^2 - 2x + 7 \rightarrow (-1)^2 - 2(-1) + 7 = 10$;

$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$;

в) $f(x) = \frac{5 - 2x}{2 + x}$;

при $x \rightarrow 2$

при $x \rightarrow 2$

при $x \rightarrow 2$

$f_1(x) = 5 - 2x \rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1$;

$f_2(x) = 2 + x \rightarrow 2 + 2 = 4$;

$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow \frac{1}{4}$;

$$\text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}; \quad \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = x - 3,$$

т.е. функция $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ и $g(x) = x - 3$ совпадают всюду, кроме $x = -3$;

при $x \rightarrow -1$ $g(x) = x - 3 \rightarrow -1 - 3 = -4$.

204.

Пусть H значение периметра квадрата, h – найденное значение периметра, A – значение стороны квадрата, a – измененное значение.

По условию:

$$|A - a| \leq 0,01 \text{ дм}; |4A - 4a| \leq 4 \cdot 0,01 \text{ дм}; |H - h| \leq 0,04 \text{ дм};$$

Значит, периметр найден с точностью до 0,04 дм.

205.

Используем те же обозначения, что и в задаче 204. Имеем:

$$|H - h| \leq 0,03 \text{ дм}; |3A - 3a| \leq 3 \cdot 0,01 \text{ дм}; |A - a| \leq 0,01 \text{ дм};$$

Сторону треугольника достаточно изменить с точностью до 0,01 дм.

206.

Пусть K – значение длины окружности, k – найденное значение длины окружности, R – точное значение радиуса, r – измеренное значение радиуса. Тогда:

$$K = 2\pi R, k = 2\pi r \text{ дм}; |K - k| = |2\pi R - 2\pi r| \leq 0,06 \text{ дм};$$

$$|R - r| \leq \frac{0,03}{\pi} \text{ дм или } |R - r| \leq 0,01 \text{ дм}.$$

Радиус необходимо измерить с точностью до 0,01 дм.

207.

а) При $x \rightarrow a$ $C \rightarrow C$, т.к. функция $f_1 = C$ непрерывна при каждом x ;

$f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$ по условию задачи, тогда

при $x \rightarrow a$ $Cf(x) \rightarrow C \cdot A$;

б) $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$ по условию, $g(x) \rightarrow B$ при $x \rightarrow a$ по условию,

тогда $-g(x) \rightarrow -B$ при $x \rightarrow a$ и $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$ при $x \rightarrow a$;

$$\text{в) } (f(x))^2 - (g(x))^2 = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x));$$

при $x \rightarrow a$ $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$ и $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$,

тогда при $x \rightarrow a$ $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \rightarrow (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

$$\text{г) } (f(x))^n = f(x) \cdot (f(x))^{n-1} = \dots = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{n \text{ раз}};$$

при $x \rightarrow a$ $f(x) \rightarrow a$ по условию, тогда при $x \rightarrow a$

$$(f(x))^n = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}} = A^n, \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

15. Правила вычисления производных

208.

$$\text{a) } f'(x) = (x^2 + x^3)' = 2x + 3x^2;$$

$$\text{б) } f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 5x - 2\right)' = -\frac{x'}{x^2} + 5 = -\frac{1}{x^2} + 5;$$

$$\text{в) } f'(x) = (x^2 + 3x - 1)' = 2x + 3;$$

$$\text{г) } f'(x) = (x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

209.

$$\text{a) } f'(x) = (x^3)'(4 + 2x - x^2) + x^3(4 + 2x - x^2)' = 3x^2(4 + 2x - x^2) + x^3(2 - 2x) = -5x^4 + 8x^3 + 12x^2;$$

$$\text{б) } f'(x) = (\sqrt{x})'(2x^2 - x) + \sqrt{x}(2x^2 - x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2 - x) + \sqrt{x}(4x - 1) = 5x\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x};$$

$$\text{в) } f'(x) = (x^2)'(3x + x^3) + x^2(3x + x^3)' = 2x(3x + x^3) + x^2(3 + 3x^2) = 9x^2 + 5x^4;$$

$$\text{г) } f'(x) = (2x - 3)'(1 - x^3) + (2x - 3)(1 - x^3)' = 2(1 - x^3) - 3x^2(2x - 3) = -8x^3 + 9x^2 + 2.$$

210.

$$\text{a) } y'(x) = \frac{(1 + 2x)'(3 - 5x) - (1 + 2x)(3 - 5x)'}{(3 - 5x)^2} = \frac{2(3 - 5x) + 5(1 + 2x)}{(3 - 5x)^2} = \frac{11}{(3 - 5x)^2};$$

$$\text{б) } y'(x) = \frac{(x^2)'(2x - 1) - x^2(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{2x(2x - 1) - x^2 \cdot 2}{(2x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1)}{(2x - 1)^2};$$

$$\text{в) } y'(x) = \frac{(3x - 2)'(5x + 8) - (3x - 2)(5x + 8)'}{(5x + 8)^2} =$$

$$= \frac{3(5x+8) - 5(3x-2)}{(5x+8)^2} = \frac{34}{(5x+8)^2};$$

$$\text{r) } y'(x) = \frac{(3-4x)' \cdot x^2 - (3-4x)(x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4x^2 - 2x(3-4x)}{x^4} = \frac{4x^2 - 6x}{x^3}.$$

211.

$$\text{a) } y'(x) = (x^8)' - 3(x^4)' - x' + 5' = 8x^7 - 12x^3 - 1;$$

$$\text{б) } y'(x) = \frac{1}{3}(x)' - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)' + (\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{1}{3} + 8x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } y'(x) = (x^7)' - 4(x^5)' + 2x' - 1' = 7x^6 - 20x^4 + 2;$$

$$\text{r) } y'(x) = \frac{1}{2}(x^2)' + 3\left(\frac{1}{x^3}\right)' + 1' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 \cdot 3x^{-4} = x - \frac{9}{x^4}.$$

212.

$$\text{a) } f(x) = (x^2)' - 3x' = 2x - 3;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4;$$

$$f(2) = 1;$$

$$\text{б) } f(x) = x' - 4(\sqrt{x})' = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$f(0,01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{0,01}} = -19;$$

$$f(4) = 1 - \frac{2}{2} = 0;$$

$$\text{в) } f(x) = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}; f(\sqrt{2}) = \frac{3}{2};$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 4;$$

$$\text{r) } f(x) = \frac{(3-x)'(2+x) - (3-x)(2+x)'}{(2+x)^2} = -\frac{5}{(2+x)^2};$$

$$f(-3) = -5; f(0) = -\frac{5}{4}.$$

213.

$$\text{a) } f(x) = 2(x^2)' - x' = 4x - 1;$$

$$4x - 1 = 0;$$

$$x = 0,25;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x = 0,25;$$

$$\text{б) } f(x) = -\frac{2}{3}(x^3)' + (x^2)' + 12' = -2x^2 + 2x;$$

$$-2x^2 + 2x = 0;$$

$$x(1 - x) = 0;$$

$$x = 0 \text{ или } x = 1;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x = 0; 1;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - 1,5(x^2)' - 4x' = x^2 - 3x - 4;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$x = -1 \text{ либо } x = 4;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x = -1; x = 4;$$

$$\text{г) } f(x) = 2x' - 5(x^2)' = 2 - 10x;$$

$$2 - 10x = 0; x = 0,2;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x = 0,2.$$

214.

$$\text{a) } f(x) = 4x' - 3(x^2)' = 4 - 6x;$$

$$f(x) < 0: 4 - 6x < 0;$$

$$x > \frac{2}{3};$$

$$\text{б) } f(x) = (x^3)' + 1,5(x^2)' = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1);$$

$$f(x) < 0: 3x(x + 1) < 0; x \in (-1; 0);$$

$$\text{в) } f(x) = (x^2)' - 5x' = 2x - 5;$$

$$f(x) < 0: 2x - 5 < 0; x \in (-\infty; 2,5);$$

$$\text{г) } f(x) = 4x' - \frac{1}{3}(x^3)' = 4 - x^2 = (2 - x)(2 + x);$$

$$f(x) < 0: (2 - x)(2 + x) < 0;$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

215.

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x^3 - 3x)'(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x)(1 + 4x^5)'}{(1 + 4x^5)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 3)(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x) \cdot 20x^4}{(1 + 4x^5)^2} = \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2 - 3}{(1 + 4x^5)^2};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f'(x) &= \left(\frac{3}{x} + x^2 \right) (2 - \sqrt{x}) + \left(\frac{3}{x} + x^2 \right) (2 - \sqrt{x})' = \\ &= \left(-\frac{3}{x^2} + 2x \right) (2 - \sqrt{x}) + \left(\frac{3}{x} + x^2 \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \\ &= -\frac{6}{x^2} + 4x + \frac{3}{x\sqrt{x}} - 2x\sqrt{x} - \frac{3}{2x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{2} = \\ &= -\frac{6}{x^2} + 4x + \frac{3}{2x\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt{x}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } f'(x) &= \frac{(5 - 2x^6)'(1 - x^3) - (5 - 2x^6)(1 - x^3)'}{(1 - x^3)^2} = \\ &= \frac{-12x^5(1 - x^3) + 3x^2(5 - 2x^6)}{(1 - x^3)^2} = \frac{-12x^5 + 6x^8 + 15x^2}{(1 - x^3)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } f'(x) &= (\sqrt{x})'(3x^5 - x) + \sqrt{x}(3x^5 - x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^5 - x) + \sqrt{x}(15x^4 - 1) = \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x}(11x^4 - 1). \end{aligned}$$

216.

$$\text{а) } f'(x) = (x^5)' - 3 \frac{1}{3} (x^3)' + 5x' = 5x^4 - 10x^2 + 5 = 5(x - 1)^2(x + 1)^2;$$

$$f'(x) = 0: 5(x - 1)^2(x + 1)^2 = 0; x = -1 \text{ либо } x = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f'(x) &= 2(x^4)' - (x^8)' = 8x^3 - 8x^7 = 8x^3(1 - x^2)(1 + x^2) = \\ &= 8x^3(1 - x)(1 + x)(1 + x^2); \end{aligned}$$

$$x = -1 \text{ либо } x = 0 \text{ либо } x = 1;$$

$$\text{в) } f'(x) = (x^4)' + 4x' = 4x^3 + 4 = 4(x + 1)(x^2 - x + 1);$$

$$f'(x) = 0: 4(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0; x = -1;$$

$$\text{г) } f'(x) = (x^4)' - 12(x^2)' = 4x^3 - 24x = 4x(x^2 - 6) = 4x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6});$$

$$f'(x) = 0: 4x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0; x = -\sqrt{6} \text{ либо } x = \sqrt{6};$$

217.

$$\text{а) } f'(x) = (x^3)' - 6(x^2)' - 63x' = 3x^2 - 12x - 63 = 3(x^2 - 4x - 21);$$

$$f'(x) < 0: x^2 - 4x - 21 < 0; (x + 3)(x - 7) < 0; x \in (-3; 7);$$

$$\text{б) } f'(x) = 3x' - 5(x^2)' + (x^3)' = 3 - 10x + 3x^2;$$

$$f'(x) < 0: 3 - 10x + 3x^2 < 0; 3(x - \frac{1}{3})(x - 3) < 0; x \in (\frac{1}{3}; 3);$$

$$в) f'(x) = \frac{2}{3}(x^3)' - 8x' = 2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2);$$

$$f'(x) < 0: (x - 2)(x + 2) < 0;$$

$$x \in (-2; 2);$$

$$г) f'(x) = 3(x^2)' - 9x' - \frac{1}{3}(x^3)' = 6x - 9 - x^2;$$

$$f'(x) < 0: 6x - 9 - x^2 < 0; x^2 - 6x + 9 > 0;$$

$$x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

218.

$$а) g(x) = x^2 + 3x + 10; g'(x) = (x^2)' + 3x' + 10' = 2x + 3;$$

$$б) f(x) = 4x^4 - 0,4x + 2; f'(x) = (4x^4)' - 0,4x' + 2' = 16x^3 - 0,4;$$

$$в) h(x) = 4x^2 - 2x; h'(x) = 4(x^2)' - 2x' = 8x - 2;$$

$$г) \varphi(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x + 1,5; \varphi'(x) = 3(x^3)' - \frac{1}{2}x' + 1,5' = 9x^2 - \frac{1}{2}.$$

219.

$$а) \text{ Утверждение неверно. К примеру, пусть } f_1(x) = \frac{1}{x} \text{ и } f_2(x) = -\frac{1}{x}.$$

Тогда $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f_2'(x) = \frac{1}{x^2}$ — в т. $x_0 = 0$, очевидно, у каждой из функций производной не существует. Однако, $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ — имеет производную, равную 0, в любой т. $x_0 \rightarrow R$.

б) Пусть $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеет производную в т. x_0 и функция $f_1(x)$ также имеет производную в т. x_0 , но функция $f_2(x)$ не имеет в этой точке производной. Обозначим $\varphi'(x_0) = a$, $f_1'(x_0) = b$.

Тогда $f_2'(x_0) = \varphi'(x_0) - f_1'(x_0) = a - b$, т.е. функция $f_2(x)$ имеет производную в т. x_0 , что противоречит предположению, т.е. $\varphi(x)$ не имеет производной в точке x_0 .

16. Производная сложной функции

220.

$$а) h(x) = \cos 3x;$$

$$б) h(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$y=f(x)=3x, \quad g(y)=\cos y;$$

$$y=f(x)=2x-\frac{\pi}{3}, \quad g(y)=\sin y;$$

$$\text{в) } h(x)=\operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$\text{г) } h(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$y=f(x)=\frac{x}{2}; \quad g(y)=\operatorname{tg} y;$$

$$y=f(x)=3x+\frac{\pi}{4}; \quad g(y)=\cos y.$$

221.

$$\text{а) } h(x)=(3-5x)^5;$$

$$\text{б) } h(x)=\sqrt{\cos x};$$

$$y=f(x)=3-5x; \quad g(y)=y^5;$$

$$y=f(x)=\cos x; \quad g(y)=\sqrt{y};$$

$$\text{в) } h(x)=(2x+1)^7;$$

$$\text{г) } h(x)=\operatorname{tg} \frac{1}{x};$$

$$y=f(x)=2x+1; \quad g(y)=y^7;$$

$$y=f(x)=\frac{1}{x}; \quad g(y)=\operatorname{tg} y.$$

222.

$$\text{а) } y=\sqrt{9-x^2};$$

$$\text{б) } y=\frac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}};$$

$$y \geq 0: 9-x^2 \geq 0;$$

$$y > 0: x^2-7x+12 > 0;$$

$$(x-3)(x+3) \leq 0; \quad -3 \leq x \leq 3;$$

$$(x-3)(x-4) > 0;$$

$$\begin{cases} x < 3; \\ x > 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } y=\sqrt{0,25-x^2};$$

$$\text{г) } y=\frac{1}{\sqrt{4x+5-x^2}};$$

$$y \geq 0: 0,25-x^2 \geq 0;$$

$$y > 0: 4x+5-x^2 > 0;$$

$$(x-0,5)(x+0,5) \leq 0;$$

$$(x+1)(x-5) < 0;$$

$$-0,5 \leq x \leq 0,5;$$

$$-1 < x < 5.$$

223.

$$\text{а) } y=\sqrt{\cos x};$$

$$\text{б) } y=\frac{1}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$y \geq 0: \cos x \geq 0;$$

$$y \neq 0: \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \neq 0;$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x \neq \frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

ОТВЕТ: $\left\{ \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right] / n \in Z \right\}$.

в) $y = \operatorname{tg} 2x$;

г) $y = \sqrt{\sin x}$;

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

$y \geq 0: \sin x \geq 0$;

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$;

$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in Z$.

224.

а) $f(x) = ((2x - 7)^8)' = 8(2x - 7)^{8-1}(2x - 7)' = 16(2x - 7)^7$;

б) $f(x) = \left(\frac{1}{(5x+1)^3} \right)' = -3(5x+1)^{-3-1}(5x+1)' = -\frac{15}{(5x+1)^4}$;

в) $f(x) = ((9x + 5)^4)' = 4(9x + 5)^{4-1}(9x + 5)' = 36(9x + 5)^3$;

г) $f(x) = \left(\frac{1}{(6x-1)^5} \right)' = -5(6x-1)^{-5-1}(6x-1)' = -\frac{30}{(6x-1)^6}$.

225.

а) $f(x) = \left(\left(3 - \frac{x}{2} \right)^{-9} \right)' = -9 \left(3 - \frac{x}{2} \right)^{-9-1} \left(3 - \frac{x}{2} \right)' = \frac{9}{2 \left(3 - \frac{x}{2} \right)^{10}}$;

б) $f(x) = \left(\left(\frac{1}{4}x - 7 \right)^8 - (1 - 2x)^4 \right)' = 8 \left(\frac{1}{4}x - 7 \right)^{8-1} \left(\frac{1}{4}x - 7 \right)' - 4(1 - 2x)^{4-1} \cdot (1 - 2x)' = 2 \left(\frac{1}{4}x - 7 \right)^7 + 8(1 - 2x)^3$;

в) $f(x) = ((4 - 1,5x)^{10})' = 10(4 - 1,5x)^{10-1}(4 - 1,5x)' = -15(4 - 1,5x)^9$;

г) $f(x) = ((5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6})' = 13(5x - 2)^{13-1} \cdot (5x - 2)' + 6(4x + 7)^{-6-1} \cdot (4x + 7)' = 65(5x - 2)^{12} + \frac{24}{(4x + 7)^7}$.

226.

а) $y = \sqrt{1 - 2 \cos x}$;

$y \geq 0: 1 - 2 \cos x \geq 0; \cos x \leq \frac{1}{2}$;

$$\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1};$$

$$y \geq 0: \frac{4}{x^2} - 1 \geq 0;$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+2) \leq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 0) \cup (0; 2];$$

$$\text{в) } y = \sqrt{\sin x - 0,5};$$

$$y \geq 0: \sin x - 0,5 \geq 0; \sin x \geq 0,5;$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{г) } y = \sqrt{\frac{1}{x} + 1};$$

$$y \geq 0: \frac{1}{x} + 1 \geq 0; \frac{x+1}{x} \geq 0;$$

$$\begin{cases} x(x+1) \geq 0; \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq -1; \\ x \geq 0; \\ x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty).$$

227.

$$\text{а) } h(x) = f(g(x)) = 3 - 2x^2;$$

$$\text{б) } h(x) = g(p(x)) = \sin^2 x;$$

$$\text{в) } h(x) = g(f(x)) = (3 - 2x)^2;$$

$$\text{г) } h(x) = p(f(x)) = \sin(3 - 2x).$$

228.

$$\text{а) } h(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\cos x - 1};$$

$$\cos x - 1 \neq 0;$$

$$x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{2\pi k / k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\text{б) } h(x) = f(p(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}};$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \geq 0, & x \geq 0; \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0, & x \neq 1; \end{cases} D(h) = [0; 1) \cup [1; +\infty);$$

$$\text{в) } h(x) = p(f(x)) = \sqrt{\cos x};$$

$$\cos x \geq 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$D(h) = \left\{ \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right] / n \in Z \right\};$$

$$\text{г) } h(x) = p(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}};$$

$$x - 1 > 0; x > 1;$$

$$D(h) = (1; +\infty).$$

229.

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{2}x, g(x) = 2x; f(g(x)) = \frac{1}{2}(2x) = x;$$

$$\text{б) } f(x) = x^2; g(x) = \sqrt{x}, \text{ где } x \geq 0. f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}; g(x) = 3x + 2; f(g(x)) = -\sqrt{x^2 + 1} - 1 = -|x| = x$$

при $x \leq 0$.

230.

$$\text{а) } f(x) = 17(x^3 - 2x^2 + 3)^{17-1}(x^3 - 2x^2 + 3)' = 17(x^3 - 2x^2 + 3)^{16}(3x^2 - 4x) = 17x(x^3 - 2x^2 + 3)^{16}(3x - 4);$$

$$\text{б) } f'(x) = \left(\sqrt{1-x^4} \right)' + \left(\frac{1}{x^2+3} \right)' = \frac{1}{2} (1-x^4)^{\frac{1}{2}-1} (1-x^4)' =$$

$$= (x^2+3)^{-2}(x^2+3)' = -\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{2x}{(x^2+3)^2};$$

$$\text{в) } f'(x) = \frac{1}{2} (4x^2+5)^{\frac{1}{2}-1} (4x^2+5)' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}};$$

$$\text{г) } f'(x) = 5(3-x^3)^{5-1}(3-x^3)' + \frac{1}{2}(2x-7)^{\frac{1}{2}-1}(2x-7)' =$$

$$= -15x^2(3-x^3)^4 + \frac{1}{\sqrt{2x-7}}.$$

17. Производные тригонометрических функций

231.

$$\text{а) } y'(x) = 2\cos x; \quad \text{б) } y'(x) = -\frac{1}{2}\cos x;$$

$$\text{в) } y'(x) = -0,5\cos x; \quad \text{г) } y'(x) = \frac{3}{2}\cos x.$$

232.

$$\text{а) } y'(x) = -3\sin x; \quad \text{б) } y'(x) = 1 - 2\sin x;$$

$$\text{в) } y'(x) = \sin x; \quad \text{г) } y'(x) = 2\cos x - \frac{3}{2}\sin x.$$

233.

$$\text{а) } y'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}; \quad \text{б) } y'(x) = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{в) } y'(x) = \frac{1}{2\cos^2 x}; \quad \text{г) } y'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \cos x.$$

234.

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x - \pi))' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x;$$

$$f'(x) = f'(\pi) = 0;$$

$$\text{б) } f(x) = x' + (\operatorname{tg} x)' = 1 + \frac{2}{\cos^2 2x};$$

$$f(0) = f(\pi) = 1 + \frac{2}{1} = 3;$$

$$\text{в) } f'(x) = 3 \left(\sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right)' = -3 \left(\cos \frac{x}{3} \right)' = -3 \left(-\frac{1}{3} \right) \sin \frac{x}{3} = \sin \frac{x}{3};$$

$$f'(0) = 0; \quad f'(\pi) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{г) } f(x) = 2 \left(\cos \frac{x}{2} \right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \frac{x}{2} = -\sin \frac{x}{2};$$

$$f'(0) = 0; \quad f'(\pi) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1.$$

235.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{2}x' + (\cos x)' = \frac{1}{2} - \sin x;$$

$$f(x) = 0: \frac{1}{2} - \sin x = 0;$$

$$\text{то } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$\text{б) } f(x) = x' - (\operatorname{tg} x)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$f(x) = 0: 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\text{то } \cos x = -1 \text{ либо } \cos x = 1;$$

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z \text{ либо } x = 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$\text{в) } f(x) = 2(\sin x)' - 1' = 2\cos x;$$

$$f(x) = 0: \cos x = 0;$$

$$\text{то } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\text{г) } f(x) = x' - (\cos x)' = 1 + \sin x;$$

$$f(x) = 0: 1 + \sin x = 0;$$

$$\text{то } x = -\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

236.

$$\text{a) } f(x) = 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x;$$

$$\text{б) } f(x) = 4x^3 + \frac{2}{\cos^2 2x};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{(\cos 3x)' \cdot x - \cos 3x \cdot x'}{x^2} = \frac{-3x \sin 3x - \cos 3x}{x^2};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x' \sin x - x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}.$$

237.

$$\text{a) } f(x) = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{-4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(2 \cos x \sin x)^2} = \frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x};$$

$$\text{в) } f(x) = 2\cos x \cdot (\cos x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x;$$

$$\text{г) } f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)' = 0.$$

238.

a) $f(x) = (\cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x)' = 3\cos 3x$;

б) $f(x) = \left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4} \right)' = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = (\sin 5x \sin 3x + \cos 5x \sin 3x)' = -2\sin 2x$;

г) $f(x) = (\sin 3x \cos 3x)' = 3\cos 6x$.

239.

a) $f(x) = 2(\sin^2 x)' - \sqrt{2} x' = 2\sin 2x - \sqrt{2}$;

$f(x) = 0: 2\sin 2x - \sqrt{2} = 0$;

$2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in Z; f(x) > 0: \sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$;

б) $f(x) = 2x' + (\cos(4x - \pi))' = 2 - (\cos 4x)' = 2 + 4\sin 4x$;

$f(x) = 0: 2 + 4\sin 4x = 0$;

$4x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} k, k \in Z$;

$f(x) > 0: \sin 4x > -\frac{1}{2}$;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} n < x < \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$;

в) $f(x) = (\cos 2x)' = -2\sin 2x; f'(x) = 0: -2\sin 2x = 0$;

$2x = \pi n; x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z; f(x) > 0: -2\sin 2x > 0$;

$-\pi + 2\pi k < 2x < 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k, k \in Z$;

г) $f(x) = (\sin 2x)' - \sqrt{3} x' = 2\cos 2x - \sqrt{3}; f(x) = 0: 2\cos 2x - \sqrt{3} = 0$;

$2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = \pm \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z; f(x) > 0: \cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z$.

240.

a) $f(x) = x + \cos x + 5$; б) $f(x) = \sin 2x + 1$;

в) $f(x) = 20 - \sin x$; г) $f(x) = 2 - 3\cos x$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНОЙ

18. Применение непрерывности

241.

а) $f(x) = x^4 - x + 1$;

$f'(x) = 4x^3 - 1$, $D(f') = R$ – непрерывна на R , а значит и в т. $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.

б) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1; \\ x^2 - x, & x > -1. \end{cases}$

$f'(x_1 = 0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ – дифференцируема в т. $x_1 = 0$ и, значит, непрерывна в этой точке.

$f(x_2 + \Delta x) \rightarrow 2$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$;

$f(x_2 + \Delta x) \rightarrow 2$ при $\Delta x < 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$,

поэтому в т. $x_2 = -1$ функция является непрерывной.

в) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0; \\ 5 - 2x, & x \geq 0. \end{cases}$

$f'(x) = -2 \cdot (-1) = 2$ – функция непрерывна в т. $x_2 = -1$.

$f(x_1 + \Delta x) \rightarrow 5$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$;

$f(x_1 + \Delta x) \rightarrow 1$ при $\Delta x < 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$,

значит, $f(x)$ в т. $x_1 = 0$ не является непрерывной.

г) $f(x) = 2x - x^2 + x^3$;

$f'(x) = 2 - 2x + 3x^2$, $D(f') = R$ – функция непрерывна при $x \in R$, а значит и в т. $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.

242.

а) $f(x) = x^3 - 2x^2$;

$f'(x) = 3x^2 - 4x$, $D(f') = R$ – функция $f(x)$ непрерывна при $x \in R$;

б) $f(x) = \frac{x^3 + 27}{3x + x^2}$;

$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$;

т.е. $x \in (-\infty; -3)$, $x \in (-3; 0)$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4$;

$f'(x) = 8x^3 - 6x$, $D(f') = R$ – функция $f(x)$ непрерывна при $x \in R$;

г) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$;

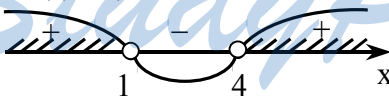
$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; т.е. $x \in (-\infty; 2)$, $x \in (2; +\infty)$.

243.

- а) $f(x) = 1,4 - 10x^2 - x^3$ непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0) = 1,4 > 0$,
 $f(1) = -9,6 < 0$ – функция $f(x)$ имеет на $[0; 1]$ корень;
 $f(0,2) = 0,992 > 0$, $f(0,4) = -0,264 < 0$ – корень $x_0 \in [0,2; 0,4]$,
 $x_0 \approx 0,3$ с точностью до 0,1;
- б) $f(x) = 1 + 2x^2 - 100x^4$ непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0) = 1 > 0$,
 $f(1) = -97 < 0$ – функция $f(x)$ имеет на $[0; 1]$ корень;
 $f(0,3) = 0,37 > 0$, $f(0,5) = -4,75 < 0$ – корень $x_0 \in [0,3; 0,5]$,
 $x_0 \approx 0,4$ с точностью до 0,1;
- в) $f(x) = x^3 - 5x + 3$ непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0) = 3 > 0$,
 $f(1) = -1 < 0$ – функция $f(x)$ имеет на $[0; 1]$ корень;
 $f(0,6) = 0,216 > 0$, $f(0,8) = -0,488 < 0$ – корень $x_0 \in [0,6; 0,8]$,
 $x_0 \approx 0,7$ с точностью до 0,1;
- г) $f(x) = x^4 + 2x - 0,5$ непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0) = -0,5 < 0$,
 $f(1) = 2,5 > 0$ – функция $f(x)$ имеет на $[0; 1]$ корень;
 $f(0,2) = -0,0984 < 0$, $f(0,4) = 0,3256 > 0$ – корень $x_0 \in [0,2; 0,4]$,
 $x_0 \approx 0,3$ с точностью до 0,1.

244.

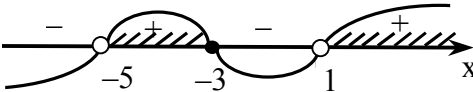
- а) $x^2 - 5x + 4 > 0$;
 $(x - 4)(x - 1) > 0$;



Ответ: $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

б) $\frac{x+3}{x^2+4x-5} \geq 0$;

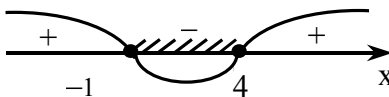
$\frac{x+3}{(x+5)(x-1)} \geq 0$;



Ответ: $(-5; -3] \cup (1; +\infty)$.

в) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$;

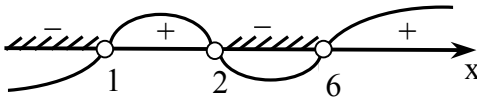
$(x+1)(x-4) \leq 0$;



Ответ: $[-1; 4]$.

$$\text{г) } \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 2} < 0;$$

$$\frac{(x-1)(x-6)}{x-2} < 0;$$



Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 6)$.

245.

$$\text{а) } \frac{(x-2)(x-4)}{x^2 + 2x - 3} \geq 0;$$

$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+3)} \geq 0;$$

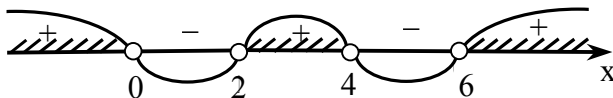


Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 2] \cup [4; +\infty)$.

$$\text{б) } \frac{8}{x^2 - 6x + 8} < 1;$$

$$\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 8} > 0;$$

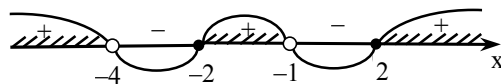
$$\frac{x(x-6)}{(x-2)(x-4)} > 0;$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; +\infty)$.

$$\text{в) } \frac{2x^2 + 5x}{x^2 + 5x + 4} \geq 1;$$

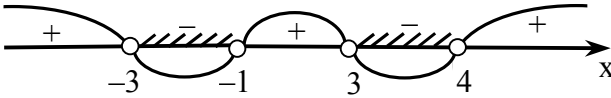
$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+4)} \geq 0;$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-2; -1] \cup [2; +\infty)$.

$$\text{г) } \frac{x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-4)} < 0;$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-4)} < 0;$$



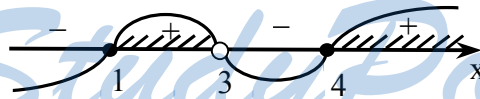
Ответ: $(-3; -1) \cup (3; 4)$.

246.

$$\text{а) } f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x-3}};$$

$$x - \frac{4}{x-3} \geq 0;$$

$$\frac{(x+1)(x-4)}{x-3} \geq 0;$$

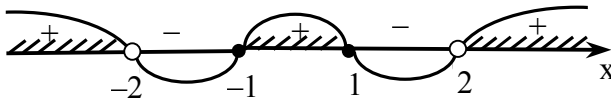


$$D(f) = [-1; 3) \cup [4; +\infty).$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2 - 4}} + 1;$$

$$\frac{3}{x^2 - 4} + 1 \geq 0;$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0;$$

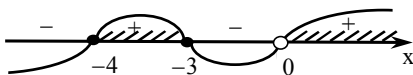


$$D(f) = (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; +\infty).$$

$$\text{в) } f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 7x + 12}{x}};$$

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x} \geq 0;$$

$$\frac{(x+3)(x+4)}{x} \geq 0;$$

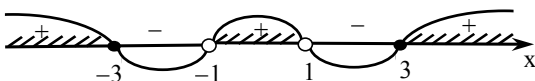


$$D(f) = [-4; -3] \cup (0; +\infty).$$

$$г) f(x) = \sqrt{1 - \frac{8}{x^2 - 1}};$$

$$1 - \frac{8}{x^2 - 1} \geq 0;$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \geq 0;$$



$$D(f) = (-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup [3; +\infty).$$

247.

$$а) f(x) = \begin{cases} 4-x, & x < 4, \\ (x-m)^2, & x \geq 4; \end{cases}$$

Видим, что $f(x)$ является непрерывной на R при любом m , кроме $x = 4$; условие непрерывности в т. $x = 4$:

$$f(4 - \Delta x) = f(4 + \Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ и } \Delta x > 0;$$

$$f(4 - \Delta x) = \Delta x, f(4 + \Delta x) = (4 + \Delta x - m)^2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$(4 - m)^2 = 0, m = 4;$$

$$б) f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - m}.$$

Функция $f(x)$ — дробно-рациональная, поэтому она будет непрерывна на R , если $D(f)=R$; выражение $x^2 - m \neq 0$ при любых x , если $m < 0$;

$$в) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + m, & x \leq 0, \\ x + 2, & x > 0; \end{cases}$$

условие непрерывности в т. $x = 0$:

$$f(0 - \Delta x) = f(0 + \Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ и } \Delta x > 0;$$

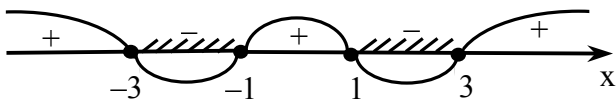
$$f(0 - \Delta x) = 3(\Delta x^2) + m, f(0 + \Delta x) = 2 + \Delta x \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$3 \cdot 0 + m = 2 + 0, m = 2;$$

г) $f(x) = \frac{5-x}{x^4+m}$, $D(f) = R$, если $x^4+m \neq 0$ при любом x , т.е. при $m > 0$.

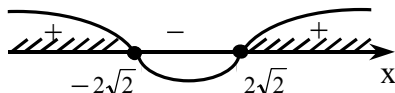
248.

а) $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$;
 $(x^2 - 9)(x^2 + 1) \leq 0$;
 $(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1) \leq 0$;



$x \in [-3; 1] \cup [1; 3]$;

б) $x^4 - 8 \geq 7x^2$;
 $(x^2 - 8)(x^2 + 1) \geq 0$;
 $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(x^2 + 1) \geq 0$;



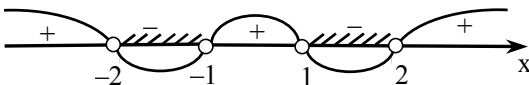
$x \in [-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$;

в) $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$;
 $(x^2 - 2)(x^2 - 3) > 0$;
 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$;



$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$;

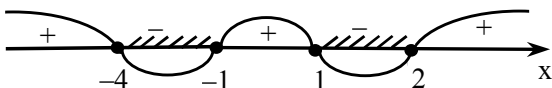
г) $5x^2 - 4 > x^4$;
 $(x^2 - 1)(x^2 - 4) < 0$;
 $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) < 0$;



$x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

249.

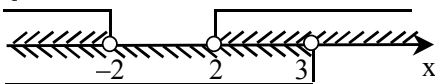
а) $(x^2 - 1)(x + 4)(x^3 - 8) \leq 0$;
 $(x - 1)(x + 1)(x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \leq 0$;



$$x \in [-4; -1] \cup [1; 2];$$

$$\text{б) } \sqrt{x^2 - 4}(x - 3) < 0;$$

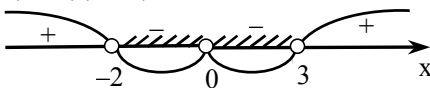
$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0; \\ x - 3 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 2)(x + 2) > 0; \\ x - 3 < 0; \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3);$$

$$\text{в) } x^2(3 - x)(x + 2) > 0;$$

$$x^2(x - 3)(x + 2) < 0;$$



$$x \in (-2; 0) \cup (0; 3);$$

$$\text{г) } \frac{(x - 2)^3(x + 5)}{(x + 3)^2} \geq 0;$$



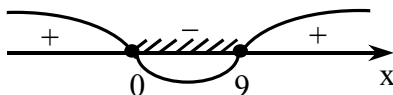
$$x \in (-\infty; 5] \cup [2; +\infty);$$

250.

$$\text{а) } f(x) = \sqrt{9x - x^2};$$

$$9x - x^2 \geq 0;$$

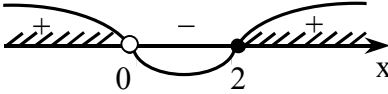
$$x(x - 9) \leq 0;$$



$$D(f) = [0; 9].$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}};$$

$$x^2 - \frac{8}{x} \geq 0; \quad \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x} \geq 0;$$

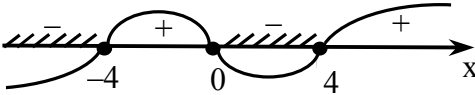


$$D(f) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty).$$

$$b) f(x) = \sqrt{16x - x^3};$$

$$16x - x^3 \geq 0;$$

$$x(x - 4)(x + 4) \leq 0;$$

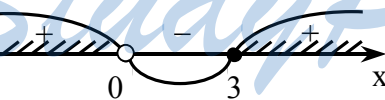


$$D(f) = (-\infty; -4] \cup [0; 4].$$

$$r) f(x) = \sqrt{1 - \frac{27}{x^3}};$$

$$1 - \frac{27}{x^3} \geq 0;$$

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^3} \geq 0;$$



$$D(f) = (-\infty; 0) \cup [3; +\infty).$$

19. Касательная к графику функции

251.

1) Касательная горизонтальна:

а) в т. *B* и т. *D*; б) в т. *B*, т. *C* и т. *D*;

в) в т. *A*, т. *C* и т. *E*; г) в т. *A*, т. *C* и т. *E*;

2) Касательная образует с осью абсцисс острый угол:

а) в т. *A* и т. *E*; б) в т. *E*;

в) в т. *B* и т. *F*; г) в т. *D*;

3) Касательная образует с осью абсцисс тупой угол:

а) в т. *C*; б) в т. *A*;

в) в т. *D*; г) в т. *B* и т. *F*.

252.

1) Производная функции равна нулю:

- а) при $x = b$ и $x = d$; б) при $k = b$ и $k = d$;
в) при $x = a$, $x = b$ и $x = d$; г) при $x = b$ и $x = d$.

2) Производная функции больше нуля:

- а) при $x = c$; б) при $x = a$ и $x = e$;
в) при $x = e$; г) при $x = c$.

3) Производная функции меньше нуля:

- а) при $x = e$; б) при $x = c$;
в) при $x = c$; г) при $x = a$ и $x = e$.

253.

а) $f(x) = (x^2)' = 2x$; б) $f'(x) = \frac{1}{3} (x^3)' - x' = x^2 - 1$;
 $\operatorname{tg} \alpha = f'(-3) = 2 \cdot (-3) = 6$; $\operatorname{tg} \alpha = f'(2) = 2^2 - 1 = 3$;
в) $f(x) = (x^3)' = 3x^2$; г) $f'(x) = (x^2)' + 2x' = 2x + 2$;
 $\operatorname{tg} \alpha = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$; $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 2(1 + 1) = 4$.

254.

а) $f(x) = 2(\cos x)' = -2\sin x$; б) $f'(x) = -(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$;
 $\operatorname{tg} \alpha = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin \frac{\pi}{2} = -2$; $\operatorname{tg} \alpha = f'(\pi) = -\frac{1}{\cos^2 \pi} = -1$;
в) $f(x) = 1' + (\sin x)' = \cos x$; г) $f'(x) = -(\cos x)' = \sin x$;
 $\operatorname{tg} \alpha = f'(\pi) = \cos \pi = -1$; $\operatorname{tg} \alpha = f'(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$.

255.

а) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$;

$y = \frac{3}{x_0} + (x - x_0) \cdot \left(-\frac{3}{x_0^2}\right)$ — уравнение касательной к графику

функции

$f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой x_0 :

при $x_0 = -1$: $y = \frac{3}{-1} - 3(x + 1) = -3x - 6$;

при $x_0 = 1$: $y = \frac{3}{1} - 3(x - 1) = -3x + 6$;

б) $f'(x) = 2x' - (x^2)' = 2 - 2x$;
 $y = 2x_0 - x_0^2 + 2(1 - x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ;

при $x_0 = 0$: $y = 2(1 - 0)(x - 0) = 2x$;

при $x_0 = 2$: $y = 2 \cdot 2 - 2^2 + 2(1 - 2)(x - 2) = -2x + 4$;

в) $f'(x) = (x^2)' + 1' = 2x$;
 $y = 1 + x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ;

при $x_0 = 0$: $y = 1 + 0 + 2 \cdot 0(x - 0) = 1$;

при $x_0 = 1$: $y = 1 + 1 + 2 \cdot 1(x - 1) = 2x$;

г) $f'(x) = (x^3)' - 1' = 3x^2$;
 $y = x_0^3 - 1 + 3x_0^2(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ;

при $x_0 = -1$: $y = (-1)^3 - 1 + 3(x + 1) = 3x + 1$;

при $x_0 = 2$: $y = 2^3 - 1 + 3 \cdot 2^2(x - 2) = 12x - 7$.

256.

а) $f'(x) = 3(\sin x)' = 3\cos x$;
 $y = 3\sin x_0 + 3\cos x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ;

при $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $y = 3\sin \frac{\pi}{2} + 3\cos \frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2}) = 3$;

при $x_0 = \pi$: $y = 3\sin \pi + 3\cos \pi(x - \pi) = -3x + 3\pi$;

б) $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$y = \operatorname{tg}(x_0) + \frac{1}{\cos^2 x_0}(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с

абсциссой x_0 ;

при $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) = 2x + 1 - \frac{\pi}{2};$$

при $x_0 = \frac{\pi}{3}$:

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}}(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} + 4(x - \frac{\pi}{3}) = 4x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3};$$

в) $f'(x) = 1' + (\cos x)' = -\sin x$;

$y = 1 + \cos x_0 - \sin x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ;

при $x_0 = 0$: $y = 1 + \cos 0 - \sin 0(x - 0) = 2$;

при $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $y = 1 + \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2}) = -x + \frac{\pi}{2} + 1$;

г) $f(x) = -2(\sin x)' = -2\cos x$;

$y = -2\sin x_0 - 2\cos x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ;

при $x_0 = -\frac{\pi}{2}$: $y = -2\sin(-\frac{\pi}{2}) - 2\cos(-\frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2}) = 2$;

при $x_0 = \pi$: $y = -2\sin\pi - 2\cos\pi(x - \pi) = 2x - 2\pi$.

257.

Касательная в точке $(x_0; f(x_0))$ параллельна оси OX , если в этой точке $f'(x_0) = 0$

а) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$;

$f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x + 3 = 0$;

$x = 1$; $f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$;

в т. $A(1; 1)$ графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ касательная к графику параллельна оси OX ;

б) $f'(x) = 2x^3 + 16$;

$f'(x) = 0$: $2x^3 + 16 = 0$;

$2(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$;

$x = -2$: $f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^4 - 16 \cdot 2 = -24$;

в т. $B(-2; -24)$ графика функции $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$ касательная к

графику параллельна оси OX ;

в) $f'(x) = 12x^3 - 12x$;

$f'(x) = 0$: $12x(x - 1)(x + 1) = 0$;

$x = 0$, $x = 1$, $x = -1$: $f(-1) = f(1) = -1$; $f(0) = 2$;

в т. $A(-1; 1)$, т. $B(1; -1)$, т. $C(0; 2)$ графика функции

$f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$ касательная к графику параллельна оси OX ;

г) $f'(x) = 3x^2 - 3$;

$f'(x) = 0$: $3(x - 1)(x + 1) = 0$;

$x = 1$, $x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$,

$f(1) = 1 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$;

в т. $A(-1; 3)$, т. $B(1; -1)$ графика функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ касательная к графику параллельна оси OX .

258.

$$a) f(x) = -2\sin x + 1;$$

$$f(x) = 0: \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \\ &= \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) &= 2\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = \\ &= -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z; \end{aligned}$$

$$\text{в т. } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \quad n \in Z \text{ и}$$

$$\text{т. } \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$$

графика функции $f(x) = 2\cos x + x$ касательная к графику параллельна оси OX ;

$$b) f(x) = 2\cos 2x + \sqrt{3};$$

$$f(x) = 0: \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in Z \text{ и } x = \frac{7\pi}{12} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{6} + 2\pi n\right) + \sqrt{3}\left(\frac{3\pi}{12} + \pi n\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right);$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k\right) + \sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k\right);$$

$$\text{в т. } \left(\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right)\right), \quad n \in Z \text{ и}$$

$$\text{т. } \left(\frac{7\pi}{12} + \pi k; -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{7\pi}{12} + \pi k \right) \right), k \in Z$$

графика функции $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}x$ касательная к графику параллельна оси OX ;

$$\text{в) } f(x) = -\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right); f'(x) = 0: -\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$f \left(\frac{\pi}{3} + \pi n \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi n - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \pi n, n \in Z;$$

Если $n = 2k, k \in Z$, то $\cos \pi n = 1$,

если $n = 2k + 1, k \in Z$, то $\cos \pi n = -1$;

$$\text{в т. } \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 1 \right) \text{ и т. } \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -1 \right) (k \in Z)$$

графика функции $f(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ касательная к графику параллельна оси OX ;

$$\text{г) } f(x) = \sqrt{2} - 2\cos x; f'(x) = 0: \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in Z;$$

$$\begin{aligned} f \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right) &= \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right) - 2\sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + 2\sqrt{2}\pi n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) &= \sqrt{2} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) - 2\sin \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + 2\sqrt{2}\pi k; \end{aligned}$$

$$\text{в т. } \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + 2\sqrt{2}\pi n \right), n \in Z \text{ и}$$

$$\text{т. } \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + 2\sqrt{2}\pi k \right), k \in Z$$

графика функции $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sin x$ касательная к графику параллельна оси OX .

259.

а) $f(x) = 3x - x^3$;

$f(x) = 0: 3x - x^3 = 0$;

$x = -\sqrt{3}; x = 0; x = \sqrt{3}$;

$f'(x) = 3 - 3x^2$;

$f'(-\sqrt{3}) = 3 - 3(-\sqrt{3})^2 = -6, \operatorname{tg}\alpha_1 = -6, \alpha_1 = \pi + \operatorname{arctg}(-6)$ – угол,

под которым в т. $(-\sqrt{3}; 0)$ график функции $f(x) = 3x - x^3$ пересекает ось OX ;

$f'(0) = 3, \operatorname{tg}\alpha_2 = 3, \alpha_2 = \operatorname{arctg}3$ – угол, под которым в т. $(0; 0)$ график функции $f(x) = 3x - x^3$ пересекает ось OX ;

$f'(\sqrt{3}) = 3 - 3(\sqrt{3})^2 = -6, \operatorname{tg}\alpha_3 = -6, \alpha_3 = \pi + \operatorname{arctg}(-6)$ – угол, под которым в т. $(\sqrt{3}; 0)$ график функции $f(x) = 3x - x^3$ пересекает ось OX ;

б) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

$f(x) = 0: \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0; x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right); f'\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \cos \pi n = \begin{cases} 1, & n = 2k; \\ -1, & n = 2k+1; k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

График функции $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ пересекает ось OX в т.

$\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; 0\right)$ под углом $\frac{\pi}{4}$, а в т. $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; 0\right)$ под углом $\frac{3\pi}{4}$;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

$f(x) = 0: x^2 - 3x + 2 = 0; x = 1; x = 2$;

$f'(x) = 2x - 3; f'(1) = -1, \operatorname{tg}\alpha_1 = -1$ и $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$ – угол, под которым в

т. $(1; 0)$ график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ пересекает ось OX ;

$f'(2) = 1, \operatorname{tg}\alpha_2 = 1$ и $\alpha_2 = 45^\circ$ – угол, под которым в т. $(2; 0)$ график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ пересекает ось OX ;

г) $f(x) = -\cos x$;

$f(x) = 0: -\cos x = 0$;

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$f'(x) = \sin x; f'\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1, \operatorname{tg}\alpha_1 = 1 \quad \alpha_1 = 45^\circ - \text{угол, под которым в}$$

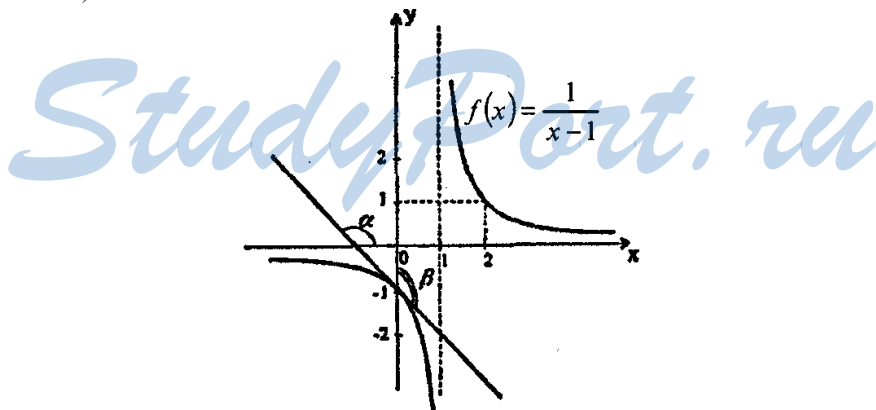
т. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right)$ график функции $f(x) = -\cos x$ пересекает ось OX ;

$$f'\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1, \operatorname{tg}\alpha_2 = -1 \text{ и } \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} - \text{угол, под которым в}$$

т. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right)$ график функции $f(x) = -\cos x$ пересекает ось OX .

260.

а)



Пусть α угол, под которым касательная к графику функции $f(x)$ в т. $(x_0; f(x_0))$ пересекает ось OX , то угол β , под которым эта касательная пересекает ось OY , равен:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}; \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{f'(x_0)};$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, f(0) = -1; f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{f'(0)} = 1;$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \text{угол, под которым в т. } (0; -1) \text{ график функции}$$

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ пересекает ось OY ;

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right); f(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}, \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{-f'(0)} = 1,$$

$\beta = \frac{3\pi}{4}$ – угол, под которым в т. $(0; -\frac{1}{2})$ график функции

$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ пересекает ось OY ;

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2; f(0) = \frac{1}{2}; f'(x) = x-1, \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{-f'(0)} = 1;$$

$\beta = \frac{\pi}{4}$ – угол, под которым в т. $(0; \frac{1}{2})$ график функции

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ пересекает ось OY ;

$$\text{г) } f(x) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right); f(0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{-f'(0)} = \frac{1}{-2\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\sqrt{3}};$$

$\beta = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ – угол, под которым в т.

$(0; \frac{1}{2})$ график функции $f(x) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ пересекает ось OY .

20. Приближенные вычисления

261.

$$\text{а) } f(2,016) \approx f(2) + (2,016 - 2) \cdot f'(2);$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2, f'(2) = 4 \cdot 8 + 2 = 34;$$

$$f(2) = 16 + 2 \cdot 2 = 20,$$

$$f(2,016) \approx 20 + 0,016 \cdot 34 = 20,544;$$

$$f(0,97) \approx f(1) + (0,97 - 1) \cdot f'(1);$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3, \quad f'(1) = 4 + 2 = 6;$$

$$f(0,97) \approx 3 - 0,03 \cdot 6 = 2,82;$$

$$\text{б) } f(x) = 5x^4 - 2;$$

$$f(1,995) \approx f(2) + (1,995 - 2) \cdot f'(2); \quad f(2) = 2^5 - 2^2 = 28;$$

$$f'(2) = 5 \cdot 16 - 2 \cdot 2 = 76;$$

$$f(1,995) \approx 28 - 0,005 \cdot 76 = 27,62;$$

$$f(0,96) \approx f(1) + (0,96 - 1) \cdot f'(1);$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 5 - 2 = 3;$$

$$f(0,96) \approx -0,04 \cdot 3 = -0,12;$$

$$\text{в) } f(x) = 3x^2 - 1; \quad f(3,02) \approx f(3) + (3,02 - 3) \cdot f'(3);$$

$$f(3) = 3^3 - 3 = 24; \quad f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26;$$

$$f(3,02) \approx 24 + 0,02 \cdot 26 = 24,52;$$

$$f(0,92) \approx f(1) + (0,92 - 1) \cdot f'(1);$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 3 - 1 = 2;$$

$$f(0,92) \approx -0,08 \cdot 2 = -0,16;$$

$$\text{r) } f(x) = 2x + 3; \quad f(5,04) \approx f(5) + (5,04 - 5) \cdot f'(5);$$

$$f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40; \quad f'(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13;$$

$$f(5,04) \approx 40 + 0,04 \cdot 13 = 40,52;$$

$$f(1,98) \approx f(2) + (1,98 - 2) \cdot f'(2);$$

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10; \quad f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7;$$

$$f(1,98) \approx 10 - 0,02 \cdot 7 = 9,86.$$

262.

$$\text{a) } 1,002^{100} = (1 + 0,002)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,002 = 1,2;$$

$$\text{б) } 0,995^6 = (1 - 0,005)^6 \approx 1 - 6 \cdot 0,005 = 0,97;$$

$$\text{в) } 1,003^{200} = (1 + 0,003)^{200} \approx 1 + 200 \cdot 0,003 = 1,6;$$

$$\text{r) } 0,998^{20} = (1 - 0,002)^{20} \approx 1 - 20 \cdot 0,002 = 0,96.$$

263.

$$\text{a) } \sqrt{1,004} = \sqrt{1 + 0,004} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,004 = 1,002;$$

$$\text{б) } \sqrt{25,012} = 5\sqrt{1,0048} \approx 5 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,00048 \right) = 5 + 0,0012 = 5,0012;$$

$$\text{в) } \sqrt{0,997} = \sqrt{1 - 0,003} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,003 = 0,9985;$$

$$\text{r) } \sqrt{4,0016} = 2\sqrt{1,0004} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,0004 \right) = 2 + 0,0004 = 2,0004;$$

264.

$$\text{a) } \operatorname{tg} 44^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 1^\circ) \approx \operatorname{tg} 45^\circ - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 45^\circ} = 1 - \frac{\pi}{90} \approx 0,9651;$$

$$\text{б) } \cos 61^\circ \approx \cos \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,4849;$$

$$\text{в) } \sin 31^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,5151;$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} 47^\circ \approx \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{45} \approx 0,9302.$$

265.

$$\text{a) } \cos \left(\frac{\pi}{6} + 0,04 \right) \approx \cos \frac{\pi}{6} - 0,04 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,04 = 0,8460;$$

$$\text{б) } \sin \left(\frac{\pi}{3} - 0,02 \right) \approx \sin \frac{\pi}{3} - 0,02 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,02 \approx 0,8560;$$

$$\text{в) } \sin \left(\frac{\pi}{6} + 0,03 \right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + 0,03 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + 0,03 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,5264;$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 0,05 \right) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 0,05 \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 1 + 2 \cdot 0,05 = 1,01.$$

266.

$$\text{a) } \frac{1}{1,003^{20}} = (1 + 0,003)^{-20} \approx 1 - 20 \cdot 0,003 = 0,94;$$

$$\text{б) } \frac{1}{0,996^{40}} = (1 - 0,004)^{-40} \approx 1 + 40 \cdot 0,004 = 1,16;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{1}{2,0016^3} &= (2 + 0,0016)^{-3} = \frac{1}{8} (1 + 0,0008)^{-3} \approx \frac{1}{8} (1 - 3 \cdot 0,0008) = \\ &= \frac{1}{8} - 0,0003 = 0,1247; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \frac{1}{0,994^5} = (1 - 0,005)^{-5} \approx 1 + 5 \cdot 0,005 = 1,03.$$

21. Производная в физике и технике

267.

а) Скорость: $v(t) = x'(t) = -\frac{1}{3}(t^3)' + 2(t^2)' + 5t' = -t^2 + 4t + 5$ (м/сек);

б) $v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$ (м/сек);

в) Остановка: $v = 0: -t^2 + 4t + 5 = 0; t = 5$ сек.

268.

$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 8t$ (м/сек);

$v(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 35$ (м/сек);

$a(t) = v'(t) = 6t - 8$ (м/сек²);

$a(5) = 6 \cdot 5 - 8 = 22$ (м/сек²).

269.

$\omega(t) = \varphi'(t) = 6t - 4$ (рад/сек);

$\omega(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 20$ (рад/сек).

270.

$\omega(t) = \varphi'(t) = 4 - 0,6t$ (рад/сек);

$\omega(2) = 4 - 2 \cdot 0,6 = 2,8$ (рад/сек).

271.

$v(t) = x'(t) = 6t^2 + 1$ (см/сек);

$a(t) = v'(t) = 12t$ (см/сек²);

а) $a = 1$ (см/сек²): $12t = 1, t = \frac{1}{12}$ сек.;

б) $a = 2$ (см/сек²): $12t = 2, t = \frac{1}{6}$ сек.

272.

$v(t) = x'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t$ (м/сек);

$a(t) = v'(t) = -t + 6$ (м/сек²);

а) $a = 0: 6 - t = 0, t = 6$ сек.;

б) $v(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 = 18$ (м/сек).

273.

$v(t) = x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}};$

$a(t) = v'(t) = -\frac{1}{4\sqrt{t}};$

$a(t) = -2v^3(t)$ – ускорение пропорционально скорости в кубе.

274.

$$\text{Имеем: } v(t) = x'(t) = 6t^2 - 2t;$$

$$a(t) = v'(t) = 12t - 2;$$

$$F(t) = m \cdot a(t);$$

$$F(2) = m \cdot (12 \cdot 2 - 2) = 22 \text{ т.}$$

275.

$$\text{Имеем: } v(t) = x'(t) = 2t + 1 \text{ (см/сек);}$$

$$a(t) = v'(t) = 2 \text{ (см/сек}^2\text{);}$$

$$\text{а) } F = m \cdot a = 2 \cdot 0,02 = 0,04 \text{ (н);}$$

$$\text{б) } E(t) = \frac{m}{2} \cdot v^2(t),$$

$$E(2) = \frac{2}{2} (2 \cdot 2 + 1)^2 \cdot 0,01^2 = 0,025 \text{ (Дж).}$$

276.

$$\rho(l) = m'(l) = 6l + 5 \text{ (г/см).}$$

$$\text{а) } \rho(10) = 6 \cdot 10 + 5 = 65 \text{ (г/см),}$$

$$\text{б) } \rho(20) = 6 \cdot 20 + 5 = 125 \text{ (г/см).}$$

277.

$$v_1(t) = x_1'(t) = 8t,$$

$$v_2(t) = x_2'(t) = 3t^2;$$

$$v_1(t) > v_2(t): 8t > 3t^2;$$

$$3t \left(t - \frac{8}{3} \right) < 0; \quad 0 < t < \frac{8}{3}.$$

При $t \in \left(0; \frac{8}{3} \right)$ скорость первой точки больше скорости второй

точки.

278.

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2;$$

$$\vec{v}_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 60^\circ;$$

$$v_1 = 5 \text{ км/ч,}$$

$$v_2(t) = S'(t) = 4t + 1 \text{ (км/с)} = 3600(4t + 1) \text{ (км/ч);}$$

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{5^2 + 3600^2(4t+1)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3600(4t+1) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)} =$$

$$= \sqrt{3600^2 \cdot 16t^2 + (3600^2 \cdot 8 + 18000 \cdot 4)t + 25 + 3600^2 + 18000} \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right).$$

§6. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

22. Признак возрастания (убывания) функции

279.

а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = \mathbb{R}$;

$f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ при $x \in D(f)$ – функция убывает на \mathbb{R} ;

б) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = (-\infty; -2]$;

$f'(x) = 2(1-x)$;

$f'(x) < 0$: $2(1-x) < 0$, $x > 1$;

$f'(x) > 0$: $2(1-x) > 0$, $x < 1$;

Функция возрастает при $x \in (-\infty; 1]$

и убывает при $x \in [1; +\infty)$;

в) $f(x) = 4x - 5$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 4 > 0$ при $x \in D(f)$ – функция возрастает на \mathbb{R} ;

г) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = \left[\frac{81}{100}; +\infty \right)$;

$f'(x) = 10x - 3$;

$f'(x) < 0$: $10(x - 0,3) < 0$; $x < 0,3$;

$f'(x) > 0$: $10(x - 0,3) > 0$; $x > 0,3$;

Функция возрастает, при $x \in [0,3; +\infty)$

и убывает при $x \in (-\infty; 0,3]$.

280.

а) $f(x) = -\frac{2}{x} + 1$;

$$D(f)=\mathbb{R}/\{0\};$$

$$E(f)=\mathbb{R}/\{1\};$$

$$f'(x)=\frac{2}{x^2};$$

$$f'(x)>0, \text{ при } x \in D(f);$$

Значит, функция возрастает на $\mathbb{R}/\{0\}$;

$$\text{б) } f(x)=x^2(x-3);$$

$$D(f)=\mathbb{R};$$

$$E(f)=\mathbb{R};$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2);$$



$$f'(x)<0, \text{ при } x \in (0;2), f'(x)>0, \text{ при } x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty).$$

Функция убывает, при $x \in [0;2]$; функция возрастает, при $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

$$\text{в) } f(x)=\frac{x-3}{x};$$

$$D(f)=\mathbb{R}/\{0\}$$

$$E(f)=\mathbb{R}/\{1\};$$

$$f'(x)=\frac{3}{x^2}; f'(x)>0, \text{ при } x \in D(f).$$

Функция возрастает на $\mathbb{R}/\{0\}$.

$$\text{г) } f(x)=x^3-27x;$$

$$D(f)=\mathbb{R};$$

$$E(f)=\mathbb{R};$$

$$f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3);$$



$$f'(x)<0 \text{ на } (-3;3), f'(x)>0 \text{ на } (-\infty;-3) \cup (3;+\infty).$$

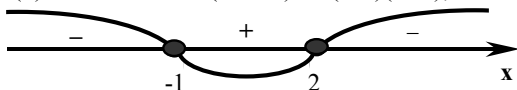
Функция убывает на $[-3;3]$, функция возрастает на $(-\infty;-3]$ и на $[3;+\infty)$.

281.

$$\text{а) } f(x)=12x+3x^2-2x^3;$$

$$D(f)=\mathbb{R}; \quad E(f)=\mathbb{R};$$

$$f'(x) = 12 + 6x - 6x^2 = -6(x^2 - x - 2) = -6(x-2)(x+1);$$



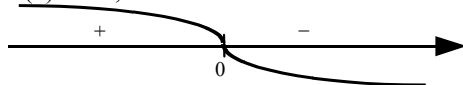
$$f'(x) < 0 \text{ на } (-\infty; -1) \cup (2; +\infty); \quad f'(x) > 0 \text{ на } (-1; 2).$$

Функция убывает на $[-\infty; -1]$ и на $[2; +\infty)$, функция возрастает на $[-1; 2]$.

б) $f(x) = 4 - x^4;$

$D(f) = \mathbb{R}; \quad E(f) = (-\infty; 4];$

$f'(x) = -4x^3;$



$$f'(x) < 0 \text{ на } (0; +\infty), \quad f'(x) > 0 \text{ на } (-\infty; 0).$$

Функция убывает на $[0; +\infty)$, функция возрастает на $(-\infty; 0]$.

в) $f(x) = x(x^2 - 12);$

$D(f) = \mathbb{R};$

$E(f) = \mathbb{R};$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2);$



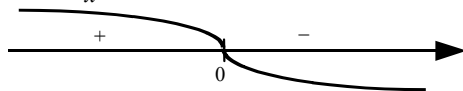
$$f'(x) < 0 \text{ на } (-2; 2); \quad f'(x) > 0 \text{ на } (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

Функция убывает на $[-2; 2]$, функция возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[2; +\infty)$.

г) $f(x) = \frac{3}{x^2};$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad E(f) = \mathbb{R}^+;$

$f'(x) = -\frac{6}{x^3};$

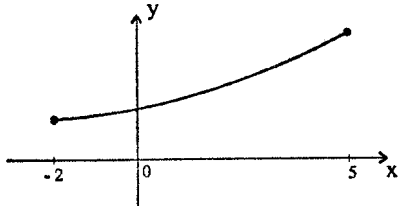


$$f'(x) > 0 \text{ на } (-\infty; 0), \quad f'(x) < 0 \text{ на } (0; +\infty).$$

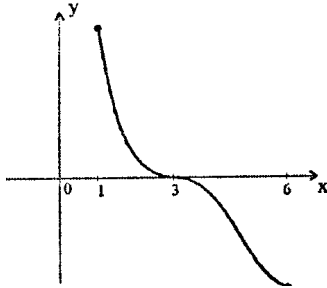
Функция возрастает на $[-\infty; 0)$, функция убывает на $(0; +\infty)$.

282.

а)

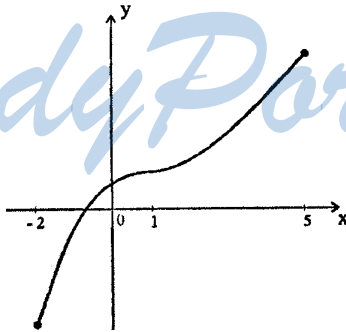


б)

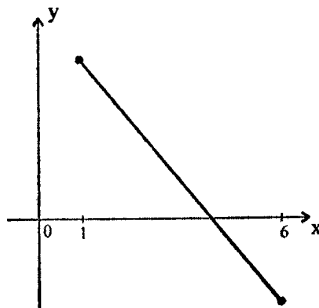


в)

StudyPort.ru



г)



283.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

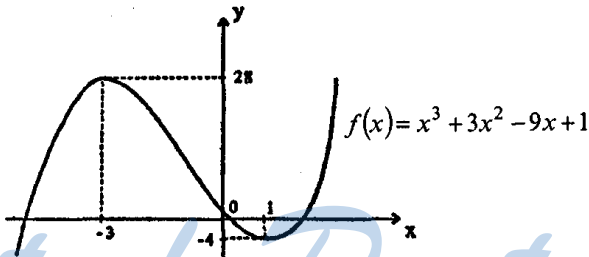
$E(f) = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$;



$f'(x) < 0$ на $(-3; 1)$, $f'(x) > 0$ на $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Функция убывает на $[-3; 1]$, функция возрастает на $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

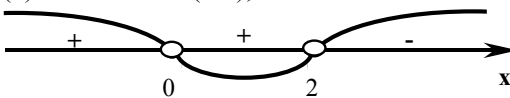


б) $f(x) = 4x^3 - 1,5x^4$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

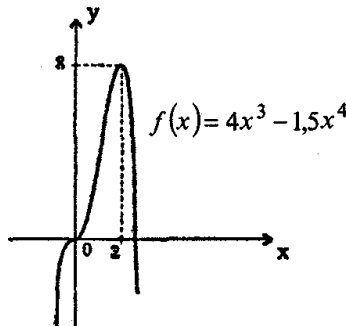
$E(f) = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 12x^2 - 6x^3 = 6x^2(2-x)$;



$f'(x) < 0$ на $(2; +\infty)$; $f'(x) > 0$ на $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Функция убывает на $[2; +\infty)$, функция возрастает на $(-\infty; 2]$.

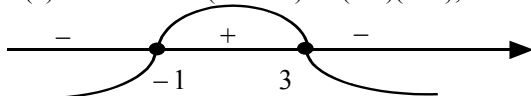


в) $f(x)=2+9x+3x^2-x^3$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

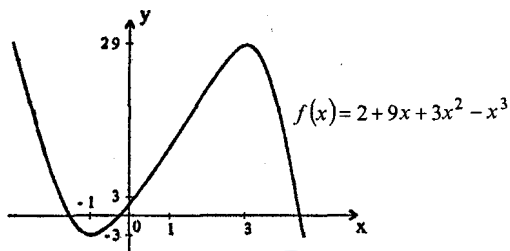
$E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=9+6x-3x^2=-3(x^2-2x-3)=-3(x-3)(x+1)$;



$f'(x) < 0$ на $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; $f'(x) > 0$ на $(-1; 3)$.

Функция убывает на $[-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$, функция возрастает на $(-1; 3]$;



г) $f(x)=x^4-2x^2$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$;

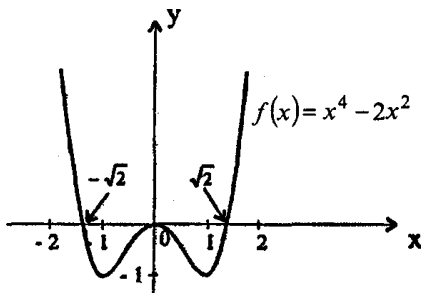


$f'(x) < 0$ на $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$; $f'(x) > 0$ на $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

Функция убывает на $[-\infty; -1] \cup [0; 1]$, функция возрастает на $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$;

$f(-x)=f(x)$ – функция четная;

$f(x)=0$, при $x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$, $x=\pm\sqrt{2}$, $x=0$;



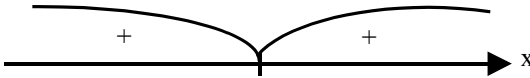
284.

$$a) f(x) = 2 - \frac{4}{0,5x - 1};$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\};$$

$$E(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\};$$

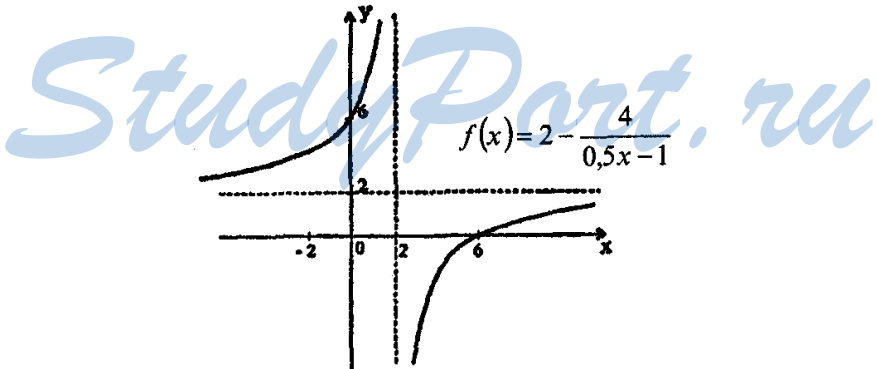
$$f'(x) = \frac{4}{(0,5x - 1)^2};$$



$$f'(x) > 0 \text{ на } D(f);$$

Функция возрастает на $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

$$f(x) = 0 \text{ при } \frac{4}{0,5x - 1} = 2, x = 6;$$



$$b) f(x) = |x-3| - 2 = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 3, \\ x - 5, & x > 3; \end{cases}$$

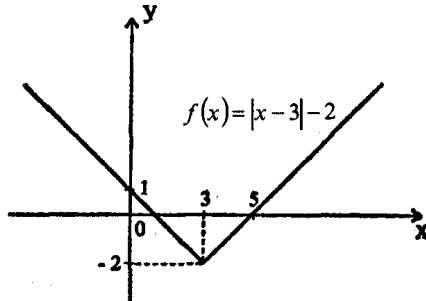
$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

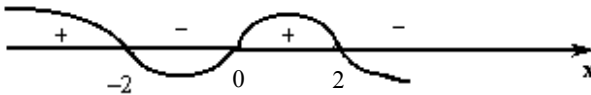
$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

Очевидно, что в точке $(3; -2)$ $f(x)$ не имеет производной; функция убывает на $(-\infty; 3]$;

функция возрастает на $[3; +\infty)$; $f(x) = 0$ при $x = 1, 5$.



в) $f(x) = 8x^2 - x^4$;
 $D(f) = \mathbb{R}$;
 $E(f) = \mathbb{R}$;
 $f'(x) = 16x - 4x^3 = -4x(x-2)(x+2)$;

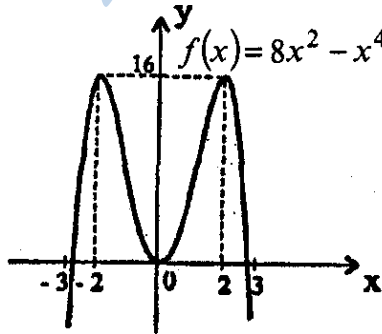


$f'(x) < 0$ на $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$, $f'(x) > 0$ на $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

Функция убывает на $[-2; 0] \cup [2; +\infty)$,

функция возрастает на $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$; $f(-x) = f(x)$ — функция четная;

$f(x) = 0$ при $x^2(2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2} + x) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2}$.



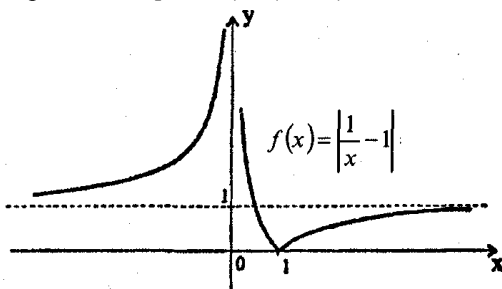
г) $f(x) = \left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 1, x < 0, \\ \frac{1}{x} - 1, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$E(f) = \mathbb{R}^+$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 1, x < 0, \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

Очевидно, что в точке $(1;0)$ $f(x)$ не имеет производной;
 функция убывает на $(0;1]$,
 функция возрастает на $[1;+\infty) \cup (-\infty;0)$.



285.

а) $f(x) = 3x + \cos 2x$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 3 - 2\sin 2x$; $3 - 2\sin 2x \geq 1$ для любого $x \in D(f)$, т.е. $f'(x) > 0$
 при $x \in \mathbb{R}$ – функция возрастает на \mathbb{R} ;

б) $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$;

$D(g) = \mathbb{R}$;

$E(g) = \mathbb{R}$;

$g'(x) = -x^2 - 1 < 0$ для любого $x \in D(g)$, т.е. функция убывает на \mathbb{R} ;

в) $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 7x^6 + 10x^4 \geq 0$ для любого $x \in D(f)$, функция возрастает на \mathbb{R} ;

г) $g(x) = -4x + \sin 3x$;

$D(g) = \mathbb{R}$;

$E(g) = \mathbb{R}$;

$g'(x) = -4 + 3\cos 3x$; $-4 + 3\cos 3x \leq -1$ для любого $x \in D(g)$, $g'(x) < 0$
 при $x \in \mathbb{R}$, т.е. функция убывает на \mathbb{R} .

286.

а) $f(x)=x^3-27x+2$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3)$ – функция возрастает

на $(-\infty; 3] \cup [3; +\infty)$, функция убывает на $[-3; 3]$;

$f(-1)=28>0$, $f(1)=-24<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-1; 1]$ –

существует единственная точка $x_0 \in [-1; 1]$: $f(x_0)=0$;

$f(4)=-42<0$, $f(6)=56>0$, $f(x)$ непрерывна и возрастает на $[4; 6]$ –

существует единственная точка $x_0 \in [4; 6]$: $f(x_0)=0$.

б) $f(x)=x^4-4x-9$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$ – функция возрастает на $[1; +\infty)$,

функция убывает на $(-\infty; 1]$;

$f(-2)=15>0$, $f(0)=-9<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-2; 0]$ –

существует единственная точка $x_0 \in [-2; 0]$: $f(x_0)=0$;

$f(2)=-1<0$, $f(3)=60>0$, $f(x)$ непрерывна и возрастает на $[2; 3]$ –

существует единственная точка $x_0 \in [2; 3]$: $f(x_0)=0$;

в) $f(x)=x^4+6x^2-8$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=4x^3+12x=4x(x^2+3)$ – функция убывает на $(-\infty; 0]$, функция возрастает на $[0; +\infty)$;

$f(-2)=32>0$, $f(-1)=-1<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-2; -1]$ – существует единственная точка $x_0 \in [-2; -1]$: $f(x_0)=0$;

$f(1)=-1<0$, $f(2)=32>0$, $f(x)$ непрерывна и возрастает на $[1; 2]$ – существует единственная точка $x_0 \in [1; 2]$: $f(x_0)=0$;

г) $f(x)=-1+3x^2-x^3$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=6x-3x^2=-3x(x-2)$ – функция возрастает на $[0; 2]$, функция убывает на $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$;

$f(-2)=19>0$, $f(0)=-1<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-2; 0]$ – существует единственная точка $x_0 \in [-2; 0]$: $f(x_0)=0$;

$f(2)=3>0$, $f(3)=-1<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[2; 3]$ – существует единственная точка $x_0 \in [2; 3]$: $f(x_0)=0$;

23. Критические точки функции, максимумы и минимумы

287.

Слева: точка x_2 , $x=0$, точка x_3 и точка x_4 ($f'(x_2)=f'(0)=f'(x_3)=0$, $f'(x_4)$ не существует и эти точки являются внутренними для $D(f)$).

Точка x_2 , точка x_4 , точка x_5 , точка x_6 , точка x_7 ($f'(x_7)=0$; $f'(x_2)$, $f'(x_4)$ и $f'(x_6)$ не существует, и все эти точки являются внутренними для $D(f)$).

288.

a) $f(x)=4-2x+7x^2$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=-2+14x$;

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f'(x)=0: x=\frac{1}{7}$;

б) $f(x)=1+\cos 2x$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=-2\sin 2x$;

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f'(x)=0: \sin 2x=0, x=\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;

в) $f(x)=x-2\sin x$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=1-2\cos x$;

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f'(x)=0: \cos x=\frac{1}{2}, x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

г) $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=4-x^2$;

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f'(x)=0: 4-x^2=0, x=\pm 2$;

289.

Слева: максимум: точки x_2 и x_4 : $f'(x_2)=f'(x_4)=0$; минимум: точка x_1 и x_3 : $f'(x_1)=f'(x_3)=0$.

Справа: максимум: точки x_1 и x_3 : $f'(x_1)$ не существует $f'(x_3)=0$; минимум: точки x_2 и x_4 : $f'(x_2)=0$, $f'(x_4)$ не существует.

290.

a) $f(x)=5+12x-x^3$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=12-3x^2=-3(x-2)(x+2)$;

$D(f')=\mathbb{R}$;



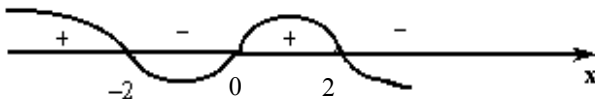
Критические точки $x = \pm 2$, где $x = -2$ – точка минимума, $x = 2$ – точка максимума.

$$б) f(x) = 9 + 8x^2 - x^4;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = -3x(x-2)(x+2);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$



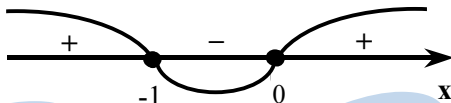
Критические точки $x = \pm 2; 0$, где $x = -2$ и $x = 2$ – точки максимума, $x = 0$ – точка минимума.

$$в) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$



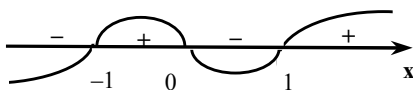
Критические точки $x = -1; 0$, где $x = -1$ – точка максимума, $x = 0$ – точка минимума.

$$г) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x-1)(x+1);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$



Критические точки $x = \pm 1; 0$, где $x = \pm 1$ – точки минимума, $x = 0$ – точка максимума.

291.

$$а) f(x) = \sqrt{x};$$

$$D(f) = [0; +\infty);$$

$$E(f) = \mathbb{R}^+;$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$D(f') = (0; +\infty).$$

Т.к. $f'(x) \neq 0$, то функция $f(x)$ не имеет критических точек.

$$\text{б) } f(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$D(f') = D(f).$$

Т.к. $f'(x) \neq 0$, то функция $f(x)$ не имеет критических точек.

$$\text{в) } f(x) = 3x - 7;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 3 > 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{R},$$

$$D(f') = \mathbb{R}.$$

Т.к. $f'(x) > 0$ для $x \in \mathbb{R}$, то функция $f(x)$ не имеет критических точек.

$$\text{г) } f(x) = 3x^5 + 2x;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 15x^4 + 2 > 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{R},$$

$$D(f') = \mathbb{R}.$$

Т.к. $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ не имеет критических точек.

292.

$$\text{а) } f(x) = \sin 2x - \cos x;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + \sin x = 2 \sin x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right),$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 0 \text{ если } x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} - \text{это критические}$$

точки функции.

Точки $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ – точки максимума, точки

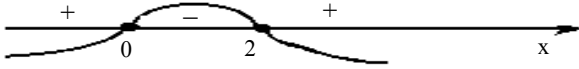
$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ – точки минимума функции.

$$\text{б) } f(x) = 2x + \frac{8}{x^2};$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f'(x) = 2 - \frac{16}{x^3},$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$



Единственной критической точкой для $f(x)$ является $x=2$,

т.к. $f'(2)=0$;

в) $f(x)=10\cos x+\sin 2x-6x$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=-10\sin x+2\cos 2x-6$,

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f''(x)=0: f''(x)=2(1-2\sin^2 x)-10\sin x-6=0; \quad 2\sin^2 x+5\sin x+2=0.$

$\sin x=-\frac{1}{2}; \quad x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Критическая точка: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

г) $f(x)=x^3-4x+8$;

$D(f)=\mathbb{R}; E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=3x^2-4=3\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;

$f''(x)=0$ или $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Критические точки: $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

293.

а) $f(x)=(x-2)^3$;

$D(f)=\mathbb{R}; E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=3(x-2)^2, D(f')=\mathbb{R}; \quad f'(x)=0$ при $x=2$ – критическая точка;

б) $f(x)=\begin{cases} -x-2, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 2-x, & x \geq 1; \end{cases}$

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=\begin{cases} -1, & x < -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ -1, & x > 1; \end{cases}$

Т.к. в точке $x=-1$ и $x=1$ $f'(x)$ не существует, то $x=\pm 1$ – критические точки $f(x)$;

в) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$;

$D(f)=\mathbb{R}/\{0\}$;

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2},$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f'(x) = 0: \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} = 0, \quad x = \pm 3 - \text{критические точки};$$

$$r) f(x) = \begin{cases} x+6, & x < -2, \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2, D(f) = \mathbb{R}; \\ 6-x, & x > 2; \end{cases}$$

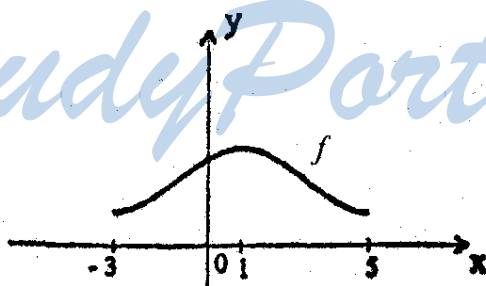
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < -2, \\ 2x, & -2 < x < 2, \\ -1, & x > 2; \end{cases}$$

$f'(x) = 0$, при $x = 0$ - критическая точка.

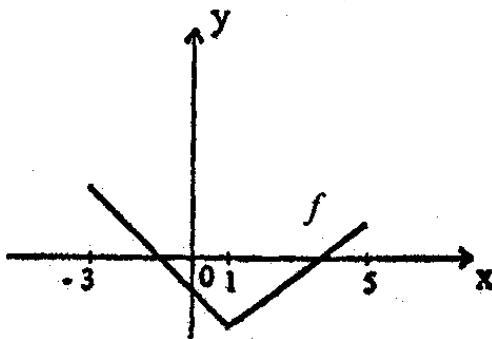
Т.к. в точках $x = -2$ и $x = 2$ $f'(x)$ не существует, то $x = \pm 2$ - критические точки.

294.

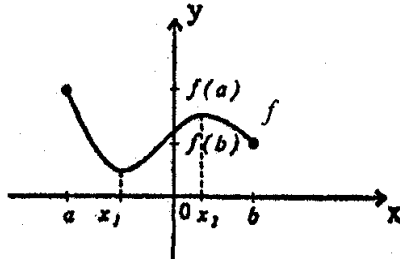
а)



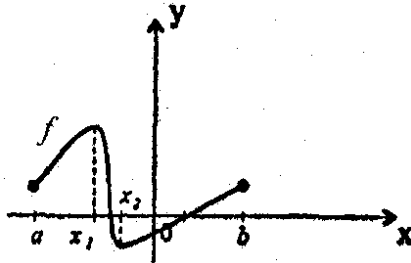
б)



в)



г)



295.

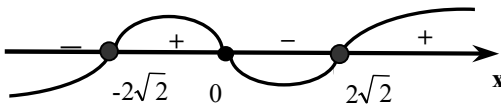
$$a) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = [-32; +\infty);$$

$$f'(x) = 2x^3 - 16x = 2x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2});$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$



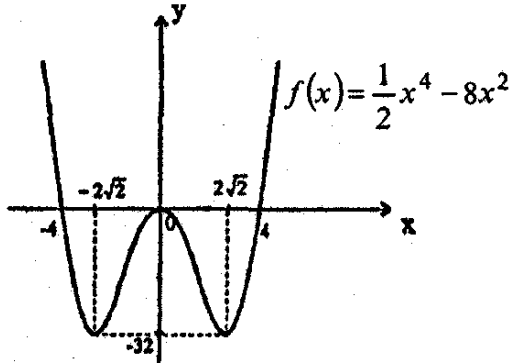
Функция убывает на $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [0; 2\sqrt{2}]$; функция возрастает на $[-2\sqrt{2}; 0] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.

Точки $x = -2\sqrt{2}$ и $x = 2\sqrt{2}$ - точки минимума, $x = 0$ - точка максимума;

$$f(0) = 0; f(x) = f(-x) \text{ - функция является четной};$$

$$f(x) = 0: \frac{1}{2}x^2(x-4)(x+4) = 0, x = 0, x = \pm 4 \text{ - точки пересечения функции}$$

с осью x ;



$$б) f(x) = \frac{3x}{1+x^2};$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

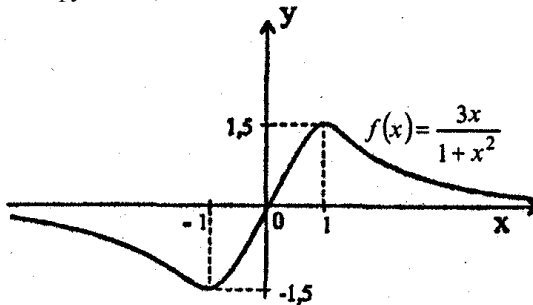
$$E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right];$$

$$f'(x) = \frac{3(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2};$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$



Функция убывает на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, функция возрастает на $[-1; 1]$. Точка $x = -1$ – точка минимума;
 $x = 1$ – точка максимума $f(x)$;
 $f(x) = -f(-x)$ – функция является нечетной;
 $(0; 0)$ – точка функции;



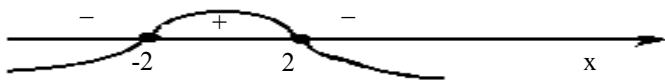
$$в) f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+2);$$

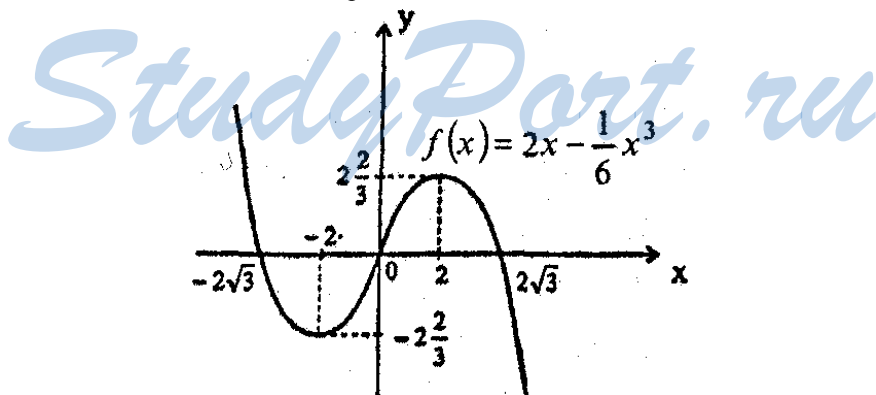
$$D(f') = \mathbb{R};$$



Функция убывает на $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, функция возрастает на $[-2; 2]$. Точка $x = -2$ – точка минимума; $x = 2$ – точка максимума.

$$f(x) = 0: -\frac{1}{6}x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3}) = 0;$$

$x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$ – точка пересечения с осью x ;



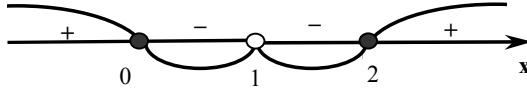
$$г) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

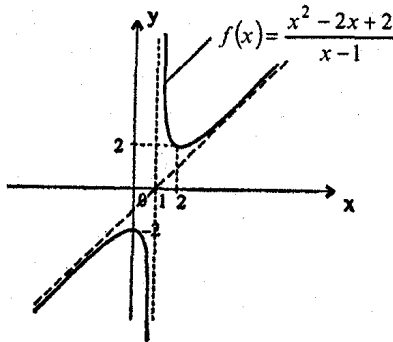
$$E(f) = \mathbb{R} / (-2; 2);$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2};$$

$$D(f') = D(f);$$



Функция возрастает на $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$, функция убывает на $[0; 1) \cup (1; 2]$. $x=0$ – точка максимума;
 $f(0)=-2$.



24. Примеры применения производной к исследованию функций

296.

a) $f(x)=x^2-2x+8$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

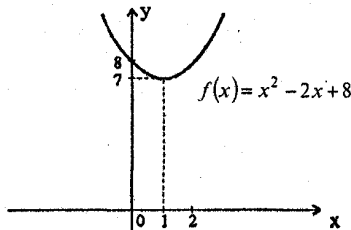
$E(f)=[7; +\infty)$;

$f(x)$ является функцией общего вида.

$x^2-2x+8=0$ – не имеет решений;

$f(0)=8$; $f'(x)=2(x-1)$, $D(f')=\mathbb{R}$;

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f(x)$	↘	7	↗
		min	



$$б) f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3};$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \left[-\infty; \frac{25}{24} \right];$$

$f(x)$ - функция общего вида;

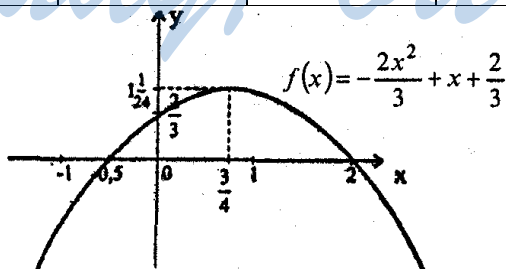
$$-\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3} = 0;$$

$$f(0) = \frac{2}{3};$$

$$f'(x) = -\frac{4x}{3} + 1 = -\frac{4}{3} \left(x - \frac{3}{4} \right);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

x	$\left(-\infty; \frac{3}{4} \right)$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}; +\infty \right)$
f(x)	→	$1\frac{1}{24}$ max	→



$$в) f(x) = -x^2 + 5x + 4;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \left(-\infty; \frac{41}{4} \right];$$

$f(x)$ - функция общего вида.

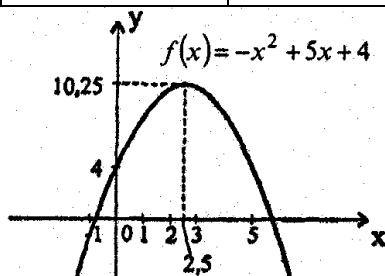
$$-x^2 + 5x + 4 = 0;$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}; x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}; f(0) = 4;$$

$$f'(x) = -2x + 5 = -2(x - 2,5);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

x	$(-\infty; 2,5)$	2,5	$(2,5; +\infty)$
f(x)	↗	10,25	↘
		max	



$$r) f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4};$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \left[\frac{63}{256}; +\infty \right);$$

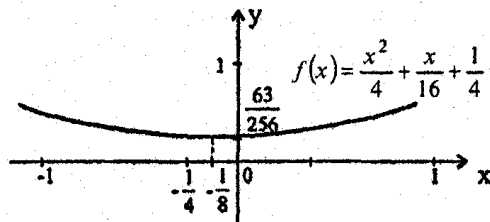
f(x) - функция общего вида.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4} = 0 - \text{нет решений};$$

$$f(0) = \frac{1}{4};$$

$$f'(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{8} \right).$$

x	$\left(-\infty; \frac{1}{8} \right)$	$-\frac{1}{8}$	$\left(-\frac{1}{8}; +\infty \right)$
f(x)	↘	$\frac{63}{256}$	↗
		min	



297.

a) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

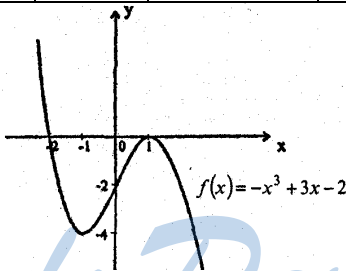
$E(f) = \mathbb{R}$;

$f(x)$ – функция общего вида.

$(x-1)(x^2+x-2)=0$; $x=1$, $x=-2$; $f(0)=-2$;

$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$;

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘
		min		max	



б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

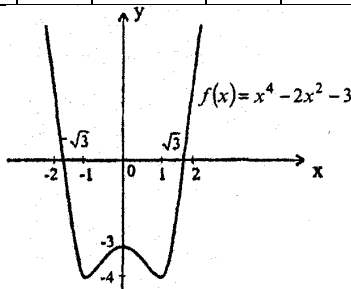
$E(f) = [-4; +\infty)$;

$f(-x) = f(x)$ – функция четная.

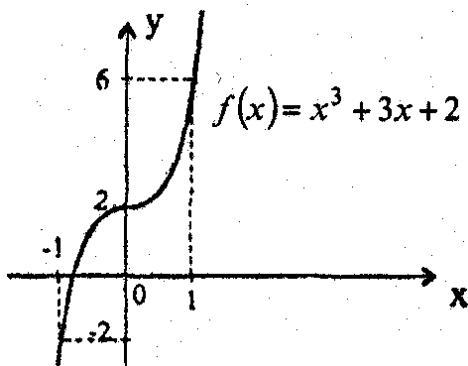
$(x^2-3)(x^2+1)=0$, $x = \pm\sqrt{3}$; $f(0) = -3$;

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$;

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗
		min		max		min	



в) $f(x)=x^3+3x+2$;
 $D(f)=\mathbb{R}$;
 $E(f)=\mathbb{R}$;

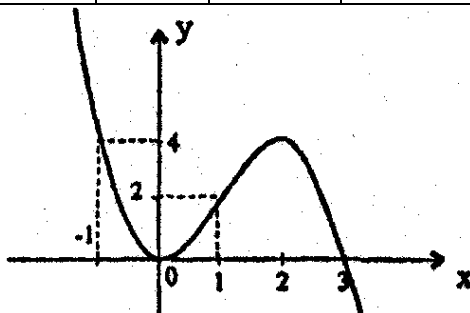


$f(x)$ — функция общего вида.
 $f(0)=0$; $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)>0$ — функция возрастает на \mathbb{R} ;

г) $f(x)=3x^2-x^3$;
 $D(f)=\mathbb{R}$;
 $E(f)=\mathbb{R}$;

$f(x)$ — функция общего вида;
 $x^2(3-x)=0$; $x=0$, $x=3$;
 $f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$;

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘
		min		max	



298.

a) $f(x)=1+1,5x-3x^2-2,5x^3$;

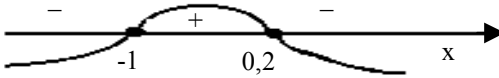
$D(f)=\mathbb{R}$;

$E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=1,5-6x-7,5x^2$;

$D(f')=\mathbb{R}=D(f)$;

$f'(x)=0 : -1,5(5x^2+4x-1)=0; \quad x=-1, \quad x=0,2$;



Функция убывает на $(-\infty; -1] \cup [0,2; +\infty)$, возрастает на $[-1; 0,2]$.

б) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-6x+1$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=x^4-x^2-6$;

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f'(x)=0 : (x^2-3)(x^2+2)=0; \quad x=\pm\sqrt{3}$;



Функция возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$, убывает на $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

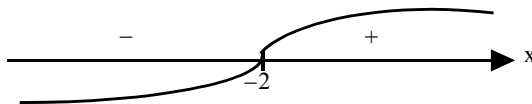
в) $f(x)=\frac{x^4}{4}+8x-5$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=x^3+8$;

$D(f')=\mathbb{R}=D(f)$;

$f'(x)=0 : (x+2)(x^2-2x+4)=0; \quad x=-2$;



Функция убывает на $(-\infty; -2]$ и возрастает на $[-2; +\infty)$.

г) $f(x)=x^3-6x^2-15x-2$;

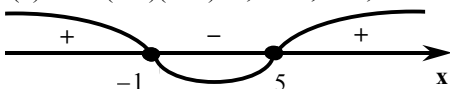
$D(f)=\mathbb{R}$;

$E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=3x^2-12x-15$;

$D(f')=\mathbb{R}=D(f)$;

$$f'(x)=0 : 3(x-5)(x+1)=0; x=-1, x=5;$$



Функция возрастает на $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ и убывает на $[-1; 5]$.

299.

a) $f(x)=2x-\cos x; \quad D(f)=\mathbb{R}; \quad f'(x)=2+\sin x > 0$

б) $f(x)=x^5+4x; \quad D(f)=\mathbb{R}; \quad f'(x)=5x^4+4 > 0;$

в) $f(x)=\sin x + \frac{3x}{2}; \quad D(f)=\mathbb{R}; \quad f'(x)=\cos x + \frac{3}{2} > 0;$

г) $f(x)=2x^3+x-5; \quad D(f)=\mathbb{R}; \quad f'(x)=6x^2+1 > 0.$

300.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5;$

$D(f)=\mathbb{R}; \quad E(f)=\mathbb{R};$

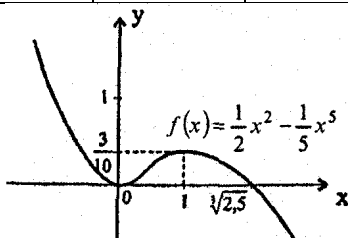
$f(x)$ – функция общего вида;

$f(x)=0 : \frac{1}{5}x^2(2,5-x^3)=0; \quad x=0, \quad x=\sqrt[3]{2,5} \approx 1,4;$

$f'(x)=x-x^4=x(x-1)(1+x+x^2),$

$D(f')=\mathbb{R}=D(f);$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		0		$\frac{3}{10}$	



б) $f(x)=4x^2-x^4;$

$D(f)=\mathbb{R};$

$E(f)=(-\infty; 4];$

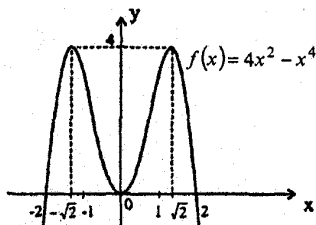
$f(-x)=f(x)$ — функция четная;

$f(x)=0 : x^2(2-x)(2+x)=0, \quad x=0, \quad x=\pm 2;$

$f'(x)=8x-4x^3=4x(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x),$

$D(f')=\mathbb{R};$

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	\rightarrow	4	\rightarrow	0	\rightarrow	-4	\rightarrow
		max		min		max	



$$в) f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

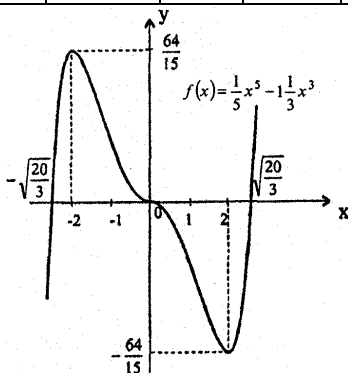
$f(-x) = -f(x)$ – функция является нечетной;

$$f(x) = 0 : \frac{1}{5}x^3 \left(x^2 - \frac{20}{3} \right) = 0; \quad x = 0, \quad x = \pm \sqrt{\frac{20}{3}};$$

$$f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2);$$

$$D(f') = \mathbb{R} = D(f);$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	\rightarrow	$\frac{64}{15}$	\rightarrow	0	\rightarrow	$-\frac{64}{15}$	\rightarrow
		max				min	



$$r) f(x)=5x^3-3x^5;$$

$$D(f)=R;$$

$$E(f)=R;$$

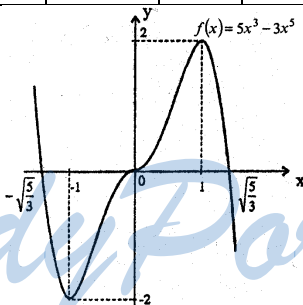
$f(-x)=-f(x)$ – функция является нечетной;

$$f(x)=0 : -3x^3 \left(x^2 - \frac{5}{3} \right) = 0; \quad x=0, \quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1,3;$$

$$f'(x)=15x^2-15x^4=15x^2(1-x)(1+x),$$

$$D(f')=R=D(f);$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	
f(x)	↗	-2	↗	0	↗	2	↗
		min				max	



301.

$$a) f(x)=x^2\sqrt{1+x};$$

$$D(f)=[-1; +\infty); \quad E(f)=R^+;$$

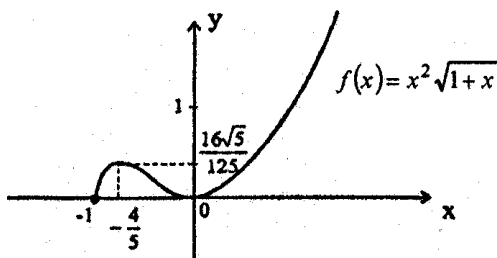
$f(x)$ — функция общего вида;

$$f(x)=0 \text{ при } x=-1; 0;$$

$$f'(x)=2x\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{1+x}} = \frac{5x\left(x+\frac{4}{5}\right)}{2\sqrt{1+x}},$$

$$D(f')=(-1; +\infty);$$

x	$\left(-1; -\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\left(-\frac{4}{5}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f(x)	↗	$\frac{16\sqrt{5}}{125}$	↘	0	↗
		max		min	



$$б) f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3};$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = [-3; 1];$$

$f(x)$ – функция общего вида;

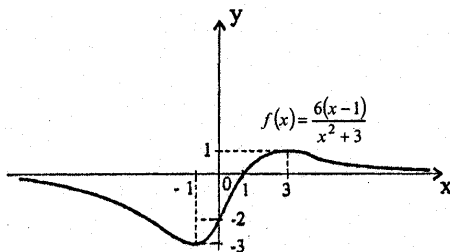
$$f(x) = 0, \text{ если } x = 1;$$

$$f(0) = -2;$$

$$f'(x) = \frac{6(x^2+3) - 6(x-1)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-6(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2};$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘
		min		max	



$$в) f(x) = x\sqrt{2-x};$$

$$D(f) = (-\infty; 2];$$

$$E(f) = (-\infty; 1];$$

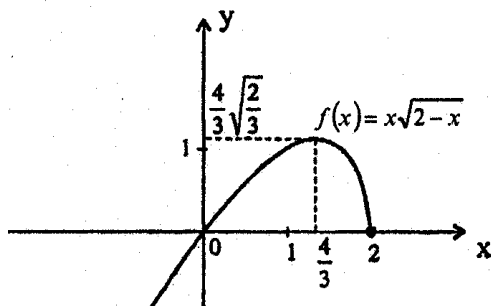
$f(x)$ – функция общего вида;

$$f(x) = 0, \text{ если } x = 0; 2;$$

$$f'(x) = \sqrt{2-x} - \frac{x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2(2-x) - x}{2\sqrt{2-x}};$$

$$D(f') = (-\infty; 2);$$

x	$\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}; 2\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\rightarrow	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,1$	\rightarrow
		max	



$$r) f(x) = \frac{2x}{1-x^2};$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\};$$

$$E(f) = \mathbb{R};$$

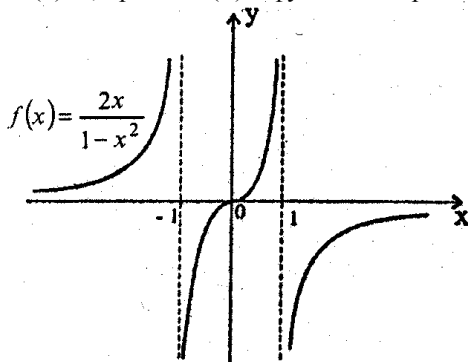
$f(-x) = -f(x)$ – функция является нечетной;

$f(x) = 0$, если $x = 0$;

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) + 2x \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2},$$

$$D(f') = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty);$$

$f'(x) > 0$, при $x \in D(f')$ – функция возрастает на $D(f)$;



302.

a) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$;

$D(f) = \mathbb{R}$;

$E(f) = \left[-\frac{1}{4}; 2\right]$;

$f(-x) = -f(x)$ – функция общего вида;

$f(x) = 0 : \sin(\sin x + 1) = 0, x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \sin^2(x + 2\pi) = \sin x + \sin^2 x$ для любого $x \in D(f)$ – функция периодическая с $T = 2\pi$;

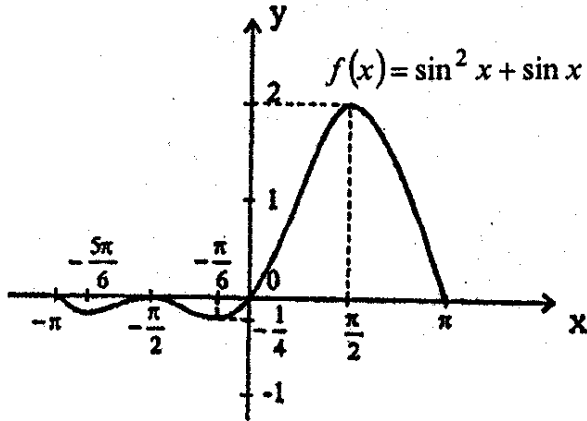
$f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x = 2\cos x \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$;

$D(f') = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 0 : \cos x = 0, \sin x = -\frac{1}{2}$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

x	$\left(-\pi + 2\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$	$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$	$\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-\frac{1}{4}$	
		min	
x	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	0		$-\frac{1}{4}$
	max		min
x	$\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		2	
		max	



$$б) f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$f(-x) = -f(x)$ – функция является нечетной;

$f(x) = 0$, при $x = 0$;

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2};$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

Рисунок смотри в предыдущих номерах;

$$в) f(x) = \cos^2 x - \cos x;$$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$E(f) = \left[-\frac{1}{4}; 2 \right];$$

$f(-x) = f(x)$ – функция является четной;

$$f(x) = 0 : \cos x (\cos x - 1) = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

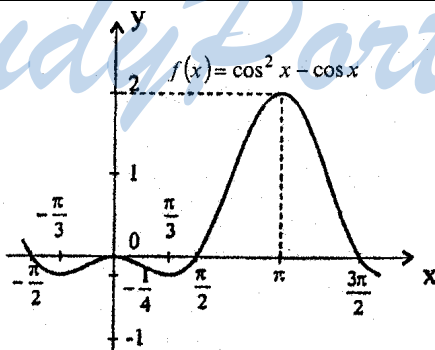
$$f(0) = 0;$$

$f(x+2\pi) = \cos^2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) = \cos^2 x - \cos x = f(x)$ – функция периодическая с $T = 2\pi$;

$$f'(x) = 0: \sin x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

x	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$	$-\frac{\pi}{3}+2\pi n$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; 2\pi n\right)$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	→	$-\frac{1}{4}$	→
		min	
x	$2\pi n$	$\left(2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$	$\frac{\pi}{3}+2\pi n$
$f'(x)$	0	-	0
f(x)	0	→	$-\frac{1}{4}$
	max		min
x	$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$	$\pi+2\pi n$	$\left(\pi+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$
$f'(x)$	+	0	-
f(x)	→	2	→
		max	



$$r) f(x) = \frac{x}{x-1};$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$E(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

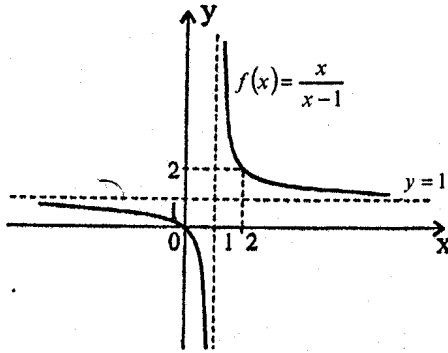
$f(x)$ – функция общего вида;

$f(x) = 0$, если $x = 0$;

$$f'(x) = \frac{x-1+x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2},$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$f'(x) < 0$ при $x \in D(f')$, $f(x)$ убывает на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
 Прямая $y=1$ – горизонтальная асимптота для $f(x)$;
 $x=1$ – вертикальная асимптота.



303.

a) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$;

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1;$$

$$D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$f'(x) > 0: \frac{1}{\cos^2 x} > 1.$$

Следовательно, на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) > 0$,

т.е. функция $f(x)$ возрастает на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$;

$$D(f) = (0; +\infty) = \mathbb{R}^+;$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2},$$

$$D(f') = (0; +\infty) = D(f);$$

$f'(x) > 0$, $f(x)$ возрастает на $(0; +\infty)$.

Т.к. $[1; +\infty) \subset (0; +\infty)$, то $f(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$;

в) $f(x)=x-\sin x$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=1-\cos x$,

$D(f')=\mathbb{R}=D(f)$;

$f'(x) \geq 0$, $f(x)$ возрастает на $(0; +\infty)$;

г) $f(x)=x+\frac{\pi}{2}-\cos x$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=1+\sin x$,

$D(f')=\mathbb{R}$;

$f'(x) > 0$, для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

304.

$f(x)=4x^3-3x^2-36x-10$;

$D(f)=\mathbb{R}$;

$E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=12x^2-6x-36=12(x+1,5)(x-2)$;

x	$(-\infty; -1,5)$	-1,5	$(-1,5; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	23,75	↘	-62	↗
		max		min	

На $(-\infty; -1,5)$ $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до 23,75 – существует точка

$x_0 \in (-\infty; -1,5)$: $f(x_0)=0$;

на $(-1,5; 2)$ $f(x)$ убывает от 23,15 до -62 – существует точка

$x_1 \in (-1,5; 2)$: $f(x_1)=0$;

на $(2; +\infty)$ $f(x)$ возрастает от -62 до $+\infty$ – существует точка

$x_2 \in (2; +\infty)$: $f(x_2)=0$.

Итак, уравнение $4x^3-3x^2-36x-10=0$ имеет 3 корня.

б) $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x$;

$D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=\mathbb{R}$;

$f'(x)=x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)(x-3)=(x-3)(x-1)(x+1)$;

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-2,25	↗	1,75	↘	-2,25	↗
		min		max		min	

Из таблицы видно, что $f(x)$ имеет 4 корня.

$b) f(x)=x^4-4x^3-9;$
 $D(f)=\mathbb{R};$
 $E(f)=\mathbb{R};$
 $f'(x)=x^3-12x^2=x^2(x-3);$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f(x)		-9		-36	
				min	

На $(-\infty; 0)$ $f(x)$ убывает от $-\infty$ до -9 – существует точка $x_0 \in (-\infty; 0): f(x_0)=0;$
 на $(0; 3)$ $f(x)$ убывает от -9 до -36 – $f(x)$ не имеет корней;
 на $(3; +\infty)$ $f(x)$ возрастает от -36 до $+\infty$ – существует точка $x_2 \in (3; +\infty): f(x_2)=0.$
 Итак, уравнение $x^4-4x^3-9=0$ имеет 2 корня на $\mathbb{R}.$

$г) f(x)=x^2-\frac{x^3}{3}-1;$

$D(f)=\mathbb{R};$
 $E(f)=\mathbb{R};$
 $f'(x)=2x-x^2=x(2-x);$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f(x)		-1		$\frac{1}{3}$	
		min		max	

На $(-\infty; 0)$ $f(x)$ убывает от $-\infty$ до -1 – существует точка $x_0 \in (-\infty; 0): f(x_0)=0;$
 на $(0; 2)$ $f(x)$ возрастает от -1 до $\frac{1}{3}$ – существует точка $x_1 \in (0; 2): f(x_1)=0;$
 на $(2; +\infty)$ $f(x)$ убывает от $\frac{1}{3}$ до $-\infty$ – существует точка $x_2 \in (2; +\infty): f(x_2)=0.$
 Итак, уравнение $x^2-\frac{x^3}{3}-1=0$ имеет 3 корня на $\mathbb{R}.$

25. Наибольшее и наименьшее значения функции

305.

а) $f(x)=x^4-8x^2-9$;

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$, при $x=0; \pm 2$;

$f(-1)=-16$, $f(0)=-9$, $f(1)=-16$.

$\max_{[-1;1]} f(x)=f(0)=-9$, $\min_{[-1;1]} f(x)=f(1)=f(-1)=-16$;

$f(2)=25$; $f(3)=0$;

$\max_{[0;3]} f(x)=f(3)=0$, $\min_{[0;3]} f(x)=f(2)=-25$;

б) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$;

$D(f')=R \setminus \{0\}$;

$f'(x)=0$, если $x=\pm 2$;

$f(-4)=-5$, $f(-2)=-4$, $f(-1)=-5$;

$\max_{[-4;-1]} f(x)=f(-2)=-4$, $\min_{[-4;-1]} f(x)=f(-4)=f(-1)=-5$;

$f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(3)=\frac{13}{3}$;

$\max_{[1;3]} f(x)=f(1)=5$, $\min_{[1;3]} f(x)=f(2)=4$;

в) $f(x)=3x^5-5x^3$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)(x+1)$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$ при $x=0; \pm 1$;

$f(0)=0$, $f(1)=-2$, $f(2)=56$;

$\max_{[0;2]} f(x)=f(2)=56$, $\min_{[0;2]} f(x)=f(1)=-2$;

$f(3)=594$;

$\max_{[2;3]} f(x)=f(3)=594$, $\min_{[2;3]} f(x)=f(2)=56$;

г) $f(x)=\frac{x}{x+1}$;

$D(f)=R \setminus \{-1\}$;

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$f(-3) = 1,5, \quad f(-2) = 2;$$

$$\max_{[-3;-2]} f(x) = f(-2) = 2, \quad \min_{[-3;-2]} f(x) = f(-3) = 1,5;$$

$$f(1) = 0,5, \quad f(5) = \frac{5}{6};$$

$$\max_{[1;5]} f(x) = f(5) = \frac{5}{6}, \quad \min_{[1;5]} f(x) = f(1) = 0,5.$$

306.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x;$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 0, \text{ при } x = -3; 1;$$

$$f(-4) = 20, \quad f(-3) = 27, \quad f(0) = 0;$$

$$\max_{[-4;0]} f(x) = f(-3) = 27, \quad \min_{[-4;0]} f(x) = f(0) = 0;$$

$$f(3) = 27, \quad f(4) = 76;$$

$$\max_{[3;4]} f(x) = f(4) = 76, \quad \min_{[3;4]} f(x) = f(3) = 27;$$

$$\max_{[-4;0]} f(x) = \min_{[3;4]} f(x);$$

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4;$

$$D(f) = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1);$$

$$D(f') = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 0, \text{ при } x = 0; \pm 1;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{9}{16} \text{ (} f(x) \text{ — четная),} \quad f(0) = 4;$$

$$\max_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} f(x) = f(0) = 4, \quad \min_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{9}{16};$$

$$f(2) = 12, \quad f(3) = 67;$$

$$\max_{[2;3]} f(x) = f(3) = 67, \quad \min_{[2;3]} f(x) = f(2) = 12;$$

$$\max_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} f(x) < \min_{[2;3]} f(x);$$

307.

$$s(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3.$$

$$D(s)=[0;+\infty);$$

$$v(t)=s'(t)=24t-2t^2=-2t(t-12), \quad D(s')=[0;+\infty);$$

$$v'(t)=24t-4t=4(6-t),$$

$$D(v')=[0;+\infty);$$

$$v'(t)=0, \text{ при } t=6 \text{ (с);}$$

$$v(4)=64(\text{м/с}); \quad v(6)=72(\text{м/с}); \quad v(10)=40(\text{м/с});$$

$$\max_{[4;10]} v(t)=v(6)=72(\text{м/с}) - \text{наибольшая скорость, при } t=6\text{с.}$$

308.

$$f(x)=21x+2x^2-\frac{x^3}{3};$$

$$D(f)=\mathbb{R};$$

$$f'(x)=21+4x-x^2,$$

$$D(f')=\mathbb{R};$$

$$f''(x)=4-2x=2(2-x),$$

$$D(f'')=\mathbb{R};$$

$$f''(x)=0, \text{ при } x=2;$$

$$f'(-2)=9, \quad f'(2)=25, \quad f'(5)=16;$$

$$\max_{[-2;5]} f'(x)=f'(2)=25, \quad \min_{[-2;5]} f'(x)=f'(-2)=9;$$

309.

$$v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t=-2t(t-12);$$

$$a(t)=v'(t)=\frac{1}{2}t^2-12=\frac{1}{2}(t-2\sqrt{6})(t+2\sqrt{6}),$$

$$D(a)=[0;+\infty);$$

$$a'(t)=t, \quad D(a')=[0;+\infty);$$

$$a(10)=38\left(\frac{M}{c^2}\right); \quad a\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3;$$

$$\min_{[10;50]} a(t)=a(10)=38\left(\frac{M}{c^2}\right).$$

310.

$$a) f(x)=2\sin x+\cos 2x;$$

$$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x),$$

$$D(f')=\mathbb{R};$$

$$f'(x)=0, \text{ если } x=\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и } x=(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{на } [0; 2\pi]; f'(x)=0, \text{ если } x=\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6};$$

$$f(0)=1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3;$$

$$\max_{[0; 2\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1,5; \quad \min_{[0; 2\pi]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3;$$

$$\text{б) } f(x)=1,5x^2 + \frac{81}{x};$$

$$D(f)=\mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f'(x)=3x - \frac{81}{x^2} = 3x \left(1 - \frac{27}{x^3}\right) = 3x \left(1 - \frac{3}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}\right);$$

$$D(f')=\mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f'(x)=0, \text{ при } x=3;$$

$$f(1)=82,5; \quad f(3)=40,5; \quad f(4)=44,25;$$

$$\max_{[1; 4]} f(x)=f(1)=82,5; \quad \min_{[1; 4]} f(x)=f(3)=40,5;$$

$$\text{в) } f(x)=2\sin x + \sin 2x;$$

$$f'(x)=2\cos x + 2\cos 2x = 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2;$$

$$D(f')=\mathbb{R};$$

$$f'(x)=0: 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \quad \cos x = -1, \quad \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{на } \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]: f'(x)=0 \text{ при } x=\pi; \frac{\pi}{3};$$

$$f(0)=1, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f(\pi)=0, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2;$$

$$\max_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \min_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2;$$

$$\text{г) } f(x)=x + \frac{1}{x+2};$$

$$D(f)=\mathbb{R} \setminus \{-2\};$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2};$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2\};$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = -1; -3;$$

$$f(-5) = -\frac{16}{3}, \quad f(-3) = -4, \quad f(-2,5) = -4,5;$$

$$\max_{[-5; -2,5]} f(x) = f(-3) = -4, \quad \min_{[-5; -2,5]} f(x) = f(-5) = -\frac{16}{3}.$$

311.

Пусть одно из слагаемых равно x , тогда второе $24-x$. Рассмотрим $f(x) = x^2 + (24-x)^2$. Найдем $\min_{[0; 24]} f(x)$:

$$f'(x) = 2x - 2(24-x) = 4(x-12),$$

$$D(f') = [0; 24];$$

$$f'(x) = 0, \text{ при } x = 12;$$

$$f(0) = 576 = f(24), \quad f(12) = 288;$$

$$\min_{[0; 24]} f(x) = f(12) = 288;$$

Первое слагаемое $x = 12$, а второе слагаемое равно $24 - 12 = 12$.

312.

Пусть одно из слагаемых равно y , тогда второе $4-y$. Рассмотрим $g(y) = y(4-y)$. Найдем $\max_{[0; 4]} g(y)$:

$$g'(y) = 4 - y - y = 2(2-y),$$

$$D(g') = [0; 4];$$

$$g'(y) = 0, \text{ при } y = 2;$$

$$g(0) = g(4) = 0, \quad g(2) = 4;$$

$$\max_{[0; 4]} g(y) = g(2) = 4.$$

Т.е. $y = 2$ и $4 - y = 2$.

313.

Пусть длина меньшей стороны прямоугольника равна x (м), тогда длина второй стороны равна $(24-x)$ м.

Площадь прямоугольника, как функция x , есть $s(x) = x(24-x)$ (м²), при $x \in (0; 24)$. Найдем $\max_{[0; 24]} s(x)$:

$$s'(x) = 24 - 2x = 2(12-x),$$

$$D(s') = [0; 24].$$

$$s(0) = s(24) = 0, \quad s(12) = 144;$$

$$\max_{[0;24]} s(x)=s(12)=144.$$

Следовательно, длина меньшей стороны должна быть 12 м, длина большей стороны $24-12=12$ м.

Ответ: 12м.

314.

Пусть первое слагаемое равно x , второе $2x$ – согласно условию, тогда третье $54-3x$. Рассмотрим функцию $h(x)=3x \cdot 2x(18-x)$. Будем искать $\max_{[0;18]} h(x)$:

$$h'(x)=216x-18x^2=18x(12-x);$$

$$h'(x)=0, \text{ при } x=0;12;$$

$$h(0)=h(18)=0, \quad h(12)=5184;$$

$$\max_{[0;18]} h(x)=h(12)=5184.$$

Итак, первое слагаемое равно 12, второе $2 \cdot 12=24$, третье $54-3 \cdot 12=18$.

Ответ: 12; 24; 18.

315.

Пусть один из сомножителей равен t , тогда другой равен $\frac{16}{t}$.

Рассмотрим $f(t)=t^2+\left(\frac{16}{t}\right)^2$, и $D(f)=(0;+\infty)$.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения $f(t)$ на $(0;+\infty)$.

$$f'(t)=2t-\frac{2 \cdot 256}{t^3}=\frac{2(t^4-256)}{t^3}=\frac{2(t-4)(t+4)(t^2+16)}{t^3};$$

на $(0;+\infty)$: $f'(t)<0$, при $t \in (0;4)$, $f'(t)=0$ при $t=4$ – точка минимума $f(t)$, при $t=4$ – минимум.

Итак, один сомножитель равен 4, другой равен $\frac{16}{4}=4$.

Ответ: 4 и 4.

316.

Пусть длина одной стороны равна x (см), тогда длина другой стороны равна $\frac{64}{x}$ (см).

Тогда периметр прямоугольника равен $P(x)=2\left(x+\frac{64}{x}\right)$, причем

$D(P)=(0;+\infty)$.

Найдем $\min_{[0; +\infty)} P(x)$.

$$P'(x) = 2 - \frac{128}{x^2} = \frac{2(x-8)(x+8)}{x^2};$$

на $(0; +\infty)$: $P'(x) < 0$, при $x \in (0; 8)$; $P'(x) = 0$, при $x = 8$ и $P'(x) > 0$, при $x \in (8; +\infty)$. Точка $x = 8$ – точка минимума для $P(x)$ на $(0; +\infty)$, свое наименьшее значение $P(x)$ достигает при $x = 8$.

Длина сторон прямоугольника должна быть равна 8 (см).

Ответ: 8 (см) и 8 (см).

317.

$S = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.поверх.}}$. При этом $S_{\text{осн.}} = x^2$, где x – сторона квадрата в основании;

$S_{\text{бок.поверх.}} = 4xh$, где h – высота параллелепипеда. По условию

$V = 13,5$ (л) или $V = x^2 h$, откуда $h = \frac{V}{x^2} = \frac{13,5}{x^2}$ (дм). Следовательно,

$S(x) = x^2 + 4x \frac{13,5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$ (дм²). Найдем $\min S(x)$ на R^+ :

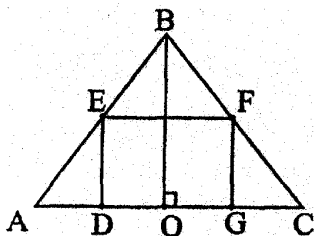
$$S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2(x^3 - 27)}{x^2} = \frac{2(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2};$$

$S'(x) < 0$ на $(0; 3)$; $S'(x) = 0$ при $x = 3$; $S'(x) > 0$ на $(3; +\infty)$ – точка $x = 3$ есть точка минимума функции $S(x)$ на $(0; +\infty)$.

При $x = 3$ (дм), $h = \frac{13,5}{3^2} = 1,5$ (дм).

Ответ: $3 \times 3 \times 1,5$ (дм) – размеры бака.

318.



Обозначим $|ED| = x$.

$$\frac{|BO|}{x} = \frac{|AO|}{|AD|};$$

$$|BO| = \sqrt{|AB|^2 - |AO|^2}, \quad |AO| = \frac{1}{2}|AC| = 30 \text{ (см)};$$

$$|BO| = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \text{ (см)};$$

$$|AD| = \frac{|AO|x}{|BO|} = \frac{30x}{40}, \quad |DG| = |AC| - 2|AD| = 60 - \frac{2 \cdot 30x}{40} = 60 - 1,5x;$$

$S_{DEFG} = |ED| \cdot |DG| = x(60 - 1,5x)$, где $x \in (0; 30)$. Найдем $\max_{[0; 30]} S(x)$:

$$S'(x) = 60 - 3x = 3(20 - x);$$

$S'(x) < 0$, при $x \in (20; 30)$, $S'(x) = 0$, при $x = 20$, $S'(x) > 0$, при $x \in (0; 20)$.

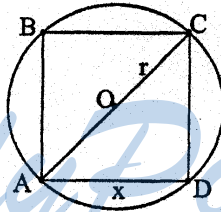
Т.е. наибольшее значение на $(0; 30)$ $S(x)$ достигает при $x = 20$.

Тогда:

$$|ED| = |FG| = 20 \text{ (см)}, \quad |ED| = |EF| = 60 - \frac{60 \cdot 20}{40} = 30 \text{ (см)}.$$

Ответ: 20 (см), 30 (см).

319.



Пусть $|AD| = x$, где $0 < x < 2r$. Тогда $(2r)^2 = x^2 + |CD|^2$,

$$|CD| = \sqrt{4r^2 - x^2};$$

$$S_{ABCD} = S(x) = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}.$$

Найдем $\max_{(0; 2r)} S(x)$:

$$S'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{2(\sqrt{2r} - x)(\sqrt{2r} + x)}{\sqrt{4r^2 - x^2}};$$

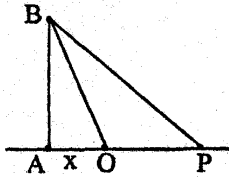
$S'(x) > 0$, при $x \in (0; \sqrt{2r})$, $S'(x) = 0$, при $x = \sqrt{2r}$, $S'(x) < 0$ при, $x \in (\sqrt{2r}; 2r)$.

Значит, $\max_{(0; 2r)} S(x) = S(\sqrt{2r}) = 2r^2$.

Т.к. $r = 20$ (см), то $x = 20\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $20\sqrt{2}$ см, $20\sqrt{2}$ см.

320.



Время, которое курьер затрачивает на дорогу от точки В до точки Р равно:

$$t = \frac{|BO|}{8} + \frac{|OP|}{10} \text{ ч};$$

$$|BO| = \sqrt{9^2 - x^2} = \sqrt{81 + x^2}, \quad |OP| = 15 - x, \text{ где } x - \text{расстояние } OA;$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}, \text{ где } x \in [0; 15].$$

Найдем $\min_{[0;15]} t(x)$:

$$t'(x) = \frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10};$$

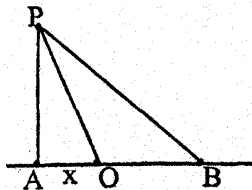
$$t'(x) = 0: \frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} = 0,8; \quad x^2 = 0,64(81 + x^2); \quad x = 12;$$

$$t(0) = \frac{9}{8} + \frac{3}{10} = \frac{21}{8} = 2,625; \quad t(12) = \frac{15}{8} + \frac{3}{10} = 2,175; \quad t(15) = \frac{\sqrt{306}}{8};$$

$$\min_{[0;15]} t(x) = t(12) = 2,175.$$

Ответ: 3 (км) от населенного пункта.

321.



Воспользуемся результатами предыдущей задачи, тогда:

$$t(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{5 - x}{5}, \text{ где } x \in [0; 5];$$

Найдем $\min_{[0;5]} t(x)$

$$t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5};$$

$$t'(x)=0: \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=0,8; \quad x^2=0,64(9+x^2), \quad x=4 \text{ (км);}$$

$$t(0)=1,75; \quad t(4)=1,45; \quad t(5)=\frac{\sqrt{34}}{4};$$

$$\min_{[0;5]} t(x)=t(4)=1,45.$$

Ответ: 4 км от ближайшей точки на берегу.

322.

Обозначим искомое число через x , тогда рассматриваемая сумма имеет вид: $S(x)=x+x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Найдем $\min_R S(x)$:

$$S'(x)=1+2x;$$

$$S'(x)=0, \text{ при } x=-0,5;$$

на $(-\infty; -0,5)$ $S'(x)<0$ – функция убывает на $(-\infty; 0,5]$,

на $(0,5; +\infty)$ $S'(x)>0$ – функция возрастает на $[-0,5; +\infty)$,

точка $x=-0,5$ – точка минимума $S(x)$ на \mathbb{R} ;

$$\min_{(-\infty; +\infty)} S(x)=S(-0,5)=-0,25.$$

Ответ: $-0,5$.

323.

Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину c , а длина одного из катетов равна x . Тогда длина другого катета равна

$\sqrt{c^2 - x^2}$ и площадь треугольника $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}$, где $x \in (0; c)$.

$$S'(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{(c - \sqrt{2}x)(c + \sqrt{2}x)}{2\sqrt{c^2 - x^2}};$$

$$S'(x)=0, \text{ при } x = \frac{c}{\sqrt{2}};$$

$$S'(x)>0, \text{ при } x \in \left(0; \frac{c}{\sqrt{2}}\right),$$

$$S'(x)=0, \text{ при } x = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

$$S'(x) < 0, \text{ при } x \in \left(\frac{c}{\sqrt{2}}; c \right);$$

$$\max_{(0; c)} S(x) = S\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = \frac{c^2}{4};$$

Длина одного катета равна $\frac{c}{\sqrt{2}}$, а длина другого катета

$$\sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{c}{\sqrt{2}} \text{ — треугольник равнобедренный, ч.т.д.}$$

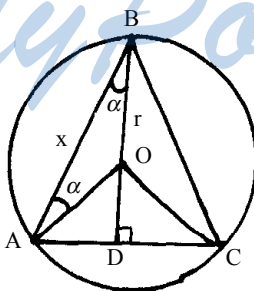
324.

Решение этой задачи повторяет решение задачи 319.

$\max_{(0; 2r)} S(x) = S(\sqrt{2}r) = 2r^2$, где r — радиус окружности. Т.к. длина

другой стороны этого прямоугольника равна $\sqrt{4r^2 - (\sqrt{2}r)^2} = \sqrt{2}r$, то этот прямоугольник является квадратом со стороной $\sqrt{2}r$.

325.



Пусть $|AB| = |BC| = x$, $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$.

Тогда $x = 2r \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{x}{2r}$;

$$|AC| = 2x \sin \alpha = 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4r^2}},$$

$$|BD| = x \cos \alpha = \frac{x^2}{2r};$$

$$S_{ABC}(x) = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \frac{x^3}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4r^2}} = \frac{x^3}{4r^2} \sqrt{4r^2 - x^2}, \text{ где } x \in (0; 2r).$$

Найдем $\max_{(0;2r)} S(x)$:

$$S'(x) = \frac{3x^2}{4r^2} \sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{x^4}{4r^4 \sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{x^2(3r^2 - x^2)}{r^2 \sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{x^2(\sqrt{3}r - x)(\sqrt{3}r + x)}{r^2 \sqrt{4r^2 - x^2}};$$

$S'(x)=0$, если $x=\sqrt{3}r$ на $(0;2r)$;

$S'(x)>0$, если $x \in (0; \sqrt{3}r)$, $S'(x)<0$, если $x \in (\sqrt{3}r; 2r)$;

$$\max_{(0;2r)} S(x) = S(\sqrt{3}r) = \frac{2\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Таким образом, $|AB|=|BC|=\sqrt{3}r$ и $|AC|=\sqrt{3}r$, т.е. треугольник ABC является равносторонним, ч.т.д.

StudyPort.ru