А.А. Сапожников, Ф.Ф. Тихонин

Решение самостоятельных и контрольных работ по алгебре и началам анализа за 11 класс

к учебному пособию «Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И. Шварцбурд. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса. — 5-е изд.— М.: Просвещение, 2001 г.»

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

С–1

1. а) $F'(x)=(x^3-2x+1)'=3x^2-2=f(x)$, для всех $x\in(-\infty;\infty)$, так что $F(x)$ является Первообразной для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$;

б) $F'(x)=(2\sin 2x-2)'=2\cos 2x\cdot(2x)'=4\cos 2x=\mathrm{f}(x)$, для всех $x\in(-\infty;\infty)$, так что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$.

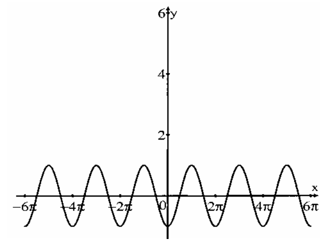
2. а) $f(x)=x^5$, $F(x)=x^6/6$ – Первообразной для $f(x)$ на R;

б) $\varphi(x)=-3{,}5$, $F(x)=-3{,}5x$ – Первообразной для $\varphi(x)$ на R.

С–2

1. Для $f(x)=x^2$ все первообразные имеют вид $F(x)=x^3/3+C$, а так как точка $M(-1;2)$ принадлежит графику $F(x)$, то $2=\dfrac{(-1)^3}{3}+C$, то есть $C=2+1/3=7/3$.

Значит $F(x)=x^3/3+7/3$.



2. Для $f(x)=\sin x$ все первообразные имеют вид $F(x)=-\cos x+C$, так что две различные, например, $F_1(x)=-\cos x$ и $F_2(x)=1-\cos x$. График $F_1(x)$:

С–3

а) Для $f(x)=2\sin x+3\cos x$ первообразные имеют вид $F(x)=3\sin x-2\cos x+C$;

б) Для $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+x^2$ при $x\in(0;+\infty)$ Первообразной имеет вид $F(x)=6\sqrt{x}+x^3/3+C$.

С–4

1. Заштрихованная фигура – прямоугольный треугольник с катетами x и $2x$, так что $S(x)=1/2\cdot x\cdot 2x=x^2$. Далее $S'(x)=(x^2)=2x=f(x)$, что и требовалось доказать.

2. Первообразной для $y=\sin x$ является, например, функция $F(x)=-\cos x$. Тогда по формуле $S=F(b)-F(a)$ искомая площадь $S=-\cos 2\pi/3-(-\cos 0)=1/2+1=3/2$.

С–5

а) $\int\limits_2^5 4dx=F(5)-F(2)$, где $F(x)$ – Первообразной для $f(x)=4$, то есть $F(x)=4x$, например. Так, что $\int\limits_2^5 4dx=4\cdot5-4\cdot2=12$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(0\right)$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)=\sin x$, например, $F(x)=-\cos x$. Так что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$.

С–6

а) Первообразной для $y=x^2$, при $x\in(1;3)$ является, например, $F(x)=\frac{x^3}{3}$.

Тогда $S=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$;

б) Первообразной для $y=2\cos x$, при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$является, например, $F(x)=2\sin x$. Тогда $S=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4$.

С–7

Обозначим $S(t)$ – путь. Тогда $S'(t)=V(t)=10-0{,}2t$, так что $S(x)=-0{,}1t^2+10t+C$. За время от 3 до 10 с точка пройдет путь $S=S(10)-S(3)=-0{,}1\cdot100+100+C+0{,}1\cdot9-10\cdot3-C=60{,}9$ (м).

С–8

а) $S=\int\limits_0^1\left(2x-2x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$;

б) $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+smx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}3-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}.$

С–9

1. а) $\int\limits_0^1\left(x+1\right)^5dx=\frac{\left(x+1\right)^6}{6}\Big|_0^1=\frac{2^6}{6}-\frac{1}{6}=10{,}5$;

б) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{x}{6}dx=\left(6\sin\frac{x}{6}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}=6\sin\frac{\pi}{3}-6\sin\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}-3$

2. Площадь поперечного сечения $S(x)=\pi\cdot(3x+1)^2$. Тогда объём $V=\int\limits_0^1 S\left(x\right)dx=\pi\cdot\int\limits_0^1\left(3x+1\right)^2dx=\pi\cdot\left(\frac{\left(3x+1\right)^3}{9}\right)\Big|_0^1=\pi\cdot\left(\frac{4^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=7\pi.$

С–10

1. Не верно, так как $2-\sqrt{5}<0$, а $\sqrt{9-4\sqrt{5}}\geq 0$.

2. а) $\sqrt[4]{(-11)^4}=\sqrt[4]{11^4}=11$; б) $\sqrt[3]{25\cdot 135}=\sqrt[3]{5^2\cdot 5\cdot 27}=\sqrt[3]{5^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{15^3}=15$.

3. а) $\sqrt{83{,}7}\approx 9{,}1488$; б) $\sqrt[3]{21}\approx 2{,}7589$.

4. $\sqrt[6]{80}<\sqrt[6]{81}=\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[3]{9}$. Так что $\sqrt[6]{80}<\sqrt[3]{9}$.

С–11

1. $a\sqrt{2}=-(-a)\sqrt{2}=-\sqrt{(-a)^2\cdot 2}=-\sqrt{2a^2}$, где $a<0$.

2. а) $x^3+18=0$, $x^3=-18$, $x=\sqrt[3]{-18}=-\sqrt[3]{18}$;

б) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+4\sqrt[4]{x}-5=0$, $\sqrt[4]{x}=t$, $t^2+4t-5=0$, $t=-5$ и $t=1$: $\sqrt[4]{x}=-5$ – нет решения; $\sqrt[4]{x}=1$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

3. а) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}=\sqrt{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{9}=3$;

б) $a+\sqrt[4]{a^4}=a+|a|=2a$, где $a>0$.

С–12

1. $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$; $5+\sqrt{x-1}=9$; $\sqrt{x-1}=4$; $x-1=16$; $x=17$.

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3\end{cases}$; $\begin{cases}2\sqrt[3]{x}=4\\ 2\sqrt[3]{y}=2\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2\\ \sqrt[3]{y}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=8,\\ y=1.\end{cases}$

С–13

1. а) $8^{\frac{5}{3}}=2^{3\cdot\frac{5}{3}}=2^5=32$; б) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{9}{2}}=3^{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}}=3^3=27$;

в) $\left(9+\sqrt{73}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(9-\sqrt{73}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\left(9+\sqrt{73}\right)\left(9-\sqrt{73}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=$

$=\left(9^2-\left(\sqrt{73}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2^{3\cdot\frac{1}{3}}=2$.

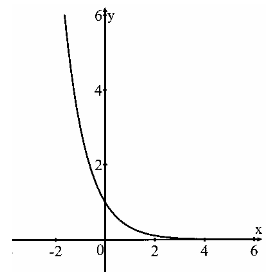
2. Так как $\frac{6}{13}>\frac{2}{7}$, то $2^{\frac{6}{13}}>2^{\frac{2}{7}}$, поскольку $2>1$.

3. $\frac{u+8}{u^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{u}+4}=\frac{\left(\sqrt[3]{u}\right)^3+2^3}{\left(\sqrt[3]{u}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{u}+2^2}=\frac{\left(\sqrt[3]{u}+2\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{u}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{u}+2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{u}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{u}+2^2}=$

$=\sqrt[3]{u}+2=u^{\frac{1}{3}}+2$.

С–14

1. См. график.



2. а) $2^{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} : 2^{2\sqrt{2}} = 2^{\left(2+2\sqrt{2}+1\right)} : 2^{2\sqrt{2}} =$
$2^{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = 2^3 = 8$;

б) $\left(\left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6.$

3. $f(x)=3^x-2$. $3^x>0$, так что $f(x)>-2$.
Ответ: $(-2;\infty)$.

С–15

1. а) $3^{x-4}=1$; $x-4=0$; $x=4$;

б) $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; $2^{7-3x} = 2^{4-x}$; $7-3x=4-x$; $2x=3$; $x=1{,}5$.

2. а) $5^{4x-7} > 1$; $4x-7>0$; $x>1{,}75$; б) $0{,}7^x < 2\frac{2}{49}$; $\left(\frac{7}{10}\right)^x < \left(\frac{7}{10}\right)^{-2}$; $x>-2$.

С–16

1. а) $2^{x+2}+2^x=5$; $4\cdot 2^x+2^x=5$; $2^x=1$; $x=0$;
б) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$; $3^x=t$; $t^2-6\cdot t-27=0$; $t_1=-3$, $t_2=9$; $3^x=-3$, $3^x=9$; $x=2$.

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$; $t^2-3t+2>0$; $t<1$ и $t>2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$; $x>0$ и $x<-1$; $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$.

С–17

1. $\lg\left(7a^3\cdot\sqrt[3]{b^2}\right) = \lg 7 + \lg a^3 + \lg\sqrt[3]{b^2} = \lg 7 + 3\lg a + \frac{2}{3}\lg|b|$.

2. а) $\log_{36}84-\log_{36}14=\log_{36}\frac{84}{14} = \log_{6^2} 6 = \frac{1}{2}\log_6 6 = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{\lg 27+\lg 12}{\lg 2+2\lg 3} = \frac{\lg 3^3+\lg\left(2^2\cdot 3\right)}{\lg 2+2\lg 3} = \frac{3\lg 3+2\lg 2+\lg 3}{\lg 2+2\lg 3} = \frac{2\left(\lg 2+2\lg 3\right)}{\lg 2+2\lg 3} = 2.$

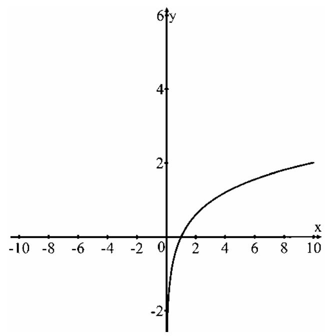
3. $\log_{1,3}2{,}6=\frac{\ln 2{,}6}{\ln 1{,}3} \approx 3{,}6419$.

С–18

1. $\log_2 3 = -\log_{1/2} 3 = \log_{1/2}\frac{1}{3} < \log_{1/2} 1/5$, так как $1/3 > 1/5$, но $1/2 < 1$. Так что $\log_2 3 < \log_{1/2} 1/5$.

2. $y=\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)$; $3x+4>0$; $x>-1\frac{1}{3}$.

3.



С–19

1. а) $\log_2(x^2-3x+10)=3$; $x^2-3x+10=8$; $x^2-3x+2=0$; $x_1=1$, $x_2=2$;

б) $\log_3(3x-5)=\log_3(x-3)$; $\begin{cases}3x-5=x-3\\3x-5>0\\x-3>0\end{cases}$; $\begin{cases}2x=2\\x>1\frac{2}{3}\\x>3\end{cases}$, решений нет.

2. а) $\log_5(2x+3)>\log_5(x-1)$; $\begin{cases}2x+3>x-1\\2x+3>0\\x-1>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>-4\\x>-1{,}5\\x>1\end{cases}$; $x>1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)<-2$; $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)<\log_{\frac{1}{2}}4$; $\begin{cases}2x-5>4\\2x-5>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>4{,}5\\x>2{,}5\end{cases}$; $x>4{,}5$.

С–20

1. а) $\log^2{}_3x-\log_3x=2$; $\log_3x=t$; $t^2-t-2=0$; $t_1=-1$, $t_2=2$; $\log_3x=-1$ и $\log_3x=2$; $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=9$;(в ответе задачника опечатка);

б) $\frac{2}{\lg x-3}+\frac{4}{\lg x+1}=1$; $\lg x=t+1$; $\frac{2}{t-2}+\frac{4}{t+2}=1$; $\frac{6t-4}{t^2-4}=1$; $6t=t^2$; $t_1=0$, $t_2=6$; $\lg x=1$ и $\lg x=7$; $x_1=10$, $x_2=10000000$.

2. а) $\lg^2x+3\lg x<4$; $\lg x=t$; $t^2+3t-4<0$; $-4<t<1$; $-4<\lg x<1$; $0{,}0001<x<10$;

б) $4^{x-1}>7$; $x-1>\log_47$; $x>\log_47+1$; $x>\log_428$.

С–21

а) $\begin{cases}x+y=8,\\\log_{12}x+\log_{12}y=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=8-y,\\\log_{12}((8-y)y)=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=8-y,\\8y-y^2=12\end{cases}$;

$\begin{cases} x = 8 - y, \\ y^2 - 8y + 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^y = 7, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3^{2y} = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x = a \\ 3^y = b \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 7, \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 7 - b, \\ (7-b)^2 + b^2 = 25 \end{cases}$;

$\begin{cases} a = 7 - b, \\ b^2 - 7b + 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 = 4, \\ b_1 = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_2 = 3; \\ b_2 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4, \\ 3^y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3, \\ 3^y = 4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = -\log_2 3, \\ y_2 = \log_3 4. \end{cases}$

С–22

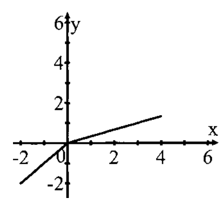
1. а) $f(x)=4–3x$; $g(x)=\dfrac{4-x}{3}$ – обратная. $D(g)=E(g)=R$;

б) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\ge 0$; $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ – обратная. $D(g)=E(g)=[0;1]$.

2. $f(g(-1))=-1$; $g(-1)=-1$; $f(g(2))=2$;

$g(2)=\dfrac{2}{3}$; $f(g(3))=3$; $g(3)=1$.

$D(g)=[-2;4]$; $E(g)=[-2;\dfrac{4}{3}]$:



С–23

1. а) $f(x)=e^{-5x}$, $f'(x)=(e^{-5x})'=e^{-5x}\cdot(-5x)'=-5e^{-5x}$;

б) $f(x)=x\cdot 2^x$, $f'(x)=(x)'\cdot 2^x+(2^x)'\cdot x=2^x+2^x\cdot\ln 2\cdot x=2^x(1+x\ln 2)$.

2. $f(x)=e^{-x}$, $x_0=1$. Уравнение касательной: $y–f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x–x_0)$; $(y-e^{-1})=-e^{-1}(x-1)$; $y=2/e - x/e$

3. $f(x) = x\cdot e^{2x}$; $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(1+2x)$, $f'(x)=0$ при $x=-0,5$.

$f'(x)>0$ при $x>-0,5$ и $f'(x)<0$ при $x<-0,5$, так что $f(x)$ – возрастает при $x\ge -0,5$ и $f(x)$ – убывает при $x\le -0,5$.

4. $\int\limits_1^3 e^x dx = e^x\Big|_1^3 = e^3 - e$.

С–24

1. а) $f(x)=\ln(2x+1)$, $f'(x)=(\ln(2x+1))'=\dfrac{(2x+1)'}{2x+1}=\dfrac{2}{2x+1}$;

б) $f(x)=\log_3(2x^2-3x+1)$, $f'(x)=(\log_3(2x^2-3x+1))'=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{\left(2x^2-3x+1\right)'}{2x^2-3x+1}=$

$=\frac{4x-3}{\ln 3\left(2x^2-3x+1\right)}$

2. $S=\int\limits_1^3\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3$.

3. $f(x)=x^2\ln x$, $f'(x)=2x\cdot\ln x+x=x(2\ln x+1)$, $f'(x)=0$ при $x=e^{-\frac{1}{2}}$, так что в точке $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$ функция f(x) достигает своего минимума $f(x_0)=-\frac{1}{2e}$.

С–25

1.$f(x)=x^{\sqrt{3}}-x^{-\sqrt{3}}$, $f'(x)=\left(x^{\sqrt{3}}-x^{-\sqrt{3}}\right)'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}+\sqrt{3}x^{-\sqrt{3}-1}=$

$=\sqrt{3}\left(x^{\sqrt{3}-1}+x^{-\sqrt{3}-1}\right)$

2. $\sqrt[3]{125{,}15}\approx 5{,}002$.

3. $\int\limits_0^1 x^{\sqrt{3}}dx=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}x^{\sqrt{3}+1}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

С–26

1. $y=3e^{-2x}$, $y'=3\cdot(e^{-2x})'=3\cdot e^{-2x}(-2x)'=-2\cdot 3e^{-2x}=-2y$, что и требовалось доказать.
2. $f'(x)=3f(x)$, значит $f(x)=c\cdot e^{3x}$, но так как $f(0)=3$, то $3=c\cdot e^{3\cdot 0}$, то есть $c=3$ и $f(x)=3e^{3x}$.

3. $x(t)=3\cos(2t-\frac{\pi}{4})$, $x'(t)=-6\sin(2t-\frac{\pi}{4})$, $x''(t)=-12\cos(2t-\frac{\pi}{4})=-4x(t)$. То есть искомое уравнение $x''=-4x$.

Вариант 2

С–1

1. а) $F'(x)=(x^4-3x^2+7)'=4x^3-6x=f(x)$, для всех $x\in(-\infty;\infty)$, так что $F(x)$ является Первообразной для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$;
б) $F'(x)=(\cos(2x-4))'=-\sin(2x-4)\cdot(2x-4)'=-2\sin(2x-4)$, для всех $x\in(-\infty;\infty)$, так что $F(x)$ является Первообразной для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$.

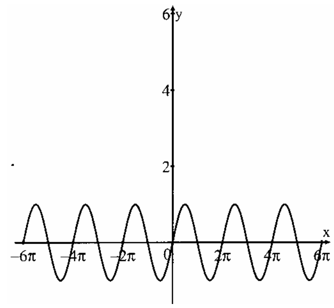
2. а) $f(x)=-x^4$, $F(x)=\frac{-x^5}{5}$ – первообразной для $f(x)$ на R;

б) $f(x)=6{,}4$, $F(x)=6{,}4x$ – первообразной для $f(x)$ на R.

С–2

1. Для $f(x)=x^3$ все первообразные имеют вид $F(x)=x^4/4+C$, а так как точка М(1;–1) принадлежит графику $F(x)$, то $-1=1/4+C$, то есть $C=-\frac{5}{4}$ и $F(x)=\frac{x^4}{4}-1\frac{1}{4}$.

2. Для $f(x)=\cos x$ все первообразные имеют вид $F(x)=\sin x+C$, так что две различные первообразные, например, $F_1(x)=\sin x$ и $F_2(x)=\sin x+1$.
График $F_1(x)$:



С–3

а) Для $f(x)=3\sin x-2\cos x$ Первообразной имеет вид:
$F(x)=-3\cos x-2\sin x+C$;

б) Для $f(x)=4/\sqrt{x}-x$ при $x\in(0;\infty)$ Первообразной имеет вид:

$F(x)=8\sqrt{x}-x^2/2+C$.

С–4

1. Заштрихованная фигура – прямоугольный треугольник с катетами x и $3x$, так что $S(x)=1/2\cdot x\cdot 3x=3/2\,x^2$. Далее, $S'(x)=(3/2\,x^2)'=3x$, что и требовалось доказать.

2.Первообразной для $y=\cos x$ является, например, $F(x)=\sin x$. Тогда по формуле $S=F(b)-F(a)$ искомая площадь $S=\sin \pi/2-\sin\left(-\pi/6\right)=$ $=1-(-1/2)=1{,}5$.

С–5

а) $\int_1^3 2dx=F(3)-F(1)$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)=2$, например, $F(x)=2x$. Тогда $\int_1^3 2dx=2\cdot3-2\cdot1=4$;

б) $\int_0^{\pi/2}\cos x dx=F\left(\pi/2\right)-F\left(0\right)$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)=\cos x$, например, $F(x)=\sin x$. Так что $\int_0^{\pi/2}\cos dx=\sin\pi/2-\sin 0=1$.

С–6

а) Первообразной для $y=x^3$, при $x\in[1;3]$ является, например, $F(x)=\frac{x^4}{4}$,

тогда $S=\int\limits_1^3 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=20.$

б) Первообразной для $y=2\cos x$, при $x\in\left(0;\pi/2\right)$ и $x\in\left(\pi/2;\pi\right)$ является, например, $F(x)=2\sin x$. Тогда $S=2S_1=2\cdot\left(2\sin\pi/2-2\sin 0\right)=4$, где S_1 — фигура, ограниченная линиями $y=2\cos x$, $y=0$, $0\le x\le\pi/2$.

С–7

Пусть $S(t)$ – путь точки. Тогда $S'(t)=V(t)=3+0{,}2t$. Тогда $S(t)=3t+0{,}1t^2+C$ и путь, пройденный от 1 до 7 с, равен $S=S(7)–S(1)=3\cdot7+0{,}1\cdot49+C–3\cdot1–0{,}1\cdot1–C=22{,}8$ (м).

С–8

а) $S=\int\limits_0^2\left(x-0{,}5x^2\right)dx=\left(x^2/2-x^3/6\right)\Big|_0^2=\frac{4}{2}-\frac{8}{6}=\frac{2}{3}$;

б) $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0+\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0=\sqrt{2}-1$.

С–9

1. а) $\int\limits_2^3(1-x)^4dx=\left(-\frac{(1-x)^5}{5}\right)\Bigg|_2^3=\frac{2^5}{5}-\frac{1}{5}=6{,}2$;

б) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)dx=\left(-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi}=-2\cos\frac{\pi}{3}+2\cos 0=-2\cdot\frac{1}{2}+2=1$.

2. Площадь поперечного сечения равна $S(x)=\pi\cdot(2x+1)^2$. Тогда $V=\int\limits_0^2\pi\cdot(2x+1)^2dx=\pi\cdot\left(\frac{(2x+1)^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\pi\cdot\left(\frac{5^3}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{62\pi}{3}$.

С–10

1. Верно, так как $\sqrt{11}-3>0$ и $\left(\sqrt{11}-3\right)^2=11-2\cdot\sqrt{11}\cdot3+9=20-6\sqrt{11}$.

2. а) $\sqrt[6]{(-7)^6}=\sqrt[6]{7^6}=7$; б) $\sqrt[3]{9\cdot375}=\sqrt[3]{3^2\cdot3\cdot5^3}=\sqrt[3]{15^3}=15$.

3. а) $\sqrt{29{,}4}\approx5{,}4222$; б) $\sqrt[3]{33}\approx3{,}2075$.

4. $\sqrt[5]{7}\vee\sqrt[10]{7^2};\sqrt[10]{49}>\sqrt[10]{47}$. То есть $\sqrt[5]{7}>\sqrt[10]{47}$.

С–11

1. $b\sqrt{5}=-(-b)\sqrt{5}=-\sqrt{(-b)^2\cdot 5}=-\sqrt{5b^2}$, где b<0.

2. а) x^3+24=0, x^3=–24, x= $\sqrt[3]{-24}$;

б) $\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-3\sqrt[6]{x}=4$; $\sqrt[6]{x}=t$; t^2–3t–4=0; t_1=4, t_2=–1; $\sqrt[6]{x}=-1$ – нет решений; $\sqrt[6]{x}=4$, x=4^6=4096. Ответ: x=4096.

3. а) $\sqrt{\sqrt{65}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{65}+7}=\sqrt{\left(\sqrt{65}-7\right)\left(\sqrt{65}+7\right)}=\sqrt{65-49}=\sqrt{16}=4$;

б) $\sqrt[6]{a^6}-a=|a|-a=-a-a=-2a$, где a<0.

С–12

1. $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$; $7-\sqrt{x+1}=4$; $\sqrt{x+1}=3$; x+1=9; x=8.

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5\end{cases}$; $\begin{cases}2\sqrt[3]{x}=8,\\ 2\sqrt[3]{y}=2\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=4,\\ \sqrt[3]{y}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=64,\\ y=1.\end{cases}$

С–13

1. а) $27^{-2/3}=3^{3\cdot(-2/3)}=3^{-2}=1/9$; б) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{9/2}=2^{4/3\cdot 9/2}=2^6=64$;

в) $\sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\cdot(12+80^{0,5})^{1/3}=((12-\sqrt{80})(12+\sqrt{80}))^{1/3}=(144-80)^{\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{3}}$ =4.

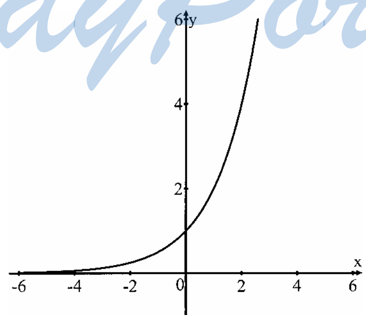
2. $5/8=\dfrac{65}{8\cdot 13}>\dfrac{64}{8\cdot 3}=8/13$, так что $3^{5/8}>3^{8/13}$, так как 3>1.

3.

$$\frac{8v+1}{4v^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{v}+1}=\frac{\left(2\sqrt[3]{v}\right)^3+1^3}{4v^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{v}+1}=\frac{\left(2\sqrt[3]{v}+1\right)\left(4\sqrt[3]{v^2}-2\sqrt[3]{v}+1\right)}{4\sqrt[3]{v^2}-2\sqrt[3]{v}+1}=2\sqrt[3]{v}+1=2\cdot v^{\frac{1}{3}}+1.$$

С–14

1.



2. а) $3^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{3}} = 3^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \cdot 3^{2\sqrt{3}} = 3^{3-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}} = 3^4 = 81$;

б) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 6} = 2^3 = 8.$

3. $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$, так что $f(x)<1$. Ответ: $(-\infty;1)$.

С–15

1. а) $0{,}8^{2x-3}=1$; $2x-3=0$; $x=1{,}5$;

б) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = \left(\frac{2}{9}\right)^{2-x}$; $2x+3=2-x$; $3x=-1$; $x=-\frac{1}{3}$.

2. а) $2^{2x-9}<1$; $2x-9<0$; $x<4{,}5$; б) $0{,}9^x \ge 1\frac{19}{81}$; $0{,}9^x \ge 0{,}9^2$; $x\le-2$.

С–16

1. а) $3^{x+2}+3^x=30$; $9\cdot3^x+3^x=30$; $10\cdot3^x=30$; $3^x=3$; $x=1$;

б) $4^x-14\cdot2^x-32=0$; $2^x=t$; $t^2-14t-32=0$; $t_1=16$, $t_2=-2$; $2^x=16$ и $2^x=-2$; $x=4$;

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 6\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \le 0$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$; $t^2-6t-27\le0$; $-3\le t\le9$; $-3\le \left(\frac{1}{3}\right)^x \le9$;

так как $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le9$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $x\ge-2$.

С–17

1.

$\log_2\left(16\cdot a^6\cdot\sqrt[5]{b^3}\right) = \log_2 16 + \log_2 a^6 + \log_2 \sqrt[5]{b^3} = 4 + 6\log_2|a| + \frac{3}{5}\log_2 b$;

2. а) $\log_{49}84-\log_{49}12=\log_{49}\frac{84}{12} = \log_{7^2} 7 = \frac{1}{2}\log_7 7 = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{\lg 81 + \lg 64}{2\lg 3 + 3\lg 2} = \frac{\lg 3^4 + \lg 2^6}{2\lg 3 + 3\lg 2} = \frac{4\lg 3 + 6\lg 2}{2\lg 3 + 3\lg 2} = 2.$

3. $\log_{1,4}2{,}8=\frac{\ln 2{,}8}{\ln 1{,}4} \approx 3{,}0600$.

С–18

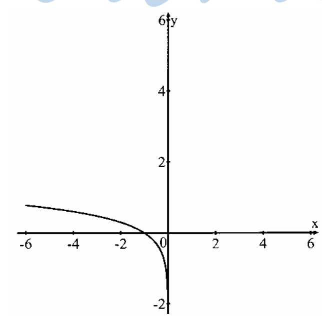
1. $\log_3 5 = -\log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$,

так как $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3} < 1$, так что

$\log_3 5 > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$.

2. $y = \log_5(2x-1)$; $2x-1>0$; $x>\frac{1}{2}$.

3. см. график.



С–19

1. а) $\log_{1/2}(x^2-4x-1)=-2$; $x^2-4x-1=4$; $x^2-4x-5=0$; $x_1=-1$, $x_2=5$.

б) $\log_7(4x-6)=\log_7(2x-4)$; $\begin{cases}4x-6=2x-4,\\ 4x-6>0,\\ 2x-4>0,\end{cases}$; $\begin{cases}x=1,\\ x>1{,}5,\\ x>2\end{cases}$ — решений нет.

2. а) $\log_3(1-x)>\log_3(3-2x)$; $\begin{cases}1-x>3-2x,\\ 1-x>0,\\ 3-2x>0,\end{cases}$; $\begin{cases}x>2\\ x<1\\ x<1{,}5\end{cases}$ — решений нет;

б) $\log_{1/2}(2x+5)>-3$; $\begin{cases}2x+5<8,\\ 2x+5>0,\end{cases}$; $\begin{cases}x<1{,}5\\ x>-2{,}5\end{cases}$; $x\in(-2{,}5;1{,}5)$.

С–20

1. а) $\log^2_{1/2}x-\log_{1/2}x=6$; $\log_{1/2}x=t$; $t^2-t-6=0$; $t_1=-2$, $t_2=3$; $\log_{1/2}x=-2$ и $\log_{1/2}x=3$; $x_1=4$, $x_2=1/8$;

б) $\frac{1}{3-\lg x}+\frac{2}{\lg x-1}=3$; $\lg x=t+2$; $\frac{1}{1-t}+\frac{2}{1+t}=3$; $\frac{3-t}{1-t^2}=3$; $3t^2-t=0$; $t_1=0$, $t_2=\frac{1}{3}$; $\lg x=2$ и $\lg x=2\frac{1}{3}$; $x_1=100$, $x_2=\sqrt[3]{10000000}$.

2. а) $\lg^2x+5\lg x+9>0$; $\lg x=t$; $t^2+5t+9>0$; t – любое; $x\in(0;\infty)$;

б) $(3^x-1)(3^x-2)\le 0$; $1\le 3^x\le 2$; $0\le x\le \log_3 2$.

С–21

а) $\begin{cases}x+y=6,\\ \log_2 x+\log_2 y=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=6-y,\\ \log_2((6-y)\cdot y)=\log_2 8\end{cases}$; $\begin{cases}x=6-y,\\ y^2-6y+8=0\end{cases}$;

$\begin{cases}x=6-y,\\ y_1=2, y_2=4\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=2\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=4\end{cases}$;

б) $\begin{cases}2^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=5,\\ 2^{2x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2y}=13\end{cases}$; $\begin{cases}2^x=a,\\ \left(\frac{1}{3}\right)^y=b\end{cases}$; $\begin{cases}a+b=5,\\ a^2+b^2=13\end{cases}$; $\begin{cases}a=5-b,\\ (5-b)^2+b^2=13\end{cases}$;

$\begin{cases}a=5-b,\\ b^2-5b+6=0\end{cases}$; $\begin{cases}a_1=3, a_2=2,\\ b_1=2, b_2=3\end{cases}$;

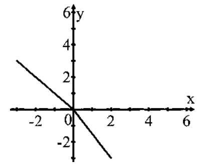
$\begin{cases}2^x=3,\\ \left(\frac{1}{3}\right)^y=2\end{cases}$ и $\begin{cases}2^x=2,\\ \left(\frac{1}{3}\right)^y=3\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=\log_2 3,\\ y_1=\log_{\frac{1}{3}}2\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-1.\end{cases}$

С–22

1. а) $f(x)=3–4x$; $g(x)=\dfrac{3-x}{4}$ – обратная. $D(g)=E(g)=R$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ – обратная. $D(g)=[0;\infty)$, $E(g)=[2;\infty)$.

2. $f(g(-1))=-1$; $g(-1)=1$; $f(g(1))=1$; $g(1)=-1{,}5$. $D(g)=[-3;2]$; $E(g)=[-3;3]$:



С–23

1. а) $f(x)=e^{-0,3x}$, $f'(x)=(e^{-0,3x})'=e^{-0,3x}\cdot(-0{,}3x)'=-0{,}3\cdot e^{-0,3x}$;

б) $f(x)=x\cdot 3^x$, $f'(x)=(x)'\cdot 3^x+x\cdot(3^x)'=3^x+x\cdot 3^x\cdot\ln 3=3^x(1+x\ln 3)$.

2. $f(x)=e^x$, $x_0=-1$. Уравнение касательной: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$; $y-e^{-1}=$ $=e^{-1}\cdot(x+1)$; $y=\frac{x}{e}+\frac{2}{e}$.

3. $f(x) = x\cdot e^{-3x}$; $f'(x)= e^{-3x}-3x\, e^{-3x}= e^{-3x}(1-3x)$; $f'(x)=0$ при $x=\frac{1}{3}$, $f'(x)>0$ при $x<\frac{1}{3}$ и $f'(x)<0$ при $x>\frac{1}{3}$, так что $f(x)$ – возрастает на $(-\infty;\frac{1}{3}]$ и убывает на $[\frac{1}{3};\infty)$.

4. $\int\limits_2^4 e^{-x}dx=\left(-e^{-x}\right)\Big|_2^4=-e^{-4}+e^{-2}=e^{-2}-e^{-4}$.

С–24

1. а) $f(x)=\ln(3x–4)$, $f'(x)=(\ln(3x–4))'=\dfrac{(3x-4)'}{3x-4}=\dfrac{3}{3x-4}$;

б) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2–2x+5)$, $f'(x)=(\log_{\frac{1}{2}}(3x^2–2x+5))'=\dfrac{1}{\ln\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\left(3x^2-2x+5\right)'}{3x^2-2x+5}=$
$=\dfrac{6x-2}{\left(3x^2-2x+5\right)\ln\frac{1}{2}}$.

2. $S=\int\limits_2^4\frac{1}{x}dx=\left(\ln x\right)\Big|_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln 2$.

3. $f(x)=x^3\ln x$; $f'(x)=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$, $f'(x)=0$ при $x=e^{-\frac{1}{3}}$, $f(e^{-\frac{1}{3}})=$ $=e^{-1}\ln e^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3e}$, $f'(x)>0$ при $x>e^{-\frac{1}{3}}$ и $f'(x)<0$ при $0<x<e^{-\frac{1}{3}}$, так что $f(x)$ достигает своего минимума в точке $x_0=e^{-\frac{1}{3}}$: $f(x_0)=-\frac{1}{3e}$.

С–25

1. $f(x)=x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}}$;

$f'(x)=(x^{\sqrt{2}})'+(x^{-\sqrt{2}})'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(x^{\sqrt{2}-1}-x^{-\sqrt{2}-1})$.

2. $\sqrt[4]{16,08}\approx 2,0025$.

3. $\int_0^1 x^{\sqrt{5}}dx=\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

С–26

1. $y=5e^{-3x}$, $y'=(5e^{-3x})'=5\cdot e^{-3x}\cdot(-3x)'=-15e^{-3x}=-3y$, что и требовалось доказать.
2. $f'(x)=4f(x)$, значит $f(x)=c\cdot e^{4x}$, но $f(0)=5$, $5=c\cdot e^{4\cdot 0}$, т.е. $c=5$, $f(x)=5e^{4x}$.
3. $x(t)=0,7\cos(0,5t+\pi/8)$, $x'(t)=(0,7\cos(0,5t+\pi/8))'=-0,5\cdot 0,7\sin(0,5t+\pi/8)$, $x''(t)=(-0,35\sin(0,5t+\pi/8))'=-0,35\cdot 0,5\cos(0,5t+\pi/8)=-0,25x(t)$, то есть $x''=-0,25x$ – искомое уравнение.

Вариант 3

С–1

1. а) $F'(x)=\left(3/x^2+1\right)'=-6/x^3=f(x)$, для всех $x\in(-\infty;0)$, так что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;0)$.

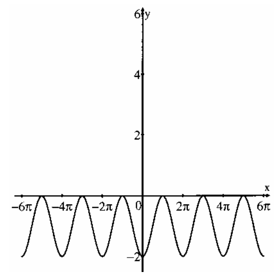
б) $F'(x)=\left(6x^{-1,5}\cdot\sqrt{x}\right)'=\left(6\cdot x^{-1}\right)'=-6x^{-2}=-6/x^2=f(x)$, для всех $x\in(0;\infty)$, так что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке $(0;\infty)$.

2. а) Является, так как $F'(x)=(2x+tgx)'=2+\frac{1}{\cos^2(x)}=f(x)$, для всех $x\in\left(-\pi/2;\pi/2\right)$.

б) Не является, так как $F(x)=10/x$ и $f(x)=-10/x^2$ определены не для всех $x\in(-3;3)$.

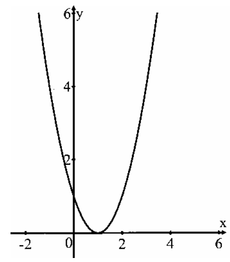
С–2

1. Для $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ все первообразные имеют вид $F(x)=2\sqrt{x}+C$, так что две различные первообразные, например:
$F_1(x)=2\sqrt{x}$ и $F_1(x)=2\sqrt{x}+1$.
2. Для $f(x)=\sin x$ все первообразные имеют вид $F(x)=-\cos x+C$, а т.к. точка $A(\pi/2;-1)$ принадлежит графику $F(x)$, то $-1=-\cos(\pi/2)+C$, то есть $C=-1$ и $F(x)=-\cos x-1$.



С–3

1. Для $f(x)=2x–2$ все первообразные имеют вид $F(x)=x^2–2x+C$, а так как точка $A(2;–1)$ принадлежит графику $F(x)$, то $1=2^2–2\cdot2+C$, то есть $C=1$ и $F(x)=(x–1)^2$:



2. Для $f(x)=\left(\sqrt{2x+1}\right)^{-1}-\sin{x}/{4}$ общий вид первообразных на $(–0,5;\infty)$: $F(x)=\sqrt{2x+1}+4\cos{x}/{4}+C$.

С–4

1. Заштрихованная фигура – трапеция с основаниями 4 и $(3x+1)$ и высотой $(x–1)$. Так что $S(x)=\frac{4+3x+1}{2}\cdot(x-1)=1,5x^2+x-2,5$ ·и $S'(x)=\cdot3x+1=f(x)$.

2. Площадь этой фигуры равна площади фигуры, ограниченной линиями $y=–2\cos x$, $y=0$, ${\pi}/{2}\le x\le {3\pi}/{2}$. Первообразной для $f(x)=–2\cos x$ является, например, функция $F(x)=–2\sin x$. Так что по формуле $S=F(b)–F(a)$ искомая площадь равна $S=-2\sin\frac{3\pi}{2}-\left(-2\sin\frac{\pi}{2}\right)=2+2=4$.

С–5

а) $\int\limits_1^4\frac{5\sqrt{x}}{x}dx=F(4)–F(1)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)=\frac{5\sqrt{x}}{x}$, то есть, например $F(x)=10\sqrt{x}$ и $\int\limits_1^4\frac{5\sqrt{x}}{x}dx=10\sqrt{4}-10\sqrt{1}=10$.

б) $\int\limits_1^4 (x^2-6x+9)dx = F(4)-F(1)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)=x^2-6x+9$, то есть, например, $F(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+9x$, и $\int\limits_1^4 \left(x^2-6x+9\right)dx =$

$= 4^3\big/_3 - 3\cdot 4^2 + 9\cdot 4 - (1\big/_3 - 3 + 9) = 3$.

в) $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{6}{\cos^2 2x}dx = F\left(\pi\big/_6\right) - F\left(-\pi\big/_6\right)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x) =$ $= \frac{6}{\cos^2 2x}$, то есть, например, $F(x) = 3tg2x$ и $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{6}{\cos^2 2x}dx =$

$= 3\mathrm{tg}(2\cdot \pi\big/_6) - 3\mathrm{tg}(2\cdot(-\pi\big/_6)) = 3\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}.$

С–6

а) $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^2+2-x^2\right)=\int\limits_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx = F(1)-F(-1)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)=2-2x^2$, то есть, например, $F(x)=2x-2\big/_3 x^3$ и $S=2-2\big/_3-\left(-2+2\big/_3\right)=2\,2\big/_3$;

б) $S=\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2\cos x dx + \int\limits_0^2 (2-x)dx = F_1(0) - F_1\left(-\pi\big/_2\right) + F_2(0)$.

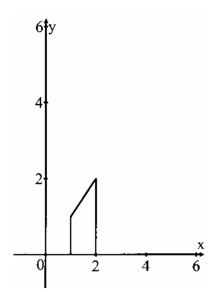
Где F_1 – первообразная для $f_1(x)=2\cos x$, а F_2– первообразная для $f_2(x)=2-x$. То есть $F_1(x)=2\sin x$, и $F_2(x)=$ $2x - x^2\big/_2$, и $S=2\sin 0-2\sin\left(-\pi\big/_2\right)+2\cdot 2-\frac{2^2}{2}=4.$

С–7

а) $S=\frac{1+2}{2}\cdot 1=1{,}5$;

б) $S\approx S_{10}$ $=$ $1\cdot\frac{1}{10}+\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{12}{10}\cdot\frac{1}{10}+\ldots$ $\ldots+\frac{19}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}(10+11+\ldots+19)= =\frac{145}{100}=1{,}45$;

$\Delta=|S-S_{10}|=0{,}05$;



в)$S_n=1\cdot \frac{1}{n}+\frac{n+1}{n}\cdot \frac{1}{n}+\frac{n+2}{n}\cdot \frac{1}{n}+...+\frac{2n-1}{n}\cdot \frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$ (n+(n+1)+(n+2)+...

... +(2n–1))= $\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+2n-1)\cdot n}{2}=1{,}5-\frac{1}{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1{,}5$.

С–8

а) $S=\int\limits_0^{2\pi/3}(3\sin x+2\sin x)dx=5\cdot\int\limits_0^{2\pi/3}\sin xdx=5\cdot(-\cos x)\Big|_0^{2\pi/3}=5\left(\frac{1}{2}+1\right)=7{,}5$;

б)$S=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2+2+x)dx=(-\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{2}=-\frac{8}{3}+4+2-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}$=4,5.

С–9

1. а) $\int\limits_{-1}^{0}(1-2x)^4dx=\left(\frac{(1-2x)^5}{-10}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{10}+\frac{243}{10}=24{,}2;$

б) $\int\limits_0^{\pi}\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}dx=\left(6\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{6\sqrt{3}}{3}+6\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$

2. Площадь сечения $S(x)=\pi\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2-\pi\cdot1^2=\pi(x-1)$. Тогда $V=\int\limits_1^2\pi(x-1)dx=$

$=\left(\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(2-2-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}$.

С–10

1. а) $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}-\sqrt{7}=\left|2-\sqrt{7}\right|-\sqrt{7}=\sqrt{7}-2-\sqrt{7}=-2;$

б) $\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[3]{a^3}=|a|+a=-a+a=0$, если $a<0$.

2. а) $x^4-1=0$, $x^4=1$, $x_{1,2}=\pm1$;

б)$125x^3+1=0$, $125x^3=-1$, $x^3=-\frac{1}{125}$, $x=-\frac{1}{5}$.

С–11

1. $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}=\sqrt[5]{(10+2\sqrt{17})(10-2\sqrt{17})}=\sqrt[5]{100-4\cdot17}=\sqrt[5]{32}=2$

2. $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$.

3. $x^4>16$, $x^4>2^2$, $|x|>2$, $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

С–12

1. $\sqrt{2x^2-3x+2}=4-x$.

$$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ 2x^2-3x+2\ge 0, \\ 2x^2-3x+2=16-8x+x^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\le 4, \\ x^2+5x-14=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x\le 4, \\ x=-7 \quad \text{и} \quad x=2 \end{cases};$$

$x_1=-7$, $x_2=2$.

2. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ x+y+4\sqrt{xy}=37 \end{cases};$

$$\begin{matrix} \sqrt{x}=a, \\ \sqrt{y}=b \end{matrix}; \qquad \begin{cases} a+b=5, \\ a^2+b^2+4ab=37 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a=5-b, \\ (5-b)^2+b^2+4(5-b)b=37 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a=5-b, \\ b^2-5b+6=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1=2, \\ b_1=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_2=3, \\ b_2=2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=9 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=4. \end{cases}$$

С–13

1. $\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}=\sqrt{3}=\sqrt[4]{9}>\sqrt[4]{4}$. То есть $\sqrt[3]{\sqrt{27}}>\sqrt[4]{4}$.

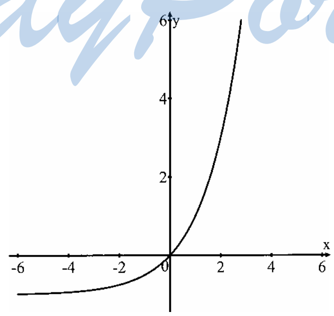
2. $81^{\frac{3}{4}}+(0,25)^{-2}=3^{4\cdot\frac{3}{4}}+2^{(-2)\cdot(-2)}=3^3+2^4=27+16=43$

3. $\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+y}{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right)xy^{-1}=\left(\dfrac{x^2+y^2-x(x+y)}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{y(y-x)}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\cdot\dfrac{x}{y}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

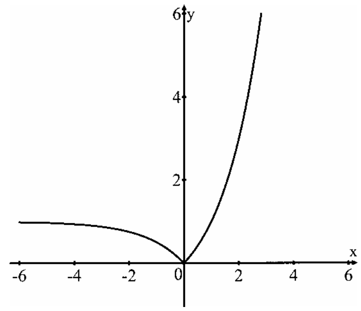
С–14

а)



Область значений: $y>-1$, $-\frac{1}{2}<y<3$ при $-1<x<4$.

б)



При $x\in[-2;4]$: $y_{\text{наим.}}=0$, $y_{\text{наиб.}}=15$.

С–15

1. а) $9^{-x}=27$; $3^{-2x}=3^3$; $-2x=3$; $x=-1,5$;

б) $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}}=4^{-1,25}$; $2^{-3}\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}=2^{-2,5}$; $2^{\frac{x-7}{2}}=2^{-\frac{5}{2}}$; $x-7=-5$; $x=2$.

2. а) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{x-0,5}>\sqrt{2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $x-0,5<-\frac{1}{2}$; $x<0$;

б) $4^{0,5x^2-3}>8$; $2^{x^2-6}>2^3$; $x^2-6>3$; $x^2>9$; $|x|>3$; $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

С–16

1. $9^{|x+1|}>3$; $9^{|x+1|}>9^{0,5}$; $|x+1|>0,5$; $x\in(-\infty;-1,5)\cup(-0,5;\infty)$.

2. а) $5^{x+1}-3\cdot5^{x-2}=122$; $125\cdot5^{x-2}-3\cdot5^{x-2}=122$; $122\cdot5^{x-2}=122$; $5^{x-2}=1$; $x-2=0$; $x=2$.

б) $9^x-2\cdot3^x=63$; $3^x=t$; $t^2-2t-63=0$; $t_1=-7$, $t_2=9$; $3^x=-7$ и $3^x=9$; $x=2$.

С–17

1. $2\lg5+\frac{1}{2}\lg16=\lg25+\lg4=\lg25\cdot4=\lg100=2$.

2. $\log_5x=2\log_53+\frac{1}{2}\log_549-\frac{1}{3}\log_527$; $\log_5x=\log_5\frac{\sqrt{49}\cdot3^2}{\sqrt[3]{27}}$;

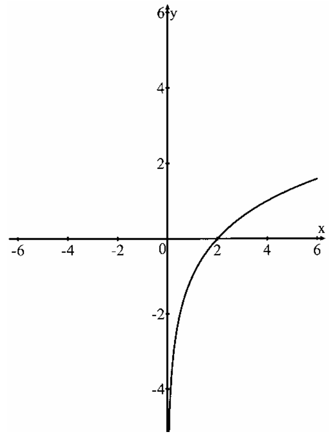
$\log_5x=\log_521$; $x=21$.

3. $x=\frac{\sqrt{10a\sqrt[3]{10}}}{10a}$.

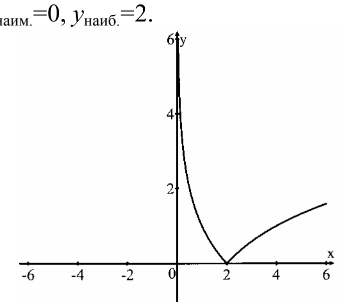
$$\lg x=\lg\left(10^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)\lg10-\frac{1}{2}\lg a=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\lg a.$$

С–18

а) $-2<y<2$ при $\frac{1}{2}<x<8$.



б) При $x\in[0{,}5;8]$: $y_{\text{наим.}}=0$, $y_{\text{наиб.}}=2$.



С–19

1. а) $\log_4 \frac{1}{x^2} + \log_4 \sqrt{x} = -3$; $\log_4 \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \log_4 \frac{1}{64}$; $x^{-3/2} = 16^{-3/2}$; $x=16$;

б) $\lg 10x \cdot \lg 0{,}1x = 3$; $(1+\lg x)(-1+\lg x)=3$; $\lg^2 x - 1 = 3$; $\lg x = \pm 2$; $x_1=100$, $x_2=0{,}01$.

2. а) $\lg 2x < \lg(x+1)$;

$\begin{cases} 2x > 0, \\ x+1 > 0, \\ 2x < x+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x < 1 \end{cases}$; $x\in(0;1)$;

б) $\log_2(1-x) < 1$;

$\begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x < 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 1, \\ x > -1 \end{cases}$; $x\in(-1;1)$.

С–20

1. $\log_{0,5}(2x-3) - \frac{1}{2}\log_{0,5}(2x+3) = 0$; $\log_{0,5}(2x-3) = \log_{0,5}\sqrt{2x+3}$.

$\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 2x-3 = \sqrt{2x+3} \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 1{,}5, \\ x > -1{,}5, \\ 4x^2 - 12x + 9 = 2x + 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1{,}5, \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 1{,}5, \\ x = 3; \;\; x = 1/2 \end{cases}$; $x=3$.

2. а) $\log^2_{0,1} x \geq 1$; $\log_{0,1} x \leq -1$ и $\log_{0,1} x \geq 1$; $x \in (0;0{,}1] \cup [10;\infty)$;

б) $\left(\log_3 x - 2\right)\sqrt{x^2 - 4} \leq 0$; $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ \log_3 x - 2 \leq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 \geq 4, \\ 0 < x \leq 9 \end{cases}$;

$x \in [2;9]$.

С–21

а) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1, \\ x - 2y = 9 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 0, \;\; y > 0, \\ x/y = 3, \\ x - 2y = 9 \end{cases}$;

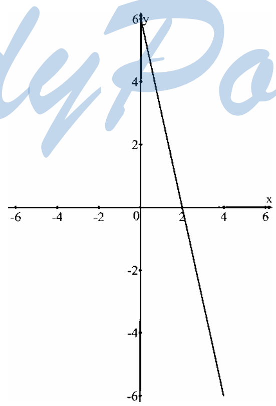
$\begin{cases} x > 0, y > 0, \\ x = 3y, \\ 3y - 2y = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 27 \\ y = 9 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \log_3 \left(y - x\right) = 1, \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 24 \end{cases}$;

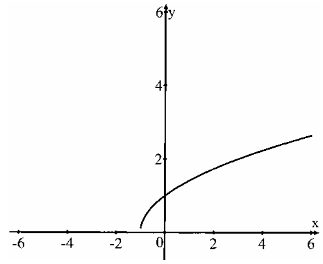
$\begin{cases} y - x = 3, \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 2^3 \cdot 3^1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases}$

С–22

а) $y = -\frac{1}{3}x + 2$; $y = 6 - 3x$ – обратная.



б) $y=x^2-1$, $x\geq 0$; $y=\sqrt{x+1}$ – обратная.



С–23

1. $f(x)=e^{-2x}\cos 3x$;
$f'(x)=-2e^{-2x}\cos 3x-3\sin 3x e^{-2x}$;
$f'(0)'=-2$.

2. $\int\limits_{-1}^{3} 3^x\,dx=\left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_{-1}^{3}=\frac{27}{\ln 3}-\frac{1}{3\ln 3}=\frac{80}{\ln 3}$.

3. $S=\int\limits_0^2\left(e^x-1\right)dx=\left.\left(e^x-x\right)\right|_0^2=e^2-2-1=e^2-3\approx 4{,}4.$

С–24

1. $f(x)=10\ln\frac{1}{5}x$;

$f'(x)=10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}x}=\frac{10}{x}$;

$f'\left(\frac{5}{3}\right)=6.$

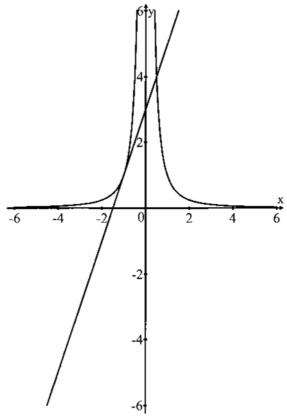
2. $\varphi(x)=\ln x-x$; $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1$; $\varphi'(x)=0$ при $x=1$, $\varphi'(x)>0$ при $0<x<1$, $\varphi'(x)<0$ при $x>1$. Так что $\varphi(x)$ – возрастает при $0<x\leq 1$ и $\varphi(x)$ – убывает при $x\geq 1$.

3. $\int\limits_1^4\left(\frac{4}{x}-1\right)dx=\left.\left(4\ln x-x\right)\right|_1^4=4\ln 4-4-4\ln 1+1=4\ln 4-3\approx 2{,}55$.

С–25

1. $S=\int\limits_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx=\left.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_1^8=\frac{3}{4}(16-1)=11\frac{1}{4}$.

2. Уравнение касательной:
$y=f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$; $f(x)=x^{-2}$, $x_0=-1$, так что $f(x_0)=1$; $f'(x_0)=-2(-1)^{-3}=2$; $y-1=2(x+1)$;искомое уравнение: $y=2x+3$.



С–26

1. $y=3e^{-4x}$, $y'=(3e^{-4x})'=3e^{-4x}(-4x)'=-12e^{-4x}=-4y$, что и требовалось доказать.
2. $y'=-2y$. Общий вид решения: $y=C\cdot e^{-2x}$; так как $y(0)=e$, то $e=c\cdot e^{-2\cdot(0)}=C$; так что $y=e^{-2x+1}$ — искомое решение.

Вариант 4

С–1

1. а) $F'(x)=\left(\frac{6}{x^2}-3\right)'=\frac{-12}{x^3}=f(x)$ для всех $x\in(-\infty;0)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;0)$.

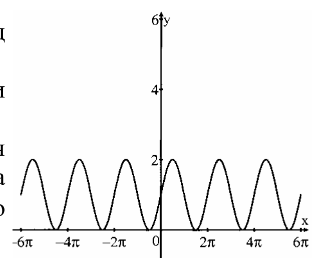
б) $F'(x)=\left(4x^{-1,5}\cdot\sqrt{x^{-1}}\right)'=\left(4x^{-2}\right)'=-\frac{8}{x^3}=f(x)$ для всех $x\in(0;\infty)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке $(0;\infty)$.

2. а) $F'(x)=(3x-3\mathrm{ctg}x)'=3+\frac{1}{\sin^2 x}$ для всех $x\in(0;\pi)$, так что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $(0;\pi)$.

б) Не является, так как $F(x)=\frac{15}{x}$ и $f(x)=-\frac{15}{x^2}$ определены не для всех $x\in(-4;4)$.

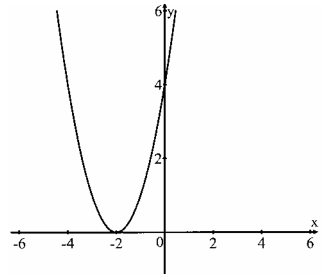
С–2

1. Первообразные для $f(x)=x^{-3}$ имеют вид $F(x)=-0,5x^{-2}+C$,
Две различные, например, $F_1(x)=-0,5x^{-2}$ и $F_2(x)=-0,5x^{-2}+1$.
2. Общий вид первообразной для $f(x)=\cos x$: $F(x)=\sin x+C$, а так как точка $A(\pi;1)$ принадлежит графику $F(x)$, то $1=\sin\pi+C$, и $C=1$ и $F(x)=\sin x+1$.



С–3

1. Общий вид первообразной для $f(x)=2x+4$: $F(x)=x^2+4x+C$, а так как точка $B(-1;1)$ принадлежит графику $F(x)$, то $1=(-1)^2-4+C$, то есть $C=4$ и $F(x)=x^2+4x+4$.



2. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}+\cos\dfrac{x}{2}$ общий вид первообразных: при $x\in\left(\dfrac{1}{3};\infty\right)$: $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x-1}+2\sin\dfrac{x}{2}+C$.

С–4

1. Заштрихованная фигура – трапеция с основаниями 1 и $0{,}5x+1$ и высотой x. Так что $S(x)=\dfrac{1}{2}(1+0{,}5x+1)\cdot x=x+0{,}25x^2$. Далее $S'(x)=(x+0{,}25x^2)'=1+0{,}5x=f(x)$.

2. Площадь такой фигуры равна площади фигуры, ограниченной линиями $y=-2\sin x$, $y=0$, $\pi\le x\le 2\pi$. Далее, $F(x)=2\cos x-$ является первообразной для $y(x)=-2\sin x$. По формуле $S=F(b)-F(a)$ искомая площадь $S=2\cos 2\pi-2\cos\pi=4$.

С–5

а) $\int\limits_1^9 \dfrac{4x}{x^{1,5}}dx=\int\limits_1^9 4x^{-0,5}dx=\left(8x^{0,5}\right)\Big|_1^9=8\cdot 3-8\cdot 1=16$;

б) $\int\limits_{-5}^{1}\left(x^2+8x+16\right)dx=\int\limits_{-5}^{1}(x+4)^2\,dx=\left(\dfrac{(x+4)^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{1}=\dfrac{5^3}{3}+\dfrac{1}{3}=42$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{8}{\sin^2 2x}dx=(-4\operatorname{ctg}2x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-4\cdot 0+4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

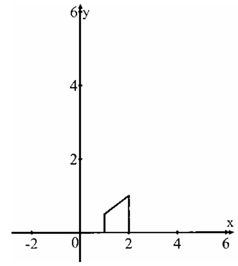
С–6

а)

$S=\int\limits_{-1}^{1}(-2x^2+4-2x^2)dx=4\cdot\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx=4\cdot\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=4\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}+1-\dfrac{1}{3}\right)=5\dfrac{1}{3}$;

б) $S=\int\limits_{-2}^{0}(x+2)dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(2\sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=-2+4+2=4.$

С–7



а) $S=\dfrac{0,5+1}{2}\cdot 1=0,75$;

б)

$S\approx S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{10}+\dfrac{11}{20}\cdot\dfrac{1}{10}+\dfrac{12}{20}\cdot\dfrac{1}{10}+\ldots+\dfrac{19}{20}\cdot\dfrac{1}{10}=$

$=\dfrac{1}{200}\left(10+11+12+\ldots+19\right)=\dfrac{(10+19)\cdot 10}{2\cdot 200}=0,725$;

$\Delta=|S-S_{10}|=0,025$;

в) $S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{n+1}{2n}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{n+2}{2n}\cdot\dfrac{1}{n}+\ldots+\dfrac{2n-2}{2n}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2n^2}\,(n+(n+1)+$

$(n+2)+\ldots+(2n-1))=\dfrac{1}{2n^2}\cdot\dfrac{(n+2n-1)\cdot n}{2}=0,75-\dfrac{1}{4n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0,75$.

С–8

а) $S=\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/2}\left(\cos x-(-2\cos x)\right)dx=\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/2}3\cos x\,dx=\left(3\sin x\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2}=3+3/2=4,5$;

б) $S=\int\limits_{-3}^{1}\left(-x^2+3-2x\right)dx=\left(3x-x^2-x^3/3\right)\Big|_{-3}^{1}=3-1-1/3+9+9-9=10\,2/3$.

С–9

1. а) $\int\limits_{0}^{1}(3-4x)^4\,dx=\left(\dfrac{(3-4x)^5}{-20}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\dfrac{1}{20}+\dfrac{3^5}{20}=12,2$;

б) $\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}\dfrac{4}{\sin^2\left(x/2-\pi/4\right)}dx=\left(-8\operatorname{ctg}\left(x/2-\pi/4\right)\right)\Big|_{\pi}^{3\pi/2}=8$

2. Площадь поперечного сечения равна $S(x)=\pi\cdot((x^2+1)^2-1)=\pi(x^4+2x^2)$. Так что:

$V=\int\limits_{0}^{1}S(x)\,dx=\int\limits_{0}^{1}\pi\cdot\left(x^4+2x^2\right)dx=\pi\cdot\left(x^5/5+2x^3/3\right)\Big|_{0}^{1}=\pi\cdot\left(1/5+2/3\right)=\dfrac{13\pi}{15}$.

С–10

1. а) $\sqrt[6]{(3-\sqrt{10})^6}+\sqrt{10}=\left|3-\sqrt{10}\right|+\sqrt{10}=\sqrt{10}-3+\sqrt{10}=2\sqrt{10}-3$;

б) $\sqrt[5]{a^5}-\sqrt[6]{a^6}=a-|a|=a+a=2a$, если $a>0$.

2. а) $x^6-1=0$; $x^6=1$; $|x|=1$; $x\pm1$; б) $27x^3-1=0$; $x^3=1/27$; $x=1/3$.

С–11

1. $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(12+4\sqrt{5})(12-4\sqrt{5})}=\sqrt[3]{144-80}=\sqrt[3]{64}=4$.

2. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{25+10\sqrt{5}+5}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{30+10\sqrt{5}}{25-5}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3. $x^6<1$; $|x|<1$, $-1<x<1$.

С–12

1. $\sqrt{3x^2+6x+1}=7-x$; $\begin{cases}7-x\ge 0,\\ 3x^2+6x+1\ge 0,\\ 3x^2+6x+1=(7-x)^2\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 7,\\ x\in(-\infty;-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}]\cup[-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3};\infty),\\ x^2+10x-24=0\end{cases}$

$\begin{cases}x\in\left[-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3};7\right]\cup\left(-\infty;-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]\\ x=-12 \text{ и } x=2\end{cases}$ $x_1=2$, $x_2=-12$.

2.

$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$; $\begin{matrix}\sqrt{x}=a,\\ \sqrt{y}=b\end{matrix}$; $\begin{cases}a+b=4,\\ a^2+b^2-3ab=1\end{cases}$; $\begin{cases}a=4-b,\\ (4-b)^2+b^2-3(4-b)\cdot b=1\end{cases}$

$\begin{cases}a=4-b,\\ b^2-4b+3=0\end{cases}$; $\begin{cases}a_1=1,\\ b_1=3\end{cases}$; $\begin{cases}a_2=3,\\ b_2=1\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=9\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=9,\\ y_2=1\end{cases}$.

С–13

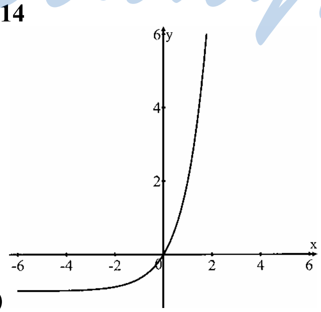
1. $\sqrt[5]{\sqrt{32}}=\sqrt[5]{\sqrt{2^5}}=\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$. Так что $\sqrt[5]{\sqrt{32}}=\sqrt[6]{8}$.

2. $3\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}=3\cdot(0{,}3)^{4\cdot(-0{,}25)}+2^{(-4)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=3\cdot(0{,}3)^{-1}+2^3=10+8=18.$

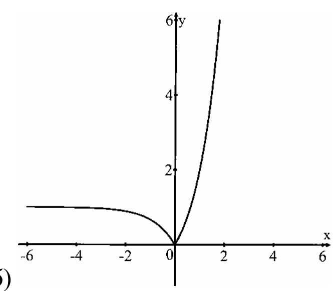
3. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\left(\dfrac{(a^2-b^2)-(a-b)\cdot a}{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)\cdot\dfrac{a}{b}=$

$=\dfrac{b(a-b)}{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

С–14



а)



б)

а) $-\frac{2}{3} < y < 2$ при $-1<x<1$; область значений $y > -1$;

б) при $x\in[-2;2]$ $y_{\text{наим}}=0$, а $y_{\text{наиб.}}=8$.

С–15

1. а) $8^{-x}=16$; $2^{-3x}=2^4$; $-3x=4$; $x=-\frac{4}{3}$;

б) $10^{2x}=0{,}1\cdot\sqrt{1000}$; $10^{2x}=10^{\frac{1}{2}}$; $2x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{4}$.

2. а) $(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3})^{x-1} < 9^{-0,5}$; $\left(\sqrt{3}\right)^{x-1} < \left(\sqrt{3}\right)^{-2}$; $x-1<-2$; $x<-1$;

б) $9^{0,5x^2-3} < 27$; $3^{x^2} - 6 < 3^3$; $x^2 - 6 < 3$; $x<9$; $|x|<3$; $-3<x<3$.

С–16

1. $4^{|x-1|} <8$; $2^{2|x-1|} <2^3$; $2|x-1|<3$; $|x-1|<1{,}5$; $-0{,}5<x<2{,}5$.
2. а) $3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=69$; $27\cdot3^{x-2}-4\cdot3^{x-2}=69$; $23\cdot3^{x-2}=69$; $3^{x-2}=3$; $x-2=1$; $x=3$;

б) $4^x-3\cdot2^x=40$; $2^x=t$; $t^2-3t-40=0$; $t_1=-5$, $t_2=8$; $2^x=-5$ и $2^x=8$; $x=3$.

С–17

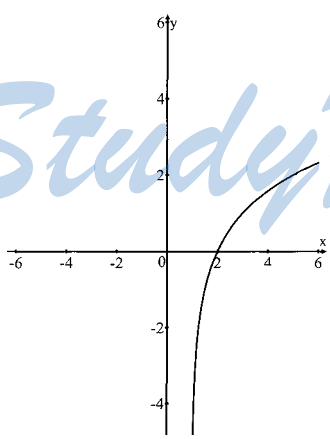
1. $3\lg5+\frac{1}{2}\lg 64 = \lg(5^3\cdot\sqrt{64}) = \lg1000 = \lg10^3 = 3$.

2. $\log_7 x = 2\log_7 5 + \frac{1}{2}\log_7 36 - \frac{1}{3}\log_7 125$; $\log_7 x = \log_7\frac{5^2\cdot\sqrt{36}}{\sqrt[3]{125}}$; $x=30$.

3. $\lg x = \lg\frac{\sqrt[3]{10a\sqrt{10}}}{100a} = \lg(a^{-\frac{2}{3}}\cdot10^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{2}{3}\lg a - 1{,}5$.

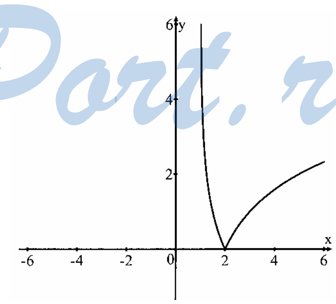
С–18

а)



$-1<y<2$ при $1{,}5<x<5$;

б)



при $x\in[1{,}5;\,9]$ $y_{\text{наим}}=0$; $y_{\text{наиб.}}=3$.

С–19

1. а) $\log_{0,5} \frac{1}{x} + 4\log_{0,5}\sqrt[3]{x} = -1$; $\log_{0,5}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \log_{0,5} 2$; $\sqrt[3]{x} = 2$; x=8;

б) $\lg 100x \cdot \lg 0{,}01x=5$; $(2+\lg x)(\lg x-2)=5$; $\lg^2 x-4=5$; $\lg^2 x=9$; $\lg x=\pm 3$; $x_1=1000$ и $x_2=0{,}001$.

2. а) $\lg(3x)<\lg(x+4)$; $\begin{cases} 3x>0, \\ x+4>0, \\ 3x<x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0, \\ x>-4, \\ x<2 \end{cases}$; $x\in(0;2)$;

б) $\log_{0,5}(1-x)>-1$; $\log_{0,5}(1-x)>\log_{0,5}2$; $\begin{cases} 1-x>0, \\ 1-x<2 \end{cases}$; $\begin{cases} x<1, \\ x>-1 \end{cases}$; $x\in(-1;1)$.

С–20

1. $\frac{1}{2}\log_3(5x-1)-\log_3(x+1)=0$; $\log_3\sqrt{5x-1}=\log_3(x+1)$; $\begin{cases} 5x-1>0, \\ x+1>0, \\ 5x-1=(x+1)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>0{,}2, \\ x>-1, \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$; $x_1=1$, $x_2=2$.

2. а) $\log^2_{0,5}x\le 1$; $-1\le\log_{0,5}x\le 1$; $0{,}5\le x\le 2$;

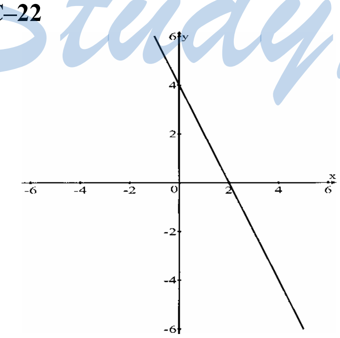
б) $(2-\log_2 x)\sqrt{x^2-1}\ge 0$; $\begin{cases} x>0, \\ x^2-1\ge 0, \\ 2-\log_2 x\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0, \\ x^2\ge 1, \\ \log_2 x\le 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0, \\ x\le -1 \quad x\ge 1, \\ x\le 4 \end{cases}$ $x\in[1;4]$.

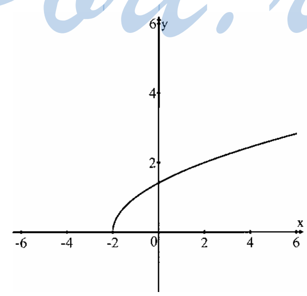
С–21

а) $\begin{cases} \log_4 x-\log_4 y=1, \\ x-3y=16 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_4 \frac{x}{y}=1, \\ x=16+3y \end{cases}$; $\begin{cases} x=4y, \\ x>0, \quad y>0, \\ 4y=16+3y \end{cases}$ $\begin{cases} y=16, \\ x=64 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \log_2(x-y)=1, \\ 2^x\cdot 3^{y+1}=72 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=2 \\ 2^x\cdot 3^{y+1}=2^3\cdot 3^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$

С–22





а) $y=-0{,}5x+2$; $y=4-2x$– обратная;   б) $y=x^2-2$; $y=\sqrt{x+2}$ – обратная.

С–23

1. $f(x)=e^{-x}\sin 2x$; $f'(x)=-e^{-x}\sin 2x+2\cos 2x e^{-x}$; $f'(0)=2$.

2. $\int\limits_{-1}^{2} 5^x\,dx = \left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{25}{\ln 5} - \frac{0,2}{\ln 5} = \frac{24,8}{\ln 5} \approx 15,4$.

3. $S = \int\limits_{-2}^{0} \left(e^{-x} - 1\right)dx = \left(-e^{-x} - x\right)\Big|_{-2}^{0} = -1 + e^2 - 2 = e^2 - 3$.

С–24

1. $f(x) = \frac{1}{8}\ln(-4x)$; $f'(x) = \frac{1}{8(-4x)}\cdot(-4x)' = \frac{1}{8x}$, $f'\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{8\cdot 3} = -\frac{1}{6}$.

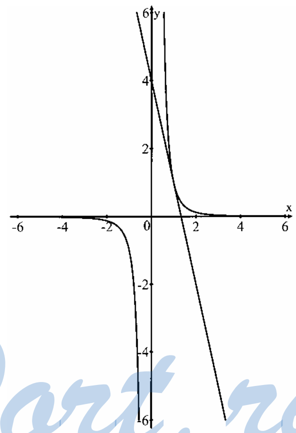
2. $\varphi(x)=x-\ln x$; $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}$; $\varphi'(x)=0$ при $x=1$; $\varphi'(x)>0$ при $x>1$ и $\varphi'(x)<0$ при $0<x<1$. Так что $\varphi(x)$ – возрастает на $[1;\infty)$ и убывает на $(0;1]$.

3. $S=\int\limits_{1}^{4}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\right)dx = \left(2\ln x - \frac{x}{2}\right)\Big|_{1}^{4} = 2\ln 4 - 2 - 2\ln 1 + \frac{1}{2} = 2\ln 4 - 1,5 \approx 1,27$.

С–25

1. $S = \int\limits_{1}^{8} 2x^{\frac{1}{3}}dx = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_{1}^{8} = \frac{3}{2}\cdot(16-1) = 22,5$.

2. Уравнение касательной в точке x_0: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Для $f(x)=x^{-3}$: $f'(x)=-3x^{-4}$ и $f'(1)=-3$. Так что искомое уравнение: $y-1=-3(x-1)$ или $y=-3x+4$.



С–26

1. $y'=(8e^{-2x})'=8\cdot(-2)e^{-2x}=-16e^{-2x}=-2y$, что и требовалось доказать.

2. $y'=-4y$. Общий вид решения: $y=c\cdot e^{-4x}$. А так как $y(1)=e$, то $e=c\cdot e^{-4}$ и $c=e^5$, то есть $y=e^{-4x+5}$ – искомое решение.

Вариант 5

С–1

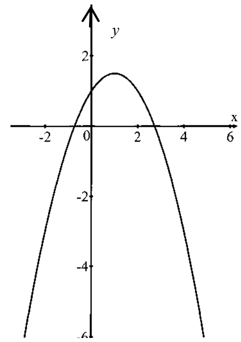
1. а) $F'(x)=\left(\sqrt{-x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = f(x)$ для всех $x\in(-\infty;0)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(-\infty;0)$;

б) $F\ '(x)=(\sin^2 x+1)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x=f(x)$, для всех $x\in(-\infty;0)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке $(-\infty;0)$.

2. а)является, так как $F\ '(x)=(3x^2+\cos x+3)'=6x-\sin x=f(x)$ при всех $x\in(-\infty;\infty)$;

б) не является, так как $F(x)=-\frac{1}{x^2}$ и $f(x)=\frac{1}{x}$ определены не для всех $x\in(-\infty;\infty)$.

С–2



1. Первообразная для $f(x)=-x+1$ имеет вид $F(x)=-\frac{x^2}{2}+x+C$, а так как точка $M(-2;-3)$ принадлежит графику $F(x)$, то $-3=-2-2+C$, то есть $C=1$ и $F(x)=1+x-\frac{x^2}{2}$ – искомая первообразная.

2. а) $F(x)=\frac{2}{21}(7x+1)\sqrt{(7x+1)}+C$;

б) $F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x-\operatorname{tg}x+C$.

С–3

а) Общий вид первообразной: $f(x)=-\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{3}+C$;

б) Общий вид первообразной: $F(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.

С–4

а) $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$;

б) $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=\left(-\frac{1}{2}\cos x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

С–5

а) $\int\limits_{1}^{4}\frac{x}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}dx=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_{1}^{4}=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$;

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos x=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$; в) $\int\limits_{0}^{2}\left(x^7-2x\right)dx=\left(\frac{x^8}{8}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}=32-4=28$.

С–6

а) $S=\int_0^1\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-x^3/3-x^2/2\right)\Big|_0^1=2-1/3-1/2=1\,1/6$;

б) $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(8\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\left(8\sin x-\mathrm{tg}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

С–7

Обозначим $S(t)$ – уравнение пути, тогда $S'(t)=V(t)$, и искомый путь равен: $\int_2^6 V(t)\,dt=\int_2^6\left(2t-\sin\pi t\right)dt=\left(t^2+\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)\Big|_2^6=36+\frac{1}{\pi}-4-\frac{1}{\pi}=32$.

С–8

1. $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx+\int_{-2}^0(2+x)\,dx=(4x-2\mathrm{tg}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^0=\pi-2+4-2=\pi.$

2. $\int_0^2\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^4+\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left(-\frac{2}{5}\left(1-\frac{x}{2}\right)^5-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{5}+\frac{2}{\pi}=0{,}4+\frac{4}{\pi}$.

С–9

1. а) Площадь сечения $S(x)=\pi x$; $V=\int_0^4\pi x\,dx=\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\Big|_0^4=8\pi$;

б) Площадь сечения $S(y)=16\pi-\pi y^4$;

$V=\int_0^2\left(16\pi-\pi y^4\right)=\left(16\pi y-\frac{\pi y^5}{5}\right)\Big|_0^2=32\pi-\frac{32\pi}{5}=25{,}6\pi$.

2. Так как $F=k\Delta x$, то $k=\frac{F}{\Delta x}=\frac{2H}{6\text{ см}}$. Далее,

$A=\frac{k(\Delta x)^2}{2}=\frac{2H\cdot(10)^2\text{ см}^2}{2\cdot 6\text{ см}}=\frac{0{,}01\text{ м}^2\cdot H}{0{,}06\text{ м}}=\frac{1}{6}H\cdot\text{м}=\frac{1}{6}$Дж.

С–10

1. Не верно, так как $\sqrt{99-10\sqrt{2}}>0$, а $7-5\sqrt{2}<0$.

2. а) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[5]{8}=\sqrt[15]{2^5\cdot 2\cdot 2^9}=\sqrt[15]{2^{15}}=2$;

б) $((\sqrt{3^3}+\sqrt{(\frac{1}{3})^3}):(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}})=(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}})\left((\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}+(\sqrt{\frac{1}{3}})^2\right):(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}})=$

$=3-1+1/3=2\,1/3$.

3. а) $\sqrt[3]{10,731}\approx 2,2057$; б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}\approx 2,6741$.

4. $\sqrt{2}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[5]{\sqrt{31}}=\sqrt[10]{31}$, так что $\sqrt{2}>\sqrt[5]{\sqrt{31}}$.

С–11

1. $\sqrt[4]{2a^4}=|a|\sqrt{2}=-a\sqrt{2}$, где $a<0$.

2.а) $x^6–3x–10=0$; $x^3=t$; $t^2–3t–10=0$; $t_1=-2$ и $t_2=5$; $x^3–2$ и $x^3=5$; $x_1=-\sqrt[3]{2}$ и $x_2=\sqrt[3]{5}$;

б) $\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-4=0$; $\sqrt[4]{x}=t$; $t^2+3t–4=0$; $t_1=1$, $t_2=-4$; $\sqrt[4]{x}=-4$, $\sqrt[4]{x}=1$; $x=1$.

3. а) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}=\sqrt[3]{\left(7-\sqrt{22}\right)\left(7+\sqrt{22}\right)}=\sqrt[3]{49-22}=\sqrt[3]{27}=3$;

б) $\sqrt[3]{a^3}+\sqrt{a^2}=a+|a|=\begin{cases}2a, & \text{если } a\ge 0,\\ 0, & \text{если } a\le 0.\end{cases}$

С–12

1. $\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}$;

$\begin{cases}4+x>0,\\ 5-x>0,\\ (4+x)(5-x)=8\end{cases}$; $\begin{cases}x>-4,\\ x<5,\\ x^2-x-12=0\end{cases}$; $\begin{cases}-4<x<5,\\ x=4 \text{ и } x=-3\end{cases}$; $\begin{matrix}x_1=-3,\\ x_2=4.\end{matrix}$

2. $\begin{cases}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=7\end{cases}$; $\begin{matrix}\sqrt[6]{x}=a,\\ \sqrt[6]{y}=b\end{matrix}$; $\begin{cases}a-b=1,\\ a^3-b^3=7\end{cases}$; $\begin{cases}a-b=1,\\ a^2+ab+b^2=7\end{cases}$;

$\begin{cases}a=b+1,\\ (b+1)^2+(b+1)b+b^2=7\end{cases}$; $\begin{cases}a=b+1,\\ b^2+b-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}a_1=-1, & a_2=2,\\ b_1=-2, & b_2=1\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[6]{x}=2,\\ \sqrt[6]{y}=1\end{cases}$;

$\begin{cases}x=64,\\ y=1.\end{cases}$

С–13

1. а) $(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{4}}=(3^{3\cdot\frac{2}{3}}+5^{3\cdot\frac{1}{3}}+2^{3\cdot\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{4}}=16^{-\frac{1}{4}}=2^{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}=2^{-1}=0,5$;

б) $(10+73^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}:(10-\sqrt{73})^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{((10+73^{\frac{1}{2}})(10-73^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{(100-73)^{1/3}}=$

$=\dfrac{1}{3^{3\cdot\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{3}$.

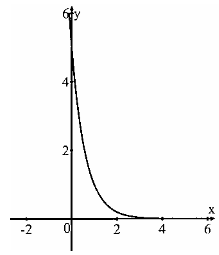
2. $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{-\frac{5}{3}}=5^{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}=5^{-\frac{5}{12}}$; $\sqrt[4]{5^{-1}:\sqrt[3]{25}}=5^{\left(-1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}}=5^{-\frac{5}{12}}$, так что $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{-\frac{5}{3}}=\sqrt[4]{5^{-1}:\sqrt[3]{25}}$.

3. $$\frac{u+8}{u^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{u}+4}-\frac{u-8}{\sqrt[3]{u^2}+2u^{\frac{1}{3}}+4}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{u}+2\right)\left(\sqrt[3]{u^2}-2\sqrt[3]{u}+4\right)}{\sqrt[3]{u^2}-2\sqrt[3]{u}+4}-\frac{\left(\sqrt[3]{u}-2\right)\left(\sqrt[3]{u^2}+2\sqrt[3]{u}+4\right)}{\sqrt[3]{u^2}+2\sqrt[3]{u}+4}=\sqrt[3]{u}+2-\sqrt[3]{u}+2=4$$

С–14

1. См. график.



2. а) $\sqrt[3]{5^{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}\cdot 25^{-\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{5^{5+2\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{5^6}=25$;

б) $\left(\left(1/3\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=\left(1/3\right)^3=1/27$.

3. $y=\sqrt{3^x-9}$; $3^x-9\geq 0$; $3^x\geq 9$; $x\geq 2$; $D(y)=[2;\infty)$, $E(y)=[0;\infty)$.

С–15

1. а) $2^x+2^{x-3}=18$; $8\cdot 2^{x-3}+2^{x-3}=18$; $2^{x-3}=2$; $x-3=1$; $x=4$;

б) $\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{2x-2}=1\frac{7}{9}$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$; $2x-2=-4$; $x=-1$.

2. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x>5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x>1$; $x<0$;

б) $3^{|x|+2}<27$; $|x|+2<3$; $|x|<1$; $-1<x<1$.

С–16

1. а) $8^{|x^2-1|}=16$; $2^{3|x^2-1|}=2^4$; $|x^2-1|=\frac{4}{3}$; $x^2=-\frac{1}{3}$ и $x^2=\frac{7}{3}$; $x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x+3^{x+3}=12$; $3^x=t$; $\frac{1}{t}+27t=12$; $27t^2-12t+1=0$; $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=\frac{1}{9}$;

$3^x=\frac{1}{3}$ и $3^x=\frac{1}{9}$; $x_1=-1$ и $x_2=-2$.

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^x-2^{1-x}-8<0$; $2^{-2x}-2\cdot 2^{-x}-8<0$; $2^{-x}=t$; $t^2-2t-8<0$; $-2<t<4$; $-2<2^{-x}<4$; $-x<2$; $x>-2$.

С–17

1.а) $\log_{\sqrt{2}}12-\log_2 9=2\log_2 12-\log_2 9=\log_2\frac{12^2}{9}=\log_2 16=4$;

б) $\left(\dfrac{\lg 125-2\lg 2}{\lg\sqrt[3]{4}+\lg 0,2}\right)^2=\left(\dfrac{3\lg 5-2\lg 2}{\frac{2}{3}\lg 2-\lg 5}\right)^2=\left(\dfrac{-3\left(\frac{2}{3}\lg 2-\lg 5\right)}{\frac{2}{3}\lg 2-\lg 5}\right)^2=(-3)^2=9$.

2. $\log_2\dfrac{\sqrt{8}\cdot a\cdot\sqrt[12]{bc^3}}{9\sqrt{x}y^2}=\log_2\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot a\cdot b^{\frac{1}{12}}\cdot c^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-2}\right)=$

$=1,5+\log_2 a+\frac{1}{12}\log_2 b+\frac{1}{4}\log_2 c-2\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 x-2\log_2 y$.

3. а) $\log_7\left(3^{\log_7 11}\right)=\log_7 11\cdot\log_7 3=\log_7\left(11^{\log_7 3}\right)$,так что $3^{\log_7 11}=11^{\log_7 3}$;

б) $\log_2 3+\log_3 2=\log_2 3+\dfrac{1}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2^2 3+1}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2^2 3-2\log_2 3+1}{\log_2 3}+2=$

$=\dfrac{\left(\log_2 3-1\right)^2}{\log_2 3}+2>2$; $\log_2 3+\log_3 2>2$.

С–18

1.а) $\log_2\dfrac{1}{51}<\log_2 1=0$; $\log_2\dfrac{1}{51}<0$;

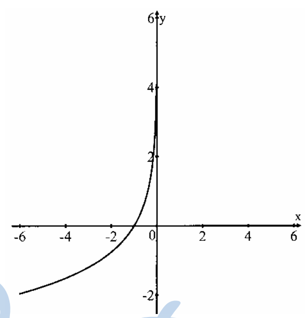
б) $\log_{0,5}0,75>\log_{0,5}1=0$; $\log_{0,5}0,75>0$.

2. $y=\dfrac{1-x}{\log_3\left(x^2-9\right)}$; $x^2-9>0$, $x^2-9\neq 1$;

$\begin{cases}x<-3 \text{ и } x>3\\ x\neq\pm\sqrt{10}\end{cases}$;

$D(y)$ = $(-\infty;-\sqrt{10})$ ∪ $(-\sqrt{10};-3)$ ∪ ∪ $(3;\sqrt{10})$ ∪ $(\sqrt{10};\infty)$.

3. См. график.



С–19

1.а) $\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-5x-3\right)=2$; $x^2-5x-3=3$; $x^2-5x-6=0$; $x_1=-1$, $x_2=6$;

б) $\lg(x-1)=0,5\lg(1+1,5x)$; $\lg(x-1)=\lg\sqrt{1+1,5x}$;

$\begin{cases}x-1>0,\\ 1+1,5x>0,\\ (x-1)^2=1+1,5x\end{cases}$; $\begin{cases}x>1,\\ x^2-3,5x=0\end{cases}$; $\begin{cases}x>1,\\ x=0 \text{ и } x=3,5\end{cases}$; $x=3,5$.

2. а) $\log_2(2x-1)>\log_2(3x-4)$; $\begin{cases}2x-1>0,\\ 3x-4>0,\\ 2x-1>3x-4\end{cases}$; $\begin{cases}x>0,5,\\ x>1\frac{1}{3},\\ x<3\end{cases}$; $1\dfrac{1}{3}<x<3$;

б) $\frac{x+2}{\lg x}\ge 0$; $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ \lg x>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x+2\le 0,\\ \lg x<0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -2,\\ x>0,\\ x>1\end{cases}$ или $\begin{cases}x\le -2,\\ x>0,\\ x<1\end{cases}$; $x\in(1;\infty)$.

C–20

1.а) $2\log^2_{\frac{1}{3}}x-5\log_3 x=7$; $\log_{\frac{1}{3}}x=t$; $2t^2+5t-7=0$; $t_1=1$; $t_2=-\frac{7}{2}$;

$\log_{\frac{1}{3}}x=1$, $\log_{\frac{1}{3}}x=-\frac{7}{2}$; $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=27\sqrt{3}$;

б) $\frac{3}{\lg x-2}+\frac{2}{\lg x-3}=-4$; $\lg x=t+2{,}5$; $\frac{3}{t+0{,}5}+\frac{2}{t-0{,}5}=-4$; $\frac{5t-0{,}5}{t^2-0{,}25}=-4$;

$4t^2+5t-1{,}5=0$; $t_1=-\frac{3}{2}$, $t_2=0{,}25$; $\lg x=1$, $\lg x=2{,}75$; $x_1=10$, $x_2=10\sqrt[4]{1000}$.

2. а) $\lg^2x^2+3\lg x>1$; $4\lg^2x+3\lg x>1$; $\lg x=t$; $4t^2+3t-1>0$; $t<-1$ и $t>\frac{1}{4}$; $\lg x<-1$ и $\lg x>\frac{1}{4}$; $x<\frac{1}{10}$ и $x>\sqrt[4]{10}$; $x\in(0;\frac{1}{10})\cup(\sqrt[4]{10};\infty)$;

б) $7^{2x}-3\cdot 7^x>10$; $7^x=t$; $t^2-3t-10>0$; $t<-2$ и $t>5$; $7^x<-2$ и $7^x>5$; $x>\log_7 5$.

C–21

а) $\begin{cases}\log_2(x+y)=3,\\ \log_{15}x=1-\log_{15}y\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=8,\\ \log_{15}x\cdot y=1\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=8,\\ xy=15\end{cases}$1; $\begin{cases}x=8-y,\\ (8-y)y=15\end{cases}$;

$\begin{cases}x=8-y,\\ y^2-8y+15=0\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=5,\\ y_1=3\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2^{\cos x}+4^{\sin y}=3,\\ 2^{\cos x}\cdot 4^{\sin y}=2\end{cases}$; $\begin{cases}2^{\cos x}=a,\\ 4^{\sin y}=b\end{cases}$; $\begin{cases}a=3-b,\\ (3-b)\cdot b=2\end{cases}$; $\begin{cases}a=3-b,\\ b^2-3b+2=0\end{cases}$; $\begin{cases}a_1=1,\\ b_1=2\end{cases}$ и

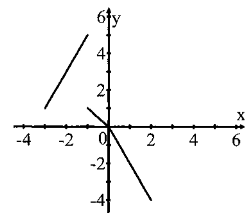
$\begin{cases}a_2=2,\\ b_2=1\end{cases}$; $\begin{cases}2^{\cos x}=1,\\ 4^{\sin y}=2\end{cases}$ и $\begin{cases}2^{\cos x}=2,\\ 4^{\sin y}=1\end{cases}$; $\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin y=\frac{1}{2}\end{cases}$ и $\begin{cases}\cos x=1,\\ \sin y=0\end{cases}$;

$\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ y_1=(-1)\frac{n\pi}{6}+\pi n\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=2\pi k,\ \ k\in Z,\\ y_2=\pi n,\ \ n\in Z.\end{cases}$

C–22

1.а) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$; $(1-x)f(x)=1+x$; $x(1+f(x))=f(x)-1$, значит $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ – обратная для $f(x)$. $D(g)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$, $E(g)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

б) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$, $x\le 0$; $f^2(x)=3-x^2$; $x=-\sqrt{3-f^2(x)}$, так что $g(x)=-\sqrt{3-x^2}$ — обратная для $f(x)$; $D(g)=[0;\sqrt{3}]$; $E(g)=[-\sqrt{3};0]$.



2. $f(g(-2))=-2$, $f(g(1))=1$, так что $g(-2)=3$, $g(0)=0$, $g(1)=-2$;
$D(g)=E(f)=(-3;-1{,}5]\cup[-1;2]$;
$E(g)=D(f)=[-4;4]$.

С–23

1.а) $f'(x)=(0{,}2^{7+0{,}1x})'=0{,}2^{7+0{,}1x}\cdot\ln 0{,}2\cdot(7+0{,}1x)'=0{,}1\ln 0{,}2\cdot 0{,}2^{7+0{,}1x}$;

б) $f'(x)=((1/3)2x+\frac{1}{2})'=(1/3)^{2x+\frac{1}{2}}\cdot\ln 1/3\cdot(2x+1/2)'=-2\ln 3\cdot(1/3)^{2x+\frac{1}{2}}$.

2. Уравнение касательной к $f(x)$ в точке x_0: $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$; $f(x_0)=e^{1-1}=1$; $f'(x_0)=(e^{1-x})'\Big|_{x=1}=-e^{1-1}=-1$. Так что искомое уравнение: $y-1=-(x-1)$; $y=-x+2$.

3. $f'(x)=(x-1)'e^{x+1}+(x-1)(e^{x+1})'=e^{x+1}(1+x-1)=xe^{x+1}$, $f'(x)=0$ при $x=0$; $f'(x)>0$ при $x>0$, $x>0$, $f'(x)<0$ при $x<0$; так что $f(x)$ – возрастает на $[0;\infty)$ и убывает на $(-\infty;0]$.

4. $\int\limits_0^1\left(2^{3x-1}\ln 2\right)dx=\int\limits_0^1\frac{1}{3}d\left(2^{3x-1}\right)=\frac{1}{3}2^{3x-1}\Big|_0^1=\frac{1}{3}2^2-\frac{1}{3}2^{-1}=1\frac{1}{6}$.

С–24

1.а) $f'(x)=(\ln(1-0{,}2x))'=\frac{(1-0{,}2x)'}{1-0{,}2x}=\frac{-0{,}2}{1-0{,}2x}=\frac{1}{x-5}$;

б) $f'(x)=(\log_3(x^2-2\sqrt{x}))'=\frac{(x^2-2\sqrt{x})'}{\ln 3\cdot(x^2-2\sqrt{x})}=\frac{2x-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(x^2-2\sqrt{x})\ln 3}=\frac{2x\sqrt{x}-1}{(x^2\sqrt{x}-2x)\ln 3}$.

2. Уравнение касательной к $f(x)$ в точке x_0: $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$; $f(x_0)=\log_2(1+3)=2$; $f'(x_0)=\frac{1}{(x+3)\ln 2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{4\ln 2}$. Так что искомое уравнение: $y-2=\frac{1}{4\ln 2}(x-1)$; $y=\frac{x}{4\ln 2}+2-\frac{1}{4\ln 2}$.

3. $f'(x)=\left(x^2\right)'\log_2 x+x^2\cdot\left(\log_2 x\right)'=2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}=x\left(\frac{2\ln 2\log_2 x+1}{\ln 2}\right)$,

$f'(x)=0$ при $\log_2 x=-\frac{1}{\ln 4}$, $x=2^{-\frac{1}{\ln 4}}=e^{\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{2\ln 2}\right)}=e^{-0{,}5}$; $f'(x)>0$ при $x>e^{-0{,}5}$

и $f'(x)<0$ при $0<x<e^{-0,5}$; так что $f(x)$ возрастает на $[e^{-0,5}; \infty)$ и убывает на $(0;e^{-0,5}]$.

С–25

1. $f'(x)=\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-\sqrt{2}}\right)'+\left(x^{-2}\right)=\sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}-2x^{-3}$.

2. $\sqrt[3]{125,15}-\sqrt[3]{124,85}\approx 0,004$

3. $\int\limits_1^{\pi} x^{\pi}dx=\left.\left(\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}\right)\right|_1^{\pi}=\frac{\pi^{\pi+1}-1}{\pi+1}$.

С–26

1. $f'(x)=(e^{-3x})'=-3e^{-3x}=-3f(x)$; $y'=-3y$ – искомое уравнение.

2. $f'(x)=f(x)\ln 4$, общее решение $y=C\cdot 4^x$, а так как $f(1)=2$, то $2=C\cdot 4^1$, $C=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{2}\cdot 4^x=2^{2x-1}$ – искомое уравнение.

3. $y''=-\frac{1}{9}y$. Общий вид решения $y=a\cos\left(\frac{1}{3}+\varphi\right)$, где a, $\varphi\in R$.

Вариант 6

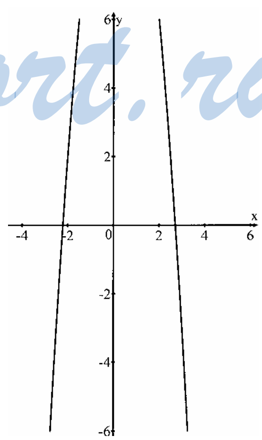
С–1

1. а) $F'(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x^3}-2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}=f(x)$ для всех $x\in(0;\infty)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(0;\infty)$;

б) $F'(x)=(3-\cos^2x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x=f(x)$ для всех $x\in(0;\infty)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(0;\infty)$.

2. а) Является, т.к. $F'(x)=(x^2+\sin x+5)'=2x+\cos x=f(x)$ для всех $x\in(-\infty;\infty)$;

б) Не является, так как $F(x)$ и $f(x)$ определены не для всех $x\in(-\infty;\infty)$.



С–2

1. Общий вид первообразных для $h(x)=1-4x$: $H(x)=x-2x^2+C$, а так как точка $M(-1;9)$ принадлежит графику $H(x)$, то $9=-1-2+C$, то есть $C=12$ и $H(x)=x-2x^2+12$.

2. а) $F(x)=\frac{1}{9}(6x-2)\sqrt{6x-2}+C$;

б) $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x-\operatorname{ctg}x+C$.

С–3

а) $F(x)=-\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}+C$; б) $F(x)=-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.

С–4

а) $S=\int\limits_{-1}^{0}\left(-x^3\right)dx=\left(-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$; б) $S=\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}}\cos 0{,}5xdx=2\sin 0{,}5\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}}=-1+2=1$.

С–5

а) $\int\limits_{1}^{4}\frac{\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\Big|_{1}^{4}=4-2=2$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin xdx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$;

в) $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^5-3x^2\right)dx=\left(\frac{x^6}{6}-x^3\right)\Bigg|_{-2}^{0}=-\frac{64}{6}-8=-\frac{56}{3}=-18\frac{2}{3}$.

С–6

а)$S=\int\limits_{0}^{1}xdx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3}=$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-1\frac{1}{6}$;

б) $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}8\cos xdx=tgx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}+8\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{x}+8-4\sqrt{3}=8-3\sqrt{3}$.

С–7

Если $S(t)$ – координата в момент t, то $S'(t)=V(t)$, так что $S(t)=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+\frac{1}{\pi}\sin\pi t+C$, а так как $S(0)=3$, то $C=3$ и $S(t)=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+\frac{1}{\pi}\sin\pi t+3$.

С–8

1. $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{12x}{\pi}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(-2+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{6x^2}{\pi}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}+\left(-2x-\mathrm{ctg}x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}-1+$

$+\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$.

2. $\int\limits_1^0\left(\frac{(4x+1)^3}{3}+\cos\pi x\right)dx=\left(\frac{(4x+1)^4}{48}+\frac{1}{2}\sin\pi x\right)\Bigg|_1^0=\frac{1}{48}-\frac{625}{48}=-\frac{624}{48}=-13$.

С–9

1.а) Площадь сечения $S(x)=\pi x^4$, так что $V=\int\limits_0^2\pi x^4dx=\frac{\pi x^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{32\pi}{5}=6{,}4\pi$;

б) Площадь сечения $S(x)=4\pi-\pi(\sqrt{x})^2=\pi(4-x)$; так что $V=\int\limits_0^4\pi(4-x)dx=\left(4\pi x-\frac{\pi x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=16\pi-8\pi=8\pi$.

2. $F=k\Delta x$, так что $k=\frac{F}{\Delta x}=\frac{4H}{4\text{см}}=\frac{1H}{1\text{см}}$. Далее, $A=\frac{k(\Delta x)^2}{2}=\frac{1H}{1\text{см}}\cdot\frac{4\text{см}^2}{2}=\frac{0{,}0004\text{м}^2\cdot H}{0{,}02\text{м}}=0{,}02H\cdot\text{м}=0{,}02$ Дж .

С–10

1. Верно, так как $8-4\sqrt{3}>0$ и $(8-4\sqrt{3})^2=64-64\sqrt{3}+16\cdot3=112-64\sqrt{3}$.

2. а) $\sqrt[6]{3\sqrt[7]{3^5}}:\sqrt[7]{9}=3^{\frac{1}{6}+\frac{5}{42}}:3^{\frac{2}{7}}=3^{\frac{2}{7}}:3^{\frac{2}{7}}=1$;

б) $\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{\frac{1}{5^3}}\right):\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\left(\sqrt{5^6}-1\right)}{\sqrt{5^3}}:\frac{\sqrt{5^2}-1}{\sqrt{5}}=\frac{124}{5\sqrt{5}}:\frac{4}{\sqrt{5}}=6{,}2$.

3. а) $\sqrt[3]{20{,}39}\approx2{,}732$; б) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{3}\approx2{,}7583$.

4. $\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$, а $\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$, так что $\sqrt{3}<\sqrt[3]{\sqrt{28}}$.

С–11

1. $\sqrt[6]{4b^2}=|b|\sqrt[6]{4}=-b\sqrt[3]{2}$, так как $b<0$.

2. а) $x^6-2x^3-15=0$; $x^3=t$; $t^2-2t-15=0$; $t_1=-3$, $t_2=5$; $x^3=-3$ и $x^3=5$; $x_1=-\sqrt[3]{3}$, $x_2=\sqrt[3]{5}$.

б) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}=5$; $\sqrt[4]{x}=t$; $t^2-4t-5=0$; $t_1=-1$, $t_2=5$; $\sqrt[4]{x}=-1$ и $\sqrt[4]{x}=5$; $x=625$.

3. а) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}=\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{17}\right)\left(9+\sqrt{17}\right)}=\sqrt[3]{81-17}=\sqrt[3]{64}=4$;

б) $\sqrt[5]{a^5}+\sqrt[4]{a^4}=a+|a|=\begin{cases}0, & \text{если } a\le0,\\ 2a, & \text{если } a\ge0.\end{cases}$

С–12

1. $\sqrt{8+x}\cdot\sqrt{8-x}=x$;

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ 8+x \ge 0, \\ 8-x \ge 0, \\ \sqrt{64-x^2} = x \end{cases}; \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -8, \\ x \le 8, \\ 64-x^2 = x^2 \end{cases}; \begin{cases} 0 \le x \le 8, \\ x^2 = 32 \end{cases}; \begin{cases} 0 \le x \le 8, \\ x = \pm\sqrt{32} \end{cases}; x = 4\sqrt{2}.$$

2. $\begin{cases} \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt[6]{x} = a, \\ \sqrt[6]{y} = b \end{cases};$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = 9 \end{cases}; \begin{cases} a = 3-b, \\ a^2-ab+b^2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 3-b, \\ (3-b)^2-(3-b)b+b^2 = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a = 3-b, \\ b^2-3b+2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a_2 = 2, \\ b_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 64 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 64, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

С–13

1.а)

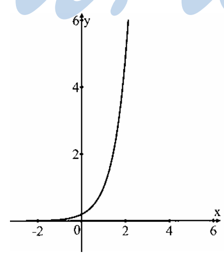
$$\left(8^{\frac{2}{3}} + \left(\tfrac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((\sqrt[3]{8})^2 + (\sqrt{9})^3 + (\sqrt[6]{125^2})\right)^{\frac{1}{2}} = (4+27+5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6;$$

б) $\left(12-19^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(12+19^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(12-\sqrt{19}\right)\left(12+\sqrt{19}\right)} = \sqrt[3]{144-19} = \sqrt[3]{125} = 5.$

2. $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-5/4} = 3^{2/3\cdot(-5/4)} = 3^{-10/12}$, а $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 9^{-\frac{2}{3}}} = 3^{-\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)} = 3^{-\frac{7}{6}}$, так что $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-5/4} > \sqrt{1/3 \cdot 9^{-2/3}}$, так как $-10/12 > -7/6$ и $3>1$.

3. $$\frac{8v+1}{4v^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{v}+1} - \frac{8v-1}{4\sqrt[3]{v^2}+2v^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{\left(2\sqrt[3]{v}+1\right)\left(4\sqrt[3]{v^2}-2\sqrt[3]{v}+1\right)}{4\sqrt[3]{v^2}-2\sqrt[3]{v}+1} - \frac{\left(2\sqrt[3]{v}-1\right)\left(4\sqrt[3]{v^2}+2\sqrt[3]{v}+1\right)}{4\sqrt[3]{v^2}+2\sqrt[3]{v}+1} = 2\sqrt[3]{v}+1-2\sqrt[3]{v}+1 = 2.$$

С–14



1. См. график.

2.а) $\sqrt[4]{3^{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\cdot 9^{-\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3^{3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3^4} = 3;$

б) $\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}.$

3. $y = \sqrt{2^x-4}$; $E(y)=[0;\infty)$; $D(y)=[2;\infty)$, так как $2^x-4 \ge 0$ при $x \ge 2$.

С–15

1. а) $3^x+4\cdot3^{x+1}=13$; $3^x+12\cdot3^x=13$; $3^x=1$; $x=0$;

б) $\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{3x-4}=\sqrt{8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4}=2^{\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $3x-4=-\frac{3}{2}$; $x=\frac{5}{6}$.

2. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\le 26$; $25\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\le 26$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\le 1$; $x+1\ge0$; $x\ge-1$;

б) $3^{x^2}>9^8$; $3^{x^2}>3^{16}$; $x^2>16$; $x\in(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$.

С–16

1. а) $27^{\left|x^2-2\right|}=811$; $3^{3\left|x^2-2\right|}=3^4$; $\left|x^2-2\right|=\frac{4}{3}$; $x^2=\frac{10}{3}$ и $x^2=\frac{2}{3}$; $x=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$ и $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x-1}=4^{x-3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x}$; $2x^2+3x-1=6-2x$; $2x^2+5x-7=0$; $x_1=1$, $x_2=-3{,}5$.

2. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-3^{1-x}+6<0$; $3^{-2x}-3\cdot3^{-x}+6<0$; $3^{-x}=t$; $t^2-3t+6<0$; $D<0$, решений нет.

С–17

1. а) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{18}-\log_3 4=2\log_3 3\sqrt{2}-\log_3 4=\log_3 18-\log_3 4=\log_3 {}^{9}\!/_{2}$. Вероятно в условиях опечатка, нужно:

$\log_{\sqrt{3}}18-\log_3 4=2\log_3 18-\log_3 4=\log_3 324-\log_3 4=\log_3\frac{324}{4}=\log_3 81=4$;

б) $\left(\frac{\log_6 27+2\log_6 2}{\log_6\sqrt[3]{0,25}+\log_6 {}^{1}\!/_{3}}\right)^3=\left(\frac{\log_6 27\cdot2^6}{\log_6\frac{1}{3}\sqrt[3]{0,25}}\right)^3=\left(\log_{\frac{1}{3}\sqrt[3]{0,25}}3^3\cdot4^3\right)^3=-\log_{3\sqrt[3]{4}}=$ $=(3^34^3)^3$. Вероятно в условиях опечатка, нужно:

$\left(\frac{\log_6 27+2\log_2 2}{\log_6 0,24+\log_6\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\frac{\log_6 27\cdot2^6}{\log_6\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\frac{\log_6 12^3}{-\log_6 12}\right)^3=\left(\frac{3\log_6 12}{-\log_6 12}\right)^3=(-3)^3=-27.$

2. $\log_5\frac{125a^2\sqrt[3]{bx^5}}{3\sqrt{y}z^3}=\log_5\left(5^3|a|^2\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}\cdot3^{-1}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot z^{-\frac{1}{3}}\right)=$

$=3-\log_5 3+2\log_5|a|+{}^{1}\!/_{3}\log_5 b+{}^{5}\!/_{3}\log_5 x-{}^{1}\!/_{2}\log_5 y-{}^{1}\!/_{3}\log_5 z$.

3. а) $\log_3 7^{\log_3 11} = \log_3 7 \cdot \log_3 11$, а $\log_3 11^{\log_3 7} = \log_3 11 \cdot \log_3 7$, так что $7^{\log_3 11} = 11^{\log_3 7}$;

б) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 15 < \log_2 16 = 4$, то есть $\log_2 5 + \log_2 3 < 4$.

С–18

1. а) $\log_3 4 > 0$, так как $\log_3 4 > \log_3 1 = 0$;

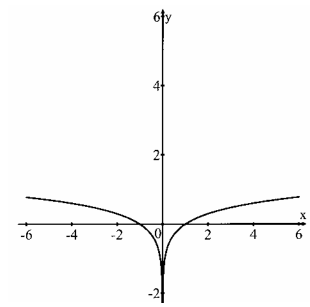
б) $\log_{1/3} 0{,}9 > 0$,

так как $\log_{1/3} 0{,}9 > \log_{1/3} 1 = 0$.

2. $y = \dfrac{x}{\log_2\left(x^2 - 4\right)}$, $x^2 - 4 > 0$ и $x^2 - 4 \neq 1$ при $x^2 > 4$, $x^2 \neq 5$, так что

$D\left(y\right) = (-\infty; \sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}) \cup$
$\cup (\sqrt{5}; \infty)$.

3. См. график.



С–19

1. а) $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 3x) = 4$; $x^2 - 3x = (\sqrt{2})^4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$;

$\lg(2x+1) = 0{,}5\lg(1-3x)$; $2\lg(2x+1) = \lg(1-3x)$; $\lg(2x+1)^2 = \lg(1-3x)$;

$\begin{cases} 1 - 3x > 0, \\ 2x + 1 > 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 = 1 - 3x \end{cases}$; $\begin{cases} x < 1/3, \\ x > -1/2, \\ 4x^2 + 7x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in \left(-1/2; 1/3\right), \\ x = 0 \text{ и } x = -7/4 \end{cases}$; $x = 0$.

2. а) $3\log^2_{\frac{1}{2}} x - 2\log_2 x \le 5$; $3\log^2_2 x - 2\log_2 x \le 5$; $\log_2 x = t$; $3t^2 - 2t - 5 \le 0$;

$-1 \le t \le \dfrac{5}{3}$; $-1 \le \log_2 x \le \dfrac{5}{3}$; $x \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\sqrt[3]{4}\right]$;

б) $\dfrac{x}{\lg\left(x+1\right)} \ge 0$; $\begin{cases} x \ge 0 \\ \lg\left(x+1\right) > 0 \end{cases}$, и $\begin{cases} x \le 0 \\ \lg\left(x+1\right) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge 0, \\ x + 1 > 1 \end{cases}$, и $\begin{cases} x \le 0, \\ 0 < x + 1 < 1 \end{cases}$;

$x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$

С–20

1. а) $3\log^2_{\frac{1}{2}} x + 2\log_2 x = 5$; $3\log^2_2 x + 2\log_2 x - 5 = 0$; $\log_2 x = t$; $3t^2 + 2t - 5 = 0$;

$t_1 = 1$, $t_2 = -\dfrac{5}{3}$; $\log_2 x = 1$ и $\log_2 x = -\dfrac{5}{3}$; $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}}$;

б) $\frac{2}{\lg x+1}+\frac{3}{\lg x+2}=2$; $\lg x=t-1,5$; $\frac{2}{t-0,5}+\frac{2}{t+0,5}=2$;

$\frac{2(t+0,5)+3(t-0,5)}{t^2-0,25}=2$; $2t^2-5t=0$; $t_1=0$, $t_2=2,5$; $\lg x=1$ и $\lg x=-1,5$; $x_1=10$, $x_2=\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

2. а) $\lg^2 x-2\lg x>2$; $\lg x=t$; $t^2-2t-2>0$; $t<1-\sqrt{3}$ и $t>1+\sqrt{3}$; $\lg x<1-\sqrt{3}$ и $\lg x>1+\sqrt{3}$; $0<x<10^{1-\sqrt{3}}$ и $x>10^{1+\sqrt{3}}$;

б) $15^{2x}+3\cdot 15^x>10$; $15^x=t$; $t^2+3t-10>0$; $t<-5$ и $t>2$; $15^x<-5$ и $15^x>2$; $x>\log_{15}2$.

С–21

а) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 2,\\ \log_3(x+y)=2\end{cases}$; $\begin{cases}\log_3 xy=\log_3 18,\\ x+y=9\end{cases}$; $\begin{cases}xy=18,\\ x=9-y\end{cases}$;

$\begin{cases}(9-y)y=18,\\ x=9-y\end{cases}$; $\begin{cases}y^2-9y+18=0,\\ x=9-y\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=6,\\ y_1=3\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4^{\cos x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin y}=3,\\ 4^{\cos x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin y}=2\end{cases}$; $\begin{cases}4^{\cos x}=a,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin y}=b\end{cases}$; $\begin{cases}a+b=3,\\ ab=2\end{cases}$; $\begin{cases}b=3-a,\\ a(3-a)=2;\end{cases}$

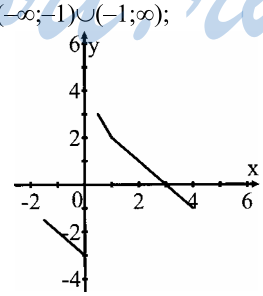
$\begin{cases}b=3-a,\\ a^2-3a+2=0\end{cases}$; $\begin{cases}a_1=1,\\ b_1=2\end{cases}$ и $\begin{cases}a_2=2,\\ b_1=1\end{cases}$; $\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin y=-1\end{cases}$ и $\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2},\\ \sin y=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ y_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, & k\in Z,\\ y_2=\pi n, & n\in Z.\end{cases}$

С–22

1. а) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$; $f(x)+x\cdot f(x)=1-x$; $x=\frac{1-f(x)}{f(x)+1}$, то есть $y=\frac{1-x}{x+1}$ – обратная к $f(x)$. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$; $E(y)=D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$;

б) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$, $x\le 0$; $x=-\sqrt{2-f^2(x)}$, так что $y=-\sqrt{2-x^2}$ – обратная для $f(x)$. $D(y)=E(f)=[0;\sqrt{2}]$; $E(y)=D(f)=[-\sqrt{2};0]$.



2. $f(g(-1))=-1$, $f(g(1))=1$, $f(g(3))=3$, так что $g(-1)=-2$, $g(1)=2$, $g(3)=0$;
$D(g)=E(f)=[-1,5;0]\cup(0,5;4]$,
$E(g)=D(g)=D(f)=[-3;-1,5]\cup[-1;3)$.

С–23

1. а) $f'(x)=(3e^{3+2x})'=3e^{3+2x}\cdot(3+2x)'=6e^{3+2x}$;

б) $f'(x)=(14^{0,2-5x})'=\lg 14\cdot 14^{0,2-5x}\cdot(0,2-5x)'=-5\cdot 14^{0,2-5x}\cdot\ln 14$.
2. Уравнение касательной в точке x_0: $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Для $f(x)=e^{1+x}$ и $x_0=-1$: $f(-1)=1$; $f'(x)=e^{1+x}$, $f'(-1)=1$. Искомое уравнение $y-1=x+1$, $y=x+2$.
3. $f'(x)=(x+1)'e^{x-1}+(e^{x-1})'(x+1)=e^{x+1}(1+x+1)=e^{x+1}(x+2)$; $f'(x)=0$ при $x=-2$, $f'(x)>0$ при $x>-2$, $f'(x)<0$ при $x<-2$. Так что $f(x)$–убывает на $(-\infty;-2]$ и $f(x)$ возрастает на $[-2;\infty)$.

4. $\int\limits_{-1}^{1}\left(\left(3^{3x+1}\right)\ln 3\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{3}d\left(3^{3x+1}\right)=\left.\frac{3^{3x+1}}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{3^4}{3}-\frac{3^{-2}}{3}=26\frac{26}{27}$.

С–24

1.а) $f'(x)=\left(\ln\left(2-\frac{1}{3}x\right)\right)'=\frac{\left(2-\frac{1}{3}x\right)'}{2-\frac{1}{3}x}=\frac{1}{x-6}$;

б) $f'(x)=\left(\log_4\left(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)'=\frac{\left(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'}{\ln 4\cdot\left(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{3x^2+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{\left(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\ln 4}$.

2. Уравнение касательной: $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Для $f(x)=\log_3(2x+1)$ и $x_0=1$: $f(x_0)=1$, $f'(x)=\frac{2}{\ln 3\cdot(2x+1)}$, $f'(x_0)=\frac{2}{3\ln 3}$ Искомое уравнение:

$y-1=\frac{2}{3\ln 3}(x-1)$; $y=\frac{2x}{3\ln 3}-\frac{2}{3\ln 3}+1$.

3. $f'(x)=\left(\lg^2(x+1)\right)'-\left(\ln(x+1)\right)'=\frac{2\ln(x+1)}{\ln 10\cdot(x+1)}-\frac{1}{\ln 10\cdot(x+1)}$. $f'(x)=0$ при $2\lg(x+1)-1=0$, $x+1=\sqrt{10}$, $x=\sqrt{10}-1$. $f'(x)>0$ при $x>\sqrt{10}-1$ и $f'(x)<0$ при $x<\sqrt{10}-1$; $f(x)$ – возрастает на $\left[\sqrt{10}-1;\infty\right)$ и убывает на $\left(-1;\sqrt{10}-1\right]$.

С–25

1. $f'(x)=((\frac{1}{x})^{-\sqrt{3}})'+((\frac{1}{\sqrt{x}})^3)'=(x^{\sqrt{3}})'+(x^{-1,5})'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}-1,5x^{-2,5}$.

2. $\sqrt[4]{16,08}-\sqrt[5]{32,15}\approx 0,0006$.

3. $S=\int\limits_1^e x^e dx=\left.\frac{x^{e+1}}{e+1}\right|_1^e=\frac{e^{e+1}-1}{e+1}$.

С–26

1. $f'(x)=(e^{-0,4x})'=-0,4\cdot e^{-0,4x}=-0,4f(x)$. Так что $y'=-0,4y$ – искомое уравнение.

2. Общее решение уравнения $f'(x)=f(x)\cdot\ln 3$: $f(x)=C\cdot e^{x\ln 3}=c\cdot 3^x$, а так как $f(1)=9$, то $9=C\cdot 3$, $C=3$, и $f(x)=3^{x+1}$ – искомое решение.

3. $y''=-\frac{1}{4}y$. Общий вид решения: $y=C_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x+C_2\right)$, где C_1, $C_2\in$R.

Вариант 7

С–1

1.а) является, т.к. $F'(x)=\left(\sqrt{x-1}+2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=f(x)$, для всех $x\in(1;\infty)$;

б) нет, так как $F'(x)=(3x^2-1)'=6x\neq f(x)$ для некоторых $x\in(-\infty;\infty)$.

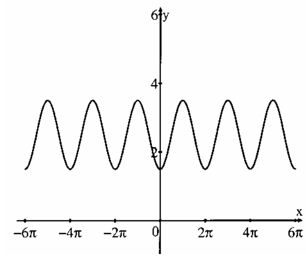
2. а) $F'(x)=(2-\sin^2x+\cos^2x)'=-2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=-2\sin 2x=f(x)$, для всех $x\in(0;2)$, так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(0;2)$;

б) $F'(x)=((x-1)^4)'=4(x-1)^3=4x^3-12x^2+12x-4\neq f(x)$, но вероятно в условии опечатка и для $f(x)=4x^3-12x^2+12-4$ $F(x)$– является первообразной на $(-\infty;\infty)$.

С–2

1. Общий вид первообразных для $h(x)=\sin x$: $H(x)=-\cos x+C$, а так как $H\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$, то $2=-\cos\frac{\pi}{3}+C$;

$C=2{,}5$; $H(x)=2{,}5-\cos x$.



2. а)

$$f(x)=\frac{6x-2}{\sqrt{6x-1}+1}=\frac{(6x-2)\left(\sqrt{6x-1}-1\right)}{6x-1-1}=$$

$=\sqrt{6x-1}-1$, так что $F(x)=-x+\frac{1}{9}\sqrt{(6x-1)^3}+C$;

б) $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$; $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x=$

$=\frac{1}{8}\sin 8x$. Так что $F(x)=-\frac{1}{64}\cos x+C$

С–3

а) $f(x)=\sin(1{,}5x-1)+\sqrt{x}$, $F(x)=-\frac{2}{3}\cos(1{,}5x-1)+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$;

б) $g(x)=\frac{1}{3\cos^2(7-x)}+\frac{x^2}{2}$, $G(x)=\frac{1}{3}tg(x-7)+\frac{x^3}{6}+C$.

С–4

а) $\int\limits_0^1 2xdx+\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)dx=x^2\Big|_0^1+\left(3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3+\frac{1}{3}=2\sqrt{3}-1\frac{2}{3}$;

б) $\int\limits_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} (-\sin x)dx = \cos x\Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

С–5

а) $\int\limits_1^9 5\sqrt{x}dx = \frac{10}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^9 = \frac{10}{3}\cdot 9\sqrt{9}-\frac{10}{3}=86\frac{2}{3}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

С–6

а) $S=\int\limits_1^3 \left(4x-3-x^2\right)dx = \left(2x^2-3x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3 = 18-9-9-2+3+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin xdx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx = -\cos\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{6-3\sqrt{3}}{4}$.

С–7

Пусть $S(t)$ – уравнение пути, тогда $S'(t)=V(t)$ и $S(20)-S(10)=\int\limits_{10}^{20} V(t)dt = \int\limits_{10}^{20}\left(10t-0{,}008t^3\right)dt = \left(5t^2-0{,}002t^4\right)\Big|_{10}^{20} = 2000$ – – 500 – 320 + 20 = 1200 (м). Далее, $a(t) = V'(t) = 10 - 0{,}024t^2$ и $a(20)=$ $= 10 - 9{,}6 = 0{,}4$ (м/с^2).

С–8

1. $S=\int\limits_{-1}^{0}(1+x)dx+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\cos\frac{2\pi x}{3}dx = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} +$

$+\frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}+\frac{3}{2\pi}=\frac{7}{8}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4\pi}$.

2. $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{10}} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}dx = 2\sqrt{x^2-1}\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{10}} = 6-4=2$.

С-9

1. Это тело вращения с площадью поперечного сечения $S(x)=\pi(4+4z^2)$.

Так что $V=\pi\cdot\int\limits_0^1\left(4+4z^2\right)dz = \pi\left(4z+\frac{4z^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(4+\frac{4}{3}\right) = 5\frac{1}{3}\pi$.

2. Разобем трапецию на полоски длиной $\Delta x = \frac{h}{n}$. Площадь такой полоски приближено равна $S_x \approx l_x \Delta x$, где l_x– длина верхнего основания полоски $l_x = b + (a-b)\frac{x-c+h}{n}$. Так что давление воды на эту полоски равно $P_x \approx S_x \cdot xg \approx \left(bx + \frac{(a-b)(x-c+h)}{n}\right)\Delta x.$ Теперь давление на одну сторону: $P = \int\limits_{c-h}^{c} g\left(bx + \frac{(a-b)(x-c+h)x}{n}\right)dx = \int\limits_{5}^{10}\left(6x + \frac{4(x-5)}{5}x\right)gdx =$

$= g\left(\frac{4}{15}x^3 + x^2\right)\Big|_5^{10} = 308 \cdot \frac{1}{3} g$.

С–10

1. Неверно, так как $5 - 3\sqrt{3} < 0$, а $\sqrt{52 - 30\sqrt{3}} > 0$.

2. а) $\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}} \cdot \sqrt[5]{27} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{15}} \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3^1 = 3;$

б) $\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{\frac{1}{2^3}}\right) : \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2^3 - 1}{\sqrt{2^3}} : \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 3{,}5$.

3. а) $\sqrt[3]{20{,}991} \approx 2{,}7585$; б) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{5} \approx 3{,}2053$.

4. $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{5}{30}} = 32^{\frac{1}{30}}$, а $\sqrt[5]{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{10}} = 27^{\frac{1}{30}}$, так что $\sqrt{\sqrt[3]{2}} > \sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

С–11

1. $\sqrt[3]{a^3} \geq \sqrt[4]{a^4}$ равносильно $a \geq |a|$ и справедливо только при $a \geq 0$.

2. а) $\frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt[4]{x} + 1} = 2$; $\frac{\sqrt[4]{x} + 1 + 3\sqrt[4]{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} = 2;$ $4\sqrt[4]{x} = 2\sqrt{x};$ $\sqrt{x} = 2\sqrt[4]{x};$

$x = 4\sqrt{x};$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 16x \end{cases}$; $x=0$ и $x=16$.

б) $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} = 10;$ $\sqrt[6]{x} = a,$ $a \geq 0;$ $a^2 - 3a - 10 = 0;$ $a = -2$ и $a=5;$ $\sqrt[6]{x} = 5;$ $x = 5^6$.

3.а) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{3}\right| + \left|1 + \sqrt{3}\right| =$

$= \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3};$

б) $\sqrt[4]{\left(1 - \sqrt[4]{a}\right)\left(1 + \sqrt[4]{a}\right) + \sqrt[8]{a^4}} = \sqrt[4]{1 - \sqrt[4]{a^2} + \sqrt{a}} = \sqrt[4]{1} = 1.$

С–12

1. $\sqrt{x^2 + 3x + 3} = 2x + 1;$

$$\begin{cases}2x+1\ge 0,\\ x^2+3x+3=(2x+1)^2\end{cases};\ \begin{cases}x\ge -0{,}5,\\ 3x^2+x-2=0\end{cases};\ \begin{cases}x\ge -0{,}5,\\ x=-1 \text{ и } x=\dfrac{2}{3}\end{cases};\ x=\frac{2}{3}.$$

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1,\\ x-y=7\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt[3]{x}=a,\\ \sqrt[3]{y}=b\end{cases};\ \begin{cases}a-b=1,\\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=7\end{cases};\ \begin{cases}a-b=1,\\ a^2+ab+b^2=7\end{cases};$

$$\begin{cases}a=1+b,\\ (1+b)^2+b(1+b)+b^2=7\end{cases};\ \begin{cases}a=1+b,\\ b^2+b-2=0\end{cases};\ \begin{cases}a_1=-1,\\ b_1=-2\end{cases} \text{ и } \begin{cases}a_2=2,\\ b_2=1\end{cases};$$

$$\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=-8\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x_2=8,\\ y_2=1\end{cases};$$

С–13

1.а) $15^{-2}\cdot 45^{\frac{5}{3}}:75^{1\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{8}}=3^{-2}\cdot 5^{-2}\cdot 3^{\frac{10}{3}}\cdot 5^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{4}{3}}\cdot 5^{-\frac{8}{3}}+2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}=$

$=3^0\cdot 5^{-3}+2^1=2\dfrac{1}{125}$;

б) $\left(b^2\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{5}}\left(b^3\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{7}}=b^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{1}{10}}\cdot b^{\frac{3}{7}}\cdot b^{\frac{1}{14}}=b^1=3^1=3$ при b=3.

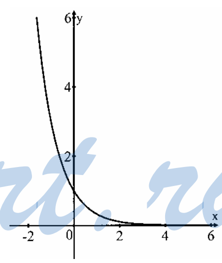
2. а) верно при $a\ge 0$; б) верно при всех a.

3. $$\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3\right)+\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3\right)=$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{9}{2}}=2x^{\frac{3}{2}}=2x\sqrt{x}.$$

С–14

1. См. график.



2. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}=3^{-\sqrt{5}}$, а так как $-\sqrt{5}>-2{,}25$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}>3^{-2{,}25}$;

б) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}\right)^3=3^{\frac{3}{2}}=3^{1{,}5}$, так что числа равны.

3. $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$; $1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\ge 0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 1$; $x\ge 0$, так что $D(y)=[0;\infty)$, а так как $\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$, то $y<1$ и $E(y)=[0;1)$.

С–15

1. а) $0{,}5^{3-2x}+3\cdot 0{,}25^{1-x}=7$; $0{,}5\cdot 0{,}5^{2-2x}+3\cdot 0{,}5^{2-2x}=7$; $0{,}5^{2-2x}=2$; $2-2x=-1$; $2x=3$; $x=1{,}5$;

б) $5^{\frac{6x+3}{x}}=\sqrt[4]{125^{2x+1}}$; $5^{\frac{6x+3}{x}}=5^{\frac{6x+3}{4}}$; $\frac{6x+3}{x}=\frac{6x+3}{4}$; $(6x+3)(x-4)=0$; $x_1=4$, $x_2=-0{,}5$.

2. а) $25^{\frac{1}{2x}+1}<125^{-\frac{2}{3}}$; $5^{\frac{1}{x}+2}<5^{-2}$; $1/x+2<-2$; $1/x<-4$; $-1/4<x<0$;

б) $4^x\cdot5+2\cdot25^x\le7\cdot10^x$; $5\cdot2^{2x}+2\cdot5^{2x}-7\cdot2^x\cdot5^x\le0$; $5\cdot\left(2/5\right)^{2x}+2-7\cdot\left(2/5\right)^x\le0$;

$\left(2/5\right)^x=t$; $5t^2-7t+2\le0$; $2/5\le t\le1$; $\left(2/5\right)\le\left(2/5\right)^x\le\left(2/5\right)^0$; $0\le x\le1$.

С–16

1. а) $2\cdot3^{x-6}+6\cdot9^{0,5x-2}=56$; $2\cdot3^{x-6}+6\cdot9\cdot3^{x-6}=56$; $3^{x-6}=1$; $x=6$;

б) $4^{\cos2x}+4^{\cos^2x}=3$; $4^{2\cos^2x-1}+2\cdot4^{\cos^2x-0,5}=3;1$ $4^{\cos^2x-0,5}=t$; $t^2+2t-3=0$;

$t_1=-3$ и $t_2=1$; $4^{\cos^2x-0,5}=1$; $\cos^2x=\frac{1}{2}$; $\cos x=\pm\frac{\sqrt2}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

2. $4^x+\left(1/2\right)^{-1-x}-8\ge0$; $4^x+2\cdot2^x-8\ge0$; $2^x=t$; $t^2+2t-8\ge0$; $t\le-4$ и $t\ge2$; $2^x\ge2$; $x\ge1$.

С–17

1. $\log_7\frac{7\sqrt7a^{\frac13}\sqrt[6]{b^2c^3}}{5d^{0,5}\sqrt k}=\log_7\left(7^{\frac32}\cdot a^{\frac13}\cdot|b|^{\frac13}\cdot c^{\frac12}\cdot5^{-1}\cdot d^{-\frac12}\cdot k^{-\frac12}\right)=3/2+1/3\log_7a+$

$+1/3\log_7|b|+1/2\log_7c-\log_75-1/2\log_7d-1/2\log_7k$.

2. $\log_{30}8=\log_{30}2^3=3\log_{30}2=3\log_{30}\frac{30}{3\cdot5}==3\left(\log_{30}30-\log_{30}3-\log_{30}5\right)=$

$=3(1-a-b)$.

3. а) $\log_{\sqrt3}24-\log_94^6=2\log_324-1/2\cdot6\log_34=\log_3\frac{24^2}{4^3}=\log_39=2$;

б) $7^{\log_{11}2}-2^{\log_{11}7}=2^{\log_27^{\log_{11}2}}-2^{\log_{11}7}=2^{\log_{11}2\cdot\log_27}-2^{\log_{11}7}=2^{\log_{11}7}-2^{\log_{11}7}=0$.

С–18

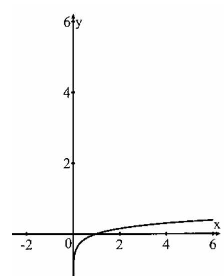
1.а) $\log_{0,3}4<0$, так как $0,3<1$, а $4>1$; б)

$\lg3-\frac{1}{3}>0$, так как $\lg3>\lg10^{\frac13}=\frac{1}{3}$.

2. $y=\frac{1}{\log_{12}(x-3)}+\sqrt{7-x}$;

$\begin{cases}x-3>0,\\x-3\ne1,\\7-x\ge0\end{cases}$; $\begin{cases}x>3,\\x\ne4,\\x\le7\end{cases}$ $D(y)=(3;4)\cup(4;7]$.

3. См. график.



С–19

1. а) $\log_{2x}64 – \log_{2x}8=3$; $\log_{2x} {}^{64}\!/_{8} = 3$; $8=(2x)^3$; $8=8\cdot x^3$; $x^3=1$; $x=1$;

б) $x^{\lg x}=100x$; $\lg x^{\lg x}=\lg 100x$; $\lg^2 x – \lg x+2=0$; $\lg x=2$ и $\lg x=–1$; $x_1=100$, $x_2=0,1$.

2. а) $\lg(x–1)^2>0$; $(x–1)^2>1$; $|x–1|>1$; $x<0$ и $x>2$;

б) $\log_2(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-3}\right)$; $\log_2(x–1)>\log_2(2x–3)$; $\begin{cases} x-1>0, \\ 2x-3>0, \\ x-1>2x-3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>1, \\ x>1,5, \\ x<2 \end{cases}$ $x\in(1,5;2)$

С–20

1. а) $\lg^2 x^2 – 3\lg x^2=4$; $\lg x^2=t$; $t^2–3t–4=0$; $t_1=4$, $t_2=–1$; $\lg x^2=4$ и $\lg x^2=–1$; $x^2=10000$ и $x^2 = {}^{1}\!/_{10}$; $x=\pm100$ и $x=\pm\sqrt{{}^{1}\!/_{10}}$;

б) $4-\lg x = 3\sqrt{\lg x}$; $\sqrt{\lg x}=t$; $t^2+3t–4=0$; $t_1=1$ и $t_2=–4$; $\sqrt{\lg x}=1$; $\lg x=1$; $x=10$.

2. а) $\log_{{}^{1}\!/_{2}}(2x-3) > \log_{{}^{1}\!/_{2}}(x^2-6)$, $\begin{cases} 2x-3>0, \\ x^2-6>0, \\ 2x-3<x^2-6 \end{cases}$; $\begin{cases} x>1,5, \\ x^2>6, \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>\sqrt{6}, \\ x\in(-\infty;-1)\cup(3;\infty) \end{cases}$; $x \in (3;\infty)$;

б) $4^x–7\cdot 2^x+12>0$; $2^x=t$; $t^2–7t+12>0$; $3<2^x<4$; $\log_2 3<x<2$.

С–21

а) $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y = 1-\log_3 2 \\ \log_3(x+y)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_3 xy = \log_3 1,5 \\ \log_3(x+y)=\log_3 9 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=1,5 \\ x+y=9 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=9-y, \\ 2(9-y)\cdot y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=9-y, \\ 2y^2-18y+3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y_1=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{2}, \\ x_1=\dfrac{9+5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} y_2=\dfrac{9+5\sqrt{3}}{2}, \\ x_2=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576, \\ y-x=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x\cdot 2^{x+4}=3^2\cdot 2^6, \\ y=x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2, \\ y=6. \end{cases}$

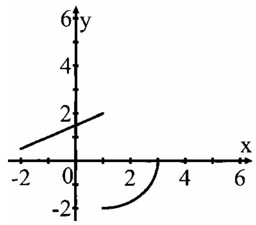
С–22

1.а) $f(x)=3–x^3$; $x=\sqrt[3]{3-f(x)}$, так что $g(x)=\sqrt[3]{3-x}$ – обратная к $f(x)$: $D(g)=E(g)=\mathrm{R}$;

б) $f(x)=(\sqrt{1+x^2})^{-3}$, $x\ge0$; $\sqrt{1+x^2}=f(x)^{-{}^{1}\!/_{3}}$; $1+x^2=f(x)^{-{}^{2}\!/_{3}}$;

$x=\sqrt{f(x)^{-{}^{2}\!/_{3}}-1}$, так что $g(x)=\sqrt{{}^{1}\!/_{\sqrt[3]{x^2}}-1}$ – обратная к $f(x)$. $D(g)=E(f)=(0;1]$, $E(g)=D(f)=[0;\infty)$.

2. $f(g(-1))=-1$, $f(g(1))=1$, $f(g(2))$, так что $g(-1)=1$, $g(1)=2$, $g(2)=-\sqrt{3}$; $D(g)=E(f)=[-2;3]$, $E(g)=D(f)=(-2;0]\cup[0,5;2]$.



С–23

1.а) $f'(x)=(e^{2-14x})'=e^{2-14x}\cdot(2-14x)'=-14e^{2-14x}$;

б) $f(x)=\left((1/2)^{0,5x+1}\right)'=\ln 1/2\cdot(1/2)^{0,5x+1}\cdot(0,5x+1)'=0,5\ln 0,5\cdot(0,5)^{0,5x+1}$.

2. Уравнение касательной к $f(x)$ в точке x_0: $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, так как эта прямая параллельна $y=2x+1$, то $f'(x_0)=2$, то есть $(e^{x_0}-e^{-x_0})'=2$; $(e^{x_0}+e^{-x_0})'=2$, то есть $e^{x_0}+1/e^{x_0}=2$; $e^{x_0}=1$ и $x_0=0$. Далее, $f(x_0)=e^0-e^0=0$ и искомое уравенение $y=2x$.

3. $f'(x)=(e^{x^3-3x})'=(3x^2-3)e^{x^3-3x}$, $f'(x)=0$ при $x=\pm1$. $f'(x)>0$ при $x<-1$ и $x>1$, а $f'(x)<0$ при $-1<x<1$. Так что $x_{\min}=1$, $x_{\max}=-1$.

$S=\int_0^2\left(e^x-\left(2-e^x\right)\right)dx=\int_0^2\left(2e^x-2\right)dx=\left(2e^x-2x\right)\Big|_0^2=2e^2-4-2=2e^2-6.$

С–24

1.а) $f'(x)=(\ln(x^3-2x^2+1))'=\dfrac{(x^3-2x^2+1)'}{x^3-2x^2+1}=\dfrac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}$;

б) $f'(x)=(\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{3-2x})'=\dfrac{1}{\ln\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{3-2x}}\cdot(\sqrt[3]{3-2x})'=\dfrac{-2}{3(3-2x)\ln\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{4}{3(2x-3)\ln 2}$.

2. $x^2-8x+7=0$ при $x=1$ и $x=7$. Так что $S=\int_1^7\frac{7}{x}dx=7\ln x\Big|_1^7=7\ln 7$.

3. $f'(x)=(\ln^3x)'-(3\ln x)'=\dfrac{3\ln^2 x}{x}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{x}\left(\lg^2 x-1\right)$; $f'(x)=0$ при $\ln x\pm1$; $x=e$ и $x=1/e$; $f'(x)>0$ при $0<x<1/e$ и $x>e$ и $f'(x)<0$ при $1/e<x<e$. Так что $x_{\min}=e$ и $x_{\max}=1/e$.

С–25

1. $f'(x)=(2-x)'\cdot x^{\sqrt{3}}+(x^{\sqrt{3}})'(2-x)=-x^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}(2-x)=$

$=x^{\sqrt{3}-1}(-x+2\sqrt{3}-\sqrt{3}x)$.

$f'(x)=0$ при $x=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$. $f'(x)>0$ при $x<\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$, $f'(x)<0$ при $x>\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$, так что $f(x)$ – взрастает на $[0;\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}]$ и $f(x)$ – убывает на $[\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1};\infty)$.

2. $\sqrt[6]{64,12}-\sqrt[6]{63,64}\approx 0,0025$.

3. Для $f(x)=x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}}$ – первообразная $F(x)=\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+\frac{x^{1-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}+C$.

С–26

1. Не удовлетворяет, так как $f'(x)=(e^{-\frac{1}{3}x})'=-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}=\frac{1}{3}f(x)$.

2. Общее решение уравнения $f'(x)=\ln 5 f(x)$: $f(x)=C\cdot 5^x$, а так как $f(6)=5$, то $5=C\cdot 5^6$, $C=5^{-5}$ и $f(x)=5^{x-5}$ – искомое решение.

3. Общее решение $y=a\cos\left(\sqrt{3}x\right)+b\sin\left(\sqrt{3}x\right)$. Так как $y(0)=2$, то $a=2$, а так как $y'(0)=6$, то $\sqrt{3}b=6$, $b=2\sqrt{3}$.

Так что $y=2\cos\left(\sqrt{3}x\right)+2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x=4\left(\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}x\right)=$

$=4\cos\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left(\sqrt{3}x-\frac{5\pi}{3}\right)$. A=4, $\omega=\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{5\pi}{3}$.

Вариант 8

С–1

1. Является, так как $F'(x)=\left(2\sqrt{1+x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=f(x)$ на $(-1;\infty)$.

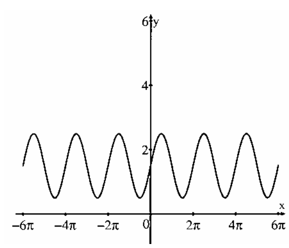
б) Нет, т.к. $F'(x)=\left(x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=4x^3+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\neq f(x)=4x^3-2\sqrt{x}$ на $(0;\infty)$.

2. а) $F'(x)=\left(2\sin^2 x\cos^2 x\right)'=\left(\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)'=\sin 2x\cdot(\sin 2x)'=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x=f(x)$ на $(-3;0)$. Так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(-3;0)$;

б) $F'(x)=((x+2)^4)'=4(x+2)^3\cdot(x+2)'=4(x+2)^3=4x^3+24x^2+48x+32=f(x)$ на $(-\infty;\infty)$. Так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(-\infty;\infty)$.

С–2

1. Общий вид первообразной для $h(x)=\cos x$: $H(x)=\sin x+C$, а так как $H(-\frac{\pi}{6})=1$, то $-\frac{1}{2}+C=1$ и $C=1,5$ и $H(x)=\sin x+1,5$.



2. $f(x)=\dfrac{3-8x}{\sqrt{8x+1}+2}=\dfrac{(3-8x)\left(\sqrt{8x+1}-2\right)}{8x+1-4}=2-\sqrt{8x+1}$, так что $F(x)=2x-\dfrac{1}{12}(8x+1)\sqrt{8x+1}+C.$

б) $f(x)=\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\sin\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}\cos x\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4}\cos x\sin x=\dfrac{1}{8}\sin 2x$.

Так что $F(x)=-\dfrac{1}{16}\cos 2x+C.$

С–3

а) $F(x)=-2/3\sin(1-1{,}5x)+2/3(x+1)\sqrt{x+1}+C;$

б) $F(x)=\dfrac{2}{5}\mathrm{ctg}(2-x)-\dfrac{x^2}{6}+C.$

С–4

а) $S=\int_0^2\dfrac{x}{2}dx+\int_2^{\sqrt5}\left(5-x^2\right)dx=\dfrac{x^2}{4}\Big|_0^2+\left(5x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_2^{\sqrt5}=1+5\sqrt5-\dfrac{5\sqrt5}{3}-10+\dfrac{8}{3}=$

$=\dfrac{10\sqrt5-19}{3};$

б) $S=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos x dx=-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}.$

С–5

а) $\int_1^4\dfrac{6}{x\sqrt{x}}dx=-\dfrac{12}{\sqrt{x}}\Big|_1^4=-6+12=6;$ б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt3}+1;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt3}{8}.$

С–6

а) $S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x+1+2x^2\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1}=\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{24}=1\dfrac{1}{8};$

б) $S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)dx=\left(\dfrac{\sin 2x}{2}+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt3}{4}+\dfrac{\sqrt3}{2}-1=\dfrac{3\sqrt3}{4}-1.$

С–7

Пусть S(t) – уравнение координаты точки. Тогда $S'(t)=V(t)$, так что $S(t)={t^3}/{3}-{t^2}/{2}+t+C$, а так как $S(0)=-1$, то $C=-1$ и $S(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-1$, $a(t)=S''(t)=2t-1$.

С–8

1. $S=\int\limits_{-2}^{0}(2+x)dx+\int\limits_{0}^{1}(2-x)dx+\int\limits_{1}^{6}2\sin\frac{\pi x}{6}dx= =\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}-$ $-\left(\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\right)\Big|_{1}^{6}=4-2+2-\frac{1}{2}+\frac{12}{\pi}+\frac{6\sqrt{3}}{\pi}=3,5+\frac{12+6\sqrt{3}}{\pi}.$

2. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left(2\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=2\cdot3-2\cdot2=2.$

С–9

1. Площадь сечения данного тела вращения $S(z)=\pi(z^2+4)$. Так что $V=\int\limits_{-3}^{3}S(z)dz=\int\limits_{-3}^{3}\pi\left(z^2+4\right)dz=\left(\frac{z^3}{3}+4z\right)\Big|_{-3}^{3}\cdot\pi=(9+12+9+12)\pi=42\pi.$

2. Как и в варианте 7: $p=\int\limits_{c-h}^{c}g\left(bx+\frac{(a-b)(x-c+h)}{h}\right)dx=$ $=g\int\limits_{6}^{12}\left(8x+\frac{-4(x-6)x}{6}\right)dx=g\left(-\frac{2}{9}x^3+6x^2\right)\Big|_{6}^{12}=312g.\quad (H).$

С–10

1. Верно, т.к. $7-4\sqrt{3}>0$ и $\left(7-4\sqrt{3}\right)^2>49-56\sqrt{3}+16\cdot3=97-56\sqrt{3}$.

2. а) $\sqrt[6]{5\sqrt[7]{5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}=5^{1/6}\cdot5^{5/42}\cdot5^{-2/7}=5^0=1;$

б) $\left(\sqrt{5^3}+\frac{1}{\sqrt{5^3}}\right):\left(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)=\frac{5^3+1}{5\sqrt{5}}:\frac{5+1}{\sqrt{5}}=\frac{126}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=4\frac{1}{5}.$

3. а) $\sqrt[3]{27,31}\approx3,0114$; б) $\sqrt[4]{7}+\sqrt[3]{7}\approx3,5395.$

4. $\sqrt{\sqrt[7]{13}}=13^{1/14}=13^{3/42}=(2197)^{1/42}$, а $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=2^{1/6}=128^{1/42}$, так что $\sqrt{\sqrt[7]{13}}>\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

С–11

1. $\sqrt[5]{b^5}\le\sqrt[6]{b^6}$ равносильно $b\le|b|$ и верно при всех b.

2. а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}+3}=1;\ \sqrt[4]{x}+2=t;\ \dfrac{1}{t-1}+\dfrac{2}{t+1}=1;\qquad \dfrac{t+1+2t-2}{t^2-1}=1;$

t^2–3t=0; t=0 и t=3; $\sqrt[4]{x}=-2$ и $\sqrt[4]{x}=1$; x=1.

б) $\sqrt[3]{x}=3\sqrt[6]{x}=18$; $\sqrt[6]{x}=t$; t^2+3t–18=0; t_1=–6; t_2=3; $\sqrt[6]{x}=-6$ и $\sqrt[6]{x}=3$; x=3^6=729.

3. а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|1+\sqrt{2}\right|=$

$=\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2};$

б) $\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|.$

С–12

1. $x-1=\sqrt{2x^2-3x-5};$

$\begin{cases}(x-1)^2=2x^2-3x-5,\\ x-1>0\end{cases};\ \begin{cases}x>1,\\ x^2-x-6=0\end{cases};\ \begin{cases}x>1,\\ x=-2\end{cases}$ и $x=3.$

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3\\ x+y=9\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt[3]{x}=a\\ \sqrt[3]{y}=b\end{cases};$

$\begin{cases}a+b=3\\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=9\end{cases};\ \begin{cases}a+b=3\\ a^2-ab+b^2=3\end{cases};\ \begin{cases}a=3-b\\ (3-b)^2-b(3-b)+b^2=3\end{cases};$

$\begin{cases}a=3-b,\\ b^2-3b+2=0\end{cases};\ \begin{cases}a_1=1,\\ b_1=2\end{cases}$ и $\begin{cases}a_2=2,\\ b_2=1\end{cases};\ \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=8\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=8,\\ y_2=1\end{cases}.$

С–13

1. а) $\left(12^{-\frac{1}{3}}\cdot18^{-\frac{4}{3}}\cdot6^{3,5}\right)^2-3^{\frac{1}{4}}\cdot9^{\frac{3}{8}}=\left(2^{-\frac{2}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{4}{3}}\cdot3^{-\frac{8}{3}}\cdot2^{3,5}\cdot3^{3,5}\right)-3^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{3}{4}}=$

$=\left(2^{1,5}\cdot3^{0,5}\right)^2-3^1=2^3\cdot3^1-3^1=3\left(2^3-1\right)=21;$

б) $\left(a^3\sqrt[3]{a}\right)^{\frac{1}{5}}\left(a^2\sqrt[3]{a}\right)^{\frac{1}{7}}=a^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{1}{15}}\cdot a^{\frac{2}{7}}\cdot a^{\frac{1}{21}}=a^{\frac{105}{105}}=a=3$ при a=3.

2. а) $(a^{1/7})^7=-|a|$ верно только при a=0;

б) $\left(a^6\right)^{\frac{1}{6}}=a$ равносильно |a|=a и верно при a≥0.

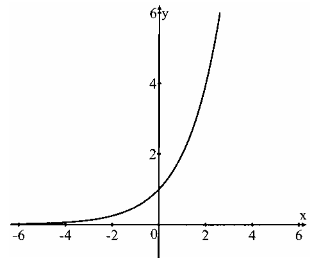
3. $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\cdot\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}=\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\right)\cdot$

$$\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{xy}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{xy}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{2x+2y}{2xy}=\frac{x+y}{xy}.$$

С–14

1. См. график.



2. а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{7}}=7^{-\sqrt{7}}$, а $7^{-2,45}<7^{-\sqrt{7}}$, т.к. –2,75< $-\sqrt{7}$, т.е. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{7}}>7^{-2,75}$;

б) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}=\left(\sqrt{5}\right)^5=5^{2,5}$, так что $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}=5^{2,5}$.

3. $y=\sqrt{3-(\frac{1}{3})^x}$; так как $(\frac{1}{3})^x>0$ и $y\geq 0$, то $0\leq y<\sqrt{3}$, то есть $E(y)=[0;3)$.

Далее $3-\left(\frac{1}{3}\right)^x\geq 0$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x\leq 3$, $x\geq -1$, то есть $D(y)=[-1;\infty)$.

С–15

1.а) $0,2^{3-2x}+3\cdot 0,04^{2-x}=8$; $5\cdot 0,2^{4-2x}+3\cdot 0,2^{4-2x}=8$; $0,2^{4-2x}=1$; $4-2x=0$; $x=2$;

б) $3^{\frac{6x-3}{x}}=\sqrt[4]{27^{2x-1}}$; $3^{\frac{6x-3}{x}}=3^{\frac{6x-3}{4}}$; $\frac{6x-3}{x}=\frac{6x-3}{4}$; $(6x-3)(x-4)=0$; $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=4$.

2. а) $27^{\frac{1}{3x}+2}>\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $3^{\frac{1}{x}+6}>3^2$; $\frac{1}{x}+6>2$; $\frac{1}{x}>-4$; $x<-\frac{1}{4}$ и $x>0$;

б) $2^{2x+1}+25^{x+0,5}\geq 7\cdot 10^x$; $2\cdot 2^{2x}+5\cdot 5^{2x}\geq 7\cdot 2^x\cdot 5^x$; $2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+5\geq 7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x$;

$\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$; $2t^2-7t+5\geq 0$; $t\leq 1$ и $t\geq\frac{5}{2}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x\leq 1$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^x\geq\frac{5}{2}$; $x\geq 0$ и $x\leq -1$.

С–16

1.а) $4\cdot 9^{1,5x-1}-27^{x-1}=33$; $4\cdot 3^{3x-2}-3^{3x-3}=33$; $12\cdot 3^{3x-3}-3^{3x-2}=33$; $3^{3x-3}=3$; $3x-3=1$; $x=\frac{4}{3}$;

б) $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7$; $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{1-\sin^2 x}=7$; $2^{\sin^2 x}=t$; $t+\frac{10}{t}=7$; $t^2-7t+10=0$;

t=2 и t=5; $2^{\sin^2 x}=2$ и $2^{\sin^2 x}=5$; $\sin^2 x=1$ и $\sin^2 x=\log_2 5$; $\sin x=\pm 1$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z.$

2. $7{,}3^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}} > 1$; $\dfrac{x^2+2x-15}{x-4} > 0$; $\dfrac{(x-3)(x+5)}{x-4} > 0$; $x \in (-5;3) \cup (4;\infty)$.

С–17

1. $\log_5 \dfrac{0{,}04\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}}{(a\sqrt[3]{a})^{3/4}} = \log_5 5^{-2} \cdot b^{7/8} \cdot a^{-1} = -2 + 7/8 \log_5 b - \log_5 a$.

2. $\log_{60} 27 = 3 \cdot \log_{60} \dfrac{60}{2^2 \cdot 5} = 3\left(\log_{60} 60 - 2\log_{60} 2 - \log_{60} 5\right) = 3\left(1-2a-b\right)$.

3.а) $\log_{\sqrt{2}} 54 - \log_4 9^6 = 2\log_2 54 - \dfrac{1}{2} \cdot 6\log_2 9 = \log_2 \dfrac{54^2}{9^3} = \log_2 \dfrac{6^2}{9} = \log_2 4 = 2$;

б) $\log_3 2^{\log_3 11} = \log_3 11 \cdot \log_3 2 = \log_3 11^{\log_3 2}$, так что $2^{\log_3 11} - 11^{\log_3 2} = 0$.

С–18

1. а) $\log_{\sqrt{2}} 3 - 3 = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{3}{2\sqrt{2}} > 0$, так как $\dfrac{3}{2\sqrt{2}} > 1$, а $\sqrt{2} > 1$;

б) $\log_2 3 + \log_2 0{,}09 = \log_2 \dfrac{0{,}27}{0{,}09} + \log_2 0{,}09 = \log_2 0{,}27 - \log_2 0{,}09 + \log_2 0{,}09 =$

$= \log_2 0{,}27 < 0$, так как 2>1, а 0,27<1.

2. $D(g)$: $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2 \neq 1, \\ 3-x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2, \\ x \neq -1, \\ x \leq 3; \end{cases}$ $D(g) = (-2;-1) \cup (-1;3]$.

С–19

1. а) $3 \cdot 2^{x+1} - 6 \cdot 2^{x-1} = 12$; $12 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-1} = 12$; $2^{x-1} = 2$; $x-1=1$; $x=2$;

б) $x^{\lg x} = 1000x^2$; $\lg x^{\lg x} = \lg 1000x^2$; $\lg^2 x = 3 + 2\lg x$; $\lg x = t$; $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = 3$, $t_2 = -1$; $\lg x = 3$ и $\lg x = -1$; $x_1 = 1000$ и $x_2 = 0{,}1$.

2. а) $2^{4/x} < 8^{1/x + 1/9}$; $2^{4/x} < 2^{3/x + 1/3}$; $4/x < 3/x + 1/3$; $1/x < 1/3$; $x<0$ и $x>3$;

б) $\log_3 (x+1) < \log_{1/3} \dfrac{1}{2x+5}$; $\log_3 (x+1) < \log_3 (2x+5) \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

$\begin{cases} x+1>0, \\ 2x+5>0, \\ x+1<2x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ x>-2{,}5 \\ x>-4; \end{cases}$ $x>-1$.

С–20

1. а) $\lg^2 x^2 + \lg x^2 = 6$; $\lg x^2 = t$; $t^2 + t - 6 = 0$; $t_1 = -3$ и $t_2 = 2$; $\lg x^2 = -3$ и $\lg x^2 = 2$; $x^2 = 0{,}001$ и $x^2 = 100$; $x = \pm\sqrt{0{,}001}$ и $x = \pm 10$;

б) $5 - 2\lg x = 3\sqrt{\lg x}$; $\sqrt{\lg x} = t$; $2t^2 + 3t - 5 = 0$; $t_1 = 1$ $t_2 = -5/2$; $\sqrt{\lg x} = 1$ и $\sqrt{\lg x} = -5/2$; $\lg x = 1$; $x = 10$;

2. а) $\log_3(x^2+5)>\log_3(x+7)$;
$\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5>x+7 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-7, \\ x^2-x-2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-7, \\ x<-1 \end{cases}$ и $x>2$; $x\in(-7;-1)\cup(2;\infty)$;

б) $9^x-8\cdot3^x+15<0$; $3^x=t$; $t^2-8t+15<0$; $3<t<5$; $3<3^x<5$; $1<x<\log_3 5$.

С–21

а) $\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=2+\log_2 5, \\ \log_{0,5}(x-y)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 xy=\log_2 20, \\ \log_{0,5}(x-y)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=20, \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1+y, \\ (1+y)y=20 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=1+y, \\ y^2+y-20=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=-4, \\ y_2=-5 \end{cases}$ – не подходит, так как $x>0$ и $y>0$; так что $x=5$, $y=4$;

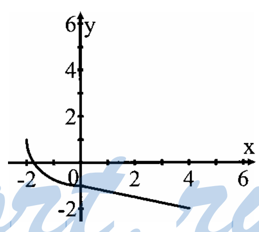
б) $\begin{cases} 3^x\cdot2^y=972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x\cdot2^y=972, \\ x-y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x\cdot2^{x-3}=3^5\cdot2^2, \\ y=x-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

С–22

1. а) $f(x)=1-8x^3$; $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1-f(x)}$, так что $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1-x}$ – обратная к $f(x)$. $D(g)=E(g)=R$;

б) $f(x)=\left(\sqrt{2+x^2}\right)^{-3}, x\le0$; $\sqrt{2+x^2}=f(x)^{-\frac{1}{3}}$; $x=-\sqrt{f(x)^{-\frac{3}{2}}-2}$, так что $g(x)=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2}$ – обратная к $f(x)$. $D(y)=\left(0;\frac{1}{\sqrt{8}}\right]$, $E(y)=(-\infty;0]$.

2. $f(g(-2))=-2$, $f(g(-1))=-1$, $f(g(3))=3$, так что $g(-2)$ не определено, $g(-1)=1-\sqrt{3}$; $g(3)=-1,5$.
$D(g)=E(f)=[-3;-2,5]\cup(-2;4]$,
$E(g)=D(f)=[-2;1)\cup[2;3]$.



С–23

1. а) $f'(x)=(e^{4-7x})'=e^{4-7x}(4-7x)'=-7e^{4-7x}$;
б) $f'(x)=(4^{2-3x})'=4^{2-3x}\cdot\ln4\cdot(2-3x)'=-3\cdot4^{2-3x}\cdot\ln4$.

2. Уравнение касательной в точке x_0: $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, а так как касательная – горизонтальная, то $f'(x_0)=0$, то есть $(e^x+e^{-x})'\big|_{x=x_0}=$ $=e^{x_0}-e^{-x_0}=0$, так что $x_0=0$ и $f(x_0)=e^0+e^0=2$; и $y=2$ – искомое уравнение.

3. $f'(x)=(e^{x^4-2x^2})=(4x^3-4x)(e^{x^4-2x^2})$, $f'(x)=0$ при $x=\pm1$ и $x=0$, $f'(x)>0$ при $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$, $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$. Так что $x_{min}=\pm1$, $x_{max}=0$.

4. $S=\int\limits_1^2\left(-e^{2x}+(e+1)e^{x+1}-e^3\right)dx=\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+(e+1)e^{x+1}-e^3\cdot x\right)\Big|_1^2=-\frac{e^4}{2}+$
$+(e+1)e^3-2e^3+\frac{1}{2}e^2-(e+1)e^2+e^3=e^4-2e^3-\frac{e^2}{2}$.

С–24

1. а) $f'(x)=\left(\ln\left(x^4-3x^3+x\right)\right)'=\dfrac{\left(x^4-3x^3+x\right)'}{x^4-3x^3+x}=\dfrac{4x^3-9x^2-1}{x^4-3x^3+x}$;

б) $f'(x)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{4-0,1x}=\dfrac{1}{\ln\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{4-0,1x}}\cdot\left(\sqrt[4]{4-0,1x}\right)'=$

$=-\dfrac{1}{4}\cdot 0,1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\ln 3}\cdot\dfrac{1}{4-0,1x}=\dfrac{1}{(2x-80)\ln 3}$.

2. $x^2-6x+5=0$ при $x=1$ и $x=5$. Так что $S=\int\limits_1^5\frac{5}{x}dx=5\ln x\Big|_1^5=5\ln 5$.

3. $f'(x)=(\log_2^4 x)'-(2\log_2^2 x)'=4\log_2^3 x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}-4\log_2 x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}$ $=$
$\dfrac{4\log_2 x}{x\ln 2}(\log_2^2 x-1)$, $f'(x)=0$ при $x=1$, $x=2$, $x=\frac{1}{2}$. $f'(x)>0$ при $x>2$ и $\frac{1}{2}<x<1$, $f'(x)<0$ при $x<\frac{1}{2}$ и $1<x<2$. Т.о. $x_{\min}=\frac{1}{2}$ и $x_{\min}=2$, $x_{\max}=1$.

С–25

1. $f'(x)=(x-1)'x^{\sqrt{2}}+(x-1)(x^{\sqrt{2}})'=x^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}(x-1)x^{\sqrt{2}-1}=x^{\sqrt{2}-1}(x+\sqrt{2}x-\sqrt{2})$,
$f'(x)=0$ при $x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. $f'(x)>0$ при $x>\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ и $f'(x)<0$ при $x<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$, так что $f(x)$ убывает на $[0;\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}]$ и возрастает на $[\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1};\infty)$.

2. $\sqrt[5]{32,15}-\sqrt[5]{31,75}\approx 0,005$.

3. $F(x)=\dfrac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{x^{1-\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}}+C$.

С–26

1. Нет, так как $f'(x)=(e^{-3x})'=e^{-3x}(-3x)'=-3e^{-3x}=-3f(x)$.
2. Общее решение $f'(x)=\ln 9 f(x)$: $f(x)=C\cdot 9^x$, а так как $f(3)=9$, то $9=C\cdot 9^3$ и $C=9^{-2}$ и $f(x)=9^{x-2}$– искомое решение.
3. Общее решение $y''=-4y$: $y=a\cos 2x+b\sin 2x$. Так как $y(0)=1$, то $a=1$, а так как $y'(0)=-2\sqrt{3}$, то $b=-\sqrt{3}$ и $y=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$;
$A=2$; $\omega=2$; $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Вариант 9

С–1

1. Если $x>0$, то $F'(x)=(x^2)'=2x=f(x)$; если $x<0$, то $F'(x)=(-x^2)'=-2x=f(x)$.

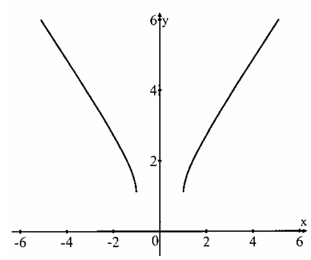
При $x=0$: $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$. Так что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(-\infty;\infty)$.

2. а) Да, так как $F'(x)=(\sqrt{4x^7-1}+5)'=\dfrac{14x^6}{\sqrt{4x^7-1}}=f(x)$ на (3;4);

б) Нет, так как $F(x)$ и $f(x)$ определены не для всех $x\in(1;\,2)$.

С–2

1. Общий вид первообразной: $F(x)=\sqrt{x^2-1}+C$, а так как $M(\sqrt{2};2)$ принадлежит графику F(x), то $2=\sqrt{2-1}+C$ и $C=1$ и $F(x)=1+\sqrt{x^2-1}$.



2.а) $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$F(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$; $F(x)=-\dfrac{1}{2(x^2+1)}+C$.

С–3

а) $G(x)=2\mathrm{tg}(x-1)-\cos(4-3x)+x+C$;

б) Так как $(x\cos x)'=\cos x-x\sin x$, то $(x\cos x-\sin x)'=-x\sin x$. $G(x)=-x\cos x+\sin x+\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$.

С–4

а) $S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2\cos x\,dx+\int\limits_{0}^{2}(2-x)\,dx=2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left(2x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}=2+4-2=4$;

б) $S=\int\limits_{-4}^{0}\sqrt{-x}\,dx+\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx=\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{-x}\right)\Big|_{-4}^{0}+\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_{0}^{1}=\dfrac{16}{3}+\dfrac{2}{3}=6$.

С–5

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)dx=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

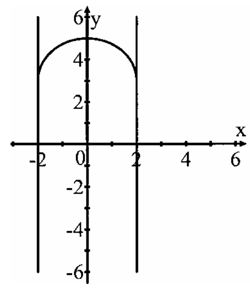
б) $\int\limits_{-1}^{4}\left(1+\frac{x}{2}\right)^8 dx=\frac{2}{9}\left(1+\frac{x}{2}\right)^9\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{2\cdot 3^9}{9}-\frac{2}{9\cdot 2^9}=\frac{2}{9}\left(3^9-\frac{1}{2^9}\right).$

2. $\left|\int\limits_1^A\frac{dx}{x^2}-1\right|=\left|\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^A-1\right|=\left|-\frac{1}{A}+1-1\right|=\left|-\frac{1}{A}\right|=\left|\frac{1}{A}\right|=\frac{1}{|A|}$; $\frac{1}{|A|}<0{,}1$ при $|A|>10$; $A<-10$ и $A>10$; но $A>1$, так что $A>10$; $\frac{1}{|A|}<0{,}001$ при $|A|>1000$; $A<-1000$ и $A>1000$; но $A>1$, так что $A>1000$.

С–6

1. $S=\int\limits_1^2\left(\frac{4}{x^2}-x+1\right)dx=\left(-\frac{4}{x}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^2=-2-2+2+4+\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}.$

2. $\int\limits_{-2}^{2}\left(3+\sqrt{4-x^2}\right)dx$ – площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=3+\sqrt{4-x^2}$ и $x=-2$ и $x=2$: Эта фигура – прямоугольник со сторонами 3 и 4 и полукруг радиуса 2. Так что $S=3\cdot 4+\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=2\pi+12$.



С–7

По формуле Ньютона $F(t)=m\cdot a(t)$, так что $a(t)=F(t):5=\frac{6}{5}t-\frac{2}{5t^3}$. Так как $a(t)=V'(t)$, то $V(t)=\frac{3}{5}t^2+\frac{1}{5t^2}+C$, а так как $V(1)=3$, то $3=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+C$, то есть $C=2\frac{1}{5}$ и $V(t)=\frac{3}{5}t^2+\frac{1}{5t^2}+2\frac{1}{5}$. $S'(t)=V(t)$. Поэтому

$S(5)-S(2)=\int\limits_2^5 V(t)dt=\int\limits_2^5\left(\frac{3}{5}t^2+\frac{1}{5t^2}+2\frac{1}{5}\right)dt=\left(\frac{1}{5}t^3-\frac{1}{5t}+\frac{11}{5}t\right)\Bigg|_2^5=$

$=25-\frac{1}{25}+11-\frac{8}{5}+\frac{1}{10}-\frac{22}{5}=30{,}06$ (м).

С–8

1. Найдем точки пересечения $\frac{x^4}{4}+x^2=8$, $x^4+4x^2-32=0$, $x^2=4$, $x\pm 2$. $y=2$. Площадь над параболой равна сумме площадей сектора, ограниченного

$y^2+x^2=8$, $y=x$ и $y=-x$ $y\geq 0$, фигуры, ограниченной $y=x$ и $y=x^2/2$ и фигуры, ограниченной $y=-x$ и $y=\frac{x^2}{2}$. Т.е.: $S_1=\frac{8\pi}{4}+\int\limits_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int\limits_{-2}^0\left(-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$

$$=\frac{8\pi}{4}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2+\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^0=\frac{8\pi}{4}+2-\frac{8}{6}+2-\frac{8}{6}=\frac{8\pi}{4}+\frac{4}{3}=2\pi+\frac{4}{3}.$$

Площадь под параболой S_2 равна пощади круга без площади над параболой. $S_2=8\pi-\left(\frac{8\pi}{4}+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}$. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{6\pi+4}{18\pi-4}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^4 x dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos^2 2x}{4}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{8}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{64}=\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{64}.$$

С–9

1. Поперечное сечение – прямоугольник со сторонами $\left(a-\frac{(a-c)x}{h}\right)$ и $\left(b-\frac{bx}{h}\right)$. Так что площадь $S(x)=\left(a-\frac{(a-c)x}{h}\right)\left(b-\frac{bx}{h}\right)=$ $=ab-x\left(\frac{b(a-c)}{h}+\frac{ab}{h}\right)+\frac{x^2}{h^2}b(a-c)$. Тогда:

$$V=\int\limits_0^h\left(ab-\frac{x}{h}(2ab-bc)+\frac{x^2}{h^2}(ab-bc)\right)dx=$$

$$=\left(abx-\frac{x^2}{2h}(2ab-bc)+\frac{x^3}{3h^2}(ab-bc)\right)\Bigg|_0^h=abh-\frac{h}{2}(2ab-bc)+\frac{h}{3}(ab-bc)=$$

$$=\frac{h}{6}(6ab-6ab+3bc+2ab-2bc)=\frac{bh}{6}(2a+c).$$

2. Пусть высота цилиндра H. Тогда плотность цилиндра $g = \frac{m}{v} = \frac{m}{\pi R^2 H}$. Рассмотрим часть цилиндра, ограниченную цилиндрическими поверхностями радиусов x и $x+\Delta x$. Тогда объем этой части приближенно равен $2\pi x H\Delta x$, а масса $\frac{2mx\Delta x}{R^2}$, скорость $\frac{x}{R}$, кинетическая энергия $W_x \approx \frac{m_x v_x^2}{2} \approx \frac{mx^3\Delta x}{R^4}$. Так что $W = \int\limits_0^R \frac{mx^3 dx}{R^4} = \frac{mx^4}{4R^4}\Bigg|_0^R = \frac{m}{4}$.

С–10

1. Равенство неверно.

Так как $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, что не равно $\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}$.

2. $$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} =$$

$$= a + 2\sqrt{\frac{a^2-\left(a^2-b\right)}{4}} = a + \sqrt{b}\ .$$

Т.о. $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, что и требовалось доказать.

3.

$$\frac{a-b}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} =$$

$$= \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right).$$

4. $$\sqrt[3]{1992}-\sqrt[3]{1991} = \frac{\left(\sqrt[3]{1992}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1991}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{1992^2}+\sqrt[3]{1992\cdot 1991}+\sqrt[3]{1992^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1992}+\sqrt[3]{1992\cdot 1991}+\sqrt[3]{1991}} < \frac{1}{\sqrt[3]{1991^2}+\sqrt[3]{1991\cdot 1990}+\sqrt[3]{1990}} =$$

$$= \frac{1991-1990}{\sqrt[3]{1991}+\sqrt[3]{1991\cdot 1990}+\sqrt[3]{1990}} = \sqrt[3]{1991}-\sqrt[3]{1990}.$$

То есть $\sqrt[3]{1992}-\sqrt[3]{1991}<\sqrt[3]{1991}-\sqrt[3]{1990}$, так что $\sqrt[3]{1992}+\sqrt[3]{1990}<2\sqrt[3]{1991}$

С–11

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.$$

2.а) $x-1=7(\sqrt[3]{x}-1)$; $(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1-7)=0$; $(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6)=0$; $\sqrt[3]{x}=t$; $(t-1)(t^2+t-6)=0$; $(t-1)(t-2)(t+3)=0$; $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=-3$, $x_1=1$, $x_2=8$, $x_3=-27$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{x^2-1}=3\sqrt[3]{(x-1)^2}$; $x=1$ – не является корнем уравнения, так что поделим на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$: $\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-2\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=3$; $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$;

$t^2-2t-3=0$; $t_1=-1$ и $t_2=3$; $\frac{x+1}{x-1}=-1$ и $\frac{x+1}{x-1}=27$; $x+1=1-x$ и $x+1=27x-27$;

$x_1=0$ и $x_2=\frac{14}{13}$.

3. а) $$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}-\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}-\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}}\right)=\frac{-\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cdot\sqrt[4]{b}}=$$

$$=-\sqrt[4]{a}\text{ при } b>0 \text{ и } a\neq b;$$

б) $$\sqrt{a^2+a\sqrt{8}+2}+\sqrt{a^2-a\sqrt{8}+2}=\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\left|a+\sqrt{2}\right|+\left|a-\sqrt{2}\right|=\begin{cases}2a, & \text{если } a\geq\sqrt{2},\\ 2\sqrt{2}, & \text{при } -\sqrt{2}<a<\sqrt{2},\\ -2a, & \text{при } a\leq-\sqrt{2}.\end{cases}$$

С–12

1. $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$; пусть $\sqrt[3]{3-x}=b$, $\sqrt[3]{10-x}=a$, тогда

$\begin{cases}a-b=1,\\ a^3-b^3=7\end{cases}$; $\begin{cases}a-b=1,\\ a^2+ab+b^2=7\end{cases}$; $\begin{cases}a=1+b,\\ (1+b)^2+b(1+b)+b^2=7\end{cases}$; $\begin{cases}a=1+b,\\ b^2+b-2=7\end{cases}$;

$\begin{cases}a_1=2,\\ b_1=1\end{cases}$ и $\begin{cases}a_2=-1,\\ b_2=-2\end{cases}$; $\begin{cases}10-x=8,\\ 3-x=1\end{cases}$ и $\begin{cases}10-x=-1,\\ 3-x=-8\end{cases}$; x_1=2 и x_2=11.

2. $\begin{cases}x\sqrt{x}+3y\sqrt{x}=36,\\ y\sqrt{y}+3x\sqrt{y}=28\end{cases}$; сложим и вычтем уравнения;

$\begin{cases}x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+y\sqrt{y}=64,\\ x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y}=8\end{cases}$; $\begin{cases}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3=64,\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3=8\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\end{cases}$;

сложим и вычтем уравнения; $\begin{cases}\sqrt{x}=3,\\ \sqrt{y}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=9,\\ y=1.\end{cases}$

С–13

1. $$\left(\frac{2^{1/2}\cdot 3^{1/3}+2^{1/3}\cdot 3^{1/2}}{2^{1/6}+3^{1/6}}\right)^3+\left(\frac{2^{1/2}\cdot 3^{1/3}-2^{1/3}\cdot 3^{1/2}}{2^{1/6}-3^{1/6}}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{2^{1/3}\cdot 3^{1/3}\left(2^{1/6}+3^{1/6}\right)}{2^{1/6}+3^{1/6}}\right)^3+\left(\frac{2^{1/3}\cdot 3^{1/3}\left(2^{1/6}-3^{1/6}\right)}{2^{1/6}-3^{1/6}}\right)^3=2\cdot 3+2\cdot 3=12.$$

2. $x^2+a^2=a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)+a^2=a^2\left(\frac{m^2+n^2+2mn}{2mn}\right)=a^2\frac{(m+n)^2}{2mn}$;

$x^2-a^2=a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)+a^2=a^2\left(\frac{m^2+n^2-2mn}{2mn}\right)=a^2\frac{(n-m)^2}{2mn}$.

Так как a > 0 и n > m > 0, то $\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}$, а

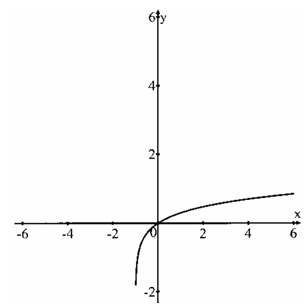
$\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}$.

Далее $\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}+\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}=\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n-m}\right)=\frac{2n\sqrt{2mn}}{a\left(n^2-m^2\right)}$, а

$(x^2+a^2)^{-1/2}-(x^2-a^2)^{-1/2}=\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{n+m}-\frac{1}{n-m}\right)=\frac{-2m\sqrt{2mn}}{a(n^2-m^2)}$.

Так что $\left(\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\dfrac{2n\sqrt{2mn}}{a(n^2-m^2)}}{\dfrac{-2m(\sqrt{2mn})}{a(n^2-m^2)}}\right)^{-2}=\left(-\dfrac{m}{n}\right)^2=\dfrac{m^2}{n^2}$.

С–14



1. $y=\lg\lg 10^{x+1}$; $y=\lg((x+1)\lg 10)=\lg(x+1)$.

2. $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{3,8}=\dfrac{\left(\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)\right)}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{3,8}}=$

$=\dfrac{(49-48)^{3,8}}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^{3,8}}=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-3,8}$. Так что $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{3,8}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-3,5}$.

3. $y=\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}+15}$; $2^{2x}-2^{x+3}+15\ge 0$; $2^x=t$; $t^2-8t+15\ge 0$; $t\le 3$ и $t\ge 5$; $2^x\le 3$ и $2^x\ge 5$; $D(y)=(-\infty;\log_2 3]\cup[\log_2 5;\infty)$. $E(y)=[0;\infty)$.

С–15

1. а) $2^{x^3-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$; $2^{x^3-1}=2^{x-1}$; $x^3-1=x-1$; $(x-1)(x^2+x+1-1)=0$; $x(x-1)(x+1)=0$; $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$;

б) $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$; $3\cdot 3^{2x-1}+3^{2x-1}=8\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}+2^{x+\frac{1}{2}}$; $4\cdot 3^{2x-1}=9\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}$;

$4\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}=18\cdot 2^{x-\frac{1}{2}}$; $\left(2/9\right)^{x-\frac{1}{2}}=2/9$; $x-1/2=1$; $x=1,5$.

2. а) $2,5^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}}>1$; $\dfrac{x^2-9x+14}{x-3}>0$; $\dfrac{(x-2)(x-7)}{(x-3)}>0$; $x\in(2;3)\cup(7;\infty)$;

б) $x^2\cdot 2^x+1>x^2+2^x$; $x^2(2^x-1)-(2^x-1)>0$; $(x^2-1)(2^x-1)>0$; $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$.

С–16

1. а) $4^{x+\frac{1}{2}}+2/4^x+14=9\left(2^x+1/2x\right)$; $2\cdot(2^{2x}+2+2^{-2x})+10=9(2^x+2^{-x})$; $2^x+2^{-x}=t$; $2t^2-9t+10=0$; $t_1=2$, $t_2=5/2$; $2^x+2^{-x}=2$ и $2^x+2^{-x}=5/2$; $2^x=y$; $y^2-2y+1=0$ и $2y^2-5y+2=0$; $y=1$, $y=2$ и $y=1/2$;

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$; пусть $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=y$, тогда

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x}=\frac{1}{y};\qquad y+\frac{1}{y}=10;$$

$y^2-10y+1=0$; $y_1=5+2\sqrt{6}$, $y_2=5-2\sqrt{6}$; $x_1=2$, $x_2=-2$.

2. $3^{\sin x}>\left(1/3\right)^{|\cos x|}$; $3^{\sin x}>3^{-|\cos x|}$; $\sin x > -|\cos x|$; $\sin x + |\cos x| > 0$;

$x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

С–17

1. lg56=lg7·2^3=lg7+3lg2=3a+b

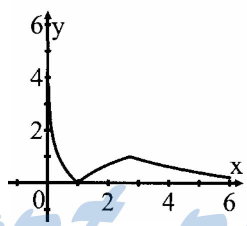
2. $(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{1+\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1)^{\frac{1}{2}}=(x^{1+\frac{1}{\log_2 x}}+2^{\frac{2}{\log_x 2}}+1)^{\frac{1}{2}}=(x^{1+\log_x 2}+2^{2\log_2 x}+1)^{\frac{1}{2}}=$

$=(x\cdot 2+x^2+1)^{\frac{1}{2}}=((x+1)^2)^{\frac{1}{2}}=x+1.$

3. $\log_2 3>\log_2 2\sqrt{3}=1{,}5=\log_3 3\sqrt{3}>\log_3 5.$ То есть $\log_2 3>\log_3 5$.

С–18

1. См. график.



2. lgtg1°+lgtg2°+…+lgtg88°+lgtg89°=
=lg(tg1°·tg89°)+lg(tg2°·tg88°)+…+
+lg(tg44°·tg46°)+lgtg45°=
=lg(ctg1°·tg1°)+lg(tg2°·ctg2°)+…+
+lg(tg44°·ctg44°)+lg1=lg1+lg1+…+lg1=
=0+0+…+0=0.

3. $y=\sqrt{\lg^2 x-4\lg x+3}$; $\lg x=t$; $t^2-4t+3\ge 0$; $t\le 1$ и $t\ge 3$; $\lg x\le 1$ и $\lg x\ge 3$; $D(y)=(0;10]\cup[1000;\infty)$.

С–19

1.а) $\log_x(x+2)=2$; $\begin{cases}x+2>0,\\ x>0,\ \ x\ne 1,\\ x+2=x^2\end{cases}$; $\begin{cases}x>0,\ \ x\ne 1,\\ x^2-x-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}x>0,\ \ x\ne 1,\\ x=-1\ \text{ и }\ x=2\end{cases}$; $x=2$.

б) $\log_{1/3} x=x-4$; $x=3^{4-x}$; Заметим, что x – возрастает, а 3^{4-x}– убывает, так что уравнение не может иметь более одного корня. Заметим также, что $x=3$ – корень. Так что решение уравнения $x=3$.

2. а) $\lg(x-1)+\lg(x-3)<\lg\left({}^{3}\!/_{2}x-3\right)$; $\lg\left((x-1)(x-3)\right)<\lg\left({}^{3}\!/_{2}x-3\right)$;

$\begin{cases} x-1>0, \\ x-3>0, \\ {}^{3}\!/_{2}x-3>0, \\ x^2-4x+3<{}^{3}\!/_{2}x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ x>3, \\ x>2, \\ 2x^2-11x+12<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ (x-4)(2x-3)<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ 1,5<x<4; \end{cases}$

$x\in(3;4)$;

б) $2^{\sqrt{1-x}}-x\lg x>0$; Область определения $x\in(0;1]$. Но $2^{\sqrt{1-x}}>0$, а $x\lg x<0$ при $x\in(0;1]$. Так что $2^{\sqrt{1-x}}-x\lg x>0$ при всех $x\in(0;1]$.

С–20

1. а) $\log_{x+1}(x-0,5)=\log_{x-0,5}(x+1)$; $\log_{x+1}(x-0,5)=\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-0,5)}$;

$\log_{x+1}(x-0,5)=1$ и $\log_{x+1}(x-0,5)=-1$;

$\begin{cases} x-0,5>0, \\ x+1>0,\ \ x+1\neq 1, \\ x+1=x-0,5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-0,5>0, \\ x+1>0,\ \ x+1\neq 1, \\ x-0,5=\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$; первая система решения не имеет; $\begin{cases} x>0,5, \\ x^2+0,5x-0,5=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0,5, \\ 2x^2+x-3=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0,5, \\ x=1 \ \text{ и } \ x=-{}^{3}\!/_{2}; \end{cases}$ $x=1$;

б) $\left|\dfrac{1}{3}-\log_{{}^{1}\!/_{8}}x\right|+\dfrac{1}{3}=\left|\dfrac{2}{3}-\log_{{}^{1}\!/_{8}}x\right|$.

1) $\log_{{}^{1}\!/_{8}}x\le{}^{1}\!/_{3}$, т.е. ${}^{1}\!/_{3}-\log_{{}^{1}\!/_{8}}x+{}^{1}\!/_{3}={}^{2}\!/_{3}-\log_{{}^{1}\!/_{8}}x$, верно для всех $x\ge{}^{1}\!/_{2}$;

2) ${}^{1}\!/_{3}<\log_{{}^{1}\!/_{8}}x<{}^{2}\!/_{3}$, т.е. ${}^{1}\!/_{4}<x<{}^{1}\!/_{2}$; $\log_{{}^{1}\!/_{8}}x-{}^{1}\!/_{3}+{}^{1}\!/_{3}={}^{2}\!/_{3}-\log_{{}^{1}\!/_{8}}x$; $\log_{{}^{1}\!/_{8}}x={}^{1}\!/_{3}$, $x={}^{1}\!/_{2}$ – не входит в $({}^{1}\!/_{4};{}^{1}\!/_{2})$;

3) $\log_{\frac{1}{8}}x\ge\dfrac{2}{3}$, то есть $0<x\le\dfrac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{8}}x-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\log_{\frac{1}{8}}x-\dfrac{2}{3}$; $0=-\dfrac{2}{3}$ – не верно. Значит $x\in[{}^{1}\!/_{2};\infty)$.

2. а) $\log_2^2x+\log_2x^2\le-1$; $\log_2^2x+2\log_2x\le-1$; $\log_2x=t$; $t^2+2t+1\le0$; $(t+1)^2\le0$; $t=-1$; $\log_2x=-1$; $x=0,5$;

б) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}<-\log_x 5$; $\log_x5=y$;

$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y}<-y$; $\begin{cases}1/2+1/2\,y\ge 0,\\ -y\ge 0,\\ 1/2+1/2\,y<y^2;\end{cases}$ $\begin{cases}y\ge -1,\\ y\le 0,\\ 2y^2-y-1<0;\end{cases}$ $\begin{cases}y\ge -1,\\ y\le 0,\\ -1/2<y<1;\end{cases}$ $-\frac{1}{2}<y\le -1$;

$-\frac{1}{2}<\log_x 5\le -1$;

1) $0<x<1$: $\frac{1}{\sqrt{x}}>5\ge\frac{1}{x}$; $\frac{1}{25}<x<\frac{1}{5}$;

2) $x>1$: $\frac{1}{\sqrt{x}}<5<\frac{1}{x}$ – неверно ни при каких $x>1$. Значит $x\in\left(\frac{1}{25};\frac{1}{5}\right]$.

С–21

а) $\begin{cases}x^2=1+6\log_4 y,\\ y^2=y\cdot 2^x+2^{2x+1}\end{cases}$; решаем второе уравнение: 2^x=t; $2t+yt-y^2=0$;

$t=\frac{-y\pm 3y}{4}$; $t_1=-y$, $t_2=\frac{y}{2}$, то есть $y=-2^x$ или $y=2^{x+1}$, но $y>0$, так что

$\begin{cases}y=2^{x+1},\\ x^2=1+3\log_2 y\end{cases}$; $\begin{cases}y=2^{x+1},\\ x^2=1+3(x+1)\end{cases}$; $\begin{cases}y=2^{x+1},\\ x^2-3x-4=0\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=32.\end{cases}$

б) $\begin{cases}\left(2^x+1\right)^{2^{y+1}}=9,\\ \sqrt{x+y^2}=x+y\end{cases}$; решаем второе уравнение; $\sqrt{x+y^2}=x+y$;

$x+y^2=x^2+y^2+2xy$; $x(x+2y-1)=0$; $x=0$ или $x=1-2y$; при $x=0$: $(2^0+1)2^{y+1}=9$; $2^{y+1}=\frac{9}{2}$; $1+y=\log_2\frac{9}{2}$; $y=2\log_2 3-2$; при $x=1-2y$: $(2^{1-2y}+1)2^{y+1}=9$; 2^y=t;

$\left(\frac{2}{t^2}+1\right)2t=9$; $\frac{4}{t}+2t=9$; $2t^2-9t+4=0$; $t_1=4$; $t_2=\frac{1}{2}$; $2^y=4$ и $2^y=\frac{1}{2}$; $y_1=2$ и $y_2=-1$; $x_1=-3$ а $x_2=3$; Но пара (2;–3) не проходит, так как $x+y$ должно быть больше нуля. Так что $(0;2\log_3 2-2)$ и (3;–1).

С–22

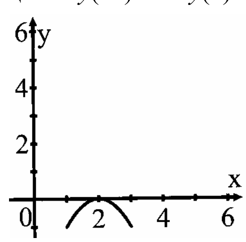
1. а) не обратима, так как $y(-1)=y(1)=-2$;

б) не обратима, так как это непрерывная функция и $y(-3)<0$ а $y(0)>0$ значит найдется $x_1<0$, что $y(x_1)=0$, но $y(1)=0=y(x_1)$. Значит не обратима;

в) Обратима, так как значение y в различных точках – различны;

г) Обратима, так как значение y в различных точках различны.

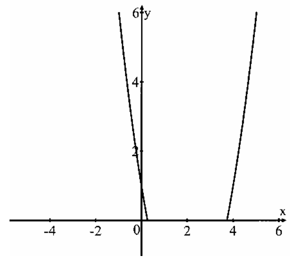
2. Может: см. график.



С–23

1. $f'(x)=x'e^{x^2-3x}+x\cdot(e^{x^2-3x})'=e^{x^2-3x}+x\cdot(2x-3)e^{x^2-3x}=e^{x^2-3x}(2x^2-3x+1)$.
$f'(x)=0$ при $x=1$ и $x=\frac{1}{2}$. $f'(x)>0$ при $x<\frac{1}{2}$ и $x>1$, $f'(x)<0$ при $\frac{1}{2}<x<1$, так что $x_{\min}=1$, $x_{\max}=\frac{1}{2}$.

2. $y=3^{\log_3\left(x^2-4x+1\right)}$; $y=x^2-4x+1$ при $x^2-4x+1>0$ (см. график).



3. Сравним $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}$. Для функции

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}:f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}.$$

$f'(x)>0$ при $0<x<e^2$. Так что $f(x)$ – возрастает при $0<x<e^2$, так что $f(2)<f(3)$, то есть $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}<\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}$, то есть $\sqrt{3}\ln 2<\sqrt{2}\ln 3$ или $\ln 2^{\sqrt{3}}<\ln 3^{\sqrt{2}}$, значит $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

4. $f(x)=(2x-1)2^{x^2-x}$. Первообразная $F(x)=\frac{2^{x^2-x}}{\ln 2}+C$.

С–24

1. а) $f'(x)=(\log_3^2(x^3+\cos x))'=2\log_3(x^3+\cos x)\cdot(\log_3(x^3+\cos x))'=$

$$=\frac{2\log_3\left(x^3+\cos x\right)}{\ln 3\left(x^3+\cos x\right)}\cdot\left(x^3+\cos x\right)'=\frac{2\log_3\left(x^3+\cos x\right)\left(3x^2-\sin x\right)}{\ln 3\cdot\left(x^3+\cos x\right)};$$

б) $f'(x)=\left(\ln\sin\frac{x}{2}\right)'=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)'}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

2. $\int\limits_0^3\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^3=\ln 10-\ln 1=\ln 10$; $f'(x)=\left(1{,}5\ln^2 x\right)'-\left(\ln^3 x\right)'=$
$=3\ln x\cdot\frac{1}{x}-3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{3\ln x}{x}(1-\ln x)$; $f'(x)=0$ при $x=1$ и $x=e$. $f'(x)>0$ при $1<x<e$ и $f'(x)<0$ при $0<x<1$ и $x>e$. Так что $f(x)$ – возрастает при $1\le x\le e$ и $f(x)$ –убывает при $0<x\le 1$ и $x\ge e$.

С–25

1. $y=x^x$; $y=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$; $y'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(1+\ln x)$.

2. $\sqrt[4]{16{,}08}-\sqrt[5]{32{,}60}\approx-0{,}005$.

3. $y'=(x^2-2x+1)'\cdot x^{\sqrt{2}}+(x^2-2x+1)(x^{\sqrt{2}})'=2(x-1)\cdot x^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}(x-1)^2\cdot x^{\sqrt{2}-1}=$ $=\sqrt{2}(x-1)x^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}x+x-1)$; $y'=0$ при $x=0$, $x=1$ и $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$. $y'>0$ при $0<x<\sqrt{2}-1$ и $x>1$, $y'<0$ при $\sqrt{2}-1<x<1$. Так что y – возрастает на $[0;\sqrt{2}-1]\cup[1;\infty)$ и убывает на $\left[\sqrt{2}-1;1\right]$.

С–26

1. Каждый раз, через 3 часа – остается половина вещества. Значит допустим, через t часов останется 0,25 кг. Тогда $8/2^{t/3}=0,25$; $2^{t/3}=32$; $t/3=5$; t=15 (ч).

2. $3y^2y'=y^3$; $(y^3)'=y^3$, так что $y^3=Ce^x$ и $y=\sqrt[3]{C_1e^x}$, то есть $y=Ce^{\frac{x}{3}}$ (где $C=\sqrt[3]{C_1}$).

3. $y''=-0,25y$; общее решение $y=a\cos x/2+b\sin x/2$; т.к. $y(0)=3/2$, то $a=\dfrac{3}{2}$, т.к. $y'(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, то $\dfrac{b}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{2}=$ $=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}/2\cos x/2+1/2\sin x/2\right)=\sqrt{3}\cos\left(x/2-\pi/6\right)=\sqrt{3}\cos\left(x/2+11\pi/6\right)$.

Вариант 10

С–1

1. При $x>0$ $F'(x)=(x^4)'=4x^3=f(x)$; при $x<0$ $F'(x)=(-x^4)'=(-4x^3)=f(x)$ При $x=0$: $F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3|x|-0}{x}=x^2|x|=f(x)$. Так что при всех $F'(x)=f(x)$, что и требовалось доказать.

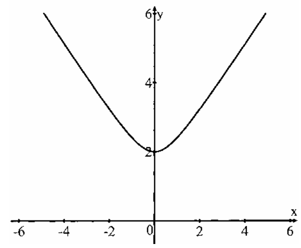
2.а) Является, т.к. $F'(x)=(\sqrt{4x^5-3x^2}+7)'=\dfrac{1}{2\sqrt{4x^5-3x^2}}\cdot\left(4x^5-3x^2\right)'=$ $=\dfrac{10x^4-3x}{\sqrt{4x^5-3x^2}}=f(x)$ при всех $x\in(1;2)$;

б) Нет, так как $F(x)$ и $f(x)$ определены не для всех $x\in(-2;-1)$.

С–2

1. Общий вид первообразной для $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$: $F(x)=\sqrt{x^2+1}+C$, а так как $M(\sqrt{3};3)$ принадлежит графику $F(x)$, то $3=\sqrt{3+1}+C$, C=1 и $F(x)=1+\sqrt{x^2+1}$.

2. а) Так как $f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, то



$F(x)=x/2-\sin 2x/4+C$;

б) $F(x)=\sqrt{x^3+1}+C$.

С–3

а) $f(x)=\frac{2}{\sin^2(x+1)}+3\cos(3-4x)+1$, $F(x)=2\operatorname{tg}(x+1)-3/4\sin(3-4x)+x+C$;

б) $g(x)=x\cos x-\sqrt{1+2x}$; так как $(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$, то $(x\sin x+\cos x)'=$ $=x\cos x$ и $F(x)=x\sin x+\cos x-1/3\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

С–4

а) $S=\int\limits_{-2}^{0}(x+2)dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}2\cos x dx=(x^2/2)(+2x)\Big|_{-2}^{0}+2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-2+4+2=4$;

б) $S=\int\limits_{-9}^{0}\sqrt{-x}dx+\int\limits_{0}^{4}\sqrt{x}dx=-2/3\,\frac{2}{3}\sqrt{-x^3}\Big|_{-9}^{0}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_{0}^{4}=18+\frac{16}{3}=23\frac{1}{3}$.

С–5

1.а) $\int\limits_{\pi/8}^{3\pi/8}12\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)dx=\int\limits_{\pi/8}^{3\pi/8}6\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)dx=3\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}=-3$;

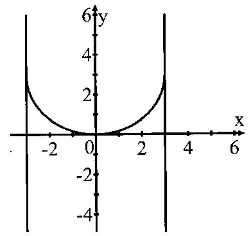
б) $\int\limits_{2}^{3}\frac{6x^2dx}{(2x^3-1)^2}=\left(-\frac{1}{2x^3-1}\right)\Big|_{2}^{3}=-\frac{1}{53}+\frac{1}{15}=\frac{38}{795}$.

2. $\left|\int\limits_{-A}^{-1}\frac{dx}{x^2}-1\right|=\left|-\frac{1}{x}\Big|_{-A}^{-1}-1\right|=\left|1-\frac{1}{A}-1\right|=\left|\frac{1}{A}\right|=\frac{1}{|A|}$; $\frac{1}{|A|}<0,1$ при $|A|>10$, т.е. $A>10$ (т.к. $A>1$); $\frac{1}{|A|}<0,001$ при $|A|>1000$, т.е. $A>1000$; $\frac{1}{|A|}<\varepsilon$ при $|A|>1/\varepsilon$, т.е. $A>1/\varepsilon$.

С–6

1. $9/x^2=x-2$ при $x^3-2x^2-9=0$; т.е. $(x^3-27)-2(x^2-9)=(x-3)(x^2+3x+9-2x-6)=$ $=(x-3)(x^2+x+3)=0$ при $x=3$; и при $2<x<3$ $9/x^2>x-2$, так что $S=\int\limits_{2}^{3}(9/x^2-(x-2))dx=(-9/x-x^2/2+2x)\Big|_{2}^{3}=-3-9/2+6+9/2+2-4=1$.

2. Интеграл равен площади фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - \sqrt{9 - x^2}$ и x=3 и x=–3 и y=0. Это прямоугольник со сторонами 3 и 6 без полукружности радиуса 3.



Так что $S = 6 \cdot 3 - \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 18 - 4{,}5\pi$.

С–7

По формуле Ньютона $F(t)$=$ma(t)$. Так что $a(t) = F(t) : m = 6t - {}^{4}\!/_{t^3}$. Далее $a'(t)$=$V(t)$, так что $V(t) = 3t^2 + {}^{2}\!/_{t^2} + C$, а так как $V(2)$=2, то $2 = 12 + {}^{1}\!/_{2} + C$, так что $C = -10\,{}^{1}\!/_{2}$; $V(t) = 3t^2 + {}^{2}\!/_{t^2} - 10\,{}^{1}\!/_{2}$; так как $S'(t)$=$V(t)$, то: $S(8) - S(3) = \int\limits_3^8 V(t)\,dt = \int\limits_3^8 \left(3t^2 + \frac{2}{t^2} - 10\frac{1}{2}\right)dt = \left(t^3 - \frac{2}{t} - \frac{21}{2}t\right)\Big|_3^8 =$

$= 512 - {}^{1}\!/_{4} - 84 - 27 + {}^{2}\!/_{3} + {}^{63}\!/_{2} = 432\,{}^{11}\!/_{12}$ (м).

С–8

1. Найдем точки пересечения y^4+y^2=2, y^2=1, y=±1, x=±1. Площадь внутри параболы равна площади сектора ограниченного y^2+x^2=2, y=x, y=–x, x≥0 сложенный с площадью фигуры, ограниченной y=x и $y = \sqrt{x}$ и с площадью фигуры ограниченной y=–x и $y = -\sqrt{x}$. $S_1 = \frac{2\pi}{4} +$

$+ \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)dx + \int\limits_0^1 \left(-x + \sqrt{x}\right)dx = \frac{\pi}{2} + 2\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)dx = \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$

$= {}^{\pi}\!/_{2} + 2\left({}^{2}\!/_{3} - {}^{1}\!/_{2}\right) = {}^{\pi}\!/_{2} + {}^{1}\!/_{3}$. Площадь вне параболы равна площади круга без S_1, то есть $S_2 = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{{}^{\pi}\!/_{2} + {}^{1}\!/_{3}}{{}^{3\pi}\!/_{2} - {}^{1}\!/_{3}} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.

2. $$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\left(x - \frac{\pi}{12}\right)dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} + \frac{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{4}\right)dx =$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1}{8}+\frac{\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3x}{8}+\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{4}+\frac{\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)}{32}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\frac{4\pi-8-\sqrt{3}}{64}.$$

С–9

1. Поперечное сечение многогранника – прямоугольник со сторонами $A-\frac{(A-a)x}{h}$ и $B-\frac{(B-b)x}{h}$. Т.о. $S(x)=\left(A-\frac{(A-a)x}{h}\right)\left(B-\frac{(B-b)x}{h}\right)$.

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h\left(AB-x\left(\frac{(A-a)B}{h}+\frac{(B-b)A}{h}\right)+x^2\frac{(A-a)(B-b)}{h^2}\right)dx=$$

$$=\left(ABx-\left(\frac{B(A-a)}{h}+\frac{A(B-b)}{h}\right)\frac{x^2}{2}+\frac{(A-a)(B-b)}{h^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=$$

$$=ABh-\frac{h}{2}\left((A-a)(B-b)\right)+\frac{h}{3}(A-a)(B-b)=$$

$$=\frac{h}{6}(6AB-3AB+3aB-3AB+3Ab+2AB-2aB-2Ab+2ab)=$$

$$=\frac{h}{6}\left(B(A+2A)+b(A+2a)\right).$$

2. Площадь части сферы, заключенной между плоскостями, проведенными на глубине x и $x+\Delta x$, равна $S_x=2\pi r\Delta x$, давление на эту часть $P_x\approx xS_x\rho g\approx 2\pi r\rho gx\Delta x$ Так что $\rho=\int_0^r 2\pi r\rho gxdx=2\pi r\rho g\int_0^r xdx=2\pi r\rho g\frac{x^2}{2}\Big|_0^r=$ $=\pi r^3\rho g$, где ρ – плотность воды, g –ускорение свободного падения.

С–10

1. Верно, т.к. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}{8\cdot 2}=\frac{5+3\sqrt{3}}{8}$ и $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}\right)^3=$

$$=\frac{8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}}{20+12\sqrt{3}}=\frac{\left(26+15\sqrt{3}\right)\left(12\sqrt{3}-20\right)}{144\cdot 3-400}==\frac{20+12\sqrt{3}}{32}=\frac{5+3\sqrt{3}}{8}.$$

2. $$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}-2\cdot\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)=$$

$=a-2\sqrt{\dfrac{a^2-(a^2-b)}{2}}=a-\sqrt{b}$. Т.о. $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

3. $\dfrac{a-b}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b})}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})$.

4. $$\sqrt[3]{10001}-\sqrt[3]{10000}=\frac{(\sqrt[3]{10001})^3-(\sqrt[3]{10000})^3}{\sqrt[3]{10001^2}+\sqrt[3]{10001\cdot10000}+\sqrt[3]{10000^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{10001^2}+\sqrt[3]{10001\cdot10000}+\sqrt[3]{10001^2}}<\frac{1}{\sqrt[3]{10000^2}+\sqrt[3]{10000\cdot9999}+\sqrt[3]{9999^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{10000}\right)^3-\left(\sqrt[3]{9999}\right)^3}{\sqrt[3]{10000^2}+\sqrt[3]{10000\cdot9999}+\sqrt[3]{9999^2}}=\sqrt[3]{10000}-\sqrt[3]{9999}\ .$$

Т.о. $\sqrt[3]{10001}-\sqrt[3]{10000}<\sqrt[3]{10000}-\sqrt[3]{9999}$, и $\sqrt[3]{10001}+\sqrt[3]{9999}<2\sqrt[3]{10000}$.

С–11

1. $$\sqrt{33+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{8}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{8}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{8}}}}=$$

$$=\sqrt{33+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{8}}}\cdot\sqrt{9-\left(3+\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)}=$$

$$\sqrt{33+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{8}}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{33+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{36-\left(3+\sqrt{8}\right)}=$$

$$=\sqrt{33+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{33-\sqrt{8}}=\sqrt{1089-8}=\sqrt{1081}\ .$$

2.

а) $x+1=3\sqrt[3]{x}+3$; $(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)=3(\sqrt[3]{x}+1)$; $\sqrt[3]{x}=t$; $(t+1)(t^2-t-2)=0$; $t_1=-1$, $t_2=-1$, $t_3=2$; $x_1=-1$, $x_2=8$;

б) $\sqrt[3]{(1+x)^2}+2\sqrt[3]{(1-x)^2}=3\sqrt[3]{1-x^2}$ $x=1$ – не является корнем, так что поделим на $\sqrt[3]{(1-x)^2}$. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}+2=3\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}=t$; $t^2-3t+2=0$; $t_1=1$, $t_2=2$; $\dfrac{1+x}{1-x}=1$ и $\dfrac{1+x}{1-x}=8$; $1+x=1-x$ и $1+x=8-8x$; $x=0$ и $x=\dfrac{7}{9}$.

3. а)

$$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}:\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}:\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{ab}}\right)=\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cdot\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{ab}$$, (при a>0, b>0, a≠b);

б) $$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=$$

$$=\left|1+\sqrt{x-1}\right|+\left|1-\sqrt{x-1}\right|=1+\sqrt{x-1}+\left|1-\sqrt{x-1}\right|=\begin{cases}2, & x>2,\\ 2\sqrt{x-1}, & 1\le x\le 2\end{cases}.$$

С–12

1. $\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{7+x}=4;$ $\sqrt[3]{9-x}=a,\ \sqrt[3]{7+x}=b,$ тогда $\begin{cases}a+b=4,\\ a^3+b^3=16\end{cases};$

$\begin{cases}a+b=4,\\ a^2-ab+b^2=4\end{cases};$ $\begin{cases}a=4-b,\\ (4-b)^2-(4-b)b+b^2=4\end{cases};$ $\begin{cases}a=4-b,\\ 3b^2-12b+12=0\end{cases};$

$\begin{cases}a=2,\\ b=2\end{cases};$ $\begin{cases}9-x=8,\\ 7+x=8\end{cases};$ x=1.

2. $\begin{cases}x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80,\\ y^2+y\sqrt[3]{yx^2}=5\end{cases};$ $\begin{cases}x\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)=80,\\ y\sqrt[3]{y}\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)=5\end{cases};$ $\frac{x\sqrt[3]{x}}{y\sqrt[3]{y}}=16$, то есть $\frac{x}{y}=\pm 8;$

$x\pm 8y$; при x=8y: $64y^2+8y\sqrt[3]{8y^3}=80$, y^2=1, $y=\pm 1$,$x=\pm 8$; при x=–8y: $64y^2-8y\sqrt[3]{-8y^2}=80$, y^2=1, $y\pm 1$, $x\mp 8$. То есть подходят решения: (8;1); (–8;1); (–8;–1) и (8;–1).

С–13

1.

$$\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+5^{\frac{1}{6}}}\right)^3+\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{6}}-2^{\frac{1}{6}}}\right)=\left(\frac{5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{6}}+5^{\frac{1}{6}})}{2^{\frac{1}{6}}+5^{\frac{1}{6}}}\right)^3+\left(\frac{5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}(5^{\frac{1}{6}}-2^{\frac{1}{6}})}{5^{\frac{1}{6}}-2^{\frac{1}{6}}}\right)^3$$

=10+10=20.

2. $$(a+x)^{-0,5}(b+x)^{-0,5}=\left(\sqrt{ab}+a\right)^{-0,5}\left(\sqrt{ab}+b\right)^{-0,5}=$$

$$=\left(\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}=\left(a-\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\sqrt{ab}-b\right)^{-0,5}=$$

$$=\left(\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{-1}.$$

Так что $(a+x)^{-0,5}(b+x)^{-0,5}+(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}=$

$$=\left(\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)=\left(\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\frac{2\sqrt{a}}{a-b}\right),\text{ и}$$

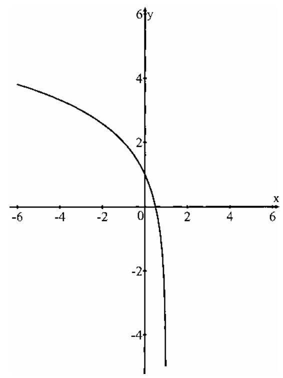
$$(a+x)^{-0,5}(b+x)^{-0,5}-(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}=$$

$$=\left(\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)=\left(\sqrt{ab}\right)^{-0,5}\left(\frac{-2\sqrt{b}}{a-b}\right).$$

Так что $\left(\dfrac{(a+x)^{-0,5}(x+b)^{-0,5}+(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}}{(a+x)^{-0,5}(x+b)^{-0,5}-(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{2\sqrt{a}}{-2\sqrt{b}}\right)^{-2}=\dfrac{b}{a}$.

С–14

1.$y=\log_2\log_2 4^{1-x}=\log_2((1-x)\cdot\log_2 4)=\log_2(2-2x)=$
$=1+\log_2(1-x)$.



2. $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{3,3}=\dfrac{((5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6}))^{3,3}}{(5+2\sqrt{6})^{3,3}}=$

$=\left(\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{3,3}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-3,3}<\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-3,1}$.

То есть $(5-2\sqrt{6})^{3,3}<(5+2\sqrt{6})^{-3,1}$.

3. $y=\sqrt{3^{2x}-3^{x+2}+20}$; $3^{2x}-3^{x+2}+20\ge0$; $3^x=t$; $t^2-9t+20\ge0$; $t\le4$ и $t\ge5$; $3^x\le4$ и $3^x\ge5$; $D(y)=(-\infty;\ \log_3 4]\cup[\log_3 5;\infty)$, $E(y)=[0;\infty)$.

С–15

1. а) $3^{x^2+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+x}$; $3^{x^2+1}=3^{-1-x}$; $x^2+1=-1-x$; $x^2+x+2=0$, решений нет;

б) $4^x-3^{x+1/2}=3^{x+3/2}-7\cdot2^{2x-1}$; $2\cdot4^{x-1/2}+7\cdot4^{x-1/2}=3\cdot3^{x+1/2}+3^{x+1/2}$;
$9\cdot4^{x-1/2}=12\cdot3^{x-1/2}$; $\left(3/4\right)^{x-1/2}=3/4$; $x-1/2=1$; $x=1,5$.

2. а) $8,6^{\frac{x^2+3x-10}{x-3}}\le1$; $\dfrac{x^2+3x-10}{x-3}\le0$; $\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-3)}\le0$; $x\in(-\infty;-5]\cup[2;3)$;

б) $x^2\cdot3^x+9>x^2+9\cdot3^x$; $(x^2-9)(1-3^x)<0$; $(x-3)(x+3)(1-3^x)<0$; $x\in(-3;0)\cup(3;\infty)$.

С–16

1. а) $9^{x+1/2}+3/9^x+26=16\left(3^x+3^{-x}\right)$; $3(3^{2x}+2+3^{-2x})+20=16(3^x+3^{-x})$;
$3^x+3^{-x}=t$; $3t^2-16t+20=0$; $t_1=2$, $t_2=10/3$; $3^x=y$; $y+1/y=2$ и $y+1/y=10/3$;

y^2–$2y$+1=0 и $3y^2$–$10y$+3=0; y=1 и y=3 и $y = 1/3$; 3^x=1, 3^x=3 и $3^x = 1/3$; x_1=0, x_2=1, x_3=–1;

б) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$; $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x = y$, тогда $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x \cdot (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = (49-48)^x = 1$, так что $(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = \frac{1}{y}$;

$y + 1/y = 14$; y^2–$14y$+1=0; $y_1 = 7+\sqrt{48}$, $y_2 = 7-\sqrt{48}$; x_1=2, x_2=–2.

2. $2^{\mathrm{tg}x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\mathrm{ctg}x}$; $2^{\mathrm{tg}x} > 2^{\mathrm{ctg}x}$; tg$x$>ctg$x$; ctg$x$–tg$x$<0; 2ctg2$x$<0; ctg2$x$<0;

$x \in \left(\pi/4 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n\right) \cup \left(-\pi/4 + \pi k; \pi k\right)$, n, k∈Z.

С–17

1. $\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{\lg(1000:125)}{\lg(10\cdot 3)} = \frac{3-\lg 125}{1+\lg 3} = \frac{3-3a}{1+b}$.

2. $\sqrt[3]{\log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)} + 1/2 \log_4^2 x^4 + 2^{-3\log_{0,5}\log_2 x}} =$

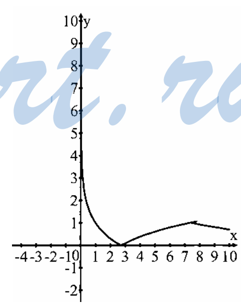
$= \sqrt[3]{1 + 2\log_2 x + \log_2 x\left(\log_2 x + 1\right) + 1/2\left(2\log_2 x\right)^2 + 2^{\log_2 \log^3 x}} =$

$= \sqrt[3]{1 + 2\log_2 x + \log_2^2 x + \log_2 x + 2\log_2^2 x + \log_2^3 x} = \sqrt[3]{\left(1+\log_2 x\right)^3}$ =1+$\log_2 x$.

3. $5^7 > 3^{10}$, поэтому $5 > 3^{\frac{10}{7}}$, так что $\log_3 5 > \frac{10}{7}$; $\frac{10}{7} > \sqrt{2}$, так как $\frac{100}{99} > 2$.

Так что $\log_3 5 > \sqrt{2}$.

С–18



1. $y = \left|\left|\ln x - 2\right| - 1\right|$; y=1–ln$x$ при $0 < x \le e$ y=ln$x$–1 при $e < x \le e^2$, y=3–ln$x$ при $e^2 < x \le e^3$ и y=ln$x$–3 при x>e^3.

2. lgtg1°·lgtg2°·…·lgtg88°·lgtg89=0, так как lgtg45°=lg1=0.

3. $y = \sqrt{\lg^2 x + 5\lg x + 4}$; $\lg^2 x$+5lg$x$+4≥0; lg$x$=t; t^2+5t+4≥0; t≤–4 и t≥–1; lg$x$≤–4 и lg$x$≥–1; D(y)=(0; 10^{-4}]∪[0,1; ∞).

С–19

1. а) $\log_x(x+6)$; $\begin{cases} x+6>0 \\ x>0,\ x\ne 1; \\ x+6=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0,\ x\ne 1, \\ x^2-x-6=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0,\ x\ne 1, \\ x=-2,\ x=3, \end{cases}$ x=3;

б) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$; $\log_x 5 = y$; $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y} = -y$;

$\begin{cases} -y \ge 0, \\ 1/2 + 1/2\, y \ge 0 \\ 1/2 + 1/2\, y = y^2 \end{cases}$; $\begin{cases} -1 \le y \le 0, \\ 2y^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -1 \le y \le 0, \\ y = 1, y = -1/2 \end{cases}$; $y = -1/2$.

2. а) lg(2x–1)+lg(2x–3)>lg(3x–3); lg((2x–1)(2x–3))>lg(3x–3);

$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-3>0, \\ 4x^2-8x+3>3x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1/2, \\ x > 3/2, \\ 4x^2-11x+6>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>1{,}5, \\ (x-2)(4x-3)>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>1{,}5, \\ x<3/4\; x>2 \end{cases}$; $x>2$

б) $2^{\sqrt{10-x}} - (x-9)\lg(x-9) < 0$; Область определения: x∈(9; 10], но при таких x (x–9)lg(x–9)< 0, поэтому $2^{\sqrt{10-x}} - (x-9)\lg(x-9) > 0$, так что решений нет.

С–20

1.а)

$0{,}5\lg(8-x) = \lg\left(1+\sqrt{x+5}\right)$; $\lg\sqrt{8-x} = \lg\left(1+\sqrt{x+5}\right)$; $\sqrt{8-x} = 1+\sqrt{x+5}$;

$\sqrt{8-x} - \sqrt{x+5} = 1$; $\begin{cases} 8-x \ge 0, \\ x+5 \ge 0, \\ 8-x-2\sqrt{(8-x)(5+x)}+x+5=1; \end{cases}$

$\begin{cases} -5 \le x \le 8, \\ \sqrt{(8-x)(5+x)} = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} -5 \le x \le 8 \\ 40+3x-x^2=36 \end{cases}$; $\begin{cases} -5 \le x \le 8, \\ x^2-3x-4=0, \end{cases}$ $x_1=-1,$ $x_2=4.$

Но x=4 – посторонний корень, т.к. $\sqrt{8-4}-\sqrt{4+5} = -1 \ne 1$. Так что x=–1.

б) $\left|1-\log_{\frac{1}{9}} x\right| + 1 = \left|2-\log_{\frac{1}{9}} x\right|$.

1) $\log_{\frac{1}{9}} x \le 1$, т.е. $x \ge \frac{1}{9}$: $1-\log_{\frac{1}{9}} x + 1 = 2 - \log_{\frac{1}{9}} x$ – верно при всех $x \ge \frac{1}{9}$;

2) $1 < \log_{\frac{1}{9}} x < 2$, то есть $\frac{1}{81} < x < \frac{1}{9}$: $\log_{\frac{1}{9}} x - 1 + 1 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{9}} x$;

$\log_{\frac{1}{9}} x = 1, x = \frac{1}{9}$, не входит в $\left(\frac{1}{81}; \frac{1}{9}\right)$;

3) $\log_{\frac{1}{9}} x \ge 2$, то есть $0 < x \le \frac{1}{81}$: $\log_{\frac{1}{9}} x - 1 + 1 = \log_{\frac{1}{9}} x - 2$ – неверно ни при каких $x \in \left(0; \frac{1}{81}\right]$. Значит решение $x \in \left[\frac{1}{9}; \infty\right)$.

2. а) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} > 1{,}5;\ \log_4^2 x + \frac{1}{2}\log_4 x > 1{,}5;\ \log_4 x = t;\ 2t^2 + t - 3 > 0$;

$(t-1)(2t+3)>0$; $t<-1{,}5$ и $t>1$; $\log_4 x<-1{,}5$ и $\log_4 x>1$; $0 < x < \frac{1}{8}$ и $x>4$;

б) $\log_x 2x \le \sqrt{\log_x\left(2x^3\right)};\ 1 + \log_x 2 \le \sqrt{\log_x 2 + 3};\ \log_x 2 = t;\ 1 + t \le \sqrt{t+3}$;

$\begin{cases} 1+t \ge 0, \\ t+3 \ge 0 \\ (1+t)^2 \le t+3 \end{cases}$; $\begin{cases} t \ge -1, \\ t \ge -3, \\ t^2 + t - 2 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} t \ge -1, \\ (t-1)(t+2) \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} t \ge -1, \\ -2 \le t \le 1 \end{cases}$; $-1 \le t \le 1$;

$-1 \le \log_x 2 \le 1$.

1) $0<x<1$: $\frac{1}{x} \ge 2 \ge x;\ 0 < x \le \frac{1}{2}$; 2) $x>1$: $\frac{1}{x} \le 2 \le x;\ x \ge 2$.

Решение: $x \in (0; \tfrac{1}{2}] \cup [2; \infty)$.

С–21

а) $\begin{cases} x^{y^2 - 15y + 56} = 1; \\ y - x = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ y^2 - 15y + 56 = 0; \\ x = y - 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ y_1 = 7, y_2 = 8, \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}\right) = 36, \\ \sqrt{y}\left(y\sqrt{y} - x\sqrt{x}\right) = 72 \end{cases}$; поделим второе уравнение на первое, получим: $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -2$;

б) $\begin{cases} x^2 - \sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{|x|}\left(|x|\sqrt{|x|} - y\sqrt{|y|}\right) = 36, \\ \sqrt{|y|}\left(|y|\sqrt{|y|} - x\sqrt{|x|}\right) = 72. \end{cases}$

1) если $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}\right) = 36, \\ \sqrt{y}\left(y\sqrt{y} - x\sqrt{x}\right) = 72 \end{cases}$; так что $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{2}$, чего не может быть, так как $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \ge 0$;

2) если $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \sqrt{-x}\left(-x\sqrt{-x}-y\sqrt{-y}\right)=36; \\ \sqrt{-y}\left(-y\sqrt{-y}-x\sqrt{-x}\right)=72 \end{cases}$ $\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}=\dfrac{1}{2}$, так что $\sqrt{-y}=2\sqrt{-x}$; $y=4x$; $x^2-4x\sqrt{x4x}=36$; $x^2+8x^2=36$; $x^2=4$; $x=-2$; $y=-8$.

3) Случай $x=0$ или $y=0$ не являются решениями. Так что решение: $(-2; -8)$

С–22

1. а) не обратима, так как $y(-1)=y(1)=2$;

б) так как функция непрерывна и $y(0)>0$, а $y(1)<0$, а $y(10)>0$, то существуют $x_1\in(0;\ 1)$ и $x_2\in(1;\ 10)$, такие что $y(x_1)=y(x_2)=0$. Так что функция необратима;

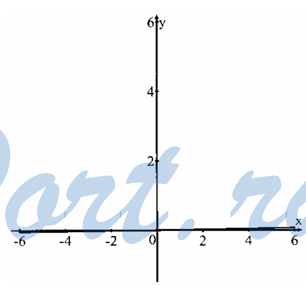
в) функция возрастает на всей прямой, так как $y'=3x^2+7>0$, так что принимает разные значения в разных точках, так что обратима;

г) функция обратима, так как $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$ при всех x, значит функция возрастает.

С–23

1. $f'(x)=(x)'\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-x}+x\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-x}\right)'=\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-x}-x(2x-1)\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-x}=$

$=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^2-x}\left(1-2x^2+x\right)$, $f'(x)=0$ при $x=1$ и $x=-\dfrac{1}{2}$; $f'(x)>0$ при $-\dfrac{1}{2}<x<1$, $f'(x)<0$ при $x<-\frac{1}{2}$ и $x>1$. Так что $x_{\min}=-\frac{1}{2}$, $x_{\max}=1$.



2. $y=10^{\lg(x+1(-2}$; $y=\dfrac{1}{100}|x+1|$, при $x\neq-1$.

3. Сравним $\dfrac{\ln e}{e}$ и $\dfrac{\ln\pi}{\pi}$. Так как для $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, то и $f'(x)<0$ при $x>e$. Так что убывает на $[e;\ \infty)$. То есть $f(\pi)<f(e)$, $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln e}{e}$; $e\ln\pi<\pi\ln e$, $\ln\pi^e<\ln e^\pi$, так что $\pi^e<e^\pi$.

4. $f(x)=(3x^2+1)\cdot 4^{x^3+x}$; $(4^{x^3+x})'=(3x^2+x)\cdot\ln 4\cdot 4^{x^3+x}$, так что $F(x)=\dfrac{4^{x^3+x}}{\ln 4}+C$ – первообразная.

С–24

1. а) $f'(x) = (\log_2^2(x^2 - \sin x))' = 2\log_2(x^2 - \sin x)\cdot(\log_2(x^2 - \sin))' =$

$$= \frac{2\log_2(x^2 - \sin x)}{(x^2 - \sin x)\ln 2}\cdot(x^2 - \sin x) = \frac{(2x - \cos x)\cdot 2\log_2(x^2 - \sin x)}{(x^2 - \sin x)\ln 2};$$

б) $f'(x) = \left(\ln\cos {}^{x}\!/\!_{2}\right)' = \frac{1}{\cos {}^{x}\!/\!_{2}}\cdot\left(\cos {}^{x}\!/\!_{2}\right)' = -\frac{\sin {}^{x}\!/\!_{2}}{2\cos {}^{x}\!/\!_{2}} = -\frac{1}{2} tg\, {}^{x}\!/\!_{2}$.

2. $\int\limits_2^3 \frac{3x^2}{x^3 - 1}dx = \left(\ln\left(x^3 - 1\right)\right)\Big|_2^3 = \ln 26 - \ln 7 = \ln\frac{26}{7}$.

3. $y' = (1{,}5\lg^2 x)' + (\lg^3 x)' = 3\ln x\cdot {}^{1}\!/\!_{x} + 3\lg^2 x\cdot {}^{1}\!/\!_{x} = \frac{3\ln x}{x}(1 + \lg x)$; $y'=0$ при $x=1$ и $x={}^{1}\!/\!_{10}$; $y'>0$ при $0 < x < {}^{1}\!/\!_{10}$ и $x>1$; $y'<0$ при ${}^{1}\!/\!_{10} < x < 1$, так что y возрастает на $\left(0;\ {}^{1}\!/\!_{10}\right]\cup[1;\infty)$ и убывает на $\left[{}^{1}\!/\!_{10}; 1\right]$.

С–25

1. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{2x} = e^{2x\ln\sqrt{x}} = e^{x\ln x}$; $y'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.

2. $\sqrt[5]{32{,}20} - \sqrt[4]{15{,}88} \approx 0{,}006$.

3. $y'(x) = (x^2 - 4x + 4)'x^{\sqrt{3}} + (x^2 - 4x + 4)(x^{\sqrt{3}})' = 2(x-2)x^{\sqrt{3}} + (x-2)^2\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} =$ $= (x-2)x^{\sqrt{3}-1}\left(2x + \sqrt{3}(x-2)\right)$; $y'(x) = 0$ при $x=0$, $x=2$ и $x=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} - 6$; $y'(x)>0$ при $0<x<2$ и $x > 4\sqrt{3} - 6$; $y'(x)<0$ при $2<x<4\sqrt{3}-6$. Так что y – возрастает на $[0;\ 2]\cup$ $\cup\ [4\sqrt{3}-6;\ \infty)$ и убывает на $[2;\ 4\sqrt{3}-6]$.

С–26

1. Пусть через t часов останется 0,5 кг, тогда: ${}^{4}\!/\!_{2^{t/2,5}} = 0{,}5$; $2^{\frac{t}{2,5}} = 8$; $\frac{t}{2{,}5} = 3$; $t = 7{,}5$ ч.

2. $2yy'=y^2$; $(y^2)'=y^2$; так что $y^2 = C_1e^x$; $y = Ce^{\frac{x}{2}}$ (где $C = \sqrt{C_1}$).

3. $y''=-3y$. Общее решение $y=$arccos$\left(\sqrt{3}x\right) + b\sin\left(\sqrt{3}x\right)$. Так как $y(0)=-2$, то $a=-2$, а $y'(0)=-6$, то есть $\sqrt{3}b = -6$ $b = -2\sqrt{3}$. Так что y=–2cos($\sqrt{3}$ x)–2$\sqrt{3}$ sm($\sqrt{3}$ x)=4($-\frac{1}{2}$ cos($\sqrt{3}$ x)–$\frac{\sqrt{3}}{2}$ sm($\sqrt{3}$ x))–4cos($\sqrt{3}$ x+$\frac{2\pi}{3}\lim\limits_{x\to\infty}$).

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

ПС–1

1. $$\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}+\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=\frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)^2+\left(7+4\sqrt{3}\right)^2}{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}=$$
$$=\frac{49-56\sqrt{3}+48+49+56\sqrt{3}+48}{49-48}=194\,.$$

2. Пусть рабочий изготовил x деталей, тогда по плану он должен был изготовить $0{,}8x$ деталей, следовательно, рабочий перевыполнил план на $\frac{x-0{,}8x}{0{,}8x}\cdot 100\% = 25\%$. Ответ: на 25%.

ПС–2

1. Пусть путь равен S км, тогда поезд тратил $S/70$ ч на этот путь до увеличения скорости, а стал тратить $S/85$ ч после увеличения скорости, следовательно, время, затрачиваемое поездом на один и тот же путь, уменьшилось на $\dfrac{\frac{S}{70}-\frac{S}{85}}{S/70}\cdot 100\% = \frac{15}{85}\cdot 100\% \approx 17{,}65\%$

Ответ: $\approx 17{,}65\%$.

2. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, у параллельных прямых коэффициенты k при x совпадают, значит, искомая прямая имеет вид $y = 2x + b$. Подставим точку $M(5;\,1)$ в это уравнение. $1 = 2\cdot 5 + b$, $b = -9$, следовательно, искомая прямая: $y = 2x - 9$.

ПС–3

1. $$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}-\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}=$$
$$=\frac{(a-2)(a+2)-c^2(a-2)}{(a-c^2)(a+c^2)+2(a+c^2)}-\frac{(a-2)^2}{a(a+c^2)-2(a+c^2)}=$$
$$=\frac{(a-2)(a+2-c^2)}{(a+c^2)(a+2-c^2)}-\frac{(a-2)^2}{(a-2)(a+c^2)}=\frac{a-2-a+2}{a+c^2}=0$$

2. $\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$; $\begin{cases}x(x+3)+4(x-3)-18=0\\ x\neq\pm 3\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+7x-30=0\\ x\neq\pm 3\end{cases}$;

$D = 49+120=13^2$; $x_{1,2}=\frac{-7\pm 13}{2}$; $x_1 = 3$ — посторонний корень; $x_2 = -10$.

Ответ: $x = -10$.

ПС–4

1. Найдем точки пересечения данной параболы $y = 2x^2 - 3x + 1$ с осью абсцисс, для чего решим уравнение: $2x^2 - 3x + 1 = 0$; $D = 9 - 8 = 1$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$; $x_1 = 1$ и $x_2 = 0,5$. Поскольку коэффициенты при x^2 в уравнении данной параболы положительны, то ветви параболы направлены вверх и $y \geq 0$ при $x \in (-\infty; 0,5] \cup [1; +\infty)$, а $y < 0$ при $x \in (0,5; 1)$.

2. $x^2 - 7x + 10 = 0$; $D = 49 - 40 = 3^2$; $x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2}$; $x_1 = 5$ и $x_2 = 2$, значит, $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$.

3. $(x+ 0,2)(x + 5)=0$; $x^2 + 5x + 0,2x + 1=0$; $x^2 + 5,2x + 1=0$; $5x^2 + 26x + 5=0$.

ПС–5

1. $a_n=a_1 + (n - 1)d=3,4 + (n - 1) \cdot 0,9=2,5 + 0,9n$; $S_{15} = \frac{2a_1 + (15-1)d}{2} \cdot 15 = \frac{6,8 + 12,6}{2} \cdot 15 = 145,5$.

2. $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{3,5}{1 + \frac{2}{3}} = 2,1$.

3. Пусть $x = 23,(45)$, тогда $100x = 2345,(45)$, следовательно, $100x - x = 2345,(45) - 23,(45)$; $99x = 2322$; $x = \frac{2322}{99}$, искомая дробь $2,3(45) = \frac{x}{10} = \frac{2322}{990} = 2\frac{19}{55}$.

ПС–6

1.а) $\frac{\cos(2\alpha)+1-\cos^2\alpha}{\cos(\pi/2 + 2\alpha)} = \frac{2\cos^2\alpha - 1 + 1 - \cos^2\alpha}{-\sin(2\alpha)} = -\frac{\cos^2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = -\frac{1}{2}\text{ctg}\alpha$

при $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$: $-\frac{1}{2}\text{ctg}\alpha = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$.

б) $-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\pi - \alpha)}{\cos^2(\pi - \alpha)\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{\cos\alpha \cdot (-\cos\alpha)}{\cos^2\alpha \cdot \left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} = -\text{tg}\alpha$.

2. а)
$$\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha} =$$
$$= \frac{2\sin 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1 + \cos 2\alpha)} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2\alpha}{1 + 2\cos^2\alpha - 1} = \text{tg}^2\alpha;$$

б) $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

ПС–7

1. а) $\cos 5x = \cos 3x$; $\cos 5x - \cos 3x = 0$; $-2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}=0$; $\sin 4x \cdot \sin x = 0$; $\sin 4x = 0$; $4x = \pi n$; $x=\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$ или $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$, объединяя эти решения, получим, что $x=\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}^2x - 3\mathrm{tg}x + 2 = 0$; пусть $\mathrm{tg}x = t$, тогда $t^2 - 3t + 2 = 0$; $D = 9 - 8 = 1$; $t_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}$; $t_1 = 2$, то есть $\mathrm{tg}x = 2$, $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n$, $n \in Z$ или $t_2 = 1$, то есть $\mathrm{tg}x = 1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; $\mathrm{arctg}2 + \pi n$, $n \in Z$.

2. а) $\sin 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$. Ответ: $x \in (-\pi/6+\pi n;\ 2\pi/3+\pi n)$, $n \in Z$.

б) $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>1$; $\frac{\pi}{4}+\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x \in (\pi/2+\pi n;\ 3\pi/4+\pi n)$, $n \in Z$.

ПС–8

1.а) Функция $f(x)=\sqrt{5-x}+\log_2 x$ определена при: $\begin{cases}5-x\ge0\\x>0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le5\\x>0\end{cases}$, т.е. при $x \in (0; 5]$;

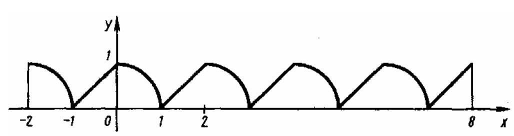
б) функция $y=\sqrt{\sin x}$ определена при $\sin x \ge 0$, т.е. при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

2. а) $f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -f(x)$ — нечетная;

б) $f(-x) = \cos(-x) + \cos(-2x) = \cos x + \cos 2x = f(x)$ — четная;

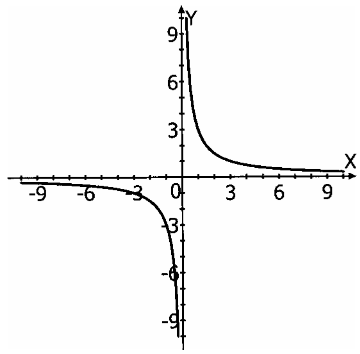
в) $f(-x) = \mathrm{tg}(-x - 1) \ne \pm f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

3. См. график.



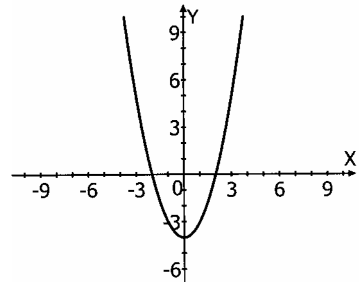
ПС–9

а)



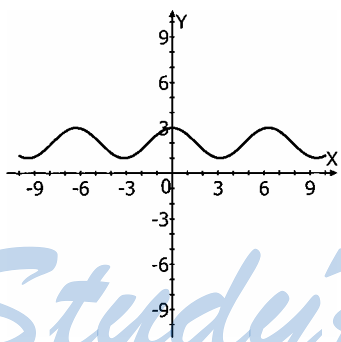
$f(x) = \frac{3}{x}$; $D(x) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; функция убывает всюду на $D(x)$, экстремумы отсутствуют.

б)



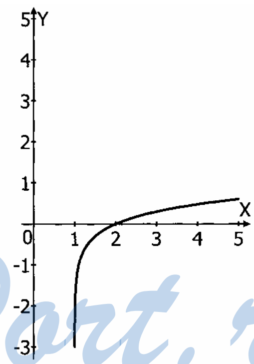
$f(x) = x^2 - 4$; $D(x) = (-\infty;\ +\infty)$; $E(y) = [-4;\ +\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty;\ 0]$, возрастает при $x \in [0;\ +\infty)$; минимум $x = 0$; $y(0) = -4$.

в)



$f(x) = \cos x + 2$; $D(x) = (-\infty;\ +\infty)$; $E(y) = [1;\ 3]$; $f(x)$ убывает при $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$; $f(x)$ возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k)$; $k \in Z$; минимумы $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; $f(\pi + 2\pi n) = 1$; максимумы $x = 2\pi k$, $k \in Z$; $f(2\pi k) = 3$;

г)



$f(x) = \lg(x - 1)$; $D(x) = (1;\ +\infty)$; $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$; $f(x)$ возрастает всюду на $D(x)$; экстремумов нет.

ПС–10

1. а) $y' = (3x^3 + 2x^{\sqrt{2}} - 1)' = 9x^2 + 2\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$;

б) $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$;

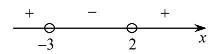
в) $y' = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$.

2. $f'(x) = ((x^2-1)^{102})' = 102 \cdot 2x(x^2-1)^{101} = 204x(x^2-1)^{101}$.

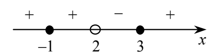
3. $f'(x) = (2\sin 2x + 3\cos 2x)' = 4\cos 2x - 6\sin 2x$; $f''(x) = (4\cos 2x - 6\sin 2x)' = -8\sin 2x - 12\cos 2x = -4(2\sin 2x + 3\cos 2x) = -4f(x)$, значит данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' = -4y$.

ПС–11

1. а) $x^2 + x - 6 > 0$; $(x-2)(x+3) > 0$;
$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$;

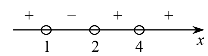


б) $\frac{(x-3)(x+1)^2}{x-2} \le 0$;



$x \in \{-1\} \cup (2; 3]$;

в) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8} > 0$; $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x-2)} > 0$;



$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

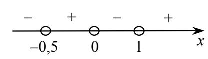
2. $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; $f'(x_0) = (x^3 - 3x + 5)' = 3x^2 - 3$, значит, $y_{кас} = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 + (3 \cdot 2^2 - 3)(x - 2) = 8 - 6 + 5 + 9x - 18 = 9x - 11$.

3. Скорость $V(t) = (x(t))' = \left(3t^3 - {}^9\!/_t\right)' = 9t^2 + {}^9\!/_{t^2}$, при $t = 3$ получаем, что $V(3) = (9 \cdot 3^2 + {}^9\!/_{3^2}$)м/с= (81 + 1)м/с = 82 м/с.

ПС–12

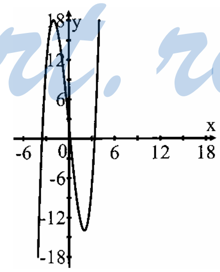
1. $f'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1$; $g'(x) = (\ln x)' = {}^1\!/_x$; $2x - 1 > {}^1\!/_x$;

$\frac{2x^2-x-1}{x} > 0$; $\frac{(x+0{,}5)(x-1)}{x} > 0$;



$x \in (-0{,}5; 0) \cup (1; \infty)$, однако, функция $g(x) = \ln x$ имеет $D(x) = (0; +\infty)$, следовательно, $x \in (1; \infty)$.

2. $f(x) = x^3 - 12x + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f'(x) = 0$ при $x^2 = 4$; $x = \pm 2$;



x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	18	↘	–14	↗
		max		min	

ПС–13

1. $f'(x)=(x^3-3x+7)'=3x^2-3$; $f'(x)=0$ при $x^2=1$; $x=\pm1$; $f(-3)=-27+9+7=-11$; $f(-1)=-1+3+7=9$; $f(1)=1-3+7=5$, значит, $\min\limits_{[-3;1]} f = f(-3) = -11$; $\max\limits_{[-3;1]} f = f(-1) = 9$.

2. Объем воронки $V=\frac{1}{3}\pi H(l^2-H^2)$, где l — образующая, H — высота воронки, $V'(H) = \left(\frac{1}{3}\pi H\left(l^2-H^2\right)\right)' = \frac{1}{3}\pi\left(l^2-H^2-2H^2\right)=\frac{1}{3}\pi\left(l^2-3H^2\right)$; $V'(H)=0$ при $l^2=3H^2$; $H=\pm\frac{l}{\sqrt{3}}$, но $H>0$, значит, $H=\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{15}{\sqrt{3}}$ см.

ПС–14

1. а) $\int f(x)dx=\int(x^2+3\sin x)dx=\frac{x^3}{3}-3\cos x+C$;

б) $\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos(3x-1)\right)dx=\text{tg}-\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$.

2. а) $\int\limits_{-2}^{1}(4x^3+6x)dx=(x^4+3x^2)\Big|_{-2}^{1}=1+3-(16+12)=-24$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{1}{2}$.

3. $S=\int\limits_{0}^{3}(-x^2+4x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_{0}^{3}=-\frac{27}{3}+2\cdot 9=-9+18=9$.

ПС–15

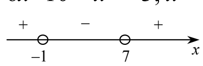
1. $25^{\frac{1}{2}\log_5 12}+7^{2\log_7 2}=5^{2\cdot\frac{1}{2}\log_5 12}+7^{\log_7 2^2}=12+4=16$.

2. а) $\log_2(2x-3)=\log_2(3x-5)$; $2x-3=3x-5$; $x=2$;

б) $3^{2x-4}=\left(1/3\right)^{2-x}$; $3^{2x-4}=3^{-(2-x)}$; $2x-4=-2+x$; $x=2$.

3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\frac{27}{64}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\left(\frac{3}{4}\right)^3$;

$6x+10-x^2>3$; $x^2-6x-7<0$; $(x+1)(x-7)<0$;



$x\in(-1;7)$.

ПС–16

1. а) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$; $3^x = t$, тогда: $3t^2 - 10t + 3 = 0$; $D = 100 - 36 = 8^2$;

$t_{1,2} = \dfrac{10 \pm 8}{6}$; $t_1 = 3$; $3^x = 3$; $x = 1$, или: $t_2 = \dfrac{1}{3}$; $3^x =$; $3^x = 3^{-1}$; $x = -1$.

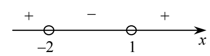
Ответ: ±1.

б) $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+1} = 2$; $\sqrt{x+13} = 2 + \sqrt{x+1}$;

$\begin{cases} x+13 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ x+13 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -1 \\ 2 = \sqrt{x+1} \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -1 \\ 4 = x+1 \end{cases}$; $x = 3$.

2. $\lg(x^2 + x + 8) < 1$;

$\begin{cases} x^2 + x + 8 > 0, \\ \lg(x^2 + x + 8) < \lg 10; \end{cases}$ т.к. $x^2 + x + 8 > 0$ при лю-



бом x, то $x^2 + x + 8 < 10$; $x^2 + x - 2 < 0$; $(x - 1)(x + 2) < 0$; $x \in (-2; 1)$.

3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \log_2(xy) = \log_2 2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2/x \\ x^3 + 8/x^3 - 9 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2/x \\ x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$;

$x^3 = t$; $t^2 - 9t + 8 = 0$; $D = 81 - 32 = 7^2$; $t_{1,2} = \dfrac{9 \pm 7}{2}$; $t_1 = 8$ или $t_2 = 1$;

$\begin{cases} x^3 = 8 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$ или $\begin{cases} x^3 = 1 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ответ: (2; 1); (1; 2).

ПС–17

1. $y' = \left(e^{3x} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}\right)' = 3e^{3x} - 2\ln\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}$.

2. $\int f(x)dx = \int\left(e^{2x} - 3^x\right)dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{\ln 3}3^x + C$.

3. $f'(x) = (2^{x-3})' = \ln 2 \cdot 2^{x-3}$; $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 2 + 2\ln 2(x - 4)$.

ПС–18

1. а) $y' = (\ln(3x - 1))' = \dfrac{3}{3x-1}$;

б) $y' = \left((x+1)x^{\sqrt{3}}\right)' = x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}(x+1)x^{\sqrt{3}-1}$.

2. а) $\int f(x)dx = \int \frac{1}{3x+1}dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3x+1)} d(3x+1) = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$;

б) $\int f(x)dx = \int (2x+7)^{\sqrt{5}}dx = \int \frac{1}{2} \cdot (2x+7)^{\sqrt{5}} d(2x+7) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+7)^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} + C$.

3. $f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2 = f(x) \ln 2$, значит, функция $f(x) = 2^x$ является решением дифференциального уравнения $y' = y \ln 2$.

Вариант 2

ПС–1

1. $$\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} + \frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}} = \frac{\left(9-4\sqrt{5}\right)^2 + \left(9+4\sqrt{5}\right)^2}{\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{81 - 72\sqrt{5} + 80 + 81 + 72\sqrt{5} + 80}{81-80} = 322.$$

2. Пусть рабочий изготовил x деталей, тогда по плану он должен был изготовить $0{,}6x$ деталей, следовательно, рабочий перевыполнил план на $\frac{x-0{,}6x}{0{,}6x} \cdot 100\% = \frac{2}{3} \cdot 100\% = 66\frac{2}{3}\%$.

ПС–2

1. Пусть путь равен S км, тогда поезд тратил $S/75$ ч на этот путь до увеличения скорости, а стал тратить $S/80$ ч после увеличения скорости, следовательно, время затрачиваемое поездом на один и тот же путь уменьшилось на $\frac{S/75 - S/80}{S/75} \cdot 100\% = \frac{5}{80} \cdot 100\% = 6{,}25\%$

2. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, у параллельных прямых коэффициент k при x совпадают, значит, искомая прямая имеет вид $y = b - 0{,}5x$. Подставим точку $M(-1; 3)$ в это уравнение: $3=b+0{,}5$; $b=2{,}5$, следовательно, искомая прямая $y = 2{,}5 - 0{,}5x$.

ПС–3

1. $$\frac{a^4-b^4}{4a^2-2a+b-b^2} : \frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{2a-b} =$$

$$= \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(2a-b)(2a+b)-(2a-b)} \cdot \frac{2a-b}{a^2(a-b)+b^2(a-b)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b-1)(a^2+b^2)(a-b)} = \frac{a+b}{2a+b-1}.$$

2. $\frac{5}{3-x}+\frac{x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$; $\frac{5}{3-x}+\frac{x}{x+3}+\frac{18}{(3-x)(3+x)}=0$;

$5(x+3)+x(3-x)+18=0$; $x^2-8x-33=0$; $D=64+132=14^2$; $x_{1,2}=\frac{8\pm 14}{2}$;

$x_1=11$ или $x_2=-3$, но при $x_2=-3$ знаменатель исходного уравнения обращается в ноль, значит, $x=11$. Ответ: 11.

ПС–4

1. Найдем точки пересечения данной параболы $y=3x^2+2x+1$ с осью абсцисс, для этого решим уравнение $3x^2+2x+1=0$; $D=4-12=-8<0$, значит, данная парабола не имеет точек пересечения с осью абсцисс. Поскольку коэффициент при x^2 в уравнении данной параболы равен $3>0$, то ветви параболы направлены вверх и $y>0$ при всех действительных x, $y\le 0$ при $x\in\varphi$.

2. $x^2+9x+18=0$; $D=81-72=3^2$; $x_{1,2}=\frac{-9\pm 3}{2}$; $x_1=-3$ или $x_2=-6$, значит, $x^2+9x+18=(x+3)(x+6)$.

3. $\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)=0$; $x^2+\frac{1}{3}x+3x+1=0$; $3x^2+10x+3=0$.

ПС–5

1. $a_n=a_1+(n-1)d=5{,}7+(n-1)\cdot 0{,}8=4{,}9+0{,}8n$; $S_{20}=\frac{2a_1+(20-1)d}{2}\cdot 20=$

$=\frac{11{,}4+16-0{,}8}{2}\cdot 20=266$.

2. $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{-4{,}5}{1+0{,}75}=-2\frac{4}{7}$.

3. Пусть $x=14,(54)$, тогда $100x=1454,(54)\Rightarrow 100x-x=1454,(54)-14,(54)$; $99x=1440$; $x=\frac{1440}{990}$, искомая дробь $1,4(54)=\frac{x}{10}=\frac{1440}{990}=1\frac{5}{11}$.

ПС–6

1. а) $$\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha+1+1}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{2(\cos\alpha+1)}=\sin\alpha\text{; при }\alpha=-\frac{5\pi}{4},\ \sin\alpha=\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

б) $$-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

2. а) $\dfrac{\sin 2\alpha + \mathrm{tg} 2\alpha}{\mathrm{tg} 2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\mathrm{tg} 2\alpha} + 1 = \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha - 1 + 1 = 2\cos^2\alpha$;

б) $$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha\cdot\sin\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

ПС–7

1. а) $\sin 7x = \sin 3x$; $\sin 7x - \sin 3x = 0$; $2\sin\dfrac{7x-3x}{2}\cos\dfrac{7x+3x}{2} = 0$; $\sin 2x \cos 5x = 0$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n$; $x = {}^{\pi n}\!/_{2}$, $n \in Z$ или $\cos 5x = 0$; $5x = {}^{\pi}\!/_{2} + \pi k$; $x = {}^{\pi}\!/_{10} + {}^{\pi k}\!/_{5}$, $k \in Z$. Ответ: ${}^{\pi n}\!/_{2}$; ${}^{\pi}\!/_{10} + {}^{\pi k}\!/_{5}$, $n \in Z$.

б) $\mathrm{tg}x + 3\mathrm{ctg}x = 4$; $\mathrm{tg}x = t$, тогда $t + {}^{3}\!/_{t} - 4 = 0$; $t^2 - 4t + 3 = 0$; $D = 16 - 12 = 2^2$; $t_{1,2} = \dfrac{4\pm 2}{2}$; $t_1 = 3$, $\mathrm{tg}x = 3$; $x = \mathrm{arctg}3 + \pi n$, $n \in Z$ или $t_2 = 1$, $\mathrm{tg}x = 1$; $x = {}^{\pi}\!/_{4} + \pi k$, $k \in Z$. Ответ: $\mathrm{arctg}\,3 + \pi n$; ${}^{\pi}\!/_{4} + \pi n$, $n \in Z$.

2. а) $\cos 2x > \dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\dfrac{\pi}{6} + \pi n < x < \dfrac{\pi}{6} + \pi n$; $x \in (-{}^{\pi}\!/_{6} + \pi n;\ {}^{\pi}\!/_{6} + \pi n)$, $n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x + \dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{\pi}{6} + \pi k$; $-\dfrac{5\pi}{6} + \pi k < x \le -\dfrac{\pi}{6} + \pi k$; $x \in (-{}^{5\pi}\!/_{6} + \pi k;\ -{}^{\pi}\!/_{6} + \pi k)$, $k \in Z$.

ПС–8

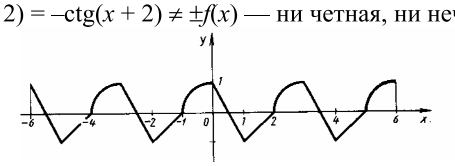
1.а) функция $y = \sqrt{3-x} + \log_{0,5}x$ определена при: $\begin{cases} 3 - x \ge 0 \\ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 3 \\ x > 0 \end{cases}$, т.е. при $x \in (0; 3]$; б) функция $y = \sqrt{\cos x}$ определена при $\cos x \ge 0$, т.е. при: $x \in [-{}^{\pi}\!/_{2} + 2\pi n;\ {}^{\pi}\!/_{2} + 2\pi n]$, $n \in Z$.

2. а) $f(-x) = 3(-x)^7 - (-x)^3 = -3x^7 + x^3 = -f(x)$ — нечетная;

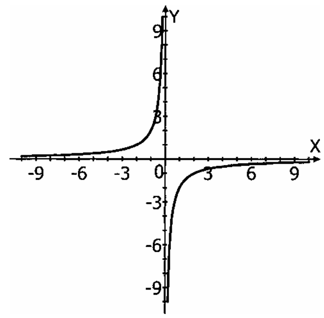
б) $f(-x) = -x\mathrm{ctg}(-x) + x^4 = x\mathrm{ctg}x + x^4 = f(x)$ — четная;

в) $f(-x) = \mathrm{ctg}(-x-2) = -\mathrm{ctg}(x+2) \ne \pm f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

3.



ПС–9



а) $f(x) = -2/x$;

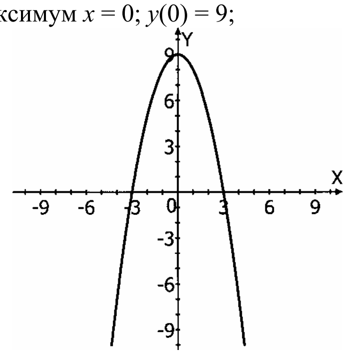
$D(x) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; функция возрастает всюду на $D(x)$, экстремумы отсутствуют;

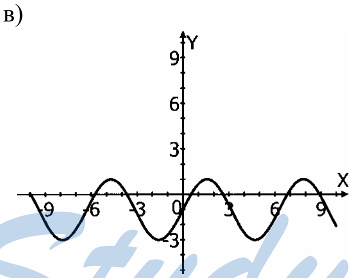
б) $f(x) = 9 - x^2$;

$D(x) = (-\infty;\ +\infty)$; $E(y) = (-\infty;\ 9]$;

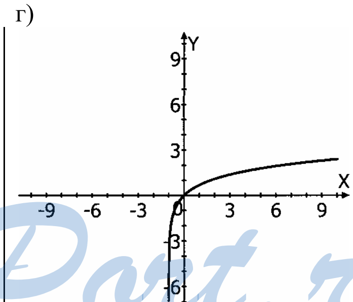
$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty;\ 0]$, убывает при $x \in [0;\ +\infty)$, максимум $x = 0$; $y(0) = 9$;



в)



г)



в) $f(x) = 2\sin x - 1$; $D(x) = (-\infty;\ +\infty)$; $E(y) = [-3;\ 1]$; $f(x)$ убывает при $x \in \left(\pi/2 + 2\pi n;\ 3\pi/2 + 2\pi n\right)$, $k \in Z$; $f(x)$ возрастает при $x \in \left(-\pi/2 + 2\pi k;\right.$ $\left.\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; минимумы $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $f\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -3$,

максимумы $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $f\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$;

г) $f(x) = \ln(x + 1)$; $D(x) = (-1;\ +\infty)$; $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$; $f(x)$ возрастает всюду на $D(x)$; экстремумов нет.

ПС–10

1. а) $y' = (2x^4 - 3x^{\sqrt{3}} + 12)' = 8x^3 - 3\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$;

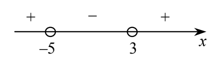
б) $y' = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$;

в) $y' = \left(\frac{3x+1}{x-2}\right)' = \frac{3(x-2)-3x-1}{(x-2)^2} = -\frac{7}{(x-2)^2}$.

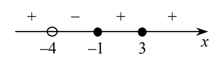
2. $f'(x)=((x^3+1{,}5x^2)^{68})' = 68(3x^2 + 3x)(x^3 + 1{,}5x^2)^{67} = 204(x^2 + x)(x^3+1{,}5x^2)^{67}$.

3. $f'(x)=(3\cos 3x - 2\sin 3x)' = -9\sin 3x - 6\cos 3x$; $f''(x)=(-9\sin 3x - 6\cos 3x)' = -27\cos 3x + 18\sin 3x = -9f(x)$, значит, данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' = -9y$.

ПС–11

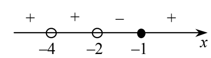


1. а) $x^2 + 2x - 15 < 0$; $(x - 3)(x + 5) < 0$;
$x \in (-5; 3)$;



б) $\frac{(x+1)(x-3)^2}{x+4} \geq 0$

$x \in (-\infty; -4) \cup [-1; +\infty)$;



в) $\frac{x^2+5x+4}{x^2+6x+8} \leq 8$; $\frac{(x+1)(x+4)}{(x+2)(x+4)} \leq 0$;

$x \in (-2; -1]$.

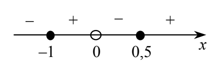
2. $f'(x)=\left(x^3 - \frac{1}{3}x - 1\right)' = 3x^2 - \frac{1}{3}$; $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 27 - 1 - 1 + \left(27 - \frac{1}{3}\right)(x - 3) = 26\frac{2}{3}x - 55$.

3. Скорость $V(t) = (x(t))' = \left(4t^4 - \frac{8}{t}\right)' = 16t^3 + \frac{8}{t^2}$, при $t = 2$ получаем, что $V(2) = (16 \cdot 2^3 + \frac{8}{2^2})$м/с$= (16 \cdot 8 + 2)$м/с $= 130$ м/с.

ПС–12

1. $f'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$; $g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; $2x + 1 \leq \frac{1}{x}$; $\frac{2x^2+x-1}{x} \leq 0$;

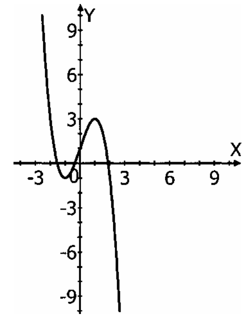
$\frac{(x+1)(x-0{,}5)}{x} \leq 0$; $x \in (-\infty; -1] \cup (0; 0{,}5]$, однако, функция $g(x) = \ln x$ имеет $D(x) = (0; +\infty)$, следовательно, $x \in (0; 0{,}5]$.



2. $f'(x) = (-x^3 + 3x + 1)' = -3x^2 + 3$; $f'(x) = 0$ при $-3x^2 + 3 = 0$; $x = \pm 1$;

x	$(-\infty; -1)$	-1
$f'(x)$	$-$	0
$f(x)$	$\searrow$	-1
		min

x	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$
		max	



ПС–13

1. $f'(x) = (3x^3 - x + 1)' = 9x^2 - 1$; $f'(x) = 0$ при $9x^2 - 1 = 0$; $x^2 = \frac{1}{9}$; $x = \pm\frac{1}{3}$;

$f(-2) = -3 \cdot 8 + 2 + 1 = -21$; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 = 1\frac{2}{9}$;

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{9}$; $f(3) = 3 \cdot 27 - 3 + 1 = 79$, следовательно:

$\min\limits_{[-2;3]} f(x) = f(-2) = -21$; $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = f(3) = 79$.

2. Объем воронки $V(R) = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2}$, где R — радиус основания воронки, а l — ее образующая. $V'(R) = \left(\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2}\right)' =$

$= \frac{1}{3}\pi\left(2R\sqrt{l^2 - R^2} - \frac{R^3}{\sqrt{l^2 - R^2}}\right)$. $V'(R) = 0$, при $2R(l^2 - R^2) - R^3 = 0$;

$R(2l^2 - 3R^2) = 0$; $R = 0$ — посторонний корень, т.к. радиус основания воронки — величина положительная, значит, $2l^2 - 3R^2 = 0$; $R = \pm l\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$R = -l\sqrt{\frac{2}{3}}$ — посторонний корень, значит, $R = l\sqrt{\frac{2}{3}} = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$ см.

ПС–14

1. а) $\int f(x)dx = \int (x^3 - 2\cos x)dx = \int x^3 dx - 2\int \cos x dx = \frac{1}{4}x^4 - 2\sin x + C$;

б) $\int f(x)dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{1}{3}\int\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)d\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\mathrm{ctg}x + \frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + C$;

2.а) $\int\limits_{-1}^{2}(5x^4+6x^2)dx=(x^5+2x^3)\Big|_{-1}^{2}=2^5+2\cdot2^3-(-1)^5-2(-1)^3=32+16+1+2=51;$

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x dx=\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{3}.$

3. $S=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\sin x dx=-\cos x\Big|_{0}^{\frac{3\pi}{4}}=-\cos\frac{3\pi}{4}+\cos 0=\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$

ПС–15

1. $9^{\log_3 6}:2^{\frac{1}{2}\log_2 16}=3^{2\log_3 6}:2^{\log_2 16^{\frac{1}{2}}}=3^{\log_3 6^2}:16^{\frac{1}{2}}=6^2:4=36:4=9.$

2. а) $\lg(2x-3)=\lg(3x-2)$;

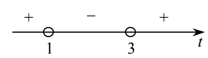
$\begin{cases}2x-3>0\\3x-2>0\\2x-3=3x-2\end{cases}$; $\begin{cases}x>1,5\\x>\frac{2}{3}\\x=-1\end{cases}$ — данная система не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

б) $(0,2)^{3x-4}=5^{2-5x}$; $(0,2)^{3x-4}=(0,2)^{-(2-5x)}$; $3x-4=-2+5x$; $2x=-2$; $x=-1$.

3. $\log_2^2x-2\log_2x^2>-3$; $\log_2^2x-4\log_2x+3>0$; $\log_2x=t$, тогда $t^2-4t+3>0$;

$(t-1)(t-3)>0$; $t\in(-\infty;1)\cup(3;\infty)$;



если $t=1$, то $\log_2x=1$; $\log_2x=\log_2 2$; $x=2$,

если $t=3$, то $\log_2x=3$; $\log_2x=3\log_2 2$;

$\log_2x=\log_2 8$; $x=8$, значит, $x\in(0;2)\cup(8;\infty)$.

ПС–16

1. а) $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$; $2^x=t$, тогда $2t^2-5t+2=0$; $D=25-16=3^2$;

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}$; $t_1=2$; $2^x=2$; $x=1$ или $t_2=\frac{1}{2}$; $2^x=\frac{1}{2}$; $2^x=2^{-1}$; $x=-1$. Ответ: ±1.

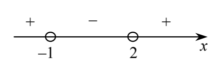
б) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$; $\sqrt{x+17}=2+\sqrt{x+1}$;

$\begin{cases}x+17\ge0\\x+1\ge0\\x+17=4+4\sqrt{x+1}+x+1\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge-1\\3=\sqrt{x+1}\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge-1\\x+1=9\end{cases}$; $x=8$.

Ответ: $x=8$.

2. $\lg(x^2-x+8)>1$;

$\begin{cases}x^2-x+8>0\\\lg(x^2-x+8)>\lg10\end{cases}$;



$x^2-x+8>0$ при любом значении x; $x^2-x+8>10$; $x^2-x-2>0$;

$(x+1)(x-2)>0$; $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

3. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \log_2 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2y \\ 8y^3 - y^3 = 56 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2y \\ y^3 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

Ответ: (4; 2).

ПС–17

1. $y' = (e^{-0,3x} + 2^{1-2x})' = -0,3e^{-0,3x} - 2\ln 2 \cdot 2^{1-2x}$.

2. $\int f(x)dx = \int\left(e^{-0,5x} + 2^x\right)dx = \dfrac{1}{\ln 2}\cdot 2^x - 2e^{-0,5x} + C$.

3. $f'(x) = (3^{2x-3})' = 2\ln 3 \cdot 3^{2x-3}$; $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 3 + 6\ln 3(x - 2)$.

ПС–18

1.а) $y'=(\ln(2x+1))' = \dfrac{2}{2x+1}$; б) $y' = \left((2x-1)x^{\sqrt{2}}\right)' = 2x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(2x-1)x^{\sqrt{2}-1}$.

2. а)

$$\int f(x)dx = \int\frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)} = -2\int e^{-\frac{1}{z}x}d\left(-\frac{1}{z}x\right) + \int 2^x dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

б) $\int f(x)dx = \int(2x-3)^{\sqrt{6}}dx = \dfrac{1}{2}\int(2x-3)^{\sqrt{6}}d(2x-3) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-3)^{\sqrt{6}+1}}{\sqrt{6}+1} + C$.

3. $f'(x) = (2 \cdot 3^x)' = 2 \cdot \ln 3 \cdot 3^x = \ln 3 \cdot f(x)$, значит, функция $f(x) = 2 \cdot 3^x$ является решением дифференциального уравнения $y' = y\ln 3$.

Вариант 3

ПС–1

1. а) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{\left(7+2\sqrt{10}\right)\left(7-2\sqrt{10}\right)} = \sqrt{49-40} = \sqrt{9} = 3$;

б) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \dfrac{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{25-10\sqrt{3}+3}{25-3} = \dfrac{14-5\sqrt{3}}{11}$.

2. а) $x^5 + 32 = 0$; $x^5 = -32$; $x^5 = (-2)^5$; $x = -2$;

б) $x^4 - 81 = 0$; $x^4 = 81$; $x^4 = 3^4$; $x = \pm 3$;

в) $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} - 3 = 0$; $\sqrt[4]{x} = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$; $D = 4 + 12 = 4^2$; $t_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$; $t_1 = 1$, $\sqrt[4]{x} = 1$; $x = 1$ или $t_2 = -3$, $\sqrt[4]{x} = -3$ — посторонний корень. Ответ: 1.

ПС–2

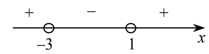
1.

$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0 \\ a + b = -c \end{cases}$; $\begin{cases} a(x-1)(x+1) + b(x-1) = 0 \\ a + b = -c \end{cases}$;

$\begin{cases} (x-1)(ax+a+b)=0 \\ a+b=-c \end{cases}$; $x-1=0$ или $ax-c=0$; $x_1=1$ или $x_2=\dfrac{c}{a}$.

2. $(x^2+2x)^2>9$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+2x>3 \\ x^2+2x<-3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-3>0 \\ x^2+2x+3<0 \end{array}\right.$, т.к. $x^2+2x+3>0$ при любых x, то второе неравенство не имеет решений, значит,



$(x+3)(x-1)>0$;

$x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

3. Пусть искомые числа a и b, тогда $\begin{cases} a+b=65 \\ \sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}-2{,}5 \end{cases}$;

$\begin{cases} a+b=65 \\ \sqrt{ab}=\dfrac{65}{2}-2{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} a=-b+65 \\ \sqrt{ab}=30 \end{cases}$; $\begin{cases} ab=900 \\ a=-b+65 \end{cases}$; $\begin{cases} b^2-65b+900=0 \\ a=-b+65 \end{cases}$;

$D=4225-3600=25^2$; $b_{1,2}=\dfrac{65\pm25}{2}$; $\begin{cases} b=20 \\ a=45 \end{cases}$ или $\begin{cases} b=45 \\ a=20 \end{cases}$.

Ответ: 45; 20.

ПС–3

1. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-1{,}5}-2(x+5)^0+\dfrac{x^{0{,}4}-2x^{-0{,}6}}{x^{-1{,}6}-2x^{-2{,}6}}=5\dfrac{3}{8}$;

$\begin{cases} \dfrac{27}{8}-2+\dfrac{x^{0{,}4}(1-2x^{-1})}{x^{-1{,}6}(1-2x^{-1})}=5\dfrac{3}{8} \\ x\ne-5 \end{cases}$; $\begin{cases} 1\dfrac{3}{8}+x^2=5\dfrac{3}{8} \\ x\ne-5 \\ x\ne2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\pm2 \\ x\ne-5 \\ x\ne2 \end{cases}$; $x=-2$ — посторонний корень, т.к. $(-2)^{0{,}4}$ — не существует, следовательно, данное числовое выражение не может иметь значение, равное $5\,{}^3\!/_8$.

2. $\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{7x-27}{x^2-7x+12}$; $\dfrac{2x(x-4)+(x-3)^2}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{7x-27}{(x-3)(x-4)}$;

$\begin{cases} 2x^2-8x+x^2-6x+9-7x+27=0 \\ x\ne3 \\ x\ne4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2-21x+36x=0 \\ x\ne3 \\ x\ne4 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-7x+13=0 \\ x\ne3 \\ x\ne4 \end{cases}$;

$D=49-52=-3<0$, следовательно, данное уравнение не имеет корней.

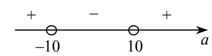
ПС–4

1. $\begin{cases} x^2-3|x|+2=0 \\ |x-1|\le 2{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} -2{,}5\le x-1\le 2{,}5 \\ t^2-3t+2=0 \end{cases}$, где $t = |x|$;

$\begin{cases} -1{,}5\le x\le 3{,}5 \\ t^2-3t+2=0 \end{cases}$; $D = 9 - 8 = 1$; $t_{1,2} = \dfrac{3\pm 1}{2}$; $t_1 = 2$, $|x| = 2$, $x = \pm 2$, но $x = -2$ не удовлетворяет первому неравенству системы; $t_2 = 1$, $|x| = 1$, $x = \pm 1$.

Ответ: ± 1; 2.

2. Парабола $y = x^2 + ax + 25$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках, если уравнение $x^2 + ax + 25 = 0$ имеет два различных корня, т.е. $D > 0$; $D = a^2 - 100$; $a^2 - 100 > 0$; $(a - 10)(a + 10) > 0$;



$a \in (-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$; при a = получаем $D = 1000 - 100 = 30^2$, $x_{1,2} = \dfrac{-10\sqrt{10}\pm 30}{2}$; функция $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ -5\sqrt{10} - 15) \cup$ $\cup\ (-5\sqrt{10} + 15; +\infty)$ и $y < 0$ при $x \in (-5\sqrt{10} - 15;\ -5\sqrt{10} + 15)$.

Ответ: $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.

ПС–5

1. Последовательность 4, 1, $\frac{1}{4}$ ... является геометрической прогрессией с первым членом 4 и знаменателем $\frac{1}{4}$, найдем сумму этой бесконечной геометрической прогрессии: $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{4}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{16}{3}$, значит,

$$0{,}2^{\log_5\left(4+1+\frac{1}{4}+...\right)} = 0{,}2^{\log_5\frac{16}{3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5\frac{16}{3}} = 5^{\log_5\left(\frac{16}{3}\right)^{-1}} = \frac{3}{16}.$$

2. $b_n = 3n - 1 = b_1 + (n - 1)d$, получаем, что $d = 3$; $b_1 - d = -1$; $b_1 - 3 = -1$; $b_1 = 2$. $S_{20} = \dfrac{2b_1+(20-1)d}{2}\cdot 20 = \dfrac{4+19\cdot 3}{2}\cdot 20 = 610.$

3. $\begin{cases} \sin x = q\cdot\cos x \\ 1{,}5 = q\cdot\sin x \end{cases}$;

$\begin{cases} q = \dfrac{1{,}5}{\sin x} \\ 1-\cos^2 x-1{,}5\cos x = 0 \end{cases}$; $\cos x = t$, тогда $t^2 + 1{,}5t - 1 = 0$; $D = 2{,}25 + 4 = 2{,}5^2$;

$t_{1,2} = \dfrac{1{,}5\pm 2{,}5}{2}$; $t_1 = 2$, $\cos x = 2$ — посторонний корень; $t_2 = -0{,}5$; $\cos x = -0{,}5$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

ПС–6

1. $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=$

$=\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$.

Поскольку $\sqrt{3}\cos\lambda-\sin\lambda=2\cos\left(\pi/6+\lambda\right)$ и $-1\le\cos\left(\pi/6+\lambda\right)\le1$, то выражение принимает макимальное значение при $\cos\left(\pi/6+\lambda\right)=1$ и это значение равно 2.

2. $$\frac{1-\sin(1{,}5\pi+2\alpha)+\sin2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1+\cos^2\alpha-1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=2\cos\alpha;$$

а) данное выражение не имеет смысла при $\cos\alpha=-\sin\alpha$, например, при $\alpha=\frac{3\pi}{4}$;

б) значение данного выражения отрицательно при $\cos\alpha<0$, например, при $\alpha=\pi$;

в) значение данного выражения равно 2 при $\cos\alpha=1$, например, при $\alpha=0$.

ПС–7

1. а) $2-\cos x=2\sin^2x$; $2-\cos x=2(1-\cos^2x)$; $\cos x=2\cos^2x$; $\cos x\left(\cos x-1/2\right)=0$; $\cos x=0$; $x=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$ или $\cos x=1/2$; $x=\pm\pi/3+2\pi n$, $n\in Z$. Ответ: $\pi/2+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{x}\right)+1=0$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{x}\right)=-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\sqrt{x}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)^2$, $n\in Z_0$ или $x=\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)^2$, $k\in Z_0$;

в) $\left(\sin x-\frac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)^2=1$;

$\sin^2x-2\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{1}{\sin^2x}+\cos^2x-2\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2x}-1=0$;

$\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}-4=0$; $\frac{\cos^2x+\sin^2x-4\sin^2x\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=0$; $1-\sin^22x=0$;

$\sin2x=\pm1$; $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

2. $\sin x\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\ \cos x\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ \ge\ -0{,}5$; $\sin\left(x+x-\frac{\pi}{4}\right)\ge -0{,}5$;

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge -0{,}5$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{6}+2\pi k$;

$\frac{\pi}{24}+\pi k\le x\le\frac{17\pi}{24}+\pi k$; $x\in\left[\frac{\pi}{24}+\pi k;\ \ \frac{17\pi}{24}+\pi k\right]$, $k\in Z$.

ПС–8

1. а) функция $y=\sqrt{4-x^2}+\log_3(1-x)$ определена при $\begin{cases}4-x^2\ge 0\\ 1-x>0\end{cases}$;

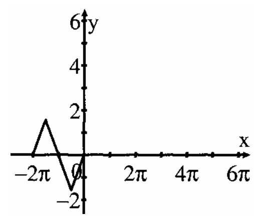
$\begin{cases}(2-x)(2+x)\ge 0\\ x<1\end{cases}$; $x\in[-2;\ 1)$;

б) функция $y=\sqrt[4]{1-2\sin x}$ определена при $1-2\sin x\ge 0$; $\sin x\le\frac{1}{2}$;

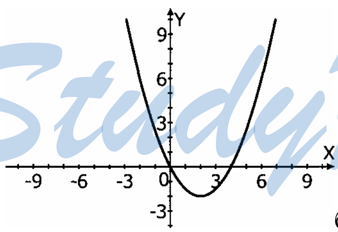
$-\frac{7\pi}{6}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{6}+2\pi k$;

$x\in\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

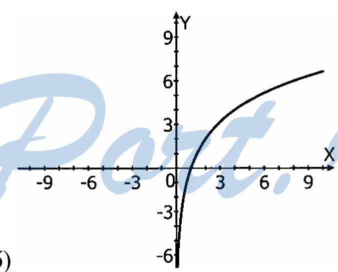
2. $y=\arcsin(\sin x)$; $x\in[-2\pi;\ 0]$.
см. график.



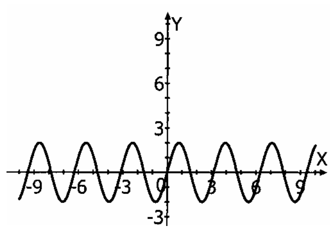
ПС–9



а)



б)



в)

ПС–10

1. Для нахождения скорости найдем производную $s'(t)$; $s'(t) = 6t^2 + 2\pi\cos(0{,}5\pi t)$, тогда $v(t)=s'(t)=6t^2+2\pi\cos\left(\pi/_2\, t\right)$ и при $t_0=1$ $v(t_0)=6$ см/с.

2. Напишем уравнение касательной к $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$. Оно имеет вид $-x - 7/_2 = y$, тогда $\mathrm{tg}\alpha = -1$, $\alpha = 3\pi/_4$.

ПС–11

1. $f(x)= -2\sin x+5x$; $f'(x)= -2\cos x+5$, тогда $f'(\pi)=7$, неравенство $f'(x) \le f'(\pi)$ принимает вид $-2\cos x + 5 \le 7 \Rightarrow \cos x \ge -1 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $f(x) = 2\sqrt{x} + (2 - 0{,}5x)^2$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции: $f'(x) = 1/\sqrt{x} + 2 \cdot (2 - 0{,}5x)(-0{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \dfrac{x}{2}$, тогда $f'(2) = 1/\sqrt{2} - 1$, т.к. $1/\sqrt{2} < 1 \Rightarrow f'(2) < 0$.

3. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$; $f'(x)=\dfrac{3x^2}{x}-\dfrac{x^3+2}{x^2}=\dfrac{3x^3-x^3-2}{x^2}=2\dfrac{x^3-1}{x^2}$; $g(x)=6x + \dfrac{2}{x}$;

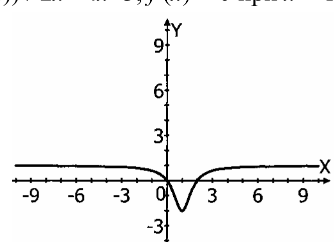
$g' = 6 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{6x^2-2}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}(3x^2-1)$, тогда неравенство принимает вид: $\begin{cases} x^3-1 < 3x^2-1 \\ x \ne 0 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} x^3-3x^2 < 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x-3) < 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$, т.к. $x^2 \ge 0$, то $\begin{cases} x < 3, \\ x \ne 0, \end{cases}$ тогда $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$.

ПС–12

1. а) $\dfrac{3x^4(x^2-9)}{2x^2+11} \ge 0$, т.к. $2x^2 + 11 > 0$, то неравенство принимает вид: $3x^4(x^2-3) \ge 0$, $(x-3)(x+3) \ge 0$ и $x=0$, тогда $x\in(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$;

б) $\dfrac{27-3^x}{4\cos x+5} \le 0$, т.к. $4\cos x + 5 > 0$, тогда неравенство принимает вид $27 - 3^x \le 0$; $27 \le 3^x$, тогда $x \ge 3$.

2. $f'(x) =((4x-4)(2x^2-4x+3)-(4x-4)(2x^2-4x)) / 2x^2-4x+3$; $f'(x) = 0$ при $x = 1$; $x \in (-\infty; 1]$ функция убывает; $x \in [1; +\infty)$ функция возрастает, при $x=1$; $f(1) = -2$; $x =1$ — точка минимума; $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$.



ПС–13

1. $f(x) = \frac{3^x + 3^{2-x}}{\ln 3}$. Найдем экстремумы $f(x)$ отрезка $[-1;\ 2]$; $f'(x) = 3^x - 3^{2-x}$, тогда $f'(x) = 0$ принимает вид $3^x = 3^{2-x}$, т.е. $x = 2 - x$, т.е. $x = 1$. Тогда наибольшее и наименьшее значение функции лежит среди точек $x = -1, 1, 2$; $f(-1) = \frac{3^{-1} + 3^3}{\ln 3}$; $f(1) = \frac{6}{\ln 3}$; $f(2) = \frac{3^2 + 1}{\ln 3} = \frac{10}{\ln 3}$; тогда в $x = -1$ наибольшее значение, а в $x = 1$ наименьшее $f_{\max} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{\ln 3}$; $f_{\min} = \frac{6}{\ln 3}$.

2. Пусть первое слагаемое x, тогда второе $2x$, а третье a и $x + 2x + a = 3x + a = 18$, тогда $a = 18 - 3x$, и наибольшее значение $f(x) = (18 - 3x)2x^2$ должно иметь максимум в искомом x; $f'(x) = -18x^2 + 18 \cdot 2x = 18(4x - x^2) = 0$, тогда x либо 0, либо 2, либо 6, т.к. если $x > 6$, то $x + 2x > 18$, $x = 0$ не может быть, т.к. $f(0) = 0$, $f(4) = 6 \cdot 8 \cdot 4 = 192$; $f(6) = 0$ поэтому искомые слагаемые: 4, 8, 6.

ПС–14

1. $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \sqrt{2}\sin x = \left(2\mathrm{tg}x + \sqrt{2}\cos x\right)' \Rightarrow F(x) = 2\mathrm{tg}x + \sqrt{2}\cos x + C$, $F\left(\pi/4\right) = 3 + C = 0$, тогда $C = -3$, тогда $F(x) = 2\mathrm{tg}x + \sqrt{2}\cos x - 3$.

2. а) $y = \frac{1}{x}$; $y = 0{,}5$; $x = 1$. Сначала найдем точки пересечения $y = \frac{1}{x}$ с линиями $x = 1$ и $y = 0{,}5$. Это (1; 1) и (2; 0,5). Тогда:

$S_1 = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$; $S = S_1 - S_2$ (S_2 площадь под $y = 0{,}5$); $S_2 = 0{,}5$, тогда $S_2 = \ln 2 - 0{,}5 \approx 0{,}2$;

б) $y = x^2 - 2x + 4$; $y = 4$. Найдем точки пересечения линий: $4 = x^2 - 2x + 4$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. Тогда $S = S_1 - S_2$, где S_1 — площадь под $y = 4$, а S_2 площадь под $y = x^2 - 2x + 4$ на отрезке [0; 2]. $S_1 = 8$;

$S_2 = \int\limits_0^2 (x^2 - 2x + 4)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 8 = \frac{8}{3} + 4$; $S = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

ПС–15

1. а) $4^{\log_2 6 - 0{,}5} = \frac{4^{\log_2 6}}{2} = \frac{2^{2\log_2 6}}{2} = \frac{2^{\log_2 36}}{2} = 18$;

б) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5} = \log_4 2 + \log_5 \sqrt{5} = 1/2 + 1/2 \log_5 5 = 1$.

2. а) $\log_2(2^{2x} + 16^x) = 2\log_4 12 = 2\frac{\log_2 12}{\log_2 4} = \log_2 12$.

Тогда $2^{2x} + 2^{4x} = 12$; $z = 2^{2x}$ уравнение принимает вид $z + z^2 = 12$, решая его, имеем $z_1 = 3$, $z_2 = -4$, т.к. $2^{2x} > 0$, то решение нашего уравнения является решением $2^{2x} = 3$, т.е. $x = \log_2 \sqrt{3}$.

б) $\sqrt{(3x+4)(x-5)} + 5 = x$. Уравнение равносильно системе: $\begin{cases}(3x+4)(x-5) = (x-5)^2, \\ (x-5) \geq 0, \\ (3x+4) \geq 0.\end{cases}$ Решим первое уравнение: $\left[\begin{array}{l}3x-4 = x-5, \\ x = 5,\end{array}\right.$ тогда

$2x = -1$, $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 5$; $x_2 = 5$ подходит, а $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ не подходит, т.к.

$(x-5)$ при $x = -\dfrac{1}{2} < 0$. Ответ: $x = 5$.

ПС–16

1. а) $\log \dfrac{2}{3} x < 1$; $\begin{cases}\log_3 x < 1, \\ \log_3 x > -1.\end{cases}$ Решим эти неравенства: $\begin{cases}x < 3 \\ x > \dfrac{1}{3}\end{cases}$, т.е.

$x \in \left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$;

б) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \dfrac{16}{x} \geq 2$; $2(\log_4 x)(2 - \log_4 x) \geq 2$; $z = \log_4 x$, тогда $z(2-z) \geq 1$ решим это неравенство. Получим, что оно выполняется только при $z = 1$, тогда $x = 4$.

3. $\begin{cases}3^y + x = 10 \\ y - \log_3 x = 2\end{cases}$; $\begin{cases}3^y + x = 10 \\ 3^y \cdot 3^{-\log_3 x} = 9\end{cases}$; $\begin{cases}3^y + x = 10 \\ 3^y = 9x\end{cases}$; $\begin{cases}10x = 10 \\ y = \log_3(9x)\end{cases}$; $\begin{cases}x = 1 \\ y = 2\end{cases}$.

Ответ: (1; 2).

ПС–17

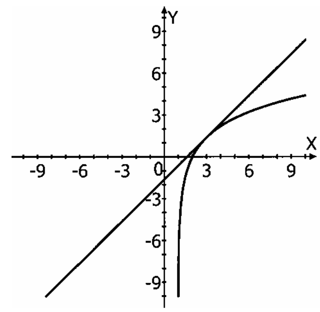
1. $y = 3xe^{2-x}$. Найдем экстремумы: $y' = 3e^{2-x} + 3x(-1)e^{2-x}$; $y' = 0 = 3e^{2-x} - 3xe^{2-x}$; $1 - x = 0$; $x = 1$. Тогда на $(-\infty; 1]$ функция возрастает, а на $[1; +\infty)$ убывает; $x = 1$, $y = 3e$ — максимум.

2. Найдем точки пересечения линий $(1, e)$ $(0, 1)$, тогда $S = S_1 - S_2$. S_1 — площадь под $y = e$ на $[0, 1]$. S_2 — площадь под $y = e^x$ на $[0, 1]$. $S_1 = e$. $S_2 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$, тогда $S = 1$.

ПС–18

1. а) $\int_1^3 \dfrac{dx}{2x+3} = \dfrac{1}{2}\int_1^3 \dfrac{d(2x+3)}{2x+3} = \dfrac{1}{2}\ln(2x+3)\Big|_1^3 = \dfrac{1}{2}\ln 9 - \dfrac{1}{2}\ln 5 = \ln\sqrt{1{,}8}$;

б) $\int\limits_2^{14}\frac{dx}{x\ln 7}=\frac{1}{\ln 7}\int\limits_2^{14}\frac{dx}{x}=(\ln 7)^{-1}\cdot\ln x\Big|_2^{14}=$ $(\ln 7)^{-1}(\ln 14-\ln 2)=1$



2. $S_1=\int\limits_1^2\frac{6}{x}dx=$ $6(\ln 2-\ln 1)=6\ln 2$;

$S_2=\int\limits_3^6\frac{6}{x}dx=$ $6(\ln 6-\ln 3)=6\ln 2$, видно, что $S_1=S_2$.

3. $f'(x)=2\frac{1}{x-1}$ в точке $x_0=3$ $f'(x_0)=1$; $f(3)=2\ln 2$. Составим уравнение касательной: $y=x+(2\ln 2-3)$.

Вариант 4

ПС–1

1. а) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{49-9\cdot 5}=2$;

б) $\frac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}=\frac{(6+\sqrt{2})(6+\sqrt{2})}{36-2}=\frac{36+12\sqrt{2}+2}{34}=\frac{38+12\sqrt{2}}{34}=\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

2. а) $x^5+243=0$; $x=-\sqrt[5]{243}=-3$; б) $x^6-64=0$; $x=\sqrt[6]{64}=\pm 2$;

в) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$; $\sqrt[6]{x}=z$; $z^2-z-2=0$; $z_1=2$, $z_2=-1$, т.к. $\sqrt[6]{x}=-2$ не имеет решения, а $\sqrt[6]{x}=2$ имеет при $x=64$, то ответ: $x=64$.

ПС–2

1) $ax^2+bx+c=0$, $b=a+c$, $D=b^2-4ac=(a-c)^2$, тогда $x_{1,2}=\frac{-(a+c)\pm(a-c)}{2a}$; $x_1=-\frac{c}{a}$, $x_2=-1$.

2) $(x^2+x)^2>4$. Тогда $x^2+x>2$ или $x^2+x<-2$. Решим первое неравенство: $x^2+x-2=0$; $D=9$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=-2{,}1$, тогда $(x+2)(x-1)>0$, т.е. $x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. Второе неравенство имеет пустое решение, т.к. у $x^2+x+2=0$ $D<0$, т.е. $x^2+x+2>0$ для всех возможных значений x. Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

3) Пусть число единиц x, тогда число десятков $x+2$, составим уравнение: $(x+10)(x+2)\cdot(2x+2)=252$; $2(x+20)(2x+2)=252$; $21x^2+41x+20=126$. Решая это уравнение, получим $x=2$, тогда искомое число 42.

ПС–3

1. $\frac{x^{1{,}8}-x^{1{,}5}}{x^{-0{,}2}-x^{-0{,}5}}-(0{,}09)^{-0{,}5}-{}^{2}\!/_{3}(x+3)^0=\frac{x^{9/5}-x^{3/2}}{x^{-1/5}-x^{-1/2}}-{}^{10}\!/_{3}=5$ при $x=3$.

2. $\frac{3x}{x+2}+\frac{x+2}{x-4}=\frac{36}{x^2-2x-8}$; $\frac{3x(x-4)+(x+2)(x+2)-36}{x^2-2x-8}=0$,

$^2 - 2x - 8 \neq 0$; $3x^2 - 12x + x^2 + 4x - 36 = 0$; $4x^2 - 8x - 32 = 0$; $x^2 - 2x - 8 = 0$;

$D = 4 + 32 = 36$; $x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2}=-2, 4$, т.к. $x^2 - 2x - 8 = 0$ при $x = -2$, то этот ответ не подходит, при $x = 4$; $x^2 - 2x - 8 = 0$, тогда наше уравнение не имеет решений.

ПС–4

1. $x^2 - 4|x| + 3 = 0$.

Пусть $x \geq 0$, тогда $x^2 - 4x + 3 = 0$; $D = 16 - 12 = 4$; $x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=1; 3$, тогда, т.к. $|x + 1| \leq 3{,}5$, при $x = 1$, следовательно, $x = 1$ является корнем. Пусть $x < 0$, тогда $x^2 + 4x + 3 = 0$; $D = 4$; $x_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{2}=-3; -1$. Оба корня меньше нуля и удовлетворяют условию $|x + 1| \leq 3{,}5$.

Ответ: –3; –1,1.

2. Парабола пересекает ось абсцисс в 2–х местах, если $D > 0$, $D = a^2 - 36$, т.е. $a^2 > 36$, $a \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$, если $a = 10$, то в интервале $(-9; -1)$ функция отрицательна, а на $(-\infty; -9)\cup(-1; +\infty)$ положительна.

ПС-5

1. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7\left(3+1+\frac{1}{3}+...\right)}=7^{-\log_7\left(3+1+\frac{1}{3}+...\right)}=\left(3+1+\frac{1}{3}+...\right)^{-1}=\frac{2}{9}$, т.к. $3 + 1 + \frac{1}{3}$ ... геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{3}$ и первым членом 3, ее сумма равна $\frac{b_1}{1-q}=\frac{9}{2}$.

2. $\frac{1}{2}+...+\frac{1}{210}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{10}}\right)$, т.к. $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}=3\frac{1}{2^n}$, тогда $S=1-\frac{1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}$.

3. Для того, чтобы она была арифметической, надо чтобы: $\sin^2 x - 3\sin x = -1 - \sin^2 x$; $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ (т.к. $b_2 = b_1 + db_3 = b_1 + 2d$, тогда $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = d$). Решим уравнение: $\sin x = z$; $2z^2 - 3z + 1 = 0$; $D = 9 - 8 = 1$; $z_{1,2}=\frac{3\pm 1}{4}=1;\ \frac{1}{2}$, т.к. $|z| \leq 1$, то решением нашего уравнения будет решение: $\sin x = 1$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $k, n \in Z$.

ПС-6

1.$\sin\alpha\ -\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\ \sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$.

Найдем наименьшее значение $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$, т.к. $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ имеет наименьшее значение –1, тогда наименьшее значение нашего выражения –2.

2. $\frac{1-\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos(1,5\pi+\alpha)-\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2\sin\alpha$.

а) если $\alpha={}^{\pi}\!/_{4}$, то $\sin\alpha-\cos\alpha=0$, т.к. делить на ноль нельзя, то выражение не имеет смысла;

б) если $\alpha={}^{3\pi}\!/_{4}$, то выражение положительно;

в) $2\sin\alpha=2$; $\sin\alpha=1$; $\alpha={}^{\pi}\!/_{2}$.

ПС-7

1. а) $2-\sin x=2\cos^2x=2(1-\sin^2x)$, тогда $t=\sin x$; $-t=-2t^2$; $t_1=0$; $-1=2t$; $t_2=\frac{1}{2}$, тогда $x_1=\pi n$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k, n\in$ Z;

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{x}\right)-\sqrt{3}=0$; $2\cos\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$; $\cos\sqrt{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\begin{cases} x=(\pm{}^{\pi}\!/_{6}+2\pi n)^2 & n\in N \\ x=(\pm{}^{\pi}\!/_{6})^2 & n=0 \end{cases}$;

в) $3-2\sin(\pi+2x)=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$, тогда $3+2\sin 2x=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$;
$3\sin 2x+2\sin^2 2x=2$; $\sin 2x=t$; $2t^2+3t-2=0$; $D=9+16=25$; $t_{1,2}=\frac{-3\pm5}{4}=-2$; $\frac{1}{2}$, т.к. $|t|\le1$, тогда $\sin 2x=\frac{1}{2}$; $2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in$ Z;
$x=(-1)^n{}^{\pi}\!/_{12}+{}^{\pi}\!/_{2}n$, $n\in$ Z.

2. $\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge-0,5$; $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge-\frac{1}{2}$;
$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{11\pi}{12}+2\pi n\le 2x\le\frac{5\pi}{12}+2\pi n$;
$-\frac{11\pi}{24}+\pi n\le x\le\frac{5\pi}{24}+\pi n$, $n\in$ Z; $x\in\left(-\frac{11\pi}{24}+\pi n;\ \frac{5\pi}{24}+\pi n\right)$, $n\in$ Z.

ПС-8

1. а) любой x из D_y должен удовлетворять неравенствам $x + 2 \geq 0$ и $9 — x^2 > 0$, т.е. $x \in [-2; +\infty)$ и $x \in (-3; 3)$, тогда D_y $[-2; 3)$;

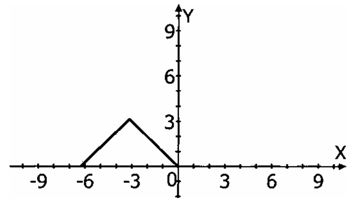
б) $y = \sqrt[6]{1 + 2\cos 2x}$; $1 + 2\cos2x \geq 0$. Решим это неравенство:

$\cos2x \geq -\frac{1}{2}$;

$2x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$;

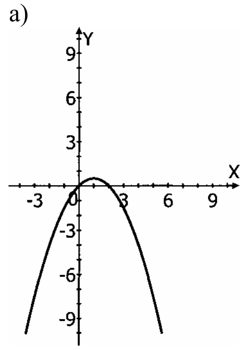
$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

2.

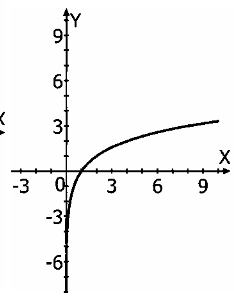


ПС-9

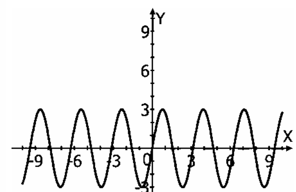
а)



б)



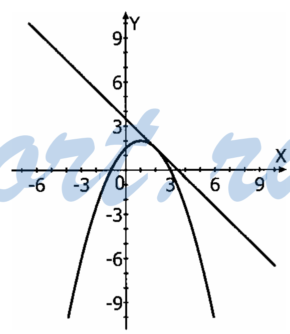
в)



ПС-10

1. $v(t) = s'(t) = 6t - 2\pi\sin(0{,}5\pi t)$ в момент времени $t = 2$ с $v = 12$ м/с.

2. $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$; $f'(x) = -x + 1$ в точке $x_0 = 2$ $f'(x_0) = -1$, тогда $\text{tg}\alpha = -1$; $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; тогда уравнение касательной $y = -x + 3{,}5$.



ПС-11

1. $f'(x) = -3\sin x + 4$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, тогда $4 - 3\sin x \geq 1$, $\sin x \leq 1$, x — любое число.

2. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2(2 - 0{,}5x)^3$; $f'(2) = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 2(2-1)^3 = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 2 < 0$, т.к. $\sqrt{2} < \frac{8}{3}$.

3. $f'(x) = 8 - \frac{4}{x^3}$; $g'(x) = \frac{4x^5 - 2x(x^4+2)}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 4x}{x^4} = \frac{2x^5 - 4x}{x^4}$;

$f'(x) > g'(x)$; $8 - \frac{4}{x^3} > 2x - \frac{4}{x^3}$; $\begin{cases} 8 > 2x \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 4, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$.

ПС-12

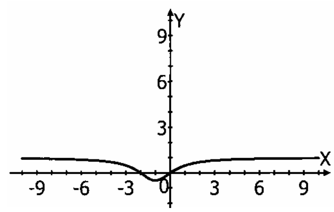
1. а) $\frac{6x^4(16 - x^2)}{-3x^2 - 7} \geq 0$; $\frac{6x^4(4-x)(4+x)}{3x^2+7} \leq 0$, т.к. $3x^2 + 7 > 0$ для любого x, то $x^4(4 - x)(4 + x) \leq 0$ и $x = 0$; $x \in (-\infty; -4] \cup$ log $\cup$ $[4; +\infty)$;

б) $\frac{2^x - 8}{3\sin x + 4} \leq 01$, т.к. $3\sin x + 4 > 0$ для всех x, то $2^x \leq 6$, т.е. $x \leq 3$.

2. 1) Область определения: $x^2+2x+3 \neq 0$; $x \neq -3$; 1; $D \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) $f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+2x+3) - (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{3(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$;

$f'(x) = 0$ при $x = -1$; $f(-1) = -0,5$ — точка минимума. На промежутке $x \in (-\infty; -1]$ функция убывает; на $x \in [-1; +\infty)$ функция возрастает; $f(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$.



ПС-13

1. $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{3-x}$; $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - 2 \cdot \ln 3 \cdot 3^{3-x}$. Найдем экстремумы функции: $f'(x) = 0$; $3^{2x} = 3^{3-x}$, т.е. $2x = 3 - x$; $x = 1$, тогда наибольшее и наименьшее значение функция принимает в одной из точек x=1, –1, 2.

$f(-1) = \frac{1}{9+2} + 2 \cdot 81 = 162\frac{1}{9}$; $f(1) = 9 + 2 \cdot 9 = 27$; $f(2) = 31 + 2 \cdot 3 = 37$, т.е.

наибольшее значение $162 \frac{1}{9}$, наименьшее значение 27.

2. Пусть одно слагаемое x, тогда второе $3x$, третье a, тогда $4x + a = 24$, т.е. $a = 24 - 4x$, тогда $(24 - 4x)3x^2 = f(x)$. Эта функция должна иметь наибольшее значение в $x \in [0; 6]$, т.е. если $x < 0$, то значение отрицательное, что противоречит условию, а если $x > 0$, то a — отрицательное, что тоже противоречит условию. Исследуем $f(x)$ на максимум: $f(x) = -12x^3 + 72x^2$; $f'(x) = -36x^2 + 144x$; $-36x^2 + 144x = 0$ имеет решение x=0 и $x = 4$, когда наибольшее значение достигается при $x = 0$; 4 или 6. $f(0) = 0$; $f(6) = 0$; $f(4) > 0$, т.е. искомые слагаемые — это 4, 12, 8.

ПС-14

1. $F(x) = -3\text{ctg}x + \sqrt{2}\sin x + C$, C=const.

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 + C = 0$; $C = 2$, тогда $F(x) = -3\text{ctg}x + \sqrt{2}\sin x + 2$.

2. а) Найдем точки пересечения линий: $\frac{2}{x} = 1$, $x = 2$; $y = 1$; $x = 1$; $y = 2$.

Тогда $S = S_1 - S_2$; $S_1 = \int\limits_1^2 \frac{2}{x}dx = 2\ln 2 = \ln 4$; $S_2 = 1$, тогда $S = \ln 4 - 1 \approx 0{,}39$.

б) Найдем точки пересечения линий: $5=x^2+4x+5$; $x=0$; $x=-4$; $S = S_1 - S_2$;

$S_1 = 20$; $S_2 = \int\limits_{-4}^{0} (x^2+4x+5)dx = -\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 5x\right)\Big|_{-4}^{0} - \left(\frac{-4^3}{3} + \frac{4\cdot 4^2}{2} - 5\cdot 4\right) =$

$= -\left(\frac{64}{2} - \frac{64}{3} - 20\right) = -\left(12 - \frac{64}{3}\right) = 9\frac{1}{3}$, тогда $S = 10\frac{2}{3}$.

ПС-15

1. а) $9^{\log_3 4 - 0{,}5} = \frac{9^{\log_3 4}}{3} = \frac{16}{3}$; б) $\log_4 2 + \log_3 \sqrt{3} = 1$.

2. а) $\log_3(25^x - 2\cdot 5^x) = 2\log 15$; $25^x - 2\cdot 5^x - 15 = 0$, $t = 5^x$; $t^2 - 2t - 15 = 0$; $t=5 \Rightarrow x = 1$;
б) $(2x+3)(x-4)=x^2+16-8x$; $2x^2+3x-8x-12=x^2+16-8x$; $x^2+3x-28=0$; $D=121$ $\Rightarrow x_1=4$; $x_2= -7$ — не подходит; $x > 0$.
Ответ: $x = 4$.

ПС-16

1. а) $\log_3^2 x < 4$, $\log_3 x < 2$ и $\log_3 x > -2$; $x \in (\frac{1}{9};9)$;

б) $\log_3 x\cdot\log_3 \frac{x}{9} \le -2$; $2\log_3 x(\log_3 x - 2) \le -2$; $2\log_3^2 x - 4\log_3 x + 2 \le= 0$;

$t = \log_3^4 x$; $2t^2 - 4t + 2 \le= 0$, $(-1)^2 \le= 0$; $t = 1$; $x = 3$.

2. $\begin{cases} 2^x + y = 5 \\ x - \log_2 y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x + y = 5 \\ \frac{2^x}{y}\cdot y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 5y = 5 \\ 2^x = 4y \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1, \\ x = 2. \end{cases}$

ПС-17

1. $y = 2xe^{x-1}$; $y' = 2e^{x-1} + 2xe^{x-1}$; $y' = 0$ при $x = -1$ — это экстремум, при $x > -1$, $y' > 0$; при $x < -1$, $y' < 0$, т.е. возрастает на $(-1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1)$; -1 — точка минимума. $y(-1) = \frac{-2}{e^2}$.

2. $S = S_1 - S_2$; $S_1 = e$; $S_2 = \int\limits_{-1}^{0} e^{-x}dx = e - 1$; $S = 1$.

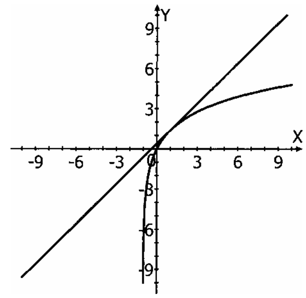
ПС-18

1. а) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{3x+4} = \frac{1}{3}\int\limits_2^4 \frac{d(3x+4)}{3x+4} = \frac{1}{3}\ln(3x+4)\Big|_2^4 = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{10}$;

б) $\int\limits_3^{15} \frac{dx}{x\ln 5} = \left(\frac{1}{\ln 5}\right)\ln x\Big|_3^{15} = 1$.

2. $S_1 = \int\limits_1^2 \frac{8}{x}dx = 8\ln 2$;

$S_2 = \int\limits_4^8 \frac{8}{x}dx = 8(\ln 8 - \ln 4) = 8\ln 2$.



3. $f'(x) = \frac{2}{x+1}$; $f'(1) = 1$; $f(1) = 2\ln 2 = \ln 4$;
$y = x + (\ln 4 - 1)$.

Вариант 5

ПС-1

1. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{1}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{7}-5} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3} + \frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{5} - \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2} = 0$

2. Пусть вторая имеет длину x см, тогда первая $0{,}75x$ см, тогда $525 = 1{,}75x$ см; $x = 300$ см, тогда длина первой 225 см.

ПС-2

1. Пусть количество всего раствора 1, тогда воды 0,8, после испарения осталось 0,6. Всего раствора 0,8, поэтому концентрация равна: $\frac{0{,}2}{0{,}8}\cdot 100\% = 25\%$.

2.$y=kx+b$, прямая параллельна данной $k= -3$, т.к. проходит через $(3; -1)$; $b = 8$, т.е. $y = 8 - 3x$.

ПС-3

1. В задачнике, вероятно, опечатка, следует писать:

$$\left(\frac{x^2}{x^2-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^{0,5}}\right) : \left(\frac{x^2+y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}} - \frac{x^2-\sqrt{y}}{x^2}\right) = \frac{x^4+y}{x^4-y} : \frac{x^4+y}{x^2\sqrt{y}} = \frac{x^2\sqrt{y}}{x^4-y}.$$

2. $\frac{3y}{3y-2} + \frac{5}{3y+2} = \frac{8}{9y^2-4}$.

$\begin{cases} 9y^2-4 \neq 0 \\ 3y(3y+2)+5(3y-2) = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} y \neq \pm\frac{2}{3} \\ 9y^2+6y+15y-10 = 8 \end{cases}$;

$$\begin{cases}(y+3)\left(y-\frac{2}{3}\right)=0\\ y\neq\pm\frac{2}{3}\end{cases};$$ $y=-3$. Ответ: $y=-3$.

ПС-4

1. $y=6x^2+5x+1=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})\cdot 6=0$; $x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, тогда $y>0$ на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; $y\le 0$ на $\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right]$.

2. $2x=t$; $t^2+10t+25=0$; $D=100-100=0$; $t_{1,2}=-5\Rightarrow t^2+10t+25=(t+5)(t+5)=$ $=(t+5)^2=(2x+5)^2$.

3. $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=12x^2+x-1=0$.

ПС-5

1. $a_3=8$; $a_{11}=17$; $a_3=a_1+2d$; $a_{11}=a_1+10d$, тогда $a_{11}-a_3=8d=9$, $d=\frac{9}{8}$;

$a_1=-2d+a_3=-\frac{a}{4}+8=\frac{23}{4}$.

2. $S=-\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{17}}=-\frac{3}{13}\cdot\frac{17}{15}=-\frac{17}{65}$.

3. $0{,}2(142857)=\frac{1}{5}+S$, где S — сумма геометрической прогрессии с $b_1=0{,}0142857$; $q=\frac{1}{10000000}$; $S=\frac{0{,}0142857}{\frac{99999}{10000000}}=\frac{14285{,}7}{999999}=\frac{1}{70}$, тогда наше число равно $\frac{1}{5}+\frac{1}{70}=\frac{3}{14}$.

ПС-6

1. а) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$;

б) $\frac{\sin x\cos x\sin x}{\cos x(-\mathrm{ctg}x)(-\mathrm{tg}x)}=\sin^2 x$.

2. а) $\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 4\alpha}=-2\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}=-\mathrm{ctg}4\alpha$; $\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$

$=-2\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}=-2\mathrm{ctg}4\alpha$. Что и требовалось доказать.

б) $\dfrac{\cos\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \dfrac{(\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)\dfrac{1}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = (1 + \sin\alpha).$

ПС-7

1. а) $\sin 6x + \sin 2x = \sin 4x$; $2\sin 4x \cos 2x = \sin 4x$; $(2\cos 2x - 1)\sin 4x = 0$; $\sin 4x > 0$; $\cos 2x = \frac{1}{2}$; $x_1 = \frac{\pi n}{4}$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in Z$;

б) $3\sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin 2x$; $3\sin^2 x + \cos^2 x = 4\sin x \cos x$; $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 3\mathrm{tg}^2 x + 1 = 4\mathrm{tg}x \end{cases}$;

$t=\mathrm{tg}x$; $3t^2-4t+1=0$; $D=16-12=4$; $t_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{6} \Rightarrow t_1=1$; $t_2=\frac{1}{3}$; $t=\mathrm{tg}x \Rightarrow \mathrm{tg}x_1=1$;

$x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\mathrm{tg}x_2=\frac{1}{3}$; $x_2=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\pi k$, $k, n \in Z$.

2. а) $\sin x(2\cos^2 x - 1) > 2\cos^2 x \sin x + \dfrac{1}{2}$; $-\sin x > \dfrac{1}{2}$; $\sin x < -\dfrac{1}{2}$;

$x \in \left(\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$; $n \in Z$; $\dfrac{\pi}{3} + \pi n \leq 3x - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$;

$\frac{7\pi}{12} + \pi n \leq 3x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n$; $\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi}{3} n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} n$; $n \in Z$.

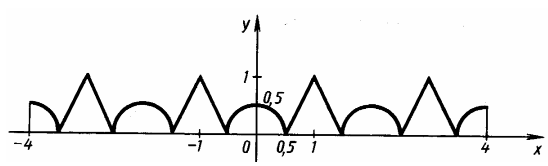
ПС-8

1. а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ -x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 0 \\ (x+3)(x-5) \geq 0 \end{cases}$; $x \in (-\infty; -3]$;

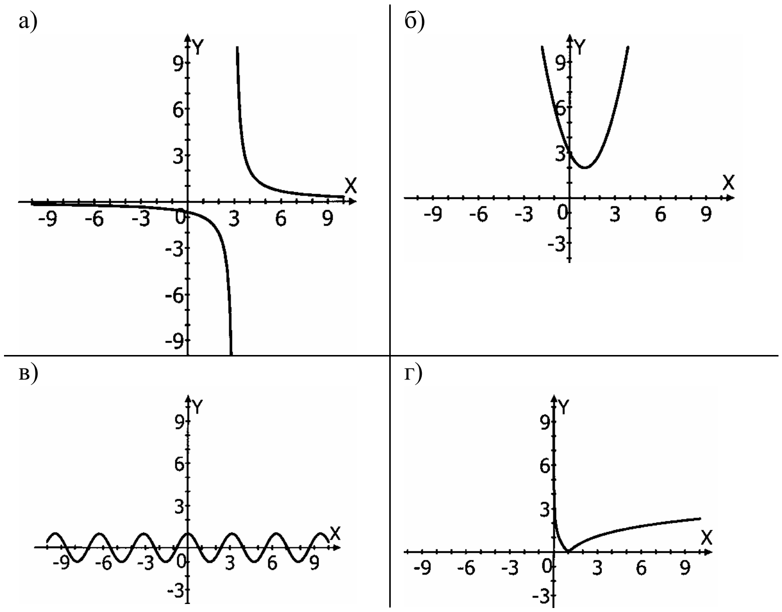
б) $\mathrm{tg}x - 1 > 0$; $\mathrm{tg}x > 1$; $x \in (\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$; $n \in Z$; в) $y = \log_{\mathrm{tg}x} \sin x$.

$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \mathrm{tg}x > 0 \\ \mathrm{tg}x \neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x \in (\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n) \\ x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n) \end{cases}$, $x \in (2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n) \cup (\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$.

2. а) $f(-x) = (x^2 - 1)(-x^3 - x) = -f(x)$ — нечетная;
б) $f(-x) = \lg|x| - \log_2 x^4 = f(x)$ — четная;
в) $f(-x) = \sqrt{-x-3}$ — ни четная, ни нечетная.
3.



ПС-9



ПС-10

1. а) $y' = (4x^4)' - (2x^{\sqrt{5}})' + (1/x)' = 16x^3 - 2\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{x^2}$;

б) $y' = (x-1)' \cdot 2^x + (x-1)\cdot(2^x)' = 2^x + (x-1)2^x \ln 2$;

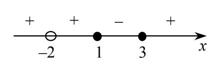
в) $y = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2}$.

2. $f'(x) = 2\sin 3x(\cos 3x) \cdot 3 = 3\sin 6x$.

3. $y = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$; $y(0) = 0 = C_2$; $y'(0) = 2C_1 = 3$; $C_1 = \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}\sin 2t$.

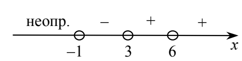
ПС-11

1. а) $\frac{(x-1)(x-3)^3}{(x+2\_^2} \geq 01$;

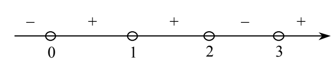


$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1] \cup [3; +\infty)$.

б) $x \in (3; 6) \cup (6; +\infty)$.



в) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3)$.



2. $f'(x_0) = 3 = 3x^2$; $x = \pm 1$; $x = 1$; $y = 3x + 2$; $x = -1$; $y = 3x - 2$.

3. $F=ma$; $m=3$ кг; $a=v'=x''(t)=(2-4\sin 2t)$м/с^2; $F = 3$ (кг)$\cdot 2(1-2\sin 2t)$ м/с^2 = $= 6(1-2\sin 2t)$Н.

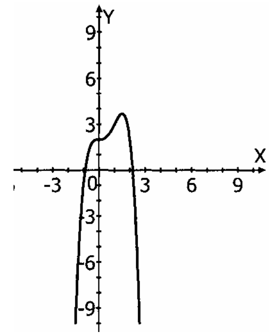
ПС-12

1. $f'(x) = 2x - 1$; $g'(x) = \dfrac{1}{|x|}$; $2x - 1 \le \dfrac{1}{|x|}$.

а) $x > 0$; $(2x-1)x \le 1$; $2x^2 - x - 1 \le 0$; $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1) \le 0$, тогда $x \in (0; 1]$;

б) $x < 0$; $|x|(2x-1) < 1$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) \ge 0$; $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup (0; 1]$.



2. $f'(x) = -4x^3 + 6x^2 = x^2(6-4x)$; $f'(x) = 0$; $x^2(6-4x) = 0$; $x = 0$; $x = \dfrac{3}{2}$, тогда $x = 0$ и $x = \dfrac{3}{2}$ — экстремумы:

x	-1	1	2
	$+$	$+$	$-$

, т.е. $(-\infty; \frac{3}{2}]$ — возрастает; $[\frac{3}{2}; +\infty)$ — убывает.

ПС-13

$f'(x) = 4x^3 - 8x^2 = 0$; $x = 0$; $x = 2$; $f(-1) = -4\dfrac{2}{3}$; $f(3) = 10$; $f(0) = 1$; $f(2) = -\dfrac{13}{3}$, тогда наибольшее 10, наименьшее $-4\dfrac{1}{3}$.

2. $V = \pi r^2 h$; $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$; $S' = 4\pi r - 2\dfrac{V}{r^2} = 0$; $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

ПС-14

1. $F(x) = x - \dfrac{1}{5}\cos 5x + 2\sqrt{5-2x}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + C = 2\sqrt{5-2x} + x - \dfrac{1}{5}\cos 5x + C$.

2. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x - \dfrac{3}{2}\mathrm{tg}\,2x + C$; $F(0) = -2$, тогда $C = -2$;

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x - \dfrac{3}{2}\mathrm{tg}\,2x + (-2)$.

3.а) $\displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{24}} \frac{2dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \int_0^{-\frac{\pi}{24}} \frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\mathrm{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{-\frac{\pi}{24}} = -\sqrt{3}+1 = 1-\sqrt{3}$.

б) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{2dx}{(3-x)^2} = -2\int\limits_{-3}^{2} \frac{d(-x+3)}{(3-x)^2} = 2\frac{1}{(3-x)}\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{5}{3}$.

4. $y = 6x - x^2$; $y = 0$; точки пересечения $x = 0$, $x = 6$.

$$S = \int\limits_0^6 (x^2 + 6x)dx = (-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2)\Big|_0^6 = -36 \cdot (2-3) = 36$$

ПС-15

1. $\lg\left(25^{\log_5 0,8} + 9^{\log_3 0,6}\right) = \lg(0,8^2 + 0,6^2) = 0$.

2. а) $\log_2(2x-1) + \log_2(x+5) = \log_2 13$.

$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+5>0 \\ (2x-1)(x+5)=13 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (x+6)\left(x-\frac{6}{4}\right) = 0 \end{cases}$; $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

б) $(0,25)^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$; $2^{-2(x^2-4)} = 2^{x^2+1}$; $-2x^2 + 8 = x^2 + 1$; $-3x^2 = -7$; $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$.

3. $\lg(x^2 - x) \le \lg(3x-3)$.

$\begin{cases} x^2-x>0 \\ 3x-3>0 \\ x^2-x \le 3x-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty) \\ x \in (1;\ +\infty] \\ x \in [1;\ 3] \end{cases}$; $x \in (1; 3]$.

ПС-16

1. а) $3^{\log_2^2 x - \log_2 x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\log_2 \frac{1}{x}}$; $\log_2^2 x - \log_2 x = -3\log_2 \frac{1}{x}$; $\log_2 x = t$; $t^2 - t = 3t$; $t^2 - 4t = 0$; $t = 0$; $t = 4$, т.е. $x = 1$ и $x = 16$;

б) $\log_3 (2x-5)^{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$; $\log_3(2x-5) = 1$; $2x - 5 = 3$; $x = 4$.

2. $\lg^2 x + \lg x - 2 \le 0$; $t = \lg x$; $t^2 + t - 2 \le 0$; $(t-1)(t+2) \le 0$; $t \in [-2;\ 1]$; $t = \lg x$; $x \in \left[\frac{1}{100};\ 10\right]$.

3. $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6} \\ t = \frac{y}{x} \\ x = (1+t) = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 6t^2 - 13t + 6 = 0 \\ x(1+t) = 5 \\ t = \frac{y}{x} \end{cases}$; $\begin{cases} \left(t - \frac{3}{2}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right) = 0 \\ x = \frac{5}{1+t} \\ y = tx \end{cases}$;

$t_1 = \frac{2}{3};\ x_1 = 3;\ y_1 = 2.\quad t_2 = \frac{3}{2};\ x_2 = 2;\ y_2 = 3.$

ПС-17

1. $f'(x) = (x^2 - 1)'e^{x2-1} + 2^x\ln 2 = 2xe^{x2-1} + 2^x\cdot\ln 2$.

2. $y(x) = -e^{-x} + \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$; $y(1) = 2 = -\dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{\ln 2} + C$; $C = 2 + \dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{\ln 2}$;

$y(x) = -e^{-x} + \dfrac{2^x}{\ln 2} - \dfrac{2}{\ln 2} + \dfrac{1}{e} + 2$.

3. $y' = e^{3\ln^2 x - 2\ln^3 x}\left(\dfrac{6\ln x}{x} - \dfrac{6\ln^2 x}{x}\right) = 0$; $\ln x=0$; $\ln x=1$; $x=1$; $x=e$; $x_{\min}=1$; $x_{\max}=e$.

x	$0; 1$	$1; e$	$e; +\infty$
$y'(x)$	–	+	–

ПС-18

1. а) $f(x)=\ln(3x-1)+\log_2(3x-1)$; $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1} + \dfrac{3}{\ln 2(3x-1)} = \dfrac{3}{3x-1}\left(1 + \dfrac{1}{\ln 2}\right)$;

б) $f'(x) = \left(\sqrt{3} - 1\right)(x+1)^{\sqrt{3}-2}$.

2. а) $S = S_1 - S_2$ точки пересечения $x = 5$ и $x = 1$; $S_2 = \int\limits_1^5 \dfrac{5}{x}dx = 5\ln 5$;

$S_1 = 4 + \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 12$; $S = 12 - 5\ln 5$.

б) точки пересечения $x = 0$, $x = 1$; $S = S_1 - S_2$; $S_1 = \int\limits_0^1 x^{\sqrt{2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x^{\sqrt{2}+1}\Big|_0^1 =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$; $S_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$; $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+1)}$.

3. $y' = -2y$; $y = Ce^{-2x}$; $y(1) = e^4 = \dfrac{C}{e^2}$; $C = e^6$; $y = e^{6-2x}$.

Вариант 6

ПС-1

1. $\dfrac{12\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) - 12\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right) - 12\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{12} = 0$.

2. Пусть длина первой x см, длина второй $1{,}18x$ см, тогда:
$(x+1{,}18x)$ см = 436 см; $x = 200$ см; длина второй 200 см, первой 236 см.

ПС-2

1. Пусть всего раствора 100, тогда воды в нем 75, после испарения 50.

s(концентрация) $= \dfrac{25}{75} = \dfrac{1}{3}$, т.е. 33,3...%.

2. $y = ax + b$; $a = 3$; $y = 3x + b$; $-4 = 3 \cdot 2 + b$; $b = -10$; $y = 3x - 10$.

ПС-3

1. $\left(\dfrac{\left(\sqrt{b}+c^2\right)\sqrt{b}-c^2\left(\sqrt{b}-c^2\right)}{c^2\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+c^2\right)-c^2\left(\sqrt{b}-c^2\right)}{\left(\sqrt{b}-c^2\right)\left(\sqrt{b}+c^2\right)}\right)=\dfrac{b-c^4}{c^2\sqrt{b}}$.

2. $8(2 + 3y) + 3y(2 - 3y) = -8$; $16 + 24y + 6y - 9y^2 = -8$; $9y^2 - 30y - 24 = 0$;
$\left(y+\dfrac{2}{3}\right)(y-4)=0$, т.к. $2 + 3y = 0$ при $y=-\dfrac{2}{3}$, то ответ: 4.

ПС-4

1. $8x^2 - 2x - 1 < 0$; $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0$; $x\in\left(-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}\right)$; $8x^2 - 2x - 1 \geq 0$;
$x\in\left(-\infty;\ -1/4\right]\cup\left[1/2;\ +\infty\right)$.

2. $9x^2 - 10x + 1 = (9x - 1)(x - 1)$.

3. $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)=x^2+\dfrac{x}{20}-\dfrac{1}{20}=20x^2+x-1=0$.

ПС-5

1. $a_4=a_1+3b$; $a_{13} = a_1+12b$; $a_{13}-a_4 = 9b=-13$; $b=\dfrac{-13}{9}$, тогда $a_1=a_4-3b=\dfrac{37}{3}$.

2. $q=\dfrac{b_2}{b_1}=-\dfrac{17}{19}$; $S=\dfrac{b_1}{1-q}=-\dfrac{5}{17}\cdot\dfrac{19}{2}=-\dfrac{95}{612}$.

3. 0,4(428571) = 0,4 + S. S — геометрическая прогрессия с $b_1 = 0{,}0428571$; $q=\dfrac{1}{1000000}$; $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{3}{70}$, тогда $0{,}4(428571)=\dfrac{31}{70}$.

ПС-6

1. а) $\dfrac{2-2\sin^2\alpha}{1-\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2-2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{3\pi}{8}$;
$\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=4-2\sqrt{2}$;

б) $\dfrac{-\sin x\cdot\sin x(-\operatorname{ctg}x)}{\sin x\cdot\sin x\cdot\operatorname{tg}x}=\operatorname{ctg}^2 x$.

2. а) $\dfrac{\cos\alpha}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\cos x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1$;

б) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\sin\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha=1+\cos\alpha$.

ПС-7

1. а) cos3x tgx = 0. $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\text{tg}x=0\\ \cos 3x=0\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n\end{array}\right.\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}$, $x=\pi n$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in$ Z;

б) $1-2\sin^2 x+3\sin x=-1$; $t=\sin x$; $|t|\le 1$; $2t^2-3t-2=0$; $\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-2)=0$,

т.к. $|t|\le 1$; $t=\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\ \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in$ Z.

2. а) $\cos^2 x\ +\frac{1}{2}>\ \sin^2 x$; $\cos 2x\ >-\frac{1}{2}$; $2x\ \in\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$,

$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in$ Z;

б) $\begin{cases}\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge\sqrt{3}\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ x\neq\frac{3\pi}{4}+\pi m,\ m,\ n\in Z\\ \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\end{cases}$, $x\in\left[\frac{7\pi}{12}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$.

ПС-8

1. а) $\begin{cases}5-x>0\\ x^2+2x-3\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x<5\\ (x+3)(x-1)\ge 0\end{cases}$, $x\in(-\infty;-3]\cup[3;5)$;

б) $2\sin x-1\ge 0$; $\sin x\ge\frac{1}{2}$, $x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$;

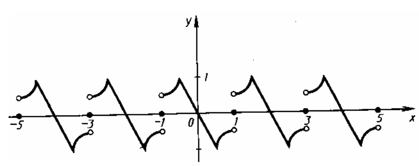
в) $\begin{cases}\text{ctg}x>0\\ \text{ctg}x\neq 1\\ \cos x>0\end{cases}$; $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x\neq 0\\ x\neq\pi/4+\pi n\end{cases}$; $x\in\left(2\pi n;\ \pi/4+2\pi n\right)\cup\left(\pi/4+2\pi n;\ \pi/2+2\pi n\right)$.

2. а) $f(-x)=(x^2+1)(-x^3-x^4)$ — ни четная, ни нечетная

б) $f(-x)=\cos x^2+\sin|x|=f(x)$ — четная

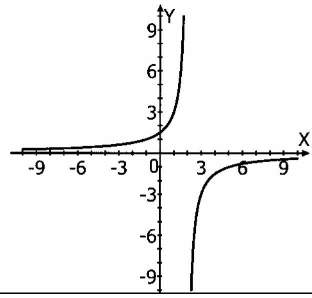
в) $f(-x)=-3x^4\sin x\cos x=-f(x)$ — нечетная

3.

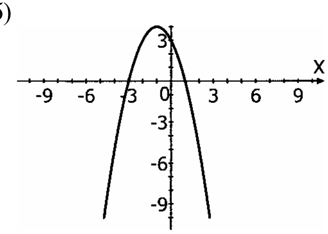


ПС-9

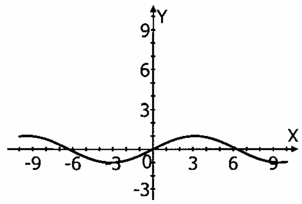
а)



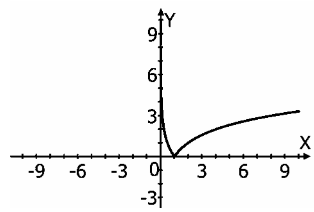
б)



в)



г)



ПС-10

1. а) $y' = 5\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} - 8x + \dfrac{68}{x^3}$; б) $y' = 0{,}5^x + (x+1)0{,}5^x \ln 0{,}5$;

в) $y' = \dfrac{(x\ln x)'(1-x^2) - x\ln x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{(\ln x + 1)(1-x^2) - 2x^2\ln x}{(1-x^2)^2} =$

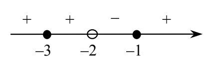
$= \dfrac{1 + x^2\ln x - x^2 + \ln x}{(1-x^2)^2}$.

2. $f'(x) = -\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{2x}{3}$.

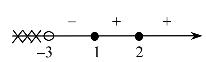
3. $y'' = -9y$; $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$; $y(0) = C_1 = 0$; $y'(0) = 3C_2 = -2$; $y = -\dfrac{2}{3}\sin 3x$.

ПС-11

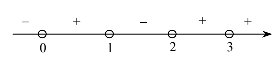
1. а) $x \in (-2; -1] \cup \{-3\}$



б) $x \in [1; +\infty)$



в) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 6} < 0$; $\dfrac{x(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} < 0$



$x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$

2. $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$; $f'(x)=\dfrac{4+x^2-2x^2}{(4+x^2)^2}=\dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$ при $x = 0$ $f(0)=\dfrac{1}{4}$, тогда $y=\dfrac{1}{4}x$.

3. $F = ma$; $m = 2$ кг; $a = v' = x'' = (6t - \cos t)$м/с^2; $F = 12t - 2\cos t$.

ПС-12

1. $f'(x) > g'(x)$; $f'(x) = 2x + 1$; $g'(x)=\dfrac{1}{|x|}$; $2x+1>\dfrac{1}{|x|}$; $\begin{cases} x \neq 0, \\ |x|(2x+1) > 1 \end{cases}$ (2).

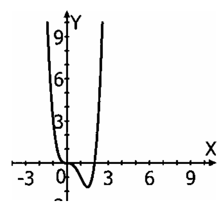
Решим неравенство (2) — в ответах ошибка, следует решать так:

$x\,|(2x + 1) > 1$: $x > 0$; $2x^2 + x - 1 > 1$; $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+1) > 0$, $x\in\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$,

$x < 0$: $-2x^2 - x - 1 > 0$; $2x^2 + x + 1 < 0$ — решений нет. Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

2. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x=\dfrac{3}{2}$.

x	$(-\infty; 0)$	$(0;\ 3/2)$	$(3/2;\ +\infty)$
f'	–	–	+



Тогда экстремум $x_{\min}=\dfrac{3}{2}$; возрастает на $[\dfrac{3}{2};\ +\infty)$; убывает на $(-\infty;\ \dfrac{3}{2}]$.

ПС-13

1. $f'(x)=15x^4 - 60x^2=15x^2(x^2 - 4)$; $f'(x)=0$ при $x = 0, 2, -2$, тогда $f_{\max} = 193$; $f_{\min} = -60$.

2. $V = \pi r^2 h$; $S = \pi r^2 + 2\pi r\cdot h = 2\pi(r^2 + rh) = 2\pi\left(r^2+\dfrac{2V}{\pi r}\right)$;

$S' = 2\pi\left(2r-\dfrac{2V}{\pi r^2}\right)$; $S' = 0$; $r=\dfrac{V}{\pi r^2}$; $r^3\pi = V$; $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ — при таком радиусе основания площадь минимальна.

ПС-14

1. $$F(x)=\int f(x)=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^2 2x}-\frac{1}{2}\int(2x-3)^{\frac{1}{2}}d(2x-3)+2\int dx=$$

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}2x-\tfrac{1}{3}(2x-3)^{3/2}+2x+C.$$

2. $F(x)=\int f(x)=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\dfrac{1}{2\pi}\int\cos 2\pi x\,d(2\pi x)$ $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x+C$;

$F(1) = 2/3 + C = 3$, тогда $F(x) = 2/3\sqrt{x^3} + 1/2\pi \sin 2\pi x + 2\,1/3$.

3. а) $\int\limits_0^{-\frac{\pi}{24}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)$;

б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{3dx}{(5+2x)^2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(5+2x)}\Bigg|_{-2}^{0} = 1\frac{1}{5}$.

4. Найдем точки пересечения $-x^2 + 3x = 0$; $x = 0$, $x = 3$.

$$S = \int\limits_0^3 (-x^2 + 3x)dx = (-1/3\,x^3 + 3/2\,x^2)\Big|_0^3 = -3^2 + 3^3/2 = 9/2.$$

ПС-15

1. $\log_5(49^{\log_7 2} + (0,(2))^0) = \log_5(4+1) = 1$.

2. а) $\begin{cases} \frac{x^2+8}{x-1} = 8 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 8 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1 \\ x = 4 \end{cases}$; $x = 4$;

б) $3^{\log_2^2 x - \log_2 x^8} = 3^{-2\left(\log_2 \frac{1}{x} + 4,5\right)} = 3^{\log_2 x^2 - 9}$; $\log_2^2 x - 8\log_2 x = 2\log_2 x - 9$; $t = \log_2 x$; $t^2 - 10t + 9 = 0$; $(t-1)(t-9) = 0$; $t = \log_2 x$; $x = 2$, $x = 2^9$.

3. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$; $3^x(x^2 - 3) \le 0$; $x^2 - 3 \le 0$, $x \in [-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$.

ПС-16

1. а) $5^{2x-4} \cdot 5 - 25^{x-2} = 3$; $5^{x-2} = t$; $5t^2 - 2t - 3 = 0$; $(t-1)(t + 3/5) = 0$; $t = 1$; $5^{x-2} = 1$; $5^x = 5^2$; $x = 2$;

б) $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$; $\begin{cases} (x+3)^2 = (3x+1)(x-1) \\ x - 1 > 0 \\ 3x + 1 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1 \\ x \ge -1/3 \\ x^2 + 6x + 9 = 3x^2 - 2x - 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 8x - 10 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1 \\ (x-5)(x+1) = 0 \end{cases}$, $x = 5$.

2. $\begin{cases} x^2 + 2 > 0 \\ 3x - 7 > 0 \\ x^2 + 2 > 3x - 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 7/3 \\ x^2 - 3x + 9 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 7/3 \\ x \in (-\infty;\ +\infty) \end{cases}$; $x \in \left(7/3;\ +\infty\right)$.

3. $\begin{cases} xy + x + y = -1 \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}$;

$$\begin{cases} xy=t;\ x+y=r \\ t+r=-1 \\ tr=-2 \end{cases};\quad \begin{cases} t=xy \\ x+y=r \\ t=-1-r \\ r(1+r)=2 \end{cases};\quad \begin{cases} r^2+r-2=0 \\ t=-(1+r) \\ t=xy \\ x+y=r \end{cases};\quad \begin{cases} (r+2)(r-1)=0 \\ t=-(1+r) \\ t=xy \\ x+y=r \end{cases};\ r_1=1;$$

$t_1=-2$; $y_{12}=1$; $y_{11}=-2$; $x_{11}=1$; $x_{1,2}=-2$; $r_2=-2$; $t_2=1$; $y_{21}=-1$; $x=-1$.
Ответ: (–1; –1), (2; –1), (–1; 2).

ПС-17

1. $f'(x)=2xe^{x^2+1}+2^x\ln 2$.

2. $F(x)=\dfrac{-3^{-x}}{\ln 3}+e^x+C$; $F(-1)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{3}{\ln 3}+C=3$; $C=3+\dfrac{3}{\ln 3}-\dfrac{1}{e}$;

$F(x)=e^x-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+3-\dfrac{1}{e}+\dfrac{3}{\ln 3}$.

3. $y'=\left(3\lg^2 x+2\lg^3 x\right)'e^{3\lg^2 x+2\lg^3 x}=\left(\dfrac{6\lg x}{x\ln 10}+\dfrac{6\lg^2 x}{x\ln 10}\right)e^{3\lg^2 x+2\lg^3 x}=0$; $\lg x=-1$;

$x=\dfrac{1}{10}$; $\lg x=0$; $x=1$; $x_{\max}=10^{-1}$; $x_{\min}=1$.

ПС-18

1. а) $f'(x)=\dfrac{3}{3x+1}+\dfrac{3}{\ln 0,5(3x+1)}=\dfrac{3(1-\ln 2)}{(3x+1)\ln 0,5}$; б) $f'(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(x-1\right)^{\sqrt{2}}$.

2.а) Найдем точки пересечения: $y(8-y)=7$: $-y^2+8y-7=0$; $x_1=1$, $x_2=7$; $S=S_1-S_2$; $S_2=\int\limits_1^7\dfrac{rdx}{x}=r\ln x\Big|_1^7=7\ln 7$; $S_1=24$; $S=24-7\ln 7$.

б) Найдем точки пересечения: $x=0$, $x=1$.

$S=\int\limits_0^1 x^e dx-\int\limits_0^1 x^\pi dx=\dfrac{1}{1+e}x^{e+1}\Big|_0^1-\dfrac{1}{\pi+1}x^{\pi+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{1+e}-\dfrac{1}{\pi+1}=\dfrac{\pi-e}{(1+e)(1+\pi)}$.

3. $y'=-\tfrac{1}{3}y$; $y=Ce^{-\frac{1}{3}x}$; $y(-2)=Ce^{\frac{2}{3}}=e^2$; $C=e^{1\frac{1}{3}}$; $y=e^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x}$.

Вариант 7

ПС-1

1. $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)=\dfrac{(16-15)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}=$

$=\dfrac{4}{\sqrt{4-\sqrt{15}}\,(\sqrt{10}+\sqrt{6})}=\dfrac{4}{\sqrt{(4-\sqrt{15})(10+6+2\sqrt{60})}}=\dfrac{4}{2\sqrt{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}}=2.$

2. В первом парке 250 · 0,24 самосвалов, во втором 150 · 0,08, тогда в обоих 250 · 0,24 + 150 · 0,08.

Тогда процент в обоих равен: $\frac{250 \cdot 0,24 + 150 \cdot 0,08}{400} \cdot 100\% = 18\%$.

ПС-2

1. Пусть первая сторона равна $3x$, вторая $4x$ и третья $5x$.
$5x - 3x = 2x = 3,6$ см; $x = 1,8$ см; $P = 12 \cdot x = 12 \cdot 1,8$ см$= 36(2 \cdot 0,3)$см $=$
$= 36 \cdot 0,6 = 21,6$ см; $S = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - 3x\right)\left(\frac{P}{2} - 4x\right)\left(\frac{P}{2} - 5x\right)}$ см^2= 1944 см^2.

2. $\begin{cases} 1,25x - 0,12 > 0,3x + 0,07 \\ 1 - x \geq 0,5x - 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 0,95x > 0,9 \\ 1,5x \leq 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \leq \frac{10}{3} \end{cases}$; $x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{10}{3}\right]$.

ПС-3

1. $$\left(a^{\frac{1}{3}} + b + \frac{4b^2 - a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b}\right) : \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - b^2} - \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} + b} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^2 + 4b^2 - a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b}\right) : \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} - 2\left(a^{\frac{1}{3}} - b\right) + \left(a^{\frac{1}{3}} + b\right)}{a^{\frac{2}{3}} - b^2}\right) = \left(\frac{3b^2}{a^{\frac{1}{3}} - b}\right) : \left(\frac{3b}{a^{\frac{2}{3}} - b^2}\right) =$$

$$= \frac{5}{3} b(a^{\frac{1}{3}} + b) = b(a^{\frac{1}{3}} + b)$$

2. $\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+2} = \frac{2}{y^2 - 1}$; $(y + 1)(y + 2) + y^2 - 1 = 2(y + 2)$; $2y^2 + y - 3 = 0$;
$(y + 1,5)(y - 1) = 0$, т.к. $y - 1 = 0$ решением быть не может, то $y = -1,5$.

ПС-4

1. $y = 5x^2 + 26x + 5 \geq 0$; $(x + 5)\left(x + \frac{1}{5}\right) \geq 0$, $x \in (-\infty; -5] \cup \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$,
$y \leq 0$; $x \in \left[-5; -\frac{1}{5}\right]$.

2. $2x^2 - 5x - 1 = 2(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2})$; $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 0$; $D = \frac{33}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow$
$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = (x - \frac{5 + \sqrt{33}}{4})(\frac{5 - \sqrt{33}}{4}) \Rightarrow 2x^2 - 5x - 1 = 2(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{4})(\frac{5 - \sqrt{33}}{4})$.

3. $\left(x - \sqrt{7} + 1\right)\left(x - \sqrt{7} - 1\right) = x^2 - \sqrt{7}x + x - \sqrt{7}x + 7 - \sqrt{7} - x + \sqrt{7} - 1 =$
$= x^2 - 2\sqrt{7}x + 6 = 0$.

ПС-5

1. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$; $3n^2 - 7n - 416 = 0$; $n = 13$.

2. $b_3 = b_1 q$; $q^2 = \frac{b_3}{b_1}$; $q = \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$; $S = \frac{4}{3}$.

3. 0,1(076923 = 0,1 + S_n; S_n — сумма геометрической прогрессии; $b_1 = 0{,}0076923$; $q = \frac{1}{1000000}$; $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{130}$; $0{,}1(076923) = \frac{7}{65}$.

ПС-6

1. а) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)-1} = \frac{-\cos\alpha}{-\cos\alpha - 1} \cdot \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+1} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{\alpha}$;

б) $\frac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha \sin 2\alpha - 2\sin 3\alpha}{-(2\cos 3\alpha \sin 2\alpha + 2\cos 3\alpha)} = -\mathrm{tg}3\alpha$.

2. а) $\frac{2\cos\alpha\cos\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - 2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$;

б) $\frac{(-\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(-\sin\alpha - \cos\alpha)}{\cos\alpha + \sin 3\alpha} = -1$.

ПС-7

1. а) $\sin 3x \; \mathrm{ctg}x = 0$; $\sin 3x = 0$; $x = \pm\frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$; $\mathrm{ctg}x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi r$, $r \in Z$; $\sin x \neq 0$; $x \neq \pi m$, $m \in Z$, тогда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$;

б) $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$; $2\sin x \cos 3x = \sin x$; $\cos 3x = \frac{1}{2}$; $\sin x = 0$; $3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \pi n$, $k, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$.

2. а) $-\sin 3x \sin 4x + \frac{1}{2} < \cos 3x \cos 4x$; $-(\sin 3x \sin 4x + \cos 3x \cos 4x) < -\frac{1}{2}$; $\cos x > \frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$;

б) $\mathrm{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n \leq 5x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x \in \left[\frac{\pi}{5}n; \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}n\right)$; $n \in Z$.

ПС-8

1. а) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ (4-x) \neq 5 \\ (4-x) > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-2)(x-4) \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x < 4 \end{cases}$, $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2]$;

б) $2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$; $\cos x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

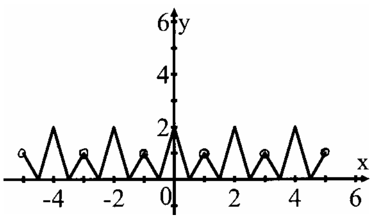
в) $\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\\ \sin x>0\end{cases}$; $\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\\ x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n)\end{cases}$, $x\in(0;\,1)\cup(1;\,\pi)\cup(2\pi n;\,\pi+2\pi n)$, $n\in N$.

2. а) $f(-x)=(-x^5+1)(-x+x^2)$ — ни четная, ни нечетная;
б) $f(-x)=\sin^4 x+\cos 2x=f(x)$ — четная;
в) $f(-x)=|-x\,|\sin^3 x=f(x)$ — четная.

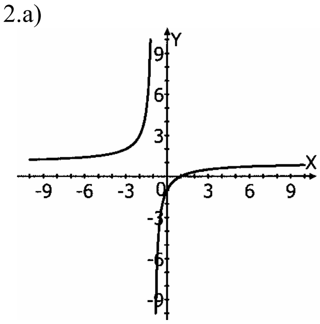
3. а) $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$; б) $\sin^2(x+T)=\sin x$ при $T=\pi$; в) $T=\pi$.

ПС-9

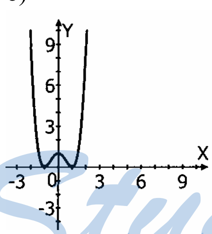
1.



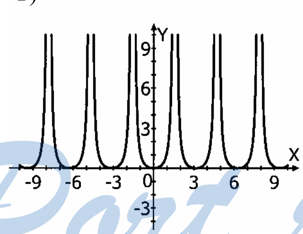
2.а)



б)



в)



ПС-10

1. а) $y'=\left(4\sqrt{2}x^3-2\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}\right)\sqrt{x+1}+\frac{\left(\sqrt{2}x^4-2x^{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{x+1}}$;

б) $y'=\frac{e^x\ln x-\frac{e^x}{x}}{\ln^2 x}=\frac{xe^x\ln x-e^x}{x\ln^2 x}=\frac{e^x(x\ln x-1)}{x\ln^2 x}$;

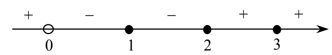
в) $y'=\cos x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2 x/4}\cdot\frac{1}{4}=\ \cos x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{tg} x/4}{2\cos^2 x/4}$.

2. $f'(x) = 307(2x^3 + 3x^2)^{306}(2x^3 + 3x^2)' = 307(2x^3 + 3x^2)^{306} \cdot (6x^2 + 6x) = 1842(x^2 + x)(2x^3 + 3x^2)^{306}$.

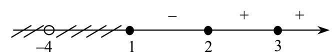
3. $y = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}$; $y' = \frac{-C_1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{2}$; $y(0) = C_1 = 2$; $y'(0) = \frac{C_2}{2} = 1$, тогда $y = 2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}$.

ПС-11

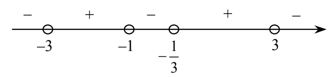
1. а) $x \in (0; 2] \cup \{3\}$;



б) $x \in [2; +\infty) \cup \{1\}$;



в)



$\frac{x}{x+1} > \frac{2x}{x+3} - \frac{1}{4}$; $\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{(x+3)} + \frac{1}{4} > 0$;

$\frac{4(x^2 + 3x - 2x^2 - 2x) + (x+1)(x+3)}{4(x+1)(x+3)} > 0$; $\frac{-(x-3)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{(x+1)x+3)} > 0$;

$x \in (-3; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 3\right)$.

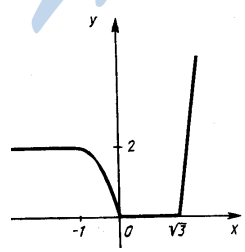
2. $f'(x) = 4x - 6x^2 = -10$; $6x^2 - 4x - 10 = 0$; при $x = -1$; $\frac{5}{3}$ $y = -10x + b$; находим b, подставив $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{5}{3}$ и $y_1 = f(-1)$; $y_2 = f\left(\frac{5}{3}\right)$; $b_1 = -1$; $b_2 = \frac{785}{27}$;

$y = -10x - 1$; $y = -10x + \frac{785}{27}$.

3. $F = ma$; $a = v' = x'' = 4 - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2}$ м/с^2; $F = (4 - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2})H$.

ПС-12

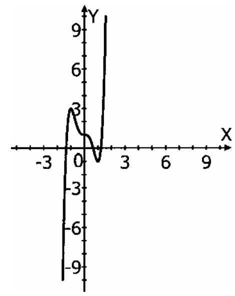
1.



2. $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$; $x = \pm 1$.

x	$-\infty; -1$	$-1; 0$	$0; 1$	$1; +\infty$
$f(x)$	+	–	–	+

$x_{\min} = -1$; $x_{\max} = 1$ — экстремумы; возрастает на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; убывает на $(-1; 0) \cup (0; 1)$.



ПС-13

1. $f'(x)=12x^3 - 24x^2 + 12x$; $f'(x) = 0$; $x^3 - 2x^2 + x = 0$; $x(x-1)^2 = 0$; $f(0) = 5$; $f(1) = 6$; $f_{\min} = 5$; наибольшего значения нет.

2. $r^2 + h^2 = 3^2 = 9$; $V = \frac{1}{3}\pi h(9 - h^2)$; $V' = 3\pi - \frac{3h^2\pi}{3} = 3\pi(1 - \frac{h^2}{3})$; $V' = 0$ или $h = \sqrt{3}$; $r = \sqrt{6}$.

ПС-14

1. $f = F'(x)$; $F'(x) = 1 - \frac{3x^2}{x^3} = \frac{x-3}{x} = f$.

2. $F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^{\sqrt{2}+1} - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{x+2} + C$.

3. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$;

б) $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{x}dx = \int\limits_0^4 x^{2\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{3\frac{1}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{7}(4^3 \cdot 2) = \frac{2}{7}\cdot 128 = \frac{256}{7} = 36\frac{4}{7}$.

4. $S = S_1 - S_2$; найдем точки пересечения линий; $4 + 3x - x^2 = x + 1$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = -1$; 3.

$$S_1 = \int\limits_{-1}^{3}(x^2 + 3x + 4)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = 16\frac{2}{3};\ S_2 = 6;\ S = 10\frac{2}{3}.$$

ПС-15

1. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2}2 - 3^{\log_9 36} = 6^{2\log_6 5} + \frac{10}{10^{\lg 2}} - 9^{\frac{1}{2}\log_9 36} = 25 + 5 - 6 = 24$.

2. а) $\lg^2 2(x - 0,5) = \lg(x - 0,5) + \lg 2 = \lg 2(x - 0,5)$; $\lg 2(x - 0,5) = 0$; $x = 1$; $\lg 2(x - 0,5) = 1$; $x = 5\frac{1}{2}$;

б) $5^{\log_3^2 x-\log_3 x^3}=\frac{1}{25}=5^{-2}$; $\log_3{}^2x-3\log_3x+2=0$; $\log_3x=z$; $z^2-3z+2=0$;
$(z-1)(z-2)=0$; $x_1=3$; $x_2=9$.
3. $3^{x^2-x-3}\ge 3^3$; $x^2-x-3\ge 3$; $x^2-x-6\ge 0$; $(x+2)(x-3)\ge 0$, $x\in(-\infty;-2]\cup$ $\cup\,[3;+\infty)$.

ПС-16

1.а) $2^{x+1}+2^{1-x}=5$; $2^x=t$; $2t+\frac{2}{t}=5$; $t\ne 0$; $2t^2+2-5t=0$; $(t-2)\left(t-{}^1\!/_2\right)=0$, тогда $x_1=1$; $x_2=-1$;

б) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;

$$\begin{cases}3x+4+2\sqrt{3x+4}\sqrt{x-4}=4x\\ 3x+4\ge 0\\ x-4\ge 0\\ x\ge 0\end{cases};\quad \begin{cases}x>4\\ \left[\begin{array}{l}3x+4=x-4\\ x=4\end{array}\right.\end{cases};$$ $x=4$. Ответ: $x=4$.

2. $\log_8(x^2-4x+3)<1$; $\begin{cases}x^2-4x+3<8\\ x^2-4x+3>0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-3)(x-1)>0\\ (x+1)(x-5)<0\end{cases}$; $x\in(-1;\,1)\cup(3;\,5)$.

3. $x^2y=t$; $xy^2=m$;

$\begin{cases}t-m=30\\ t+m=120\end{cases}$; $\begin{cases}t-30+m\\ t=75\end{cases}$; $\begin{array}{l}t=75\\ m=45\end{array}$. Ответ: (5; 3).

ПС-17

В учебнике опечатка, следует писать так.

1. $f(x)=(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x\ln\sin x}$; $f'(x)=(\cos x\ln\sin x)'e^{\cos x\ln\sin x}=$

$$=\left(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x\right)(\sin x)^{\cos x}=\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\cos x\right)(\sin x)^{\cos x}.$$

2. $F(x)=\int(2x-1)e^{x^2-x}dx=\int e^{x^2-x}d(x^2-x)=e^{x^2-x}+C$.

3. $f'(x)=e^x-1$; $f'(x)=0$ при $x=0$; $(-\infty;\,0]$ — убывает; $[0;\,+\infty)$ — возрастает; т.к. в $x=0$ $f(x)=0$, а $f(x)$ возрастает на $[0;\,+\infty)$, то $f(x)>0$ на $[0;\,+\infty)$, т.е. $e^x-x-1>0$, т.е. $e^x>x+1$.

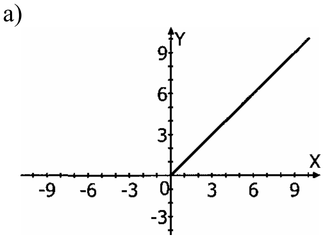
x	$-\infty;\,0$	$0;\,+\infty$
f'	$-$	$+$

ПС-18

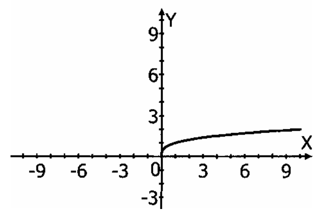
1. $F(x)=\int f(x)dx=\int x\cdot x^{\sqrt2}dx-\int x^{\sqrt2}dx+\frac12\int e^{2x}d(2x)+\frac12\int\frac{1}{2x}d(2x)=$

$$=\frac12 e^{2x}+\frac12\ln x+\frac{1}{\sqrt2+1}\left(-x^{\sqrt2+1}+\frac{1}{{}^1\!/_{\sqrt2}+1}x^{\sqrt2+2}\right)+C.$$

2. а)



б)



3. $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x}$.

Вариант 8

ПС-1

1.

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = \frac{4\cdot 8}{\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(\sqrt{10}+\sqrt{2})} = \frac{32}{\sqrt{(3-\sqrt{5})(12+2\sqrt{20})}} =$$

$$= \frac{32}{2\cdot 2} = 8.$$

2. В первой стопке 150 · 0,32 тетрадей в клетку, во второй 210 · 0,2, тогда процент от общей массы равен: $\dfrac{150\cdot 0{,}32 + 210\cdot 0{,}2}{360}$ · 100% = 25%.

ПС-2

1. Пусть первая сторона $3x$, вторая $4x$, третья $5x$, тогда $7x–5x=2x=$ $=3{,}4$ см; $x = 1{,}2$ см, тогда $P = 12x = 14{,}4$ см;

$S = \sqrt{P/2\,(P/2-3x)(P/2-4x)(P/2-5x)} = 8{,}64$ см^2.

2. $\begin{cases} 3{,}4x - x - 0{,}6 < 0{,}6x \\ 16{,}5 + 2{,}5(2x-2{,}4) \ge 1{,}5x \end{cases}$; $\begin{cases} 1{,}8x < 0{,}6 \\ 6{,}5x \ge -19{,}5 \end{cases}$; $x \in \left[-3;\ \frac{1}{3}\right)$.

ПС-3

1. $$\left(\sqrt[3]{b} - 2a + \frac{4a^2 - 4\sqrt[3]{b^2}}{2a+\sqrt[3]{b}}\right) : \left(\frac{2a - 2(b^{\frac{1}{3}} + 2a) + 2a - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} - 4a^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{b^{\frac{2}{3}} - 4a^2 + 4a^2 - 4b^{\frac{2}{3}}}{2a+\sqrt[3]{b}}\right) : \left(\frac{-3b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} - 4a^2}\right) = \sqrt[3]{b}\,(b^{\frac{1}{3}} - 2a).$$

2. $\dfrac{2}{2-y} - \dfrac{2}{y^2-1} - \dfrac{1}{y+1} = 0$; $\dfrac{2(y^2-1) - 2(2-y) - (2-y)(y-1)}{(2-y)(y^2-1)} = 0$;

$$\frac{(y+1)(y-4/3)}{(2-y)(y+1)(y-1)}=0.$$ Ответ: $y=4/3$.

ПС-4

1. $y = 6x^2 + 37x + 6 \ge 0$; $6(x + 6)\left(x+1/6\right) \ge 0$; $x \in (-\infty; -6] \cup \left[-1/6;\ +\infty\right)$;

$y \le 0$; $x \in \left[-6;\ -1/6\right]$.

2. $D = 16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 40$; $x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{40}}{6}$, тогда $3x^2-4x-2=$

$=3\left(x-\frac{4+\sqrt{40}}{6}\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{40}}{6}\right)$.

3. $\left(x-\sqrt{6}+2\right)\left(x-\sqrt{6}-2\right)=x^2-2\sqrt{6}x+2=0$.

ПС-5

1.$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$; $d=a_2-a_1=-4$, тогда $n^2d+(2a_1-d)n-2S_n=0$.

$4n^2 - 100n + 600 = 0$; $(n - 10)(n - 15) = 0$. Ответ: $n = 10$ или 15.

2. $b_1=-9$; $b_5=-\frac{1}{9}$; $b_5=b_1q^4$; $q^4=\frac{1}{81}$; $q=\pm\frac{1}{3}$; $S_1=\frac{-9\cdot 3}{2}=-4{,}5\cdot 3=-13{,}5$;

$S_2=\frac{-9\cdot 3}{4}=-6\frac{3}{4}$.

3. 0,2(153846) = 0,2 + S_n; S_n — сумма геометрической прогрессии; $b_1 = 0{,}0153846$; $q = 1000000^{-1}$; $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{65}$, тогда $0{,}2(153846)=\frac{14}{65}$.

ПС-6

1. а) $\frac{\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

б) $-cosx^2\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha=-\cos^2\alpha-\sin^4\alpha-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha=-1$.

2. а) $$\frac{2\sin 4\alpha\left(1-\mathrm{tg}^2 2\alpha\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{2\sin 4\alpha\left(\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}=$$

$$=\sin 8\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2 2\alpha}\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin 8\alpha.$$

б) $\frac{2\cos 3\alpha\cos\alpha+5\cos 3\alpha}{2\sin 3\alpha\cos\alpha+5\sin 3\alpha}=\mathrm{ctg}3\alpha$

ПС-7

1. а) $\frac{\cos 2x-\sin 4x}{\sin 2x-1}=0$; $\frac{\cos 2x(1-2\sin 2x)}{\sin 2x-1}=0$; $\sin 2x - 1 \neq 0$; $\cos 2x = 0$; $\sin 2x = \frac{1}{2}$; $\sin 2x \neq 1$; $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $2x = \frac{\pi}{6}(-1)^m + \pi m$; $x \neq \frac{-\pi}{4} + \pi n$; $x=\frac{\pi}{12}(-1)^m+\frac{\pi}{2}m$, n, r, $m \in$ Z, тогда $x=\frac{\pi}{12}(-1)^m+\frac{\pi}{2}m$; $x=\frac{3\pi}{4}+\pi$r;

б) $\sqrt{3}\sin 2x-6\cos^2 x=-3$; $\sqrt{3}\sin 2x-3(\cos 2x+1)=-3$; $\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = 0$, т.к. $\cos 2x = 0$ не подходит, то можно разделить выражение на него; $\text{tg}2x=\sqrt{3}$; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$, $n \in \wedge$.

2. а) $\cos^2 x - \frac{1}{2} < \sin^2(x+\pi)$; $\cos^2 x - \sin^2 x < \frac{1}{2}$; $\cos 2x < \frac{1}{2}$; $2x \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$; $x \in \left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$;

б) $\frac{1}{\text{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}<\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}<\text{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\pi n\right)$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$.

ПС-8

1. а) $\begin{cases}3x^2+2x-1\geq 0\\ \log(2-x)-1\neq 0\\ 2-x>0\end{cases}$; $\begin{cases}(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 0\\ x\neq -8\\ x<2\end{cases}$; $\begin{cases}x\in(-\infty;\ -1]\cup\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)\\ x\in(-\infty;\ 2)\\ x\neq -8\end{cases}$;

$x \in (-\infty; -8) \cup (-8; -1] \cup \left[\frac{1}{3};\ 2\right)$;

б) $\sin^2 x-\frac{1}{2}\geq 0$; $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$; $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in$ Z;

в) $y = \log_x \cos x$; $\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\\ \cos x>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\end{cases}$; $x \in (0;\ 1) \cup$ $\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in$ N;

2. а) $f(-x) = (-x^3 - x)(x^4 - x^2) = -(x^3 + x)(x^4 - x^2) = -f(x)$ — нечетная;

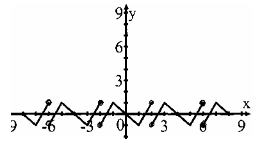
б) $f(-x)=\frac{-\text{tg}x\sin|x|}{\cos x^2}=-f(x)$ — нечетная; в) $f(-x)=|-\text{ctg}x|=|\text{ctg}x|$ — четная.

3. а) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{5}\pi$; б) пусть $x > 0$, тогда $T = 2\pi$, тогда везде $T = 2\pi$;

в) $f(x) = |\mathrm{ctg}x|$; $T = \pi$.

ПС-9

1. см. график.



2. а) $x–1 \neq 0$; $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; область значений $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$;

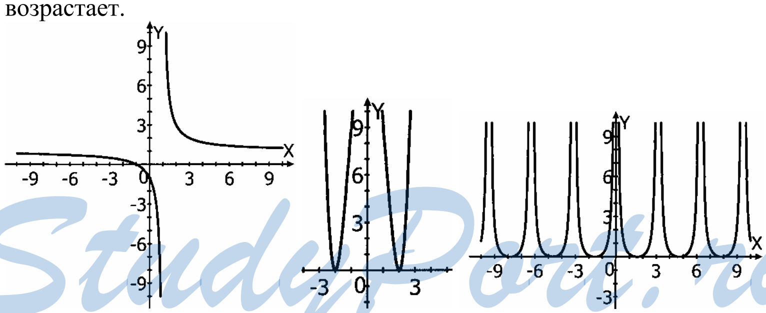
$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$, т.к. пусть $f(x) = a$;

$x = 1 + \frac{2}{a-1}$; $f' = -\frac{2}{(x-1)^2}$ — функция убывает везде на области определения; экстремумов нет.

б) область определения $(-\infty;+\infty)$; $(x^2–4)^2 == f(x)$, тогда область значений $[0;\ +\infty)$; $x=0$ — максимум; $x=\pm2$ — минимумы, тогда на $(-\infty;\ -2) \cup (0;\ 2)$ убывает, на $(-2;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$ — возрастает.

в) $f = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x$; область определения $(\pi n;\ \pi+\pi n)$, область значений $[0;+\infty)$,

минимумы в $\frac{4}{\sqrt{3}} + \pi n$; на $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ убывает; на $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$ возрастает.



а) б) в)

ПС-10

1. а) $y' = (5\sqrt{3}x^4 - 5\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1})\sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{3}x^5 - 5x^{\sqrt{3}}}{2\sqrt{x-1}} = 5\sqrt{3}(x^4 - x^{\sqrt{3}-1})\sqrt{x-1} +$

$+ \frac{\sqrt{3}x^5 - 5x^{\sqrt{3}}}{2\sqrt{x-1}}$;

б) $y' = \frac{e^x/x - \ln xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x - x\ln xe^x}{xe^{2x}} = \frac{1 - x\ln x}{xe^x}$;

в) $y' = 3\cos 3x - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\,\frac{1}{\sin^2 x/3} = 3\cos 3x - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x/3}{\sin^2 x/3} =$

$= 3\cos 3x - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{ctg} x/3}{\sin^2 x/3}$;

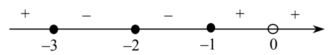
2. $f'(x) = 119(3x^2 - 2x^3)^{118}(3x^2 - 2x^3)' = 119(3x^2 - 2x^3)^{118}(6x - 6x^2) =$ $= 714x(3x^2 - 2x^3)^{118}(1 - x)$.

3. $y'' = \frac{1}{9}y$; $y = C_1\cos\frac{1}{3}x + C_2\sin\frac{1}{3}x$; $y' = -\frac{C_1}{3}\sin\frac{1}{3}x + \frac{C_2}{3}\cos\frac{1}{3}x$; $y(0) = C_1 = 3$;

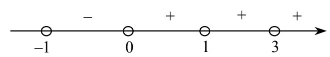
$y'(0) = C_2/3 = -1$, $C_2 = -3$, $y = 3\cos\frac{1}{2-t} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} + \frac{1}{t+1} - 3\sin\frac{1}{3}x$.

ПС-11

1. а) $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; +\infty)$ и $x = -2$;



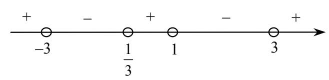
б) $x \in (-1; 0)$;



в) $\frac{x}{1-x} - \frac{2x}{3-x} - \frac{1}{4} > 0$;

$\frac{4(3-x)x - 2x\cdot 4\cdot(1-x) - (1-x)(3-x)}{4(3-x)(1-x)} > 0$ $\frac{(x+3)\left(x - 1/3\right)}{(x-3)(x-1)} > 0$;

$x \in (-\infty; -3) \cup \left(1/3;\, 1\right) \cup (3; +\infty)$.

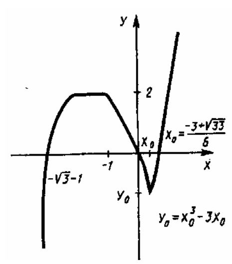


2. $f'(x) = 2(x-1)(x-3)^2 + 2(x-3)(x-1)^2 = (x - 1)(x - 3)(2(x - 3) + 2(x - 1)) = -24$; $(x - 2)(x - 1)(x - 3) = -6$; $x(x^2 - 6x + 11) = 0$, т.к. $x^2 - 6x + 11$ не имеет корней, то $x = 0$, тогда $f(0) = 9$, тогда $y = -24x + 9$.

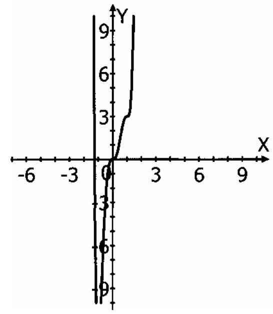
3. $F = ma$; $a = v' = x'' = 6t + \frac{1}{t^2}$; $F = (30t + \frac{5}{t^2})$Н.

ПС-12

1.



2. $f' = 60x^5 - 60x^4 - 60x^3 + 60x^2 = 0$; $x^2(x^3-x^2-x+1) = 0$; $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x = -1$.



x	$-\infty; -1$	$-1; 0$	$0; +\infty$
f'	$-$	$+$	$+$

на $(-\infty; -1)$ убывает; на $(-1; +\infty)$ возрастает; $x = -1$ — точка минимума.

ПС-13

1. $f'(x) = 20x^4 - 60x^3 = 0$ при $x = 0$; $x = \frac{1}{3}$, тогда f_{min} и f_{max} $x=0$, $1/3 \pm 1$, но f_{min} не существует. $f_{max}|0| = -31$.

2. $V = \pi r^2 h = \pi h(16 - h^2)$; $V'(h) = 0$ при $h = 4/\sqrt{3}$, т.к. $h = 4/\sqrt{3}$ точка минимума, то ответ: $h = 4/\sqrt{3}$.

ПС-14

1. $F'(x) = f(x)$; $F' = 1 + \frac{1}{x^3}\cdot 3x^2 = \frac{x+3}{x} = f.$

2. $F(x) = \int f(x) = \int x^{\frac{1}{3}}dx - \frac{1}{2}\int \sin(2x+1)d(2x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}+1}x^{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2(2x+1)} + C$;

3. а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/8}\left(\frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{4}\right)dx = \left(\frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{8}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{\pi}{32}$;

б) $\int\limits_0^8 x\sqrt[3]{x}dx = \int\limits_0^8 x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^8 = \frac{3}{7}\cdot 2^7 = \frac{384}{7} = 54\frac{6}{7}$.

4. $S = S_1 - S_2$, найдем точки пересечения: $-x^2 + 4 = x^2 - 2x$; $2x^2 - 2x - 4=0$; $x^2-x-2=0$; $(x-2)(x+1)=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$; $S_1=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2+4)dx= =(-\frac{1}{3}x^3+4x)\Big|_{-1}^{2}=9$;

$S_2=\int\limits_{-1}^{2}(x^2+2x)dx=(\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_{-1}^{2}= 8/3+4+1/3-1=6$; $S=S_1-S_2=3$.

ПС-15

1. $(9^{2(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4+25^{\log_{125}8})})\cdot 7^{\log_7 4} = 3^{17}$.

2. а) $\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}+\log_2 x=\dfrac{10}{3}$; $\log_2 x = t$; $\dfrac{1}{t}+t=\dfrac{10}{3}$; $1 + t^2=\dfrac{10}{3}t$; $t^2-\dfrac{10}{3}t+1 = 0$;

$(t-3)\left(t-\dfrac{1}{3}\right)=0$; $x_1 = 8$, $x_2=\sqrt[3]{2}$.

б) $6^{\log_5^2 x-4\log_5 x}=6^5$; $\log_5 x = t$; $t^2 - 4t - 5 = 0$; $t_1 = 5$; $t_2 = -1$; $x_1 = 5^5$, $x_2=\dfrac{1}{5}$.

3. $4^{-|x-5|}\le\dfrac{1}{8}$; $2^{-2|x-5|}\le 2^{-3}$; $2|x-5| \ge 3$; $|x - 5|\ge\dfrac{3}{2}$; $x\in(-\infty;\ 3{,}5]\cup[6{,}5;\ +\infty)$.

ПС-16

1. а) $5^x-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1}=4$; $5^x = t$; $t-\dfrac{5}{t}=4$; $t^2 - 4t - 5 = 0$; $t_1 = 5$, $t_2 = -1$; $x = 1$;

б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$; $x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{4x+13}+4x+13=3x+12$;
$2\sqrt{x+1}\sqrt{4x+13}=-2x-2$; $\sqrt{x+1}\sqrt{4x+13}=-(x+1)$;
$\sqrt{x+1}(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+1})=0$; $x=-1$.

2. $\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) > 0$; $0 < x^2 - 5x + 7 < 1$; $x^2-5x+6 < 0$; $(x - 3)(x - 2) < 0$; $x \in (2; 3)$.

3. $\begin{cases}(x-y)x^2y^2=4\\(x+y)x^2y^2=12\end{cases}$; $x^3y^2 = t$; $x^2y^3 = m$; $\begin{cases}t-m=4\\t+m=12\end{cases}$; $\begin{cases}t=8\\m=4\end{cases}$; $\begin{cases}x^3y^2=8\\x^2y^3=4\end{cases}$;

$\begin{cases}x/y=2/4\\x^2y^3=4\end{cases}$; $\begin{cases}x=2y\\y=1\end{cases}$; $x = 2$, $y = 1$.

ПС-17

1. $f(x) = (\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x\ \ln\ \cos x}$; $f'(x) = (\sin x\ \ln\ \cos x)'e^{\sin x\ \ln\ \cos x}$ $=\left(\cos x\ln\cos x-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)e^{\sin x\ln\cos x}$.

2. $F(x)=\int(3x^2+1)e^{x^3+x}dx=\int e^{x^3+x}d(x^3+x)=e^{x^3+x}+C$.

3. $f'(x) = 2^x\ln2 - \ln2 = (2^x - 1)\ln2$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$.

$x < 0$	$x > 0$
–	+

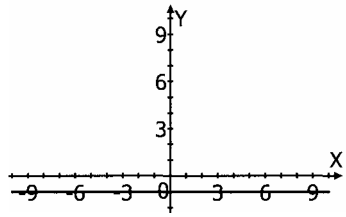
$x < 0$ — убывает; $x > 0$ — возрастает, т.к. в $x = 0$ $f(0) = 0$ и f возрастает на $x > 0$, то $f(x) > 0$; $2^x > 1 + x\ln2$.

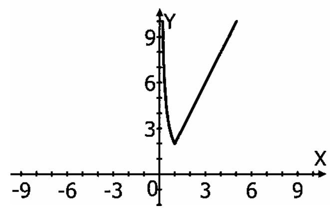
ПС-18

1. $F(x)=\int f(x)=\int x^{1+\sqrt{3}}dx+\int x^{\sqrt{3}}dx+2\int e^{0,5}xd(0,5x)+2\int\dfrac{dx}{x}=$

$=\dfrac{x^{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+2e^{0,5x}+2\ln x+C+2\ln x+C.$

2. а) б)





3. $y' = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$; $y = C_1 e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}$.

Вариант 9

ПС-1

1. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 2\sqrt{21}$.

Пусть это не так, например: $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$, возведем в куб и получим: $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$, но это невозможно, т.е.: $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

2. Пусть всего жидкости за час вытекает, тогда $(1 - x/100)^2 = 0{,}81$, т.е. x=10%.

3.

$$\frac{(x+3)(x-1)+(x+1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}{(x-3)(x+1)+(x-1)\sqrt{(x+3)(x-3)}} = \frac{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}(x-1)+(x+1)\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-3}(x+1)+(x-1)\sqrt{x+3}\right)} =$$

$= \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$; при $x = 5$ выражение равно 2.

ПС-2

1. Рассмотрим теорему синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, тогда a, b, c пропорциональны числам 5, 12, 13. Пусть 1-я $5x$, 2-я $12x$, 3-я $13x$. $S = \dfrac{abc}{4R} =$

$= \dfrac{5\cdot 12\cdot 13\cdot x^2\cdot 2}{4\cdot 13} = 30x^2$; P=5x+12x+13x=30x, x=1 см; S=30 см; P = 30 см.

2. $\begin{cases} 2x^2+5x \ge 0_1 \\ |x| < 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x\left(x+\dfrac{5}{2}\right) \ge 0 \\ |x| < 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0] \cup \left[-\dfrac{5}{2};\ +\infty\right) \\ |x| < 6 \end{cases}$;

$x \in (-6; -5/2] \cup [0;\ 6)$.

ПС-3

1. $$\frac{4a^{\frac{1}{4}}+bc^{\frac{3}{2}}}{(4+c^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{4}}-b)}+\frac{a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{2}}-4b}{(4-c^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{4}}-b)}=$$

$$=\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}}-b)}\left(\frac{\left(4a^{\frac{1}{4}}+bc^{\frac{3}{2}}\right)\left(4-c^{\frac{3}{2}}\right)+\left(a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{2}}-4b\right)\left(4+c^{\frac{3}{2}}\right)}{16-c^{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}}-b)}\left(\frac{16a^{\frac{1}{4}}+4bc^{\frac{3}{2}}-4a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{2}}-bc^{3}+4a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{2}}-16b+a^{\frac{1}{4}}c^{3}-4bc^{\frac{3}{2}}}{16-c^{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}}-b)}\left(\frac{16a^{\frac{1}{4}}-bc^{3}-16b+a^{\frac{1}{4}}c^{3}}{16-c^{3}}\right)=\frac{16+c^{3}}{16-c^{3}}\ (c>0).$$

2. $y^2=t$; $\frac{1}{2-t}=\frac{2}{(t-1)(t+1)}+\frac{1}{t+1}$; $\frac{t^2-1-2(2-t)-(2-t)(t-1)}{(2-t)(t-1)(t+1)}=$

$=\frac{2t^2-t-3}{(2-t)(t-1)(t+1)}=0$; $\frac{(t+1)\left(t-\frac{3}{2}\right)}{(2-t)(t-1)(t+1)}=0$; $t=\frac{3}{2}$; $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

ПС-4

1. $3(x^2-3)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=3\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. $D=b^2+8b^2=9b^2$; $x_{1,2}=\frac{b\pm 3b}{4b^2}=\left(-\frac{1}{2b};\ \frac{1}{b}\right)$; $\left|\frac{1}{2b}\right|<\left|\frac{1}{b}\right|$; $\left|\frac{1}{b}\right|<1$ при $|b|>1$.

3. $x^2+x-1=0$ — корни существуют, т.к. $D=5>0$; применим теорему Виета. $x_1+x_2=-1$; $x_1x_2=-1$; $x_1^2+2x_1x+x_2^2=1$; $x_1^2+x_2^2=3$; $x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4=9$; $x_1^4+x_2^4=7$. Ответ: 7.

ПС-5

1. $S_n=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot n=a_8\cdot 15$.

$\begin{cases}a_3+a_9=6\\ a_3-a_9=\frac{135}{16}\end{cases}$; $\begin{cases}a_3=\frac{135}{16a_9}\\ 16a_9^2-96a_9+135=0\end{cases}$; $a_3=\frac{9}{4}$; $a_9=\frac{15}{4}$; $a_3=\frac{15}{4}$; $a_9=\frac{9}{4}$;

$a_9 - a_3 = 6d = \frac{6}{4}$ или $-\frac{6}{4}$, тогда $d = \pm\frac{1}{4}$; $a_8 = a_9 - d = \frac{14}{4}$ или $\frac{10}{4}$, тогда S_{15} = 52,5 или 37,5.

2. $1+11+\ldots+\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{1991} = 1991 + 10\cdot 1990 + \ldots + 10^{1990} = \frac{10^{1992}-10-9\cdot 1991}{9^2}$.

3. $1 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \ldots + p\cdot 2^{p-1} = \sum_{n=1}^{p} n2^{n-1} = 1 + (p-1)\cdot 2^p$.

ПС-6

1.а) $2\sin^8\alpha + 2\sin^6\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha + 2\sin^4\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^6\alpha\cos^4\alpha +$ $+ 2\sin^2\alpha\cos^6\alpha + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^6\alpha + 2\cos^8\alpha - \sin^8\alpha - \cos^8\alpha =$ $=\sin^8\alpha+4\sin^6\alpha\cos^2\alpha+6\sin^4\alpha\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^6\alpha+\cos^8\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^4 = 1$.

б) $\dfrac{\sin\frac{8\pi}{15}\sin\frac{10\pi}{15}\sin\frac{12\pi}{15}\sin\frac{14\pi}{15}}{2^7\left(\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}\sin\frac{5\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\right)} = \frac{1}{2^7}$; т.к. $\frac{8\pi}{15} = \pi - \frac{7\pi}{15}$ и т.д.

$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$.

2. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \mathrm{tg}^4\alpha$; $\dfrac{8\sin^2\alpha-2+2-8\sin^2\alpha+4\sin^4\alpha}{4\cos^4\alpha} = \mathrm{tg}^4\alpha$.

3. $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$; $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}(\pi - (\alpha + \beta))$; $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = -\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)$; $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta - \dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta} =$

$= -\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\left(\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}\right)1$; $\dfrac{-\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta} = \dfrac{-(\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{tg}\alpha)}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$.

ПС-7

1. а) $\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 4x = 1$; $\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)1\sin 4x = 1$, т.к. $|\sin x| \le 1$, то

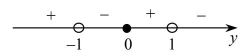
либо $\begin{cases}\sin 4x = 1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1\end{cases}$ либо $\begin{cases}\sin 4x = -1,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -1^{1}.\end{cases}$

$\begin{cases}x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\\ x = \frac{\pi}{6}+2\pi n\end{cases}$ либо $\begin{cases}x = \frac{3\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n\\ x = \frac{7\pi}{6}+2\pi n\end{cases}$ – решений нет;

б) $8\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}\cos\frac{2x}{5}\cos\frac{4x}{5} = \sin\frac{x}{5}$; $\sin\frac{8x}{5} = \sin\frac{x}{5}$; $\sin\frac{8x}{5} - \sin\frac{x}{5} = 0$;

$2\sin\frac{7x}{10}\sin\frac{9x}{10} = 0$; $\sin\frac{7x}{10} = 0$; $\sin\frac{9x}{10} = 0$; $x = \frac{10\pi}{7}n$; $x = \frac{5\pi}{9} + \frac{10}{9}\pi k$, $n, k\in Z$;

2. а) $2\text{tg}2x \le 3\text{tg}x$; $\dfrac{4\text{tg}x}{4-\text{tg}^2x} - 3\text{tg}x \le 0$; $\dfrac{\text{tg}x(1+\text{tg}^2x)}{1-\text{tg}^2x} \le 0$; $\text{tg}^2x + 1 > 0$ для всех x, тогда неравенство имеет вид: $\dfrac{\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x} \le 0$; $\text{tg}x = y$; $\dfrac{y}{(1+y)(1-y)} \le 0$. Воспользуемся методом интервалов: $y \in (-1;\ 0] \cup (1;\ +\infty)$; $y = \text{tg}x$;



$x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi n\right] \cup \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

б) $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\cos(\pi x)\right) \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{4\pi}{3}\cos\pi n \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$,

$\cos\pi x \in \left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}n;\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}n\right]$, $n, r, m \in Z$;

$\begin{cases} \pi x \in [\pi/3 + 2\pi n;\ 5\pi/3 + 2\pi n] \\ \pi x \in [\arccos(-1/4) + 2\pi n;\ \arccos 1/4 + 2\pi n] \end{cases}$ и $\pi x = \pi + 2\pi k$; $x = 1 + 2\pi k$, тогда $x \in [-\dfrac{\arccos 1/4}{\pi} + 2n;\ -1/3 + 2n] \cup [1/3 + 2n;\ \dfrac{\arccos 1/4}{\pi} + 2n] \cup \{1 + 2k\}$.

ПС-8

1. а) $-6\sin^2x + 5\sin x - 1 \ge 0$; $\sin x = t$; $-6t^2 + 5t - 1 \ge 0$; $6t^2 - 5t + 1 \le 0$; $\left(t - 1/3\right)\left(t - 1/2\right) \le 0$; $t \in [1/3; 1/2]$,

$x \in \left[\arcsin 1/3 + 2\pi n;\ \pi/6 + 2\pi n\right] \cup \left[5\pi/6 + 2\pi n;\ -\arcsin 1/3 + \pi + 2\pi n\right]$;

б) $y = \log_2\log_4\log_8 x$; $\begin{cases} x > 0 \\ \log_8 x > 0 \\ \log_4 \log_8 x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \log_8 x > 1 \end{cases}$; $x > 8$;

в) $y = \log_{\sin x}\cos 2x$; $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x \ne 1 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n) \\ x \ne \pi/2 + 2\pi m \\ x \in \left(-\pi/4 + \pi k;\ \pi/4 + \pi k\right) \end{cases}$; $n, k, m \in Z$,

$x \in \left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right)$.

2. а) $f(-x) = \cos^2x - \text{tg}x^4 - f(x)$ — четная;

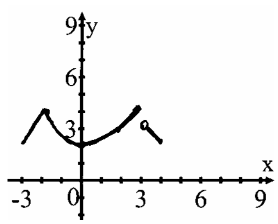
б) $f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ — ни четная, ни нечетная;

в) $f(-x) = -\text{tg ctg}x + \text{ctg tg}x$ — нечетная.

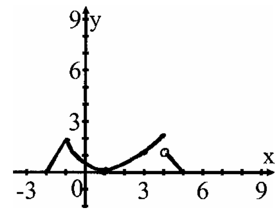
3. т.к. функция нечетная, $f(0) = 0$ и она возрастает на $(-\infty; +\infty)$, тогда $|f(x)| \geq f(3)$; $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

ПС-9

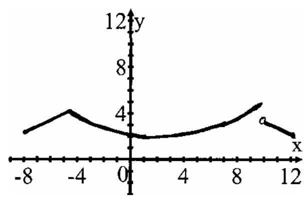
1.а)



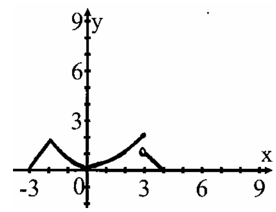
б)



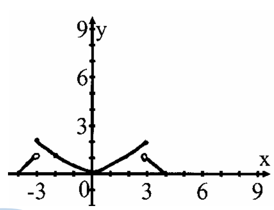
в)



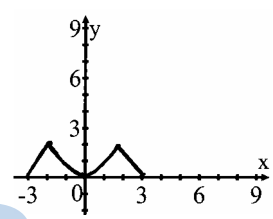
г)



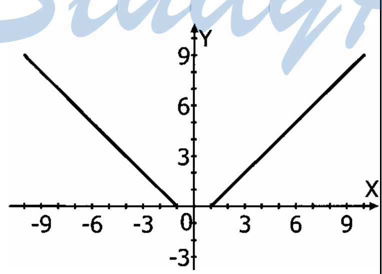
д)



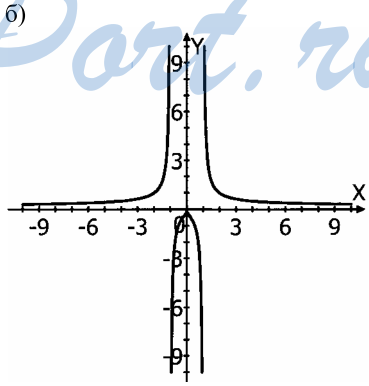
е)



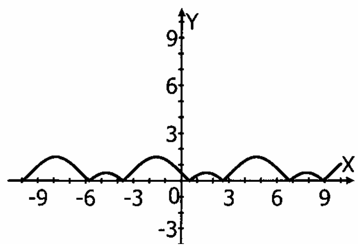
2.а)



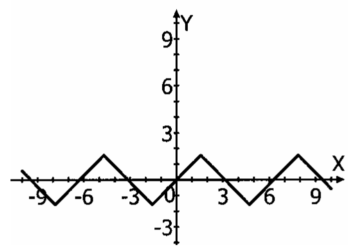
б)



в)



г)



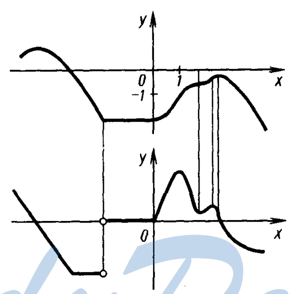
ПС-10

1. а) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x}\cos\frac{1}{x} = x\left(2\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)$; $f'(0) = 0$;

б) $y' = \frac{((x^{\sqrt{3}}+2x^{-1})^5)'}{(\ln 10)(x^{\sqrt{3}}+2x^{-1})^5} = \frac{5\left(x^{\sqrt{3}}+\frac{2}{x}\right)^4(\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}-2x^{-2})}{(\ln 10)(x^{\sqrt{3}}+2x^{-1})^5} = \frac{5(\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}-2x^{-2})}{(x^{\sqrt{3}}+2x^{-1})\ln 10}$;

в) $y' = \left(x/2\right)^x \ln x/2 \cdot 1/2 = 1/2\left(x/2\right)^x \ln x/2$.

2.



3. Подставим и увидим, что из равенств $y_1'' = -2y_1$, $y_2'' = -2y_2$ следует, что $3y_1'' + \frac{1}{4}y_2'' = -2\left(3y_1 + \frac{1}{4}y_2\right)$.

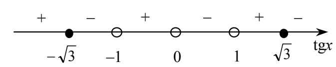
ПС-11

1. а) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 < 0$; $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) < 0$; $(x^2 + 1)(x^2 + 1) + 3x(x^2 + 1) < 0$; $(x^2+1)(x^2+1+3x) < 0$. Поскольку всегда $x^2+1 > 0$, то: $x^2+3x+1 < 0$; $x^2+3x+1=04$; $D=5 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$; $x^2+3x+1 < 0$ при $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

б) $4x^2-12x\sqrt{1-x}-27(1-x)<0$. Решим уравнение: $4x^2-12x\sqrt{1-x}-27(1-x)=0$; $4x^2-18x\sqrt{1-x}+6x\sqrt{1-x}-27(1-x)=0$;
$2x\left(2x-9\sqrt{1-x}\right)+3\sqrt{1-x}\left(2x-9\sqrt{1-x}\right)=0$;
$\left(2x+3\sqrt{1-x}\right)\left(2x-9\sqrt{1-x}\right)=0$; $2x+3\sqrt{1-x}=0$ или $2x-9\sqrt{1-x}=0$;
$\begin{cases} x<1 \\ \sqrt{1-x}=-\dfrac{2}{3}x \end{cases}$; $\begin{cases} x<1 \\ 1-x=\dfrac{4}{9}x^2 \end{cases}$; $x = -3$; $\begin{cases} x=\dfrac{9}{2}\sqrt{1-x} \\ x<1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0 \quad x<1 \\ x^2=\dfrac{81}{4}(1-x) \end{cases}$;
$\begin{cases} x=\dfrac{9\sqrt{97}-81}{8} \\ x<1 \end{cases}$. Решим неравенство. $x\in\left(-3;\ \dfrac{9\sqrt{97}-81}{8}\right)$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}^2x-3}{\mathrm{tg}x(1-\mathrm{tg}^2x)}\geq 0$; $\dfrac{(\mathrm{tg}x+\sqrt{3})(\mathrm{tg}x-\sqrt{3})}{\mathrm{tg}x(1-\mathrm{tg}x)(1+\mathrm{tg}x)}\geq 0$;

$\mathrm{tg}x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right)\cup(-1;\ 0)\cup\left(1;\ \sqrt{3}\right)$;



$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right]\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$.

2. Заметим, что $y = 1$; минимум $f(x)$, тогда $y = 1$ — первая касательная, $x^2 - 2x + 2 = 1$; $(x-1)^2 = 0$; $x = 1$, $y = ax + b$: $\begin{cases} 1=4a+b \\ 1=a+b \end{cases}$; тогда y=12x – 47 — вторая касательная.

ПС-12

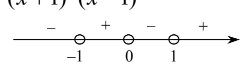
1. $f'(x)=\dfrac{(3x^2-2x)e^{-x}+e^{-x}(x^3-x^2)}{e^{-2x}}=\dfrac{xe^{-x}}{e^{-x}}\left(\dfrac{(3x-2)+(x^2-x)}{e^{-x}}\right)=$

$=\dfrac{x}{e^x}(x^2+2x-2)1$; $f'(x)=0$ при $x=0$ и при $x_{12}=\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2}$;

x	$-\infty; -1-\sqrt{3}$	$-1-\sqrt{3}$; 0	0; $-1+\sqrt{3}$	$-1+\sqrt{3}$; $+\infty$
f'	–	+	–	+

$x_{\min}=-1\pm\sqrt{3}$ $x_{\max}=0$; убывает на $(-\infty;\ -1-\sqrt{3}\ ]\cup[0;\ \sqrt{3}-1]$; возрастает на $[-1-\sqrt{3}\ ;\ 0]\cup[\ \sqrt{3}-1;\ +\infty)$.

2. $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}=\dfrac{4x}{(x+1)^2(x-1)^2}=0$;

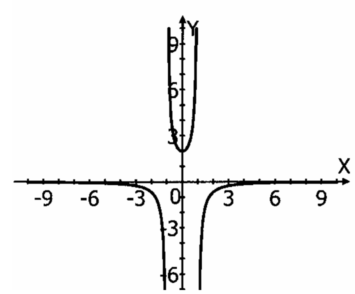


$x_{\min}=0$; $x_{\max}=\pm1$;

x	$-\infty; -1$	–1; 0	0; 1	1; $+\infty$
f	↘	↘	↗	↗

уравнение касательной имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$y = -\frac{8}{9}(x+2) - \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}x - \frac{22}{9}$;



ПС-13

1. $f'(x) = -\sin x - \sin 2x = 0$; $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$; $\sin x = 0$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x \in [0; \pi]$;

$x = 0, \pi$; $x = \frac{2\pi}{3}$; $f(0) = \frac{3}{2}$; $f(\pi) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$; $f(x)$ изменяется в пределах от $-\frac{3}{4}$ до $\frac{3}{2}$.

2. $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$; $S'(r) = 4\pi r = \frac{2V}{r^2}$; $S'(r) = 0$ при $4\pi r^3 = 2V$, откуда $2r = h$, т.е. $\frac{h}{r} = 2$.

ПС-14

1. $-h' = -e^x\cos x + e^x\sin x$; $f' = e^x\cos x + e^x\sin x$; сложим эти неравенства: $e^x\sin x = \frac{f' - h'}{2}$, т.е. $F(x) = \frac{f - h}{2} + C = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$.

2. а)

$$\int_{-2}^{14}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} dx = \int_{-2}^{14}\left(\frac{x}{2}+1\right)^{\frac{2}{3}} d\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{3\cdot 2}{5}\left(\frac{x}{2}+1\right)^{\frac{5}{3}}\Bigg|_{-2}^{14} = \frac{6}{5}\cdot 8^{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}\cdot 2^5 = \frac{192}{5};$$

б) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 2x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}0 = 0.$$

3. Тк. f — четная, то $f(-x) = f(x)$;

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_{-a}^{0} f(t)d(-t) = \int_{0}^{a} f(t)dt = -a\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

4. Найдем точки пересечения линий $y = x^2$ и $y = 4x - 4$, $y = 4x - 4$ и $y = 0$;

$x^2 - 4x + 4 = 0$; $x = 2$ и $x = 1$; тогда $S = S_1 + S_2$; $S_1 = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$;

$S_2 = \int_1^2 (4x-4)dx = (2x^2-4x)\Big|_1^2 = 2$, тогда $S = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.

ПС-15

1. $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_b a}} = a^{\log_a \log_b N} = \log_b N$.

2. $\log_{10} x + \frac{\log_{10} x}{\log_{10}\sqrt{10}} + \frac{\log_{10} x}{\log_{10}\sqrt[3]{10}} + \ \dots\ + \frac{\log_{10} x}{\log_{10}\sqrt[10]{10}} = \frac{11}{2}$;

$\log_{10}x(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = \frac{11}{2}$; т.к. 1, 2, 3, ... — арифметическая прогрессия, то $\frac{11}{2}\cdot 10\log_{10} x = \frac{11}{2}$, т.е. $x = \sqrt[10]{10}$.

б) $3^x + \log_2 x = 10$; заметим, что при $x = 2$ равенство выполняется, но слева функция монотонна, тогда других корней нет. Ответ: $x = 2$.

3. $3^{\lg x+2} = t$; $t < 3t^2 - 2$; $3t^2 - t - 2 > 0$; $(t-1)\left(t+\frac{2}{3}\right) > 0$;

$t \in \left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$; $\left[\begin{array}{l} 3^{\lg x+2} < -\frac{2}{3} \\ 3^{\lg +2} > 1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 3^{\lg x} < -\frac{2}{27} \\ 3^{\lg x} > \frac{1}{9} \end{array}\right.$; $3^{\lg x} > \frac{1}{9}$; $\lg x > -2$;

$x > 10^{-2} = 0{,}01$; $x \in (0{,}01; +\infty)$.

ПС-16

1. а) $2\lg(\lg x) = \lg(3 - 2\lg x)$;

$\begin{cases} \lg^2 x = 3 - 2\lg x \\ \lg x > 0 \\ \lg x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq 10^{\frac{3}{2}} \\ x > 1 \\ \lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in \left(1;\ 10^{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(10^{\frac{2}{3}};\ +\infty\right) \\ (\lg x + 3)(\lg x - 1) = 0 \end{cases}$; $x = 10$;

б) $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3} = 0$;

$\begin{cases} (x+7)^2 = (x+3)^3 \\ x > -3 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-1)(x^2+9x+22) = 0 \\ x > -3 \end{cases}$.

Ответ: $x = 1$.

2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+3)} \le 2{,}5 = \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; $-\log_{0,25}(x^2 - 5x + 8) \le 1$;

$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-5x+8) \ge -1 = \log_{\frac{1}{4}} 4$; $\log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2-5x+8}{4} \ge 0$; $\frac{x^2-5x+8}{4} \le 1$;

$x^2 - 5x+4 \le 0$; $(x - 4)(x - 1) \le 0$; $x \in [1; 4]$; ОДЗ: $x^2 - 5x+8 > 0$ для всех x.

Ответ: [1; 4].

3. $\begin{cases} x>0,\ y>0 \\ \sqrt[4]{x+y}=t \\ \sqrt[4]{xy+21}=r \\ t^2+r^2=13 \\ t+r=5 \end{cases}$; $\begin{cases} t=5-r \\ 25-10r+r^2+r^2=13 \end{cases}$;

$r^2-5r+6=0$; $(r-3)(r-2)=0$; $r_1=3$; $t_1=2$; $r_2=3$; $t_2=3$;

а) $r=3$, $t=2$;

$\begin{cases} x+y=16 \\ xy+21=81 \end{cases}$; $\begin{cases} x=16-y \\ y(16-y)=60 \end{cases}$; $\begin{cases} x=16-y \\ y^2-16y+60=0 \end{cases}$; $\begin{cases} (y-10)(y-6)=0 \\ x=16-y \end{cases}$;

$(10, 6)=(x, y)=(6,10)$;

б) $r=3$, $t=3$; $\begin{cases} x+y=24 \\ xy+21=16 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=-5 \\ x+y=61 \end{cases}$; не может быть, т.к. $xy>0$.

Ответ: (10; 6) и (6; 10).

ПС-17

1. $y'=4^x\ln 4$; $y'=y\ln 4$.

2. $f'=(f^{\ln(x)}(-x))'=(e^{h'x\ln g(x)})'=\left(h'\ln g+\frac{h}{g}g'\right)f^h$.

3. $F'(x)=e^x\left(R_4-P_4'+P_4''-P_4'''+P_4^{\text{iv}}\right)+e^x\left(P_4'-P_4''+P_4'''+P_4^{\text{iv}}+P_4^{\text{v}}\right)=$

$=e^x(P_4+P_4^{\text{v}})=e^xP_4$; т.к. $P_4^{\text{v}}=0$, т.к. многочлен не больше IV-ой степени.

ПС-18

1. $f(0)=0$; $f'=1-\frac{1}{1+x}$; при $x>0$ f' положительная, т.е. f — возрастает, из этого следует, что $f>0$ при $x>0$; $x-\ln(1+x)>0$; $x>\ln(1+x)$.

2. $F'(x)=\ln 2\cdot\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$.

3. $x(t)=Cx(t)$, тогда $x=C_1e^{Ct}$, найдем константы C_1 и C.

$\begin{cases} 45=C_1y^{3C} \\ 90=C_1y^{6C} \end{cases}$; $\begin{cases} C_1e^{3C}=45 \\ e^{3C}=2 \end{cases}$; $C_1=\frac{45}{2}$, тогда $e^C=2^{\frac{1}{3}}$; $e^{Ct}=2^{\frac{t}{3}}$.

Ответ: $x(t)=22{,}5\cdot 2^{\frac{t}{3}}$.

Вариант 10

ПС-1

1. Возведем обе части в квадрат:

$8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}=20-4\sqrt{5}$;

$16-4\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4(5-\sqrt{5})$; $4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=5-\sqrt{5}$;

$-6-2\sqrt{5}=1-2\sqrt{5}+5=6-2\sqrt{5}$.

2. Пусть в день $x \cdot 100\%$, тогда $(1-x)^4$ — за 4 дня.
$(1–x)^4$=0,512(1–x); $(1-x)^3 = 0{,}512$; $1 - x = 0{,}8$; $x = 0{,}2$, тогда в день 20%.

3. $\frac{(t-3)(t+2)-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{(t+3)(t-2)-(t-3)\sqrt{t^2-4}} = -\frac{\left(\sqrt{t+2}(t-3)\sqrt{t+2}-(t+3)\right)\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}((t-3)\sqrt{t}+2-(t+3)\sqrt{t-2})} =$

$= -\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}$ при $t = 5{,}2$ выражение равно –1,5.

ПС-2

1. Рассмотрим теорему синусов, тогда стороны пропорциональны 12, 35, 37, пусть 1 — x см, $S = \frac{abc}{4R} = \frac{12-35\cdot 37 - x^3(\text{см}^3)}{4\cdot 18{,}5\ (\text{см})} = 210\ (\text{см}^2)$;

$S = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)}$; P =a+b+c= (12+35+37)x (см)=84 см.

2. $\begin{cases} x^2+x+1 > -2-9x-2x^2 \\ |x| < 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2+10x+3>0 \\ |x|<4 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right) > 0 \\ |x|<4 \end{cases}$;

$x \in (-4;\ -3) \cup \left(-\frac{1}{3};\ 4\right)$.

ПС-3

1. $$\frac{a^{\frac{1}{3}}c^2 - 3b^{\frac{1}{2}}}{(c^2+3)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}})} + \frac{3a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}}c^2}{(c^2-3)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}})} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}c^4 - 3b^{\frac{1}{2}}c^2 - 3a^{\frac{1}{3}}c^2 + 9b^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{3}}c^2 + b^{\frac{1}{2}}c^4 + 9a^{\frac{1}{3}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^2}{(c^2+3)(c^2-3)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}})} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}c^4 + 9b^{\frac{1}{2}} + 9a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}}c^4}{(c^4-9)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}})} = \frac{c^4+9}{c^4-9}.$$

2. $\frac{1}{y^2-1} + \frac{2}{y^2+2} - \frac{2}{y^4-1} = 0$; $\frac{(y^2+2)(y^2+1)+2(y^4-1)-2(y^2+2)}{(y^2-1)(y^2+1)} = 0$;

$y^2 = t$; $\frac{3t^2+t-4}{(t^2+1)(t^2-1)} = 0$; $\frac{(t-1)\left(t+\frac{4}{3}\right)}{t^2-1} = 0$; $\frac{t-1}{t^2-1} = 0$; $\frac{1}{t+1} = 0$ — решений нет.

ПС-4

1. Сделаем замену: $t=x^2 \Rightarrow 2t^2+5t+2=2(t^2+5/2\,t+1)$; $t^2+5/2\,t+1=0$;

$D=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4} \Rightarrow t_1=-\frac{1}{2}$; $t_2=2$. Таким образом: $2x^4+5x^2+2=$

$=2(t^2+5/2\,t+1)==2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t+2)=2(x^2+\frac{1}{2})(x^2+2)=(2x^2+1)(x^2+2)$.

2. $2b^2x^2-bx-3=0$; $D=b^2+24b^2=25b^2$; $x_{1,2}=\frac{b\pm 5b}{4b^2}=\frac{3}{2b}$; $-\frac{1}{b}$; т.к. $\left|\frac{1}{b}\right|<\left|\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{b}\right|$, то все корни меньше 1 по модулю при $b\geq\frac{3}{2}$.

3. $x^2-2x-2=0$; $D=4+8=12>0$ — корни существуют. Рассмотрим теорему Виета: $x_1+x_2=2$; $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=4$; $x_1x_2=-2$; $x_1^2+x_2^2=8$; $x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4=64$; $x_1^4+x_2^4=56$.

ПС-5

1. $a_3\cdot a_6=406$; $\frac{a_9-6}{a_4}=2$; $(a_1+2d)(-a_1+5d)=406$; $a_1+8d-6=2a_1+6d$; $a_1-2d=-6$; $a_1=2d-6$, тогда $(4d-6)(7d-6)=406$; $28d^2-42d-24d+36=406$; $28d^2-66d-370=0$; $(d-5)\left(d+\frac{18{,}5}{7}\right)=0$; $a_{1,1}=4$; $a_{1,2}=-\frac{79}{7}$; $d_{1,1}=5$;

$d_{1,2}=\frac{37}{14}$, т.к. a_4 и a_9 — целые, то ответ: $a_1=4$, $d=5$.

2. $3+33+\ldots+\underbrace{33\ \ldots\ 3}_{1992}=3\left(1+11+\ \ldots\ +\underbrace{1111}_{1992}\right)=3(1992+10\cdot 1991+\ \ldots)=$

$=3\cdot\frac{10^{1993}-10-9\cdot 1991}{9^2}$.

3. $1+2\cdot\frac{1}{3}+\ \ldots=\sum_{n=1}^{p}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{9}{4}-\frac{9+6p}{n\cdot 3^p}$.

ПС-6

1. а) $\frac{2\cos\alpha\cdot\ \ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}{2\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{\sin\alpha}{2^{1+n}\sin\frac{\alpha}{2^n}}$;

б) $\frac{-\sin 47°-\sin 61°+\sin 11°+\sin 23°}{\cos 7°}=\frac{-2(\sin 54°\cos 7°)+2(\sin 18°\cos 7°)}{\cos 7°}=$

$=2(\sin 18°-\sin 54°)=-1$.

2. $\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha+\ ...=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}2^n\alpha$.

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}+\ ...\ +\frac{1}{\sin 2^n\alpha}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{1-2\cos\frac{2\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin 2\alpha}+\ ...\ +\frac{1}{\sin 2^n\alpha}+\frac{\sin 2^n\alpha}{\cos 2^n\alpha}=$$

$$=-\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin 2\alpha}+\ ...\ +\frac{1}{\sin 2^n\alpha}+\frac{\sin 2^n\alpha}{\cos 2^n\alpha}=0.$$

3. $3\sin\beta = \sin(\alpha + (\alpha + \beta))$; $3\sin\beta = \sin\alpha\cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$;
$3\sin\beta = \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - \sin^2\alpha\sin\beta + \sin(\alpha + \beta)\cos\alpha$;
$3\sin\beta = -\sin\beta + \sin\beta\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$;
$2\sin\beta = \cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$, тогда $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$; $\cos\alpha\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$; $2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta) = -2\sin^2\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = -2\sin\beta + 2\sin\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = -2\sin\beta + 2\cos\alpha\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha(\sin(\alpha + \beta))$.

ПС-7

1. а) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$; $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\cos x\sin x}$. Рассмотрим $\frac{1}{\cos x\sin x}=\frac{2}{\sin 2x}$, тогда $\left|\frac{1}{\cos x\sin x}\right|\ge 2$. Рассмотрим $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. $\left|\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\right|\le 2$, т.е. уравнение имеет решения, только если оно совпадает с решением системы: $\left|\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\right|=2,\ \left|\frac{2}{\sin 2x}\right|=2.$

Решим систему: $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 2x=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}$; $n, k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$;

$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sin 2x=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}$; $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 2x=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi k\end{cases}$;

$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sin 2x=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi n\end{cases}$; тогда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $n\in Z$;

б) $2\sin 7x \ + \sqrt{3}\cos 3x \ + \ \sin 3x \ = \ 0$; $\sin 7x \ + \ \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)= \ 0$;

$5\sin 7x \ + \ \sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)= \ 0$; $\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $5x+\frac{\pi}{6}=\pi n$ или

$2x-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$, $n, k \in Z$; $x=-\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{5}n$ или $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$, $n, k \in Z$.

2. а) $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$; $\cos x - \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x) > 0$;
$(\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) > 0$; $(\cos x - \sin x)(1 - \cos x - \sin x) > 0$;

$\begin{cases}\cos x-\sin x>0\\ 1-(\cos x+\sin x)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos x-\sin x<0\\ 1-(\cos x+\sin x)<0\end{cases}$;

$\begin{cases}x\in\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\\ x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi(n+1)\right)\end{cases}$; $\begin{cases}x\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\\ x\in\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\end{cases}$;

$x\in\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$; $n \in Z$

б) $\sqrt{5-2\sin x}\ge 6\sin x-1$; ОДЗ: $5 - 2\sin x \ge 0$; $\sin x \le \frac{5}{2}$;$6\sin x - 1 \le 0$ или

$5 - 2\sin x \ge (6\sin x - 1)^2$; $\sin x \le \frac{1}{6}$; $5 - 2\sin x \ge 36\sin^2 x - 12\sin x + 1$;

$x\in\left(\pi-\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n;\ 2\pi+\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n\right)$, $\sin x = t$;

$x\in\left(\pi-\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n;\ \arcsin\frac{1}{6}+2\pi(n+1)\right)$, $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{2}{3}\right)\le 0$;

тогда $\sin x \le \frac{1}{2}$, т.е. $x\in\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi(n+1)\right]$, $n \in Z$.

ПС–8

1. а) $8\cos^2 x \ - \ 6\cos x \ + \ 1 \ \ge \ 0$; $\cos x \ = \ t$; $8t^2 \ - \ 6t \ + \ 1 \ \ge \ 0$;
$\left(\cos x-\frac{5}{6}\right)\left(\cos x-\frac{1}{6}\right)\ge 0$; $x\in\left[-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n;\ +\arccos\frac{1}{4}+2\pi n\right]\cup$
$\cup\left[\arccos\frac{1}{2}+2\pi n;\ -\arccos\frac{1}{2}+2\pi(n+1)\right]$, $n \in Z$;

$x\in\left[-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n;\ +\arccos\frac{1}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi(n+1)\right]$, $n \in Z$;

б) $\begin{cases}x>0\\ \log_{1/8}x>0\\ \log_{1/4}\log_{1/8}x>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>0\\ x<1\\ \log_{1/8}x<1\end{cases}$; $\begin{cases}x>0\\ x<1\\ x>1/8\end{cases}$; $x\in\left(\frac{1}{8};\ 1\right)$;

в) $\begin{cases}\sin 2x > 0\\ \cos x > 0\\ \cos x \neq 1\end{cases}$; $\begin{cases}x \neq 2\pi n\\ x \in \left(\pi n;\ \pi/2 + \pi n\right)\\ x \in \left(-\pi/2 + 2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n\right)\end{cases}$; $x \in \left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

2. а) $f(-x) = -\mathrm{tg}^3 x + \sin x^5 = -f(-x)$ — нечетная;

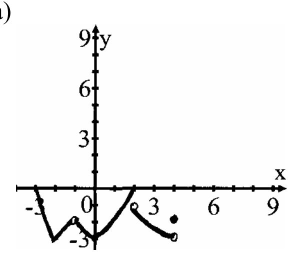
б) $f(-x) = \ln\left|\dfrac{-(x+1)}{-x+1}\right| = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = -\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = -f(x)$ —нечетная;

в) $f(-x) = \sin\cos x - \cos(-\sin x) = f(x)$ — четная.

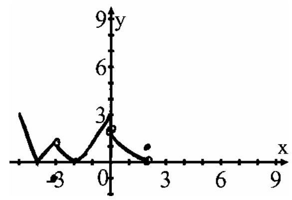
3. Т.к. функция четная, то на $[-\infty; 0]$ возрастает, тогда для всех $x \in (-\infty; -2)$ $f(x) < f(-2) = f(2)$; $x \in (-2; 0)$ $f(x) > f(-2) = f(2)$, тогда $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

ПС–9

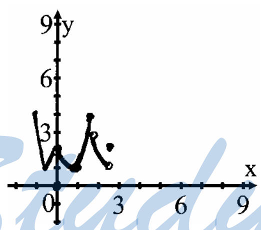
1.а)



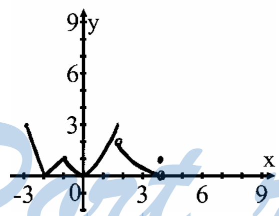
б)



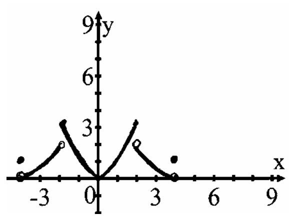
в)



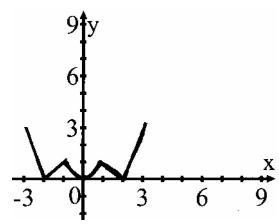
г)



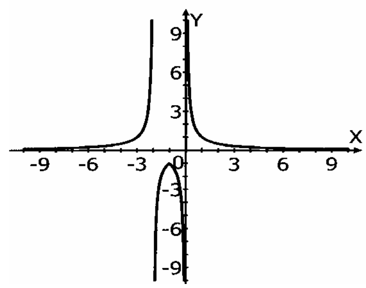
д)



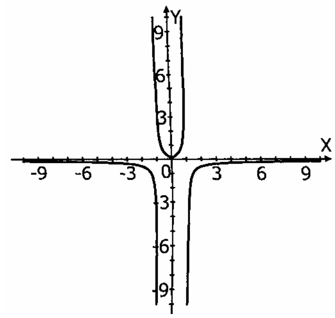
е)



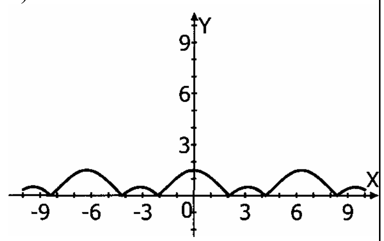
2.а)



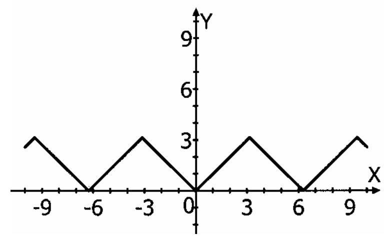
б)



в)



г)

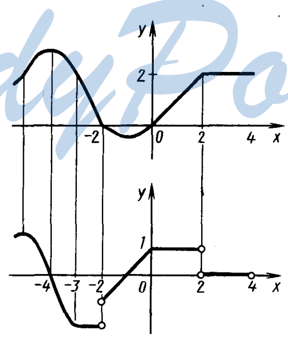


ПС–10

1.а) $y'=|x| + (|\,x\,|)' = 0$; б) $y' = \left(\left(x-1\right)^{15}\right)' \cdot 2^{(x-1)^{15}} \ln 2 = 15(x-1)^{14} \cdot 2^{(x-1)^{15}} \ln 2$;

в) $y' = \dfrac{1}{x^{\ln x}}\left(x^{\ln x}\right)' = \dfrac{1}{x^{\ln x}}\left(e^{\ln^2 x}\right)' = \dfrac{2\ln x}{x^{\ln x+1}} e^{\ln^2 x} = \dfrac{2\ln x}{x^{\ln x+1}} x^{\ln x}$;

2.



3. Т.к. линейная комбинация решений является решением, то $\dfrac{1}{3}y_1 - 4y_2$ — решение, что проверяется подстановкой.

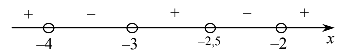
ПС–11

1. а) $$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+4}<0;$$

$$\frac{(x+3)(x+4)+2(x+2)(x+4)-3(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+4)}<0;$$

$$\frac{x^2+3x+4x+12+2x^2+4x+8x+16-3x^2-9x-6x-18}{(x+2)(x+3)(x+4)}<0;$$

$$\frac{4x+10}{(x+2)(x+3)(x+4)}<0;$$



$x \in (-4; -3) \cup (-2{,}5; -2)$;

б) $4x^2+12x\sqrt{1+x}-27(1+x)<0$; $4x^2+18x\sqrt{1+x}-(6x\sqrt{1+x}+27(1+x))<0$;

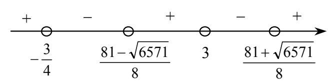
$2x(2x+9\sqrt{1+x})-3\sqrt{1+x}\,(2x+9\sqrt{1+x})<0$; $(2x+9\sqrt{1+x})(2x-3\sqrt{1+x})<0$;

Решим уравнение: $(2x+9\sqrt{1+x})(2x-3\sqrt{1+x})=0$; $\frac{4}{81}x^2=1+x$ или

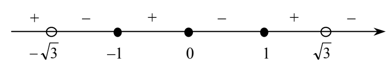
$\frac{4}{9}x^2=1+x$; $4x^2-81x-1=0$ или $4x^2-9x-9=0$; $x=\dfrac{81\pm\sqrt{6571}}{8}$;

$\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-3)=0$; ОДЗ: $x>-1$.

$$x\in\left(\frac{81-9\sqrt{97}}{8};\ 3\right);$$



в) $$\frac{(\mathrm{tg}x+1)(\mathrm{tg}x-1)\mathrm{tg}x}{\left(\sqrt{3}-\mathrm{tg}x\right)\left(\sqrt{3}+\mathrm{tg}x\right)}\le 0;$$



$\mathrm{tg}x \in (-\sqrt{3}; -1] \cup [0; 1] \cup (\sqrt{3}; +\infty)$;

$$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$$

2. Пусть прямая $y = ax + b$ касается $f(x)$ в точке x_0.
$f(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - 3 = ax_0 + b$; $f'(x_0) = 2x_0 - 2 = a$; т.к. прямая проходит через M, то $-4 = b - a$; $4 = a - b$;

$$\begin{cases} x_0^2-2x_0-3=ax_0+b \\ 2x_0-2=a \\ a-b=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a=2x_0-2 \\ b=2x_0-6 \\ (x_0+3)(x_0-1)=0 \end{cases},$$ $x_{01} = +1$; $a_1 = 0$; $b_1 = -4$; $x_{02} = -3$; $a_2 = -8$; $b_2 = -12$, тогда

искомые касательные: $y = -4$; $y = -8x - 12$.

ПС–12

1. $$f'(x)=\frac{(4\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{3}{x})x-(2\ln^2 x+3\ln x)}{x^2}=$$

$$=\frac{4\ln x+3-2\ln^2 x-3\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-2\ln^2 x+3}{x^2};$$

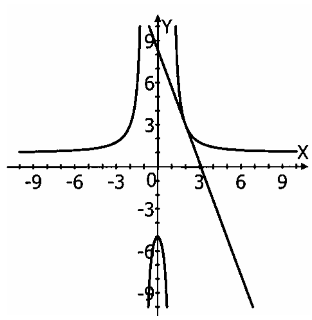
$f(x)=0$ при $x=\frac{1}{e}$; $x=e\sqrt{e}$; тогда $x_{\min}=\frac{1}{e}$; $x_{\max}=e\sqrt{e}$, т.к. убывает на $\left(0;\ \frac{1}{e}\right]$ и $\left[e\sqrt{e};\ +\infty\right)$; возрастает на $\left[\frac{1}{e};\ e\sqrt{e}\right]$.

2.

$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-(x^2+5)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-12x}{(x^2-1)^2}$;

$f'(x)=0$ при $x=0$; $y=ax+b$; $f(2)=-\frac{8}{3}$;

$y\le-\frac{8}{3}a+\frac{25}{3}$.



ПС–13

1. $f'(x)=\sin 2x+\cos 2x$; $f'(x)=0$ при $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; тогда из значений $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ наименьшее $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, наибольшее $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}\le f\le\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

2. $h=\frac{3V}{\pi r^2}$; $S=\pi rl=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi\sqrt{r^4+\frac{9V^2}{\pi^2 r^2}}$; $f'(r)=\pi\left(4r^3-\frac{18V^2}{\pi r^3}\right)$;

$f'(r)=0$ при $V^2=\frac{4\pi^2}{18}r^2$, откуда $\frac{h^2}{r^2}=2$; $\frac{h}{r}=\sqrt{2}$.

ПС–14

1. $g'=e^x\sin x+e^x\cos x$; $f'=e^x\cos x-e^x\sin x$; $\frac{g'-f'}{2}=e^x\cos x=f$, т.е. $F(x)=\frac{g-f}{2}+C=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

2. а) $\int_0^{-4}\sqrt{(4-3x)^3}\,dx=-\frac{1}{3}\int_0^{-4}(4-3x)^{\frac{3}{2}}d(4-3x)=-132\frac{4}{15}$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(-x)dx - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x d(3x) = 0$.

3. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$.

4. Найдем точки пересечения линий x=2, x=–1, x=–2, т.к. x>–1, S=S_1–S_2;

S_1= $\int_{-1}^{2}(-x^2+4x+4)dx$=$(-\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3}$+8+8 $-\frac{1}{3}$ – 2+4= –3+16+2=15;

$S_2 = \int_{-1}^{2} x^3 = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{2} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$; $S = 11\frac{1}{4}$.

ПС–15

1. $2^{\sqrt{\log_2 x}} - x^{\sqrt{\log_x 2}} = 2^{e^{\frac{1}{2}\ln\log_2 x}} - x^{e^{\frac{1}{2}\ln\log_x 2}} = \left(2^{\log_2 x} - x^{\log_x 2}\right)^{e^{\frac{1}{2}}} = 0$;

2. а) $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1|+|x-1|)$. При $|x| > 1$ левая часть $\le 1/2$, правая меньше $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $|x| \le 1$, $2^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Решим его: $2^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$;

$|x| = 1/2$; $x = \pm 1/2$. Ответ: $\pm 1/2$.

б) $2^x + \log_3 x = 9$ при $x = 3$ получаем корень уравнения, т.к. $2^x = \log_3 x$ — монотонная функция, то $x = 3$ — единственный корень.

3. $\log_{\cos^2 x} \sin x > 1$; $\begin{cases} x \ne \pi n, \\ \cos^2 x > \sin x, \\ \sin x > 0, \\ \cos x \ne 0, \end{cases}$

$x \in (2\pi n;\ \arcsin \sqrt{5}-1/2 + 2\pi n) \cup (\pi;\ -\arcsin \sqrt{5}-1/2 + 2\pi n)$, n∈Z.

ПС–16

1. а) $\log_5 \lg^2 x = \log_5(10 - 9\lg x)$; $\begin{cases} x \ne 1 \\ 10 - 9\lg x \ge 0 \\ \lg x = t \\ t^2 = 10 - 9t \end{cases}$; $t^2+9t-10=0$; D=121 ⇒ t_1=1,

t_2=–10 — не подходит. Поскольку: t=lg$x$=1, то x=10. Ответ: x=10.

б) $3x^2 - 2x + 15 + 3x^2 - 2x + 8 + 2\sqrt{(3x^2-2x+15)(3x^2-2x+8)} = 49$;

$6x^2 - 4x + 26 = 3x^2 - 2x + 13 = -\sqrt{(3x^2-2x+8)^2 - 49^2}$;

$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 8 \ge 0 \\ (3x^2-2x+13)^2 = 3x^2 - 2x + 8 \end{cases}$;

$x = -1/3$.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} \le \frac{1}{2}$; $\sqrt{3} > \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} \ge \frac{1}{2}$. Решим первое неравенство: $\sqrt{3} > \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} =$ ctg$x$; $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \pi(n+1)\right)$; $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \text{ctg}x \ge \frac{1}{2}$; $x \in \left(\pi n;\ \pi/3 + \pi n\right)$; $x \in \left(\pi/6 + \pi n;\ \pi/3 + \pi n\right)$.

3. $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = t$; $t + \frac{1}{t} = 2$; $t^2 + 1 = 2t$; $t^2 - 2t + 1 = 0$; $t = \pm 1$, тогда $\frac{3x-2y}{2x} = \pm 1$. Рассмотрим первый вариант: $\frac{3x-2y}{2x} = 1$; $x=2y$; $4y^2-18=$ $= 8y^2 - 18y$, получим x и y (3; 6); $\frac{3x-2y}{2x} = -1$. Ответ: (6; 3) (3; 15).

ПС–17

1. $y' = -2 \cdot 3^{-2x}\ln 3$; $y' = -2y\ln 3$, тогда $y' + 2\ln 3y = 0$.
2. $f'(x) = -e^{-x} + 1$ при $x > 0$; $f'(x) > 0$, т.е. $f(x) > f(0)$ для всех $x > 0$, т.е. $e^{-x} > 1 - x$.
3. $F'(x) = -e^{-x}(-P_3(x) - P_3'(x) - P_3''(x) - P_3'''(x)) + e^{-x}(-P_3'(x) - P_3''(x) - P_3'''(x) - P_3^{IV}(x))$; $P^{IV} = 0$, т.к. многочлен степени не выше 3, тогда $F'(x) = f(x)$.

ПС–18

1. $f(x) = \frac{\ln h(x)}{\ln g(x)}$; $f'(x) = \frac{\frac{\ln g(x)}{h(x)}h'(x) - \frac{\ln h(x)}{g(x)}g'(x)}{\ln^2 g(x)}$.

2. Рассмотрим $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$; $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}$; $f'(x) = 0$ при $x = e$, тогда $f' > 0$ на $(0; e)$; $f \in (0; f(e)]$; $f'(x) < 0$; $x > e$; $f \in (0; f(e)]$. Ответ: $(0; f(e)] = (0;\ e^{1/e}]$.

3. $x(t) = Cx(t)$; $x = C_1e^{Ct}$; $15 = C_1e^{5C}$; $60 = C_1e^{10C}$; $4 = e^{5C}$, тогда $C_1 = \frac{15}{4}$; $e^{5C} = 4$; $5C = \ln 4$; $e = \frac{\ln 4}{5}$, тогда $x = \frac{15}{4}e^{\frac{\ln 4}{5}t}$.

ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. $F' = \frac{1}{x^2} = f$.

2. $F(x) = -4\cos x + C$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = C - 0 = 0$; $C = 0$; $F = -4\cos x$.

3. $\int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = -2\sqrt{x}$; $\int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = -2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 8 - 4 = 4$.

4. а) $S = \int\limits_0^3 \frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^3 = \frac{9}{2}$;

б) $S_1 = \int\limits_1^2 \frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$; $S_2 = y(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$; $S = S_1 - S_2 =$

$= \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

5. $S = S_1 + S_2$.

$S_1 = \int\limits_8^{\frac{2\pi}{3}} 2\sin x dx = -2\cos x\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{2} + 2 = 3$; $S_2 = -\int\limits_8^{\frac{2\pi}{3}} -\sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2}$; $S = 4\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. $F' = -\frac{4}{x^2} = f(x)$.

2. $F = 8\sin x + C$.

а) $F = 8\sin x$; б) $F(\pi) = 0 = C$.

3. $\int\limits_1^9 \frac{6x}{\sqrt{x^3}}dx = 6\int\limits_1^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = 12x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^9 = 36 - 12 = 24$.

4. а) $S = \int\limits_0^2 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{16}{3}$;

б) $S_1 = \int\limits_1^2 2x^2dx = \frac{14}{3}$. $S_2 = y(x_2 - x_1) = 2(2-1) = 2$; $S = S_1 - S_2 = \frac{14}{3} - \frac{6}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

5. $S = S_1 + S_2$;

$S = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx - \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} -2\sin x dx = 3\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx = -3\cos x\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = -3(-\frac{1}{2} - 1) = \frac{9}{2}$.

Вариант 3

1. $F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2} = f(x)$.

2. а) $F(x) = \int f(x)dx = 2\int \sin 3x dx = \frac{2}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{2}{3}\cos 3x + C$;

б) $F(\pi) = \frac{2}{3} + C = 0$; $F(x) = -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{2}{3}$.

3. $\int\limits_1^4 \frac{3x^{2,5}}{\sqrt{x}}dx = x^3\Big|_1^4 = 63$.

4. а) $S = \int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$;

б) $S_1 = \int\limits_{-1}^{1}(-x^2+4)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(3-\frac{1}{3}\right)2 = \frac{22}{3}$;

$S_2 = y(x_2 - x_1) = 3(1-(-1)) = 6$; $S = S_1 - S_2 = \frac{22}{3} - 6 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

5. $S = \int\limits_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{x}{2}+1\right)dx = x\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx = \pi + \int\limits_0^{\pi}(\cos 2x + 1)dx = 2\pi \approx 6,28$.

Вариант 4

1. $F'(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{x^2} = f(x)$.

2. а) $F(x) = \int f(x)dx = 3\int\cos 2x dx = \frac{3}{2}\int\cos 2x d(2x) = \frac{3}{2}\sin 2x + C$;

б) $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} + C = 0$; $F(x) = \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{3}{2}$.

3. $\int\limits_1^9 6x^{-\frac{1}{2}}dx = 12x^{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^9 = 36 - 12 = 24$.

4. а) $S = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)2 = 4\sqrt{3}$;

б) $S_1 = \int\limits_{-1}^{1}(3-x^2)dx = \left(3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$. $S_2 = y(x_2 - x_1) = 2(1 - (-1)) = 4$;

$S = S_1 - S_2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

5. $S = \int\limits_0^{\pi}(2\sin^2 x/2 + 1)dx = \int\limits_0^{\pi}(2-\cos x)dx = 2\pi$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. $\sqrt[4]{49-33} = \sqrt[4]{16} = 2$.

2. $\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$.

3. а) $x^3=\dfrac{1}{8}$; $x=\dfrac{1}{2}$; б) $3x–2=16–8x+x^2$; $x^2–11x+18=0$; $(x-2)(x-9)=0$; $x=2$, $x=9$, т.к. $4-9<0$, то ответ: $x=2$.

4. $\begin{cases}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=8\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=2\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\end{cases}$; $\sqrt{x}=3$, $x=9$; $\sqrt{y}=1$, $y=1$.

5. $\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \sin x\le \dfrac{4}{5}\\ 2-2{,}5\sin x=1-\sin^2 x\end{cases}$; $\begin{cases}x\in[-\pi/2+2\pi n;\ \pi/2+2\pi n]\\ x\in\left[\pi-\arcsin\dfrac{4}{5}+2\pi n;\ \arcsin\dfrac{4}{5}+2\pi(n+1)\right]\\ x\in(-1)^n\,\pi/6+\pi n\end{cases}$;

$x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n$.

Вариант 2

1. $\sqrt[6]{81-17}=\sqrt[6]{64}=2$.

2. $\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-b)(a^{\frac{1}{2}}+b)}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b)}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}}$.

3. а) $x^3=-\dfrac{1}{27}$; $x=-\dfrac{1}{3}$; б) $3x+1=x^2-2x+1$; $x^2-5x=0$; $x=0$, $x=5$, т.к. $0-1<0$, то ответ: $x=5$.

4. $\begin{cases}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21\\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=7\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$; $\sqrt{x}=5$, $x=25$; $\sqrt{y}=2$, $y=4$.

5. $\sin^2 x=2-2{,}5\cos x=1-\cos^2 x$; $\cos^2 x-2{,}5\cos x+1=0$;

$(\cos x-2)(\cos x-1/2)=0$; $\cos x=1/2$; $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, т.к. $\sin(-\pi/3)<0$, то

$x=\pi/3+2\pi n$.

Вариант 3

1. $\sqrt[4]{95-14}=\sqrt[4]{81}=3$.

2. Применим формулу для разности кубов:

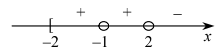
$$\frac{a-b}{a^{1/3}-b^{1/3}}=\frac{(a^{1/3}-b^{1/3})(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3})}{(a^{1/3}-b^{1/3})}=a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}.$$

3. а) $x^4 = \frac{1}{16}$; $x = \pm\frac{1}{2}$; б) $2x^2 - 3x + 2 = 4x^2 - 8x + 4$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

$(x-2)(x-1) = 0$, т.к. $2 \cdot \frac{1}{2} - 2 < 0$. Ответ: $x = 2$.

4. $\begin{cases} 2xy = 72 \\ (x+y)^2 = 169 \\ (x-y)^2 = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y = 13 \\ x-y = 5 \end{cases}$; $x_1 = \pm 9$; $x_2 = \pm 4$; $y_1 = \pm 4$; $y_2 = \pm 9$.

5. $\sqrt{x+2} - x > 0$. Решим уравнение $\sqrt{x+2} - x = 0$;
$x + 2 = x^2$; $(x-2)(x+1) = 0$; $x \in [-2; 2)$.



Вариант 4

1. $\sqrt[6]{75-11} = \sqrt[6]{64} = 2$.

2. Применим формулу для суммы кубов:

$$\frac{a+b}{a^{1/3}+b^{1/3}} = \frac{(a^{1/3}+b^{1/3})(a^{2/3}-a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3})}{(a^{1/3}+b^{1/3})} = a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}.$$

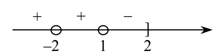
3. а) $x^6 = 1/64$; $x = \pm 1/2$; б) $2x^2 + 5x + 4 = 4x^2 + 8x + 4$; $2x^2 + 3x = 0$;

$x = 0$, $x = -3/2$ т.к. $2 \cdot -\frac{3}{2} + 2 < 0$. Ответ: $x = 0$.

4. $\begin{cases} x+y = 13 \\ x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y} = 15 \\ (x-y)^2 = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 12 \\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = 25 \\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 1 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} = -1 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 9. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (4, 9) и (9, 4).

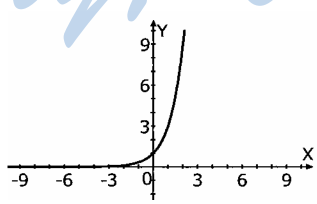
5. $2 - x > x^2$; $x^2 + x - 2 > 0$; $(x+2)(x-1) = 0$;
$x \in (-\infty; 1)$.



Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. От $\frac{1}{3}$ до 27.

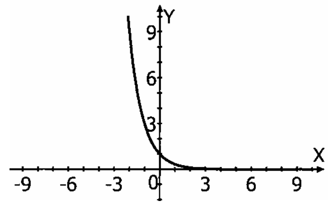


2. а) $2^x = 2^2 \cdot 2^6 = 2^8$; $x = 8$; б) $2^x\left(1 + 3/8\right) = 22$; $2^x = 16 = 2^4$; $x = 4$.

3. $3^{x^2-4} \le 243 = 3^5$; $x^2 - 4 \le 5$; $x^2 - 9 \le 0$; $x \in [-3; 3]$.

4. $|\sin x - 1| = 2$; $\sin x = -1$; $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

Вариант 2



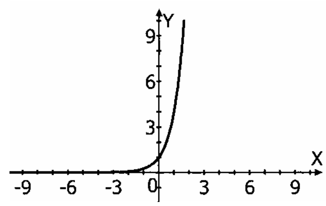
1. Убывает от 3 до $1/27$.

2. а) $3^{2x} = 3^4 \cdot 3^3 = 3^7$; $x = 7/2$ =3,5;

б) $3^x(1 + 1/9) = 57$; $3^x = 3^3$; $x = 3$.

3. $2^{x^2-1} \ge 8$; $x^2 - 1 \ge 3$; $x^2 \ge 4$,
$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
4. $|\cos x - 2| = 3$; $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$.

Вариант 3



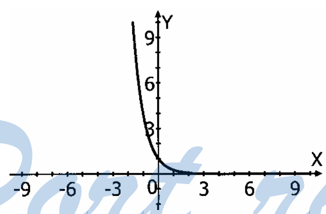
1. От $\frac{1}{16}$ до 16.

2. а) $5^{3x} = 5^{-1} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{3}{2}}$; $3x = -\frac{3}{2}$;

$x = -\frac{1}{2}$; б) $4^x\left(\frac{13}{16}\right) = 52$; $4^x = 4^3$; $x = 3$.

3. $(0,3)^{x^2-2x+2} \le (0,3)^2$; $x^2 - 2x + 2 \le 2$; $x(x-2) \le 0$, $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.
4. $|x - 1| = x - 1$; $x \ge 1$.

Вариант 4



1. Убывает от 16 до $\frac{1}{16}$.

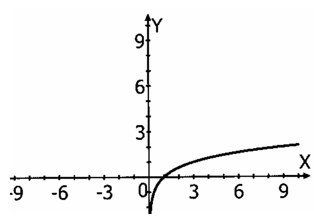
2. а) $3^{2x} = 3^{-2} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{5}{2}}$; $x = -\frac{5}{4}$;

б) $5^x\left(1 - \frac{7}{25}\right) = 90$; $5^x = 5^2 \cdot 5 = 5^3$; $x = 3$.

3. $x^2 - 4x + 2 \le 2$; $x \in [0; 4]$.
4. $5^{|x+1|} = 5^{x+1}$; $x \ge -1$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1



1. Возрастает от –1 до 3.

2. а) $\frac{\log_2 x^2 - 3x}{\log_2 1/2} = -2$; $x^2 - 3x - 4 = 0$;

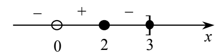
$(x - 4)(x + 1) = 0$; $x = 4, -1$;

б) $\frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 3$; $\log_2 x = 2$; $x = 4$.

3. $\log_4(x + 1) < -0{,}5$; $x + 1 < 4^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} x \ge -1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; -\frac{1}{2})$.

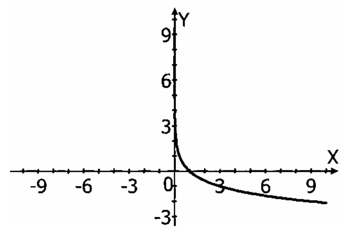
4. $\begin{cases} xy = 4 \\ y - 2x = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 7 + 2x \\ 7x + 2x^2 - 4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ y = 7 + 2x \end{cases}$; $x = \frac{1}{2}$; $y = 8$.

5. $\dfrac{\log_2(3 - x)}{x} \ge 0$; $x \in (0; 2]$.



Вариант 2

1. Убывает от 1 до –3.



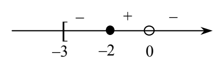
2. а) $x^2 + 4x - 5 = 0$; $(x - 1)(x + 5) = 0$; $x = 1$, $x = -5$;

б) $-\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = -1$; $\log_3 x\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$; $\log_3 x = 2$; $x = 9$.

3. $\log_{0,5}(x - 1) > -2$; $\log_2(x - 1) < 2$; $0 < x - 1 < 4$; $x \in (1; 5)$.

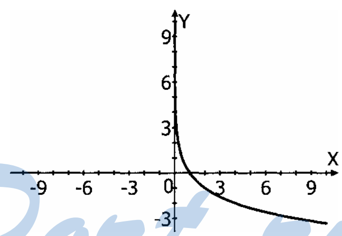
4. $\begin{cases} xy = 3 \\ y - 3x = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} x(8 + 3x) = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$; $x = \frac{1}{3}$; $y = 9$.

5. $\dfrac{\log_{0,5}(x + 3)}{x} \ge 0$; $x \in [-2; 0)$.



Вариант 3

1. Убывает от 2 до –3.



2. а) $\dfrac{\log_2(x^2 + 6x)}{\log_2 \frac{1}{4}} = -2$; $x^2 + 6x - 16 = 0$; $(x - 2)(x + 8) = 0$; $x = 2$, $x = -8$;

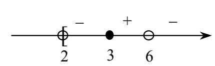
б) $\log_2 \dfrac{8}{x\sqrt{x} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}\log_2 x = -\dfrac{1}{2}$

$3 - \log_2 x = 6$; $\log_2 x = 2$; $x = 4$; $\frac{3}{2}\log_2 x = 3$; $\log_2 x = 2$; $x = 1$.

3. $\lg x(\lg x - 1) > 0$; $\lg x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, $x \in (0; 1) \cup (10; +\infty)$.

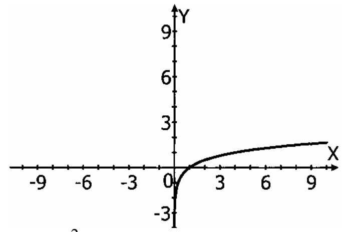
4. $\begin{cases} xy = 4 \\ x = 15 + 4y \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 4 \\ (15 + 4y)y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 4y^2 + 15y - 4 = 0 \\ x = \frac{4}{y} \end{cases}$; $y = \frac{1}{4}$; $x = 16$.

5. $\dfrac{\log_{0,4}(x - 2)}{x - 6} \le 0$; $x \in (2; 3] \cup (6; +\infty)$.



Вариант 4

1. Возрастает от –1 до 2.



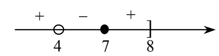
2. а) $\log_{1/3}(x^2 + 8x) = -2$; $x^2 + 8x = 9$; $(x+9)(x-1)=0$; $x_1=-9$; $x_2=1$;

б) $2 - \log_5 x + 1/2 + 1/2\log_5 x = 2$; $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\log_5 x = 2$; $\log_5 x = 1$; $x = 5$.

3. $\lg x(\lg x + 1) < 0$; $\lg x \in (-1; 0)$; $x \in \left(1/10;\ 1\right)$.

4. $\begin{cases} xy = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 2 \\ y(3 + 2y) = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 2 \\ 3y + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$; $y = 1/2$; $x = 4$.

5. $\frac{\log_3(8 - x)}{4 - x} \le 0$; $x \in (4; 7]$.



Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. а) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$; $f(0) = 1$; б) $\varphi'(x) = -\frac{1}{6x}$; $\varphi'\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3}$.

2. $S_1 = \int_0^2 e^x dx = e^x\Big|_0^2 = e^2 - 1$; $S_2 = y(x_2 - x_1) = 1(2-0) = 2$; $S = S_1 - S_2 = e^2 - 1 - 2 =$
$= e^2 - 3 \approx 4{,}4$.

3. $f'(x) = 2\ln x + 2$; $f'(x) = 0$; $\ln x = -1$; $x = e^{-1}$; f убывает на $(0; e^{-1}]$; возрастает на $[e^{-1}; +\infty)$; $x_{\min} = e^{-1}$.

4. $f' = 4^t\ln 4$; $\varphi' = 2^{t+1}\ln 2$; $2^{2t} > 2\cdot 2^t\frac{\ln 2}{\ln 4} = 2\cdot 2^t\frac{1}{2} = 2^t$; $2^{2t} - 2^t > 0$; $2^t(2^t - 1) > 0$, $2^t - 1 > 0$; $t > 0$.

Вариант 2

1. а) $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$; $f(0) = 1$; б) $\varphi'(x) = 1/6x$; $\varphi'(-1/9) = -3/2$.

2. $S = 3 - \int_1^4 \frac{1}{x} = 3 - \ln x\Big|_1^4 = 3 - \ln 4 \approx 1{,}61$.

3. $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$; $f' = 0$ при $x = -1$; убывает при $x \in (-\infty; -1)$; возрастает при $x \in [-1; +\infty)$; $x_{\min} = -1$.

4. $f' = 2\ln 3\ 9^{2t-1}$; $\varphi' = 2\ln 3\ 3^t$; $2t - 2 < t$; $t < 2$, $t \in (-\infty; 2)$.

Вариант 3

1. а) $f'(x) = 2^x\ln 2\cos x - 2^x\sin x = 2^x(\ln 2\cdot\cos x - \sin x)$; $f'(0) = \ln 2$;

б) $\varphi'(x) = \frac{6}{x}$; $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 12$.

2. $S = -2 + \int\limits_{-2}^{0} e^{-x}dx = -2 - \int\limits_{-2}^{0} e^{-x}d(-x) = -2 - e^{-x}\Big|_{-2}^{0} = -3 + e^2 = e^2 - 3 \approx 4{,}4$.

3. $f' = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$; $f = 0$ при $x = e$; возрастает на $(0; e]$; убывает на $[e; +\infty)$; $x_{max} = e$.

4. $f'(x) = \frac{3^x \ln 3 - 3^{-x}\ln 3}{\ln 3} = 3^x - 3^{-x}$; $f' = 0$ при $x = 0$; тогда $f_{min} = f(0) = \frac{2}{\ln 3}$.

Вариант 4

1. а) $f' = 3^x\ln 3\sin x + 3^x\cos x = 3^x(\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)$; $f'(0) = 1$;

б) $\varphi' = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x} = \frac{6}{x}$; $\varphi'\left(\frac{1}{3}\right) = 18$.

2. $S = 4 - \int\limits_{1}^{3} \frac{2}{x}dx = 4 - 2\ln x\Big|_{1}^{3} = 4 - \ln 9 \approx 1{,}8$.

3. $f'(x) = \frac{4e^x - e^x \cdot 4x}{e^{2x}} = \frac{4(1-x)}{e^x}$; $f = 0$ при $x = 1$; возрастает на $(-\infty; 1]$; убывает на $[1; +\infty)$; $x = 1$ — максимум, $f(1) = \frac{4}{e}$.

4. $f'(x) = \frac{1}{\ln 2}3^x\,(2^x\ln 2 - 2^{-x}\ln 2) = 2^x - 2^{-x}$; $f' = 0$ при $x = 0$; тогда $f_{min} = f(0) = \frac{2}{\ln 3}$.

Контрольная работа № 6

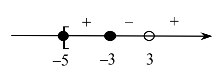
Вариант 1

1. $\sin 2x + \cos 2x = 0$; $\mathrm{tg}\,2x + 1 = 0$; $\mathrm{tg}\,2x = -1$; $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$; $n \in Z$.

2. $S = 16 - \int\limits_{-2}^{2} x^2 dx = 16 - 2\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{2} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.

3. $\begin{cases} \log_3(y - x) = 1 \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 24 \end{cases}$; $\begin{cases} y - x = 3 \\ 3^{x+1} \cdot 2^{3+x} = 24 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 3 + x \\ 3^x \cdot 2^x = 1 \end{cases}$; $x = 0$; $y = 3$.

4. $\frac{\sqrt{x+5}}{(x-3)(x+3)} \geq 0$; $x \in [-5; -3] \cup (3; +\infty)$



5. $f'(x) = e^x + \cos x$; $f'(0) = 2$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $y = 2x + 1$.

Вариант 2

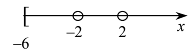
1. $\sin 2x - \cos 2x = 0$; $\mathrm{tg}\,2x = 1$; $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$; $n \in Z$.

2. $S_1 = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{6}x^2 \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{8}{6} + \frac{8}{6} = \frac{8}{3}$; $S_2 = y(x_2 - x_1) = 2(2-(-2)) = 8$;

$S = S_1 - S_2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

3. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^{y+2} \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 + y \\ 2^y \cdot 3^y = -6 \end{cases}$; $y = 1$; $x = 3$.

4. $\frac{\sqrt{x+6}}{(2-x)(2+x)} \le 0$; $x \in [-6; -2) \cup (2; +\infty)$.



5. $f' = e^x - \sin x$; $y = x + 2$.

Вариант 3

1. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$; $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x = 0$; $\mathrm{tg} x = 0$; $\mathrm{tg} x + 1 = 0$; $x = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; $n, k \in \mathrm{Z}$.

2. $S = \int\limits_{-1}^{0} (1 - x^2)dx - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

3. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2^{y+1} \cdot 5^{y-1} = 40 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 + y \\ 2^y \cdot 5^y = 100 \end{cases}$; $y = 2$; $x = 5$.

4. $f' = e^{x+1} - e$; $f' = 0$; $x = 0$; $f(-1) = 1 + e$; $f(0) = e$; $f(1) = e^2 - e$; $f_{\max} = e^2 - e$; $f_{\min} = e$.

5. Т.к. $3x^2 + 4 \ge 0$ для всех x, то $2\sin x + 1 > 0$; $\sin x \ge -\frac{1}{2}$; $x \in [-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n]$.

Вариант 4

1. $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$; $\cos x = 0$; $\sin x = \cos x$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

2. $S = \int\limits_{-1}^{0} (-x^2 + 1)dx - \frac{1}{2} = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

3. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3^{y+4} \cdot 4^{y+3} = 36 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3^y \cdot 4^y = \frac{1}{16:9} \end{cases}$; $y = -2$; $x = 4$.

4. $f' = e^{x+2} - e$; $f' = 0$; $x = -1$; $f(-1) = 2e$; $f(-2) = 1 + 2e$; $f(0) = e^2$; $f_{\min} = 2e$; $f_{\max} = e^2$.

5. Т.к. $-2x^2 - 5 < 0$ для всех x, то $2\cos x + 1 \ge 0$; $\cos x \ge -\frac{1}{2}$; $x \in [-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n]$.

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. 1) $5 - 5\sin x = 2(1 - \sin^2 x)$; $3 - 5\sin x + 2\sin^2 x = 0$;

$(\sin x - 1)\left(\sin x - \frac{3}{2}\right) = 0$; $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

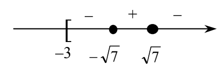
2) промежутку $[\pi; 5\pi]$ принадлежат $\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$.

2. $\log_2(1 - x) + \log^2(-5x - 2) = \log_2 4 + \log_2 3$; $(1 - x)(-5x - 2) = 12$;

$5x^2 + 2x - 5x - 2 = 12$; $5x^2 - 3x - 14 = 0$; $(x - 2)\left(x + 7/5\right) = 0$, т.к. $1 - 2 < 0$.

Ответ: $x = -7/5$.

3. $\frac{7 - x^2}{\sqrt{x+3}} \le 0$; $x \in (-3;\ -\sqrt{7}\,] \cup [\,\sqrt{7};\ +\infty)$.



4. Найдем точки пересечения $5x^2 — 5 = 0$, $x = \pm 1$;

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{1}(5 - 2x^2)dx - \int_{-1}^{1}3x^2dx = \int_{-1}^{1}(5 - 5x^2)dx = 5\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 5\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = 10 - \frac{10}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

5. $\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (-3;\ 3) \\ x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n] \end{cases}$; $n \in Z$; $x \in [0; 3)$.

6. $y' = \frac{x}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right) + \frac{1}{3}\frac{x^2}{4} = \frac{2(x^2 - 3x) + x^2}{12} = \frac{3x^2 - 6x}{12} = \frac{x^2 - 2x}{4}$; $y' = 0$ при $x=0$ и $x=2$, на $x \in (2; 6]$, f(x) — возрастает, следовательно: $f_{max} = f(6) = 10$.

Вариант 2

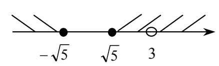
1. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$; $\sin^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \sin x$; $\sin 2x + \sin x = 0$;

$\sin x(\cos x + 1) = 0$; $x = \pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.

2. $y' = \frac{-2}{3 - 2x} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $y'(1) = -2$; уравнение касательной имеет вид:

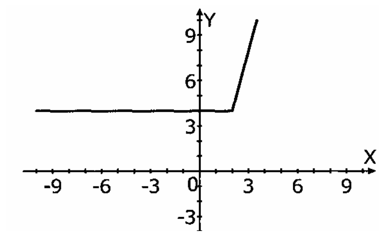
$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$; $y = -2(x - 1) + (-1) = -2x + 1$.

3. $\frac{\sqrt{x^2 - 5}}{3 - x} \ge 0$; $x \in (-\infty;\ -\sqrt{5}\,] \cup [\,\sqrt{5};\ 3)$



4. $S = \int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)dx = \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

5.



6. $y' = -\frac{2x}{3}\left(\frac{x+3}{2}\right)$; $y' = -\frac{2x}{3}\left(\frac{x+3}{2}\right) - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{3} = -\left(\frac{x(x+3)}{2} + \frac{x^2}{2}\right) =$

$= -\left(\frac{3x^2+6x}{10}\right)$; $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = -\frac{6}{5}$; $y_{\min} = y(3) = 0$.

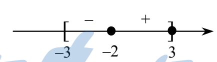
Вариант 3

1. $3\sin 2x - 2\cos 2x = 2$; $\sin x\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) = 2$; $-4\cos^2 x + 6\sin x\cos x = 0$; $\cos x(6\sin x - 4\cos x) = 0$; $\cos x = 0$; $6\sin x - 4\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\mathrm{tg}x = \frac{2}{3}$; $n \in Z$; $x = \mathrm{arctg}\,{}^2\!/_3 + \pi n$, $n \in Z$.

2. $4(2+\sqrt{3})^{-1} + (2+\sqrt{3})^n = 15$; $4 + (2+\sqrt{3})^3 = 15(2+\sqrt{3})$;
$4 + 8 + 3\cdot 4\sqrt{3} + 3\cdot 3\cdot 2 + 3\sqrt{3} = 30 + 15\sqrt{3}$; $15\sqrt{3} + 30 = 30 + 15\sqrt{3}$.
Да, является.

3. $\begin{cases} 4x - y = \frac{1}{2} \\ 9^{2x}\cdot 3^{2y} = \frac{1}{81} \end{cases}$; $\begin{cases} y = 4x - \frac{1}{2} \\ 9^{2x}\cdot 3^{8x-1} = \frac{1}{81} \end{cases}$; $\begin{cases} y = 4x - \frac{1}{2} \\ 3^{12x} = \frac{1}{27} \end{cases}$; $12x = -3$; $x = -\frac{1}{4}$; $y = -\frac{3}{2}$.

4. $(x+2)\sqrt{9-x^2} \le 0$; $x \in [-3; -2] \cup [3]$.



5. Найдем точки пересечения: $-0{,}5x^2+x+1{,}5=0{,}5x+0{,}5$; $0{,}5x^2-0{,}5x-1 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $(x+1)(x-2) = 0$.

$$S = \int_{-1}^{2}(-0{,}5x^2 + x + 1{,}5)dx - \int_{-1}^{2}(0{,}5x + 0{,}5)dx = \int_{-1}^{2}(-0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{8}{6} + 1 + 2 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1\right) = 4 - \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

6. Пусть одно x, тогда второе $2x$, 3–е y. $S = x^2 + 4x^2 + y$; $3x + y = 28$; $y = 28 - 3x$; $S = 5x^2 + (28 - 3x)^2$; $S' = 10x + 2(28 - 3x)\cdot(-3) = 10x + (56 - 6x)\cdot(-3) =$
$= 28x - 56\cdot 3 = 0$; $x = 6$, тогда $y = 10$.
Ответ: 6, 12, 10.

Вариант 4

1. $2\cos^2 x = 1 - \sin x$; $2(1 - \sin^2 x) = 1 - \sin x$; $2 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$; $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$x = \frac{\pi}{6}(-1)^{k+1} + \pi k$, $n, k \in Z$.

2. $\frac{(a^{\frac{1}{2}}+2)^2-(a^{\frac{1}{2}}-2)^2}{16} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{a}$.

3. $\begin{cases} 3^y + 2x = 10 \\ y - 2 = \log_3 2x \end{cases}$; $\begin{cases} 3^y - 12x = 10 \\ 3^y = 18x \end{cases}$; $\begin{cases} 20x = 10 \\ y = \log_3 18x \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$.

4. $\frac{\lg(2x+0,5)}{\lg(x^2+1)} \le 0$; $\lg(x^2 + 1) > 0$ при $x \ne 0$; $\lg\left(2x + \frac{1}{2}\right) \le 0$; $2x + \frac{1}{2} \ge 0$;

$2x \le \frac{1}{2}$; $x \ge -\frac{1}{4}$; $x \le \frac{1}{4}$; $x \in \left[-\frac{1}{4};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{4}\right]$.

5. $S = \int_1^2 2x dx - \int_1^2 \frac{2}{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x - \frac{2}{x^2}\right) dx = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)\Bigg|_1^2 = 4 + 1 - (3) = 2$.

6. Очевидно (из соображений симметрии), что стороны прямоугольника симметричны относительно OY, тогда:

$S = 2x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 8x - \frac{2}{3}x^3$; $S' = 8 - 2x^2$; $S' = 0$; $8 = 2x^2$; $x = \pm 2$, т.е. прямоугольник с вершинами (2, 0), (—2, 0), (–2, f(–2)), (2, f(2)).

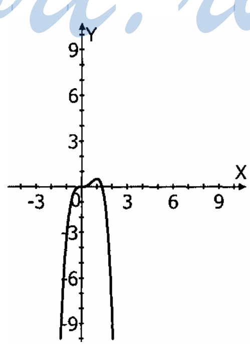
Вариант 5

1. $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$.

2. $x + 2 = \sqrt{2x^2 + 6x + 1}$; $x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 6x + 1$; $x^2 + 2x - 3 = 0$;
$(x + 3)(x - 1) = 0$, т.к. при x=—3 $2x^2 + 6x + 1 < 0$.
Ответ: $x = 1$.

3. $y = 2x^3 - 1{,}5x^4$; $y' = 6x^2 - 6x^3 = 6(1 - x)x^2$; $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 1$; функция возрастает на $(-\infty; 1)$; убывает на $(1; +\infty)$; $x_{max} = 1$, $y_{max} = 0{,}5$.



4. $\dfrac{\lg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}{\log_{0,3}\left(x^2+1\right)} \geq 0$, $x \neq 0$; lg ; $0 \leq \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4} \leq 1$; $-\dfrac{1}{4} < \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{3}{4}$;

$-\dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{3}{2}$; $x \in \left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

5. $y' = 2x + 6$; $y' = 0$ при $x_0 = -3$, тогда уравнение касательной $y = 1$;

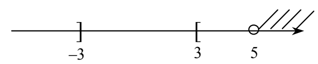
$S = \int\limits_{-3}^{0} (x^2+6x+10)dx - 3 = \left(\dfrac{x^3}{3}+3x^2+10x\right)\Bigg|_{-3}^{6} - 3 = 9$.

6. Пусть одна сторона x, вторая y: $2x+y=24$; $2x=24-y$; $2x\cdot y=S$; $(24-y)y=S$; $24y - y^2 = S$; $S' = 24 - 2y = 0$; $y = 12$; $x = 6$.

Вариант 6

1. $\log_7 x(x + 6) = 1$; $x^2 + 6x - 7 = 0$; $(x + 7)(x - 1) = 0$, т.к. $x = -2 < 0$, то при $x = 1$.

2. $(x - 5)\sqrt{x^2-9} \geq 0$; $x \geq 5$ и $x = \pm 3$.



3. $\left(3-\sqrt{7}\right)^{-1} - \dfrac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}{4} = -\dfrac{1}{2}$; $2 - \dfrac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2\left(3-\sqrt{7}\right)}{2} = \sqrt{7}-3$;

$4-\left(\sqrt{7}+1\right)^2\left(3-\sqrt{7}\right) = 2\sqrt{7}-6$; $4-\left(8+2\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right) = 2\sqrt{7}-6$;

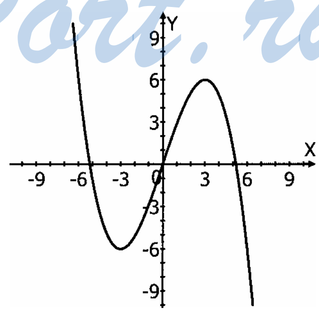
$4 - 24 - 6\sqrt{7} + 8\sqrt{7} - 14 = 2\sqrt{7} - 6$; $2\sqrt{7} - 6 = 2\sqrt{7} - 6$ — да, является.

4. $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} 3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)dx = 3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{2\pi}{3}} = 3\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$.

5. $y' = 3 - \dfrac{x^2}{3}$; $y' = 0$; $x = \pm 3$; возрастает на $[-3; 3]$; убывает на $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; $x_{min} = -3$; $x_{max} = 3$.

6. Пусть x и y — стороны.
$S = xy = 5{,}76$ Га^2=57600 м^2; $2x + 2y = L$ — длина изгороди; $2x + \dfrac{2\cdot 57600 \text{ м}^2}{x} = L$;

$L' = 2 - \dfrac{2\cdot 57600 \text{ м}^2}{x^2} = 0$; $x^2 = 5{,}76$;
$x = 2{,}4$.
Это квадрат со стороной 2,4.



Вариант 7

1. $6-10\cos^2 x+4(2\cos^2 x-1)=2\sin x\cos x$; $2-2\cos^2 x=2\sin x\cos x$; $1-\cos^2 x=\sin x\cos x$; $\sin^2 x-\sin x\cos x=\sin x(\sin x-\cos x)=0$; $x=\pi n$; $x={}^{\pi}\!/_{4}+\pi n$, $n\in Z$; $x=\pi n$; ${}^{\pi}\!/_{4}+\pi n$, $n\in Z$.

2. $\begin{cases} x=\dfrac{3+y^2}{2} \\ 3^{\frac{3+y^2}{2}+1}\cdot 3^{3(y-1)}=3^3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{3+y^2}{2} \\ 2+3+y^2+6y-6=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{3+y^2}{2} \\ y^2+6y-7=0 \end{cases}$;

$(y-1)(y+7)=0$; $y_1=1$; $x_1=2$; $y_2=-7$; $x_2=26$.

3. $\dfrac{x(x-1)}{3}\le 2$; $x(x-1)\le 6$; $x^2-x-6\le 0$; $x\in[-2;3]$, т.к. $x-1>0$, то $x\in(1;3]$.

4. $y'=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$; убывает; $x\in(0;9]$.

5. $x^2+3=2x^2-x+1$; $x^2-x-2=0$; $(x+1)(x-2)=0$; $S=\int\limits_{-1}^{2}(x^2+3)dx-$

$-\int\limits_{-1}^{1}(2x^2-x+1)dx=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=2+4-\dfrac{8}{3}-$

$-\left({}^{1}\!/_{3}+{}^{1}\!/_{2}-2\right)=6-{}^{8}\!/_{3}+2-{}^{5}\!/_{6}={}^{48}\!/_{6}-{}^{5}\!/_{6}-{}^{16}\!/_{6}={}^{27}\!/_{6}={}^{9}\!/_{2}=4\,{}^{1}\!/_{2}$.

6. $l^2(x)=x^2+(1-x^2)^2=x^2+1-2x^2+x^4=x^4-x^2+1$; $(l^2)'=4x^3-2x=$ $=4\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)x=0$; $l^2(0)=1$; $l^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$, т.е. точки с абсциссой $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и ординатой $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант 8

1. В ответе ошибка.
$2{,}5x+x^2>0$; $x(2{,}5+x)>0$; $x\in(-\infty;-2{,}5)\cup(0;+\infty)$.

2. $$\frac{4\cos^2 x-\sin 2x}{-\cos 2x}+\frac{\cos x-3\sin x}{\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{4\cos^2 x+4\cos^2 x\sin x-\sin 2x\cos x-\sin x\sin 2x-\cos x\cos 2x+3\sin x\cos 2x}{-\cos 2x(\cos x+\sin x)}=$$

$$=\frac{4\cos^3 x+4\cos^2 x\sin x-2\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x-\cos^3 x+}{-\cos 2x(\cos x+\sin x)}$$

$$\frac{+\cos x\sin^2 x-3\cos^2 x\sin x+3\cos x\sin^2 x}{-\cos 2x(\cos x+\sin x)}=\frac{3\cos^3 x-\cos^2 x\sin x+2\sin^2 x\cos x}{-\cos 2x(\cos x+\sin x)}=$$

$= \frac{\cos x(3(1-\sin^2 x)+\cos x\sin x+2\sin^2 x)}{-\cos 2x(\cos x+\sin x)} = \frac{\cos x(3-\sin^2 x+\cos x\sin x)}{-\cos 2x(\cos x+\sin x)} = -\frac{3}{\cos 2x}$

при $x = -\frac{\pi}{6}$ ответ: –6.

3. $x(3x-8) = 28$; $3x^2 - 8x - 28 = 0$; $(x+2)\left(x-\frac{14}{3}\right)=0$; $x = \frac{14}{3}$, т.к. $x > 0$.

4. $\begin{cases} \sqrt{5x-1} \le 2 \\ \frac{2^x}{2} - 12\cdot 2^x > -23 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 \le 5x-1 \le 4 \\ 2^x < 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 1 \\ x \ge \frac{1}{5} \\ x < 1 \end{cases}$; $x \in \left[\frac{1}{5};\ 1\right)$.

5. $y' = 2x - 4$; $y'(3) = 2$; $y = 2(x - x_0) + y(2)$; $y = 2x - 6 + 5 = 2x - 1$; $S = S_1$, где S_1 также площадь, только $y=2x$, $y= x^2 - 4x + 10$. $S = \int_0^3 (x^2-4x+9)dx -$

$- \int_0^3 (2x)dx = \int_0^3 (x^2-6x+9)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right)\Big|_0^3 = 9 - 27 + 27 = 9.$

6. $y' = 1 + 2\sin x$; $y' = 0$' $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}$; $y(\pi)=\pi+2$; $y(-\pi)$ $=-\pi+2$; наша точка это та, у которой $|\,y\,|$ наибольший. Ответ: $(\pi;\ \pi + 2)$.

Вариант 9

1. $4 - x^2 \ge 0$; $2x + 3 \ne 0$; $x \in [-2;\ 2]$; $x \ne -\frac{3}{2}$; $x \in \left[-2;\ -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2};\ 2\right]$.

2. $y = \frac{\ln(6-2x)}{\ln 0{,}3}$; $y' = \frac{-2}{(6-2x)\ln 0{,}3} = \frac{1}{(x-3)\ln 0{,}3}$; функция монотонна на $x \in (-\infty;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$, но x < 3, тогда $x \in (-\infty;\ 3)$.

3. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2} + \frac{\sqrt{12}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\sqrt{12}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{12}\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}} =$

$= \frac{2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\left(4+4\sqrt{3}+3\right)}{2+\sqrt{3}} = \frac{26+13\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 13.$

4. Найдем точки пересечения: $x^4 + 3x^2 - 4=0$; $(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$; $x = \pm 1$.

$$S = \int_{-1}^{1} (4-3x^2)dx - \int_{-1}^{1} x^4 dx = \int_{-1}^{1} (-x^4 - 3x^2 + 4)dx =$$

$$= \left(-\frac{5}{2} - x^3 + 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{5} - 1 + 4\right) - \left(\frac{1}{5} + 1 - 4\right) = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}.$$

5. $f'(x) = -\sin 2x + \sqrt{2}\cos x$; $f'(x)=0$; $\sqrt{2}\cos x - \sin 2x=0$; $\cos x(\sqrt{2} - 2\sin x)=0$; $\cos x=0$; $\sin x= \sqrt{2}/2$; $x= \pi/2 + \pi n$; $x = (-1)^n \pi/4 + \pi n$. Ответ: $\pi/4$; $\pi/2$; $3\pi/4$.

6. $v = v_0 + at$ м/с; 20 м/с – gt = 0 м/с; t = 2 сек; $x = x_0 + v_0 t + gt^2/2$;

x = 25 м + 20 м/с $- \frac{10\text{ м/с}^2 \cdot (2)^2\text{ с}^2}{2}$ = 45 м.

Вариант 10

1. $2\cos x + 4\sqrt{3}\sin x + 9 = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4\left(\frac{\cos}{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$;

$2\cos x + 4\sqrt{3}\sin x + 9 = 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin x$; $6\sqrt{3}\sin x = -9$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

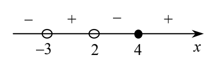
2. $\frac{2}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)^2 - 1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4-4\sqrt{2}+2-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{5-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = -5$

3. $2\log_2(3 - 2x) < 0$; $\begin{cases} 3-2x<1 \\ 3-2x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ x<1{,}5 \end{cases}$; $x \in (1; 1{,}5)$.

4. Найдем точки пересечения линий $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$, $x = \pm 2$.

$S = \int\limits_{-2}^{2}(0{,}5x^2+2)dx - \int\limits_{-2}^{2}x^2dx = \int\limits_{-2}^{2}\left(2 - \frac{1}{2}x^2dx\right) = \left(-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(-\frac{8}{6}+4\right)\cdot 2 =$

$= \left(2\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot 2 = 5\frac{1}{3}$.



5. $y = \sqrt{\frac{2x-8}{x^2+x-6}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{x-4}{(x+3)(x-2)}}$; $\frac{x-4}{(x+3)(x-3)} \ge 0$; $x\in(-3;2)\cup[4; +\infty)$.

6. $V = h \cdot m^2$; h — высота, m — сторона квадрата основания.

$S = 4\text{ м}^3 \cdot h \ne m + m^2 = m^2 + 4\text{ м}^3 hm$; $h = \frac{V}{m^2} = \frac{4\text{ м}^3}{m^2}$; $S = m^2 + \frac{16\text{ м}^3}{m}$;

$S' = 2m - \frac{16\text{ м}^3}{m^2}$; $S' = 0$ при m = 2 м — это точка минимума S, тогда m = 2 м, h = 1 м— ответ.

Вариант 11

1. $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$; $1 - \sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = \sin x$; $\sin^2 x - \sin x = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi k$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n, $k \in Z$; тогда ответ: 0, $-\pi$, π, 2π, $\frac{\pi}{2}$.

2. $\log_{0,4}(3,5-5x) > 2(\log_{0,4}0,2) - 1$; $\log_{0,4}(3,5-5x) > \log_{0,4}0,1$; $\log_{0,4}\frac{3,5-5x}{0,1} > 0$; $\frac{3,5-5x}{0,1} < 1$; $3,5–5x < 0,1$; $5x > 3,4$; $x > 0,68$; $3,5–5x > 0$; $x < 0,7$; $x \in (0,68; 0,7)$.

3. $F(x) = \int f(x)dx = 4\frac{1}{2}\int \sin 2x d2x + \int \frac{dx}{x^2} = -2\cos 2x - \frac{1}{x} + C$; $-\frac{3}{\pi} + C = 0$;

$F(x) = \frac{3}{\pi} - \frac{1}{x} - 2\cos 2x$.

4. $\sqrt{(x-3)(2x+7)} + (3-x) = 0$; $\sqrt{(x-3)}\left(\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-3}\right) = 0$; $x = 3$; $2x + 7 = x - 3$; $x = -10$, т.к. при $x = -10$ $x - 3 < 0$. Ответ: $x = 3$.

5. $S = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} = 9$; $a^3 = 27$; $a = 3$ из соображений симметрии; при $a = -3$ $S = 9$. Ответ: $a = \pm 3$.

6. $3V = h \cdot \pi r^2$; h — высота, r — радиус основания; $h^2 + r^2 = l^2$ (l — образующая); $h^2 + r^2 = 12$; $r^2 = 12 - h^2$; $3V = \frac{2}{3}h \cdot \pi(12 - h^2) = 12\pi h - \pi h^3$; $3V' = 12\pi - 2\pi h^2 = 0$; $h = \sqrt{6}$, т.е. наше значение лежит среди $V(0)$, $V\left(\sqrt{6}\right)$, $V\left(2\sqrt{3}\right)$. Ответ: $5\frac{1}{3}\pi$ дм^3.

Вариант 12

1. $1 + 2\log_2 0,3 > \log_2(1,5x - 3)$; $1 + \log_2 0,09 > \log_2(1,5x - 3)$;

$\log_2 0,18 > \log_2(1,5x - 3)$; $\begin{cases} 1,5x - 3 > 0 \\ 0,18 > 1,5x - 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{3,18}{1,5} \end{cases}$; $x \in (2; 2,12)$.

2. $\begin{cases} x = \pi/2 - y \\ \sin\left(\pi/2 - y\right) + \sin y = -\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \cos y + \sin y = -\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pi/2 - y \\ \sin\left(y + \pi/4\right) = -1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ y + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \\ x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi n \end{cases}$; $n \in Z$.

3. Найдем точки пересечения: $-x^2 - 2x + 3 = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $(x + 3)(x - 1) = 0$; $S = -20 + \int_{-3}^{1}(-x^2 - 2x + 8)dx = -20 + \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right)\Big|_{-3}^{1} =$

$= -20 + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 8 - (9 - 9 - 24)\right) = -20 + 32 - \frac{4}{3} = 10\frac{2}{3}$.

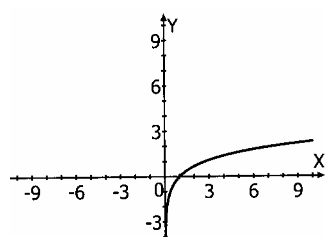
4. $\sqrt{(x-2)(2x+5)}-(x-2)=0$; $\sqrt{(x-2)}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-2}\right)=0$; $x = 2$; $2x + 5 = x - 2$; $x = -7$; т.к. $x - 2 < 0$ при $x = -1$. Ответ: $x = 2$.
5. $y' = 3e^{3x} = 3$ при $x = 0$. Ответ: в точке с абсциссой $x = 0$.
6. $d^2+h^2=l^2$, где d — диаметр основания, h^2 — высота, l — диагональ осевого сечения. $V=\pi\frac{d^2}{4}\cdot h$; $d^2=l^2-h^2=75-h^2$; $V=\pi\frac{75-h^2}{4}h=$ $=\frac{\pi}{4}(75h-h^3)$; $V'=\frac{\pi}{4}(75-3h^2)=\frac{3\pi}{4}(25-h^2)$; при $h = 5$ $V' = 0$, тогда $V_{\max}=\pi\cdot\frac{50}{4}\cdot 5=\frac{125\pi}{2}$.

Вариант 13

1. $2\operatorname{tg}x+3=\operatorname{tg}(1{,}5\pi + x) = -\operatorname{ctg}x$; $2\operatorname{tg}x + 3 + \frac{1}{\operatorname{tg}x} = 0$; $\operatorname{tg}x = t$; $2t^2 + 3t + 1 = 0$; $(t + 1)\left(t+\frac{1}{2}\right) = 0$; $t = \operatorname{tg}x$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $n, k \in Z$; $0{,}75\pi$ является корнем этого уравнения.
2. $\log_4\left(\sqrt{59-10x}-1\right)=\log_4 2(x-4)$; $\sqrt{59-10x}-1=2(x-4)$; $4x^2-18x-10=0$; $(x-5)\left(x-\frac{8}{4}\right) = 0$, т.к. $x=\frac{3}{4}$ не лежит в ОДЗ $(4 - 4) < 0$.
Ответ: $x = 5$.
3. Найдем точки пересечения линий: $5 - x^2 = x + 3$; $x^2 + x - 2 = 0$; $(x - 1)(x + 2) = 0$; $x = 1$ и $x = -2$. $S=\int_{-2}^{1}(5-x^2)dx-\int_{-2}^{1}(x+3)dx=$

$$=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=4{,}5.$$

4. $f'(x)=\frac{4-2x}{4}$; $f'(4) = -1$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -1(x - 4) = 4 - x$ — уравнение касательной $\operatorname{tg}\alpha = -1$.
5. См.график.
6. $S = 2r^2 + 4rh = 6$ дм^2, r — сторона основания, h — высота.
$V = r^2h$; $V(r)=\frac{r^3-3r}{2}$; $V'(r)=\frac{3r^2-3}{2}$; $V'(r) = 0$ при $r = 1$, тогда наибольший объем лежит среди $V(1)$, $V(0{,}5)$, $V\left(\sqrt{3}\right)$, из этого следует, что $V_{\max} = V(1) = 1$ дм^3.



Вариант 14

1. $\ln(2x-3) < (\ln(x+1)$;

$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 3/2 \\ x>-1 \\ x<4 \end{cases}$; $x \in \left(\frac{3}{2};\ 4\right)$.

2. Найдем точки пересечения линий: $-x^2 + 2x + 3 = 3 - x$; $x^2 - 3x = 0$; $x = 0$ и $x = 3$;

$$S = \int_0^3 (-x^2+2x+3)dx - \int_0^3 (3-x)dx = \int_0^3 (3x-x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{6} = 4{,}5 .$$

3. $(1 - \sin(x))(1 + \sin x) = -\frac{3}{2}\sin x$; $1 - \sin^2 x = -\frac{3}{2}\sin x$; $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$;

$(\sin x - 2)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$; $|\sin x| \le 1$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{7\pi}{6}$ является корнем этого уравнения.

4. $f'(x) = \frac{6+3x}{3} = 2 + x$; $f'(2)=4$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 4(x-2) + 6 = 4x - 2$ — уравнение касательной $\mathrm{tg}\alpha = 4$.

5. $4^x - 16 > 6 \cdot 2^x$; $2^x = t$; $t^2 - 6t - 16 > 0$; $(t-8)(t+12) > 0$, т.к. $2^x > 0$ для всех x, то $t + 2 > 0$, тогда неравенство примет вид: $2^x > 8$; $x > 3$.

6. $V = r^2h = 8$ дм^3; r — длина стороны основания, h — высота.

$S = 4rh + 2r^2$; $h = \frac{8\text{ дм}^3}{r^2}$; $S = \frac{32\text{ дм}^3}{r} + 2r^2$; $S' = -\frac{32\text{ дм}^3}{r^2} + 4r$; $S' = 0$ при $r = 2$, тогда наше значение лежит между $S(1)$, $S(4)$, $S(2)$, из чего $S_{\min} = S(2) = 24$ дм^2.

Вариант 15

1. $3^2 \cdot 3^{-3\left(1+\frac{1}{2}x\right)} > 3^{-2x}$; $2 - 3\left(1 + \frac{1}{2}x\right) > -4x$; $2 - 3 - \frac{3}{2}x > -4x$; $\frac{5}{2}x > 1$; $x > \frac{2}{5}$.

2. $$2\frac{\cos(\pi/2 - 2\alpha)}{\sin(\pi/2 - 2\alpha)} + \frac{2\sin(\pi-\alpha)}{\sin(\pi/2+\alpha) + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin(-\alpha)} = 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$= 3\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 3\mathrm{tg}2\alpha$; при $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ выражение равно $-\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

3. $\int_{-2}^{a} -x^3 d = \int_{a}^{0} -x^3 dx$; $-\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{a} = -\frac{x^4}{4}\Big|_{a}^{0}$; $\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{a} = \frac{x^4}{4}\Big|_{a}^{0}$; $\frac{a^4}{4} - 4 = -\frac{a^4}{4}$; $\frac{a^4}{2} = 4$;

$a^4 = 8$; $a = \pm\sqrt[4]{8}$, т.к. $-2 < a < 0$, то $a = -\sqrt[4]{8}$.

4. $f'(x)=\dfrac{x^2+4-x(2x)}{(x^2+4)^2}$; $f'(x)=0$; $-x^2+4=0$; $x=\pm 2$; убывает на $(-\infty; -2] \cup$ $\cup\ [2; +\infty)$; возрастает на $[-2; 2]$.

5. $\begin{cases} x+2y=13 \\ \log_4 \dfrac{x^2}{2y-1}=\log_4 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=13-2y \\ \dfrac{x^2}{2y-1}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y=13-x \\ \dfrac{x^2}{12-x}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=\dfrac{13-x}{2} \\ (x+6)(x-4)=0 \end{cases}$; т.к. $x<0$ не лежит в ОДЗ, тогда ответ $x=4$, $y=4{,}5$.

6. l — длина бокового ребра, r — длина стороны основания, h — высота, d — половина диагонали основания; $l^2=h^2+d^2$; $r_2=2d_2l$ $r_2=2(L^2-h^2)$; $V=\dfrac{1}{3}r^2h=\dfrac{2}{3}(l^2-h^2)h=\dfrac{2}{3}$ (108 см$^2h-h^3$); $V'=\dfrac{2}{3}$ (108 см$^2h-h^3$)$=2(36-h^2)$; $V'=0$ при $h=6$, тогда $V_{\max}=288$ см^3.

Вариант 16

1. $\dfrac{2\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}+2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{2\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}-2\sin\alpha=\dfrac{2\cos^2\alpha-2\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}=$ $=\dfrac{2(1-\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}=2$. Выражение не имеет смысла при $\sin\alpha=1$, тогда, например при $a=\dfrac{\pi}{2};\ 2{,}5\pi$.

2. $3^{2x}+3^x-6>0$; $3^x=t$; $t^2+t-6>0$; $(t-2)(t+3)>0$, т.к. $t>0$, то $3^x>2$, $x>\log_3 2$.

3. $\log_3^2(2-\sqrt{x})=1$; $\log_3(2-\sqrt{x})=1$; $2-\sqrt{x}=3$; $\sqrt{x}=-1$; 0 или $\log_3(2-\sqrt{x})=-1$; $2-\sqrt{x}=\dfrac{1}{3}$; $\sqrt{x}=\dfrac{5}{3}$; $x=\dfrac{25}{9}$. Ответ: $x=\dfrac{25}{9}$.

4. Найдем точки пересечения: $-0{,}5x^2+2=2-x$; $\dfrac{1}{2}x^2-x=0$; $x=0$; $x=2$;

$$S=\int_0^2\left(-\frac{x^2}{2}+2\right)dx-\int_0^2(2-x)dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)dx=\left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{8}{6}+\frac{4}{2}=\frac{12}{6}-\frac{8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

5. $y'=2\ln x+2$; $y'=0$ при $x=\dfrac{1}{e}1$; при $x\in\left(0;\ \dfrac{1}{e}\right]1$ y убывает, при $x\in\left[\dfrac{1}{e};\ +\infty\right)$ y возрастает, тогда $x=\dfrac{1}{e}$ — точка минимума.

6. $V=\frac{1}{3}hr^2$; $h^2+d^2=48$ см^2; $d^2=2r^2$; $V=\frac{1}{6}(48\text{ см}^2h-h^3)$;

$V'=\frac{1}{6}(48\text{ см}^2-3h^2)=\frac{1}{2}(16-h^2)$; V'=0 при h=4 см; V_{max}=V(4) = $21\frac{1}{3}$ см^3.

Вариант 17

1. $\cos 2\alpha+\frac{2\sin 2\alpha}{\text{ctg}\alpha-\text{tg}\alpha}=\cos 2\alpha+\frac{2\sin 2\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\cos 2\alpha+\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$

$=\frac{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}$, при $\alpha=\frac{\pi}{8}$ выражение равно $\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{x^2-9}=0$; $x=\pm3$ или $\log_2 0{,}5x=0$; $x=2$; т.к. при $x=-3$; 2 $0{,}5x<0$.
Ответ: $x=3$ и $x=2$.
3. $f'(x)=4e^{-x}-4xe^{-x}=4e^{-x}(1-x)$; $f'(x)=0$ при $x=1$; возрастает при $x\in(-\infty;1]$, убывает $x\in[1;+\infty)$, $x=1$ — максимум.
4. Найдем точки пересечения: $x^2+2x+5=5-2x$; $x(x+4)=0$;

$$S=-\int_0^{-4}(5-2x)dx+\int_0^{-4}(x^2+2x+5)dx=-\int_0^{-4}(-x^2-4x)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\right|_0^{-4}=$$

$$=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3};$$

5. $\begin{cases}2x-y=19\\ \log_9\frac{2x-1}{y^2}=\log_9\frac{1}{3}\end{cases}$; $\begin{cases}2x-1=18+y\\ \frac{18+y}{y^2}=\frac{1}{3}\end{cases}$; $\begin{cases}y^2-3y-54=0\\ x=\frac{19+y}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}(y-9)(y+6)=0,\\ x=\frac{19+y}{2},\end{cases}$

т.к. $y=-6$ не лежит в ОДЗ ($y>0$), то $y=9$, $x=14$. Ответ: (14; 9).
6. r — половина радиуса описанной окружности.
$S=3\sqrt{3}r^2$; $V=\sqrt{3}r^2h$; $r^2+h^2=36$ дм^2; $V(h)=\sqrt{3}(36\text{ дм}^2h-h^3)$;
$V'=3\sqrt{3}(12-h^2)$; $V'=0$ при $h=\sqrt{12}$ дм; h — точка максимума $V(h)$;
$V\left(\sqrt{12}\right)\text{дм}=\sqrt{3}\left(72\sqrt{3}-24\sqrt{3}\right)\text{дм}^3=144$ дм^3. Ответ: 144 дм^3.

Вариант 18

1. $\sqrt{3}\cos^2x$–0,5sin2x=0; $\sqrt{3}\cos^2x-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\cos x\cdot\sin x$=0; $\cos x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$=0;

1) $\cos x=0$; $x=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$;

2) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$; $\sqrt{3}\cos x=\sin x$; $\text{tg}x=\sqrt{3}$; $x=\pi/3+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $\pi/2+\pi k$, $\pi/3+\pi k$, $k\in Z$; положительный корень: $\pi/2$; отрицательный корень: $-\pi/2$.

2. $\sqrt{13-x^2}+1=x^2$; $\sqrt{13-x^2}=x^2-1$; 13 – x^2 ≥ 0, т.е. x^2 ≤ 13, т.е. $-\sqrt{13}\le x\le\sqrt{13}$; x^2 – 1 ≥ 0, т.е. x^2 ≥ 1, те. x ≥ 1 и x ≤ –1, тогда 13 – x^2 = $=x^4-2x^2+1$; $x^4-x^2-12=0$; $D=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49=7^2$;

$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm7}{2}$;

1) $x^2=4$; 2) $x^2=-3$ — уравнение не имеет корней, т.к. $-\sqrt{13}\le x\le-1$ и $1\le x\le\sqrt{13}$, то $x=\pm2$ является корнем уравнения. Ответ: $x=2$; $x=-2$.

3. $y=-0{,}5x^2+2x$; $y=0{,}5x$. Найдем точки пересечения двух линий: $0{,}5x=-0{,}5x^2+2x$; $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x=0$; $\frac{1}{2}x(x-3)=0$;

1) $x=0$; $y=0$; 2)$x=3$; $y=\frac{3}{2}$; точки пересечения линий: (0; 0); (3; $3/2$).

$$S=\int_0^3(-0{,}5x^2+2x)dx-\int_0^3 0{,}5xdx=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+2\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=(-1/6\,x^3+3/4\,x^2)\Big|_0^3=-9/2+27/4=9/4.$$

4. ОДЗ: $x+2y>0$.

$$\begin{cases}3^{1+\log_3(x+2y)}=6x\\3^{x^2-2y}=9^{\frac{1}{2}x}\end{cases};\ \begin{cases}3\cdot3^{\log_3(x+2y)}=3\cdot2x\\3^{x^2-2y}=3\cdot2^x\end{cases};\ \begin{cases}x+2y=2x\\x^2-2y=x\end{cases};\ \begin{cases}2y=x\\x^2-x-2y=0\end{cases};$$

$4y^2-2y-2y=0$, тогда $4y(y-1)=0$, т.е. $y=0$ и $y=1$, а $x=0$ и $x=2$ соответственно. Т.к. $x+2y>0$, то решением системы является: $x=2$; $y=1$. Ответ: $x=2$; $y=1$.

5. $\log_2(x-1)+\log_2(x-3)<3$; ОДЗ: $x-1>0$, т.е. $x>1$; $x-3>0$, т.е. $x>3$; $2^{\log_2(x-1)+\log_2(x-3)}<2^3$; $(x-1)(x-3)<8$; $x^2-4x+3-8<0$; $x^2-4x-5<0$; $(x+1)(x-5)<0$, т.е. $-1<x<5$. Учитывая ОДЗ, получим ответ $3<x<5$. Ответ: $3<x<5$.

6. Объем правильной четырехугольной призмы: $V=a^2\cdot H=144$ м^3, отсюда $H=\frac{144}{a^2}$ м. Площадь основания: $S_{осн}=a^2$ м^2. Площадь боковой части призмы $S_{бок}=4a\cdot H$ м^2. Стоимость облицовки:

$A=15\cdot4\cdot a\cdot\frac{144}{a^2}+20\cdot a^2$, тогда $a^3=216$ м$^3=6^3$ м^3, т.е. $a=6$ м, а $H=4$ м.

Вариант 19

1. $S=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

2. $\dfrac{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha + \cos^2\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{1-\sin\alpha} = 2\cos\alpha$. Выражение равно – 1 при $\alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. $\ln^2 x - \ln x^2 = 2$; $\ln x = t$; $4t^2 - 2t - 2 = 0$; $(t-1)\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = 0$; $x = e$; $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

4. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$; $f'(x) = -x^2 + 2x$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 2$, тогда $(-\infty; 0] \cup$ $\cup$ $[2; +\infty)$ функция убывает, на $[0; 2]$ возрастает, тогда $x_{\min} = 0$; $x_{\max} = 2$.

5. Пусть x_1 абсцисса точки касания $0,5x^2$ и искомой касательной, x_2 соответственно $-0,5x^2 - 1$. Тогда $y = ax + b$ касательная и $ax_1 + b = \dfrac{1}{2}x_1^2$, $ax_2 + b = -\dfrac{1}{2}x_2^2 - 1$, $a = x_1$; $a = -x_2$ (т.к. $(0,5x^2)' = (ax + b)^2$ и $(-0,5x^2 - 1)' =$ $= (ax + b)'$), тогда составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} ax_1 + b = 0,5x_1^2 \\ ax_2 + b = -0,5x_2^2 - 1 \\ x_1 = a \\ x_2 = -a \end{cases}; \begin{cases} a^2 + b = \frac{1}{2}a^2 \\ -a^2 + b = -\frac{1}{2}a^2 - 1 \\ x_1 = a,\ x_2 = -a \end{cases}; \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ тогда } y = x - \frac{1}{2}.$$

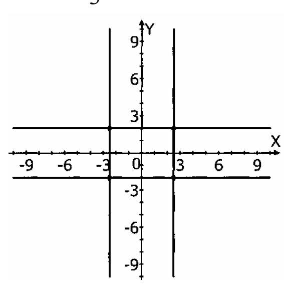
6. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2 h$, l — сторона основания, h — высота: $h^2 + l^2 = 48$ дм^2; $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(48\text{ дм}^2 h - h^3)$; $V' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(48\text{ дм}^2 - h)$; $V' = 0$ при $h = 4$ дм, тогда $V = 32\sqrt{3}$ дм^3.

Вариант 20

1. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x\right) + \sqrt{8-x}$; $\frac{1}{3}x^2 - 2x > 0$, т.е. $\dfrac{1}{3}x(x-6) > 0$, тогда $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$; $8 - x \geq 0$, т.е. $x \leq 8$, тогда $x \in (-\infty; 8]$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; 8]$.

2. См. график.



3. $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 \geq 0$; $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \geq -\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 2x - \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\pi/6 + 2\pi k \le 2x \le 3\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$; $\pi/12 + \pi k \le x \le 3\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\left[\pi/12 + \pi k;\ 3\pi/4 + \pi k\right]$, $k \in Z$.

4. $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$; $F(x) = x^2 + 3\ln|x| + C$; ОДЗ $x \ne 0$.

Ответ: $x^2 + 3\ln x + C_1$, если $x > 0$, $x^2 + 3\ln(-x) + C_2$, если $x < 0$.

5. $\log_4(3x - 4) - \log_4(5 - x^2) = \frac{1}{2}$; $4^{\log_4(3x-4)-\log_4(5-x^2)} = 4^{\frac{1}{2}}$; $\frac{3x-4}{5-x^2} = 2$, т.е.

$3x - 4 = 10 - 2x^2$, т.е. $2x^2 + 3x - 14 = 0$; $(x - 2)\left(x + 7/2\right) = 0$;

ОДЗ: 1) $3x - 4 > 0$, т.е. $x \in \left(\frac{4}{3};\ +\infty\right)$; 2) $5 - x^2 > 0$, т.е. $x \in \left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right)$.

Учитывая ОДЗ, решением уравнения является $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

6. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$; $12a + 6h = 36$ см^2; $h = 6$ см$- 2a$; $V(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2 - a^3)$;

$V' = \frac{\sqrt{3}}{2}(6a - 3a^2)$; $V' = 0$ при $a = 0$ см и $a = 2$ см; при $a = 0$ минимум V: $V = 0$, тогда при $a = 2$ см максимум. Ответ: $a = 2$ см.

КАРТОЧКИ–ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАЧЕТОВ

Зачет № 1

Карточка 1

1. Первообразная функции — такая функция, производная которой равна искомой функции.

2. $F(x) = -\cos x + 2\sin x + C$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + e = 0$; $C = -2$; $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$

3. а) $S = \int_1^4 \sqrt{x}dx - 3 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 - 3 = \frac{2}{3}\left(2^3 - 1\right) - 3 = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$;

б) Найдем точку пересечения: $x^2 - x + 2 = 0$; $(x + 1)(x - 2) = 0$. Рассмотрим графики: $y = -x^2 + 4$ и $y = -x + 2$ (наши графики мы подняли на 2), тогда площадь между ними не изменится, но: $S = \int_{-1}^{2}(-x^2 + 4)dx -$

$\int_{-1}^{2}(2 - x)dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = 11\frac{1}{2}$

Карточка 2

1. Пусть $P(x)$ и $F(x)$ первообразные функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x) = F(x) + C$.

Доказательство: $P'(x)$=$F(x)$ = $f(x)$ в одну сторону. В другую $P'(x) = f(x)$, $F'(x)$= $f(x)$. Пусть $P(x) \neq F(x) + C$, тогда $P'(x) \neq F'(x)$, но $P' = F'$ противоречие.

2. $F(x) = -2\cos 2x - \sin\frac{x}{2} + x + C$.

3. а) $S = 8\int\limits_1^2 x^3 dx = \left(8 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_1^2 = 8 - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$;

б) $S = \int\limits_0^{2\pi/3} 3\sin x dx - \int\limits_0^{2\pi/3} (-\sin x) dx = 4\int\limits_0^{2\pi/3} \sin x dx = 4(-\cos x)\Big|_0^{2\pi/3} = 6$.

Карточка 3

1. Правило 1. F — первообразная для f; G — для g, тогда $(F + G)$ — первообразная для $f + g$. Док-во: $(F + G)' = F' + G' = f + g$.

Правило 2. F — первообрахная для f, тогда kF — для kf, k — константа. Док-во: $(RF)' = R(F') = kf$.

Правило 3. $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k и b — константы, тогда $\frac{1}{k}(F(kx+b))$ — первообразная для $(kx + b)$. Док-во: $\left(\frac{1}{k}(F(kx+b))'\right) = f(kx+b)$.

2. а) $\int\limits_1^9 \frac{6x}{\sqrt{x}} dx = 6\int\limits_1^9 \sqrt{x} dx = 4x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = 4(27-1) = 4\cdot 26 = 104$.

б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + 2\sin x\cos x) dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x d(2x) =$

$x = \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\pi}{2} - 1$.

3. а) $S = \int\limits_0^1 \sqrt{x} dx - \int\limits_0^1 x^2 dx = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$;

б) $S = 2\int\limits_0^1 (2 - x - x^2) dx = 2\left(\left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1\right) = 2\frac{1}{3}$.

Карточка 4

1. Смысл этой записи в том, что площадь этой трапеции равна: $\int\limits_b^a f(x) dx$.

2.а) $\int\limits_1^4 (x-2)^2 dx = \frac{1}{3}(x-2)^3 \Big|_1^4 = \frac{8}{3}+\frac{1}{3}=\frac{9}{3}=3$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\cos 2x} dx = 2\mathrm{tg}2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}$.

3. а) $\int\limits_{-1}^{2} (x+3-x^2-1)dx = \int\limits_{-1}^{2} (-x^2+x+2)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$

$= -\frac{8}{3}+2+4-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = 2\frac{1}{2}$;

б) $\int\limits_0^{\pi}\left(2\cos\frac{2x}{2}+1\right)dx = \int\limits_0^{\pi}\left(\cos x+2\right)dx = (\sin x+2x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi$.

Карточка 5

1. Смысл в том, что $S = \int\limits_b^a f(x)dx = F(a)-F(b)$ — по теореме Ньютона-Лейбница.
2. $F'(x) = f(x)$.
3. а) $S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$;

б) $S = \int\limits_{-3}^{1} ((-x^2+9)-(2x+6))dx = \int\limits_{-3}^{1} (-x^2-2x+3)dx = \left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$

$= \left(3-\frac{1}{3}-1\right)-(9-9-9) = 10\frac{2}{3}$.

Карточка 6

1. $\int\limits_b^a f(x)dx = F(b)-F(a)$. Смысл в том, что так можно считать определенные интегралы.
2. $F(x) = -\frac{3}{2}\cos 4x + C$; $F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}+C=0$; $C=\frac{3}{4}$; $F(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\cos 4x$.
3.а)

$\int\limits_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)dx = (-x^3/3+x^2+3x)\Big|_{-1}^{3} = (-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = 9+\frac{5}{3} = 10\frac{2}{3}$

б) $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(2\sin^2\frac{x}{2}+2\right)dx = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(3-\cos x\right)dx = (3x-\sin x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{9\pi}{2}+1$.

Зачет № 2

Карточка 1

1. Число y называется корнем n-ой степени из x, если $y^n = x$. Обозначается $\sqrt[n]{x}$, 2 — корень 3-й степени из 8.

2. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-1}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}=\dfrac{1}{\left(3-2\sqrt{2}\right)}+\left(3-2\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2}}{\left(3-2\sqrt{2}\right)}=$

$=\dfrac{1+9-12\sqrt{2}+8}{3-2\sqrt{2}}=6$.

3. а) $x^3=\dfrac{125}{8}$; $x=\dfrac{5}{2}$;

б) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}-(3x-1)=0$; $\sqrt{3x-1}\left(\sqrt{4x+3}-\sqrt{3x-1}\right)=0$; $x=1/3$;

$\begin{cases}4x+3=3x-1\\ x\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}$; $\begin{cases}x=-4\\ x\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 0. Ответ: $x=\dfrac{1}{3}$.

в) $\sqrt{4\cos x+1}=2\sin x$; $4\cos + 1 = 4\sin^2 x = 4(1-\cos^2 x) = 4 - 4\cos^2 x$;

$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$; $\left(\cos x+3/2\right)\left(\cos x-1/2\right)=0$; $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

4. $\begin{cases}\sqrt[3]{y}=z\\ \sqrt{x}=m\\ z-m=7\\ z\cdot m=18\end{cases}$; $\begin{cases}z=\sqrt[3]{y}\\ m=\sqrt{x}\\ z=7+m\\ (m-2)(m+9)=0\end{cases}$; $\begin{cases}m=2\\ z=9\\ x=4\\ y=729\end{cases}$. Ответ: $x = 4$, $y = 729$.

Карточка 2

1. а) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ по определению;

б) $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$. Док-во: $\left(\sqrt[n]{xy}\right)^n=xy=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\left(\sqrt[n]{y}\right)^n=\left(\sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}\right)^n$ при $n = 2k$ $x, y \ge 0$.

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-2^{0,2}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2^{-0,3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)=$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1+\sqrt{2}\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{-3+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=3$.

3. а) $x^2 = 64$; $x = \pm 8$;

б) $\dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}=8-x=2-\sqrt{x}$; $\sqrt{x}=t$; $8 - t^2 = 2 - t$; $t^2 - t - 6 = 0$; $(t+2)(t-3)=0$;

$t=\sqrt{x}$; $\sqrt{x}=3$; $x = 9$. Ответ: $x = 9$.

в) $\sqrt{3\sin x + 1{,}5} = 2\cos x$; $3\sin x + 3/2 = 4\cos^2 x = 4(1 - \sin^2 x)$;

$4\sin^2 x + 3\sin x - \dfrac{5}{2} = 0$; $8\sin^2 x + 6\sin x - 5 = 0$; $\left(\sin x - 1/2\right)\left(\sin x + 20/16\right) = 0$;

$|\sin x| \le 1$; $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$.

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases}$; $x = 4,\ y = 4$.

Карточка 3

1. Это уравнение, где присутствуют радикалы. Например, $\sqrt{x} = 2$ — уравнение, имеющее решение, $\sqrt{x} = -2$ — не имеющее решения.

2. $\left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}} - 0{,}5\right)\left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}} + 0{,}5\right) = \left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}} - 0{,}25\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{81\cdot 9}} - 0{,}25\right) =$

$= 1/9 - 1/4 = -5/36$.

3. а) $16x^4 - 81 = 0$; $x^4 = \dfrac{81}{16}$; $x = \pm\dfrac{3}{2}$;

б) $\sqrt{3x^2 - 11x + 10} = 8 - 2x$; $3x^2 - 11x + 10 = 64 - 32x + 4x^2$; $x^2 - 21x + 54 = 0$; $(x - 3)(x - 18) = 0$; $x = 3$ и $x = 18$ лежат в ОДЗ. Ответ: $x = 3$ и $x = 18$.
в) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\sin^2 x$; $-\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$; $\sin x(-\sin x + \cos x) = 0$;

$x = \pi n$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ n, k \in Z$.

4. $\begin{cases} x - y = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 10 \\ \sqrt{y} = 2 - \sqrt{y} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 25 \\ y = 9 \end{cases}$.

Карточка 4

1. Два уравнения называются рациональными, если имеют одни и те же решения. Этот метод состоит в переходе к решению равносильных уравнений.

2. $\dfrac{(2 + \sqrt[4]{x})^2 - (2 - \sqrt[4]{x})^2}{4 - x^{1/2}} \cdot \dfrac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{8\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{8}{\sqrt{x}}$.

3. а) $x^4 < 5$; $x \in \left(-\sqrt[4]{5};\ \sqrt[4]{5}\right)$;

б) $\sqrt[4]{x + 1} = t$; $t \ge 0$; $t + 20 = t^2$; $t^2 - t - 20 = 0$; $(t + 4)(t - 5) = 0$; $t \ge 0$;

$t = \sqrt[4]{x + 1} = 5$; $x = 624$. Ответ: $x = 624$.
в) $3|\,x\,| + 3 = x^2 - 25 = |\,x\,|^2 - 25$; $|\,x\,| = z$; $3z + 3 = z^2 - 25$; $z^2 - 3z - 28 = 0$; $(z - 7)(z + 4) = 0$; $z \ge 0$; $z = 7$; $x = \pm 7$.
Ответ: $x = \pm 7$.

4. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y)^2=36 \\ (x-y)^2=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=\pm 6 \\ x-y=\pm 2 \\ xy>0 \end{cases}$; $\begin{matrix} x=4 \\ y=2 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} x=-4 \\ y=-2 \end{matrix}$.

Карточка 5

1. $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$. а) $x^{\frac{m}{n}}x^{\frac{l}{r}}=x^{\frac{mr+ln}{nr}}$. Док-во: $x^{\frac{m}{n}}x^{\frac{l}{r}}=x^{\frac{m}{n}+\frac{l}{r}}=x^{\frac{mr+ln}{nr}}$.

2. $\left(1/2\right)^{-3}+\left(1/2\right)^{-2}\cdot 1/9=8+4/9=76/9$.

3. а) $x^6>16$; $x^3>4$ и $x^3<-4$; $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt[3]{4}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};\ +\infty\right)$;

б) $\sqrt{x^2-x-20}=\dfrac{6(x+2)}{x+2}=6$; $x\neq -2$; $x^2-x-20=36$; $x^2-x-56=0$; $(x-8)(x+7)=0$. Ответ: $x=8$; $x=-7$.

в) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}=2$; $5\geq x\geq 3$; $5-x+2\sqrt{5-x}\sqrt{x-3}+x-3=4$; $\sqrt{5-x}\sqrt{x-3}=1$; $(5-x)(x-3)=1$; $-x^2+5x+3x-15=1$; $x^2-8x+16=0$; $(x-4)^2=0$; $x=4$.

4. $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ (x+y)^2=25 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=\pm 5 \\ (x+y)(x-y)=5 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $x=\pm 3$; $y=\pm 2$.

Зачет № 3

Карточка 1

1. Функция $\log_a x=f(x)$ определена при $a>0$, $a\neq 1$ для $x>0$, где $f(b)=\log_a b$, где $a^{\log_a b}=b$. $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$.

2. $f(x)=\log_3 t\ (-0{,}5x^2+4{,}5)\geq 0$; $x^2\leq 9$; $x\in(-3;\ 3)$.

3. $\dfrac{3\log_7 4+\log_7 0{,}5}{1-\log_7 14}=\dfrac{\log_7 4^3\cdot\frac{1}{2}}{\log_7\frac{1}{2}}=-\dfrac{\log_7 16}{\log_7 2}=-\log_2 16=-4$.

4. $\begin{cases} 2^{y-1}=4^{0,5x} \\ \log_3(7x+y)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} y-1=x \\ \log_3(7y-7+y)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=y-1 \\ 3y-7=9 \end{cases}$; $\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$.

Ответ: $y=2$, $x=1$.

5. $\log_2(\cos x+1)<0$, т.к. $-x^2-4<0$; $\cos x+1<1$; $\cos x<0$; $x\in(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$.

Карточка 2

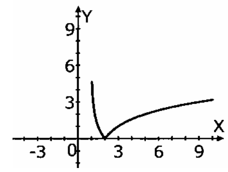
1. Если $a>1$, то ведем x от 0 до $+\infty$, а y от $-\infty$ через(1; 0) до $+\infty$ с выпуклостью вверх; если $a<1$ тоже, но симметрично относительно OX.

2. $y=\sqrt{4-x^2}\cdot\lg(x-1)^2$; $\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\in[-2;\ 2] \end{cases}$; $x\in[-2;\ 1)\cup(1;\ 2]$.

3. Т.к. $3^{\log_2 5} = 3^{\frac{\log_3 5}{\log_3 2}} = 5^{\frac{1}{\log_3 2}} = 5^{\log_2 3}$, $\sqrt{10} > \lg 11$, то $3^{\lg_2 5} + \sqrt{10} > 5^{\lg_2 3} + \lg 11$.

4. $\log_3(x^2-3) + \log_3 2 = \log_3(6x-10)$; $2x^2 - 6x + 4 = 0$; $x^2 - 3x + 2$; $(x-1)(x-2) = 0$; $x = 1$ не подходит, т.к. $x^2 - 3 < 0$. Ответ: $x = 2$.

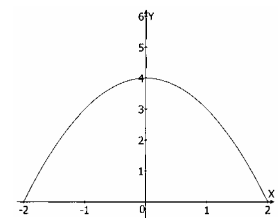
5. См. график.



Карточка 3

1. монотонна, проходит через ноль в x = 1.

2. См. график.



3. $\log_5 x = 4\log_5 3 - \frac{1}{3}\log_2 27$; $\log_5 x = \log_5 \frac{3^4}{3}$;

$x = \frac{3^4}{3} = 3^3 = 27$.

4. $\begin{cases} 2\sin x - 3\log_{0,5} y = 5 \\ 3\sin x + \log_{0,5} y = -3,5 \end{cases}$; $\begin{cases} \sin x = t \\ \log_{0,5} y = z \\ 2t - 3z = 5 \\ 3t + z = -3,5 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sin x = t \\ \log_{1/2} y = z \\ z = -2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n \\ y = 4 \end{cases}$.

5. $\lg^2 x - 2\lg x - 3 > 0$; $(\lg x + 1)(\lg x - 3) > 0$; $\lg x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; $x \in (0; \frac{1}{10}) \cup (1000; +\infty)$.

Карточка 4

1. $\ln ab = \ln a + \ln b$; $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$; $ab = a \cdot b$=ab.

2. $\log_2(4-3x) < 4$; $\begin{cases} 4 - 3x < 16 \\ 4 - 3x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > -4 \\ x < \frac{4}{3} \end{cases}$; $x \in \left(-4; \frac{4}{3}\right)$.

3. $x^{0,5\lg x} = 0,01x^2$; $x^{\frac{1}{2}\lg x} = 10^{-2}x^2$; $10^{\frac{1}{2}\lg^2 x} = 10^{-4\lg x}$; $\frac{1}{2}\lg^2 x + 4\lg x = 0$;

$\lg x(\lg x + 8) = 0$; $x = 1$, $x = 10^{-8}$. Ответ: $x = 1$; $x = 10^{-8}$.

4. $\begin{cases} 2^{1+\log_2(x+y)} = 8 \\ \log_2(3x-1) - \log_2 y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + \log_2(x+y) = 3 \\ \frac{3x-1}{y} = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{3x-1}{y} = 8 \end{cases}$;

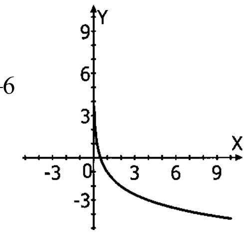
$\begin{cases} x = 4 - y \\ 3(4-y) - 1 = 8y \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 - y \\ 11y = 11 \end{cases}$; $y = 1$, $x = 3$.

5. $\log_{0,2}x + \log_{0,2}(x-3)+1 \geq \log_{0,2} 0,8$; $\log_{0,2}x(x-3) \cdot 0,2 \geq \log_{0,2}0,8$;
$x(x-3) \cdot 0,2 \leq 0,8$, но $x(x-3) \geq 0$; $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; $x(x-3) \leq 4$;
$x^2 - 3x - 4 \leq 0$; $(x+1)(x-4) \leq 0$; $x \in [-1; 4]$, тогда $x \in [-1; 0] \cup [3; 4]$.

Карточка 5

1. а) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $e^{\ln\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} = e^{\ln a - \ln b}$;

б) $\ln a^b = b\ln a$; $e^{\ln a^b} = a^b$; $e^{b\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^b = a^b$.



2. см. график.
3. $x^2 - 36 = 0$; $x = \pm 6$; $\lg 2x - 1 = 0$; $x = 5$, т.к. $x = -6$ и $x = 5$ не лежат в ОДЗ. Ответ: $x = 6$.
4. $\begin{cases} 3^y + x = 10 \\ \frac{3^y}{x} = 3^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^y = 9x \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Ответ: (1; 2).

5. $\log_{a\sqrt{b}} a^2b$, т.к. $\left(a\sqrt{b}\right)^2 = a^2b$, то $\log_{a\sqrt{b}} a^2b = 2$.

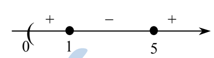
Карточка 6

1. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ очень важна в случае $C = e$ (в данном случае составлены специальные таблицы).

2. $2^{\log_2(0,3x+1,5)} < 8$; $0,3x+1,5 < 8$; $0,3x < 6,5$; $x < 65/3$, но $0,3x+1,5 > 0$; $x > -5$.

Ответ: $x \in \left(-5;\ 65/3\right)$.

3. $5x(2x+6) = 100$; $10x^2+30x-100=0$; $x^2+3x-10=0$; $(x+5)(x-2)=0$, т.к. $2x+6<0$ при $x=-5$. Ответ: $x = 2$.
4. $(x-5)\log_3 x \geq 0$



Ответ: $(0; 1] \cup [5; +\infty)$.

5. Т.к. $\log_2 16\sqrt{8} = \frac{\log_9 16\sqrt{8}}{\log_9 2} = \log_2 9 \log_9 16\sqrt{8}$, а $28 < 16\sqrt{8}$, то $\log_2 9 \log_9 28 < \log_9 16\sqrt{8}$.

Зачет № 4

Карточка 1

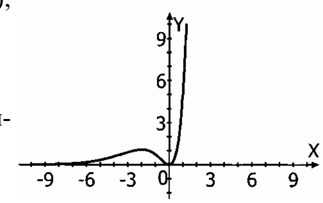
1. Число e — это такое число, что $(e^x)' = e^x$.
2. $f' = \frac{4^x \ln 4x^2 - 2x4^x}{x^4} = \frac{4^x x(x\ln 4 - 2)}{x^4}$; $f'(-1) = -\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{4} - 2\right)$.
3. $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{5-3x} = -\frac{1}{3}\int_{-3}^{1} \frac{d(5-3x)}{5-3x} = -\frac{1}{3}\ln(5-3x)\Big|_{-3}^{1} = -\frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 14) = -\frac{1}{3}\ln\frac{1}{7}$.

4. $S=\int\limits_1^{32} x^{-0,4}dx=\frac{1}{0,6}x^{0,6}\Big|_1^{32}=\frac{1}{0,6}(8-1)=\frac{7\cdot 10}{6}=\frac{7\cdot 5}{3}=\frac{35}{3}$.

5. а) $f'(x) = 4xe^{x+1} + e^{x+1}\cdot 2x^2 = 2xe^{x+1}(2 + x)$;
$f'(x) = 0$ при $x = 0; -2$;

x	< -2	$-2 < x < 0$	$0 <$
f'	+	–	+

f возрастает на $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$, f убывает на $(-2; 0)$; $x_{max}=-2$; $x_{min} = 0$.
б) см. график.



Карточка 2

1. $y = a^x = e^{x\ln a}$; $y' = (e^{x\ln a})' = \ln a(e^{x\ln a}) = a^x\ln a$; $y_1 = e^x + C$; $y_2=\frac{1}{\ln a}a^x+C$.

2. $f'=\frac{1}{x\ln 3}$; $\varphi'(x)=\frac{3}{2x}$; $f'(0,5)=\frac{2}{\ln 3}$; $\varphi'(0,5) = 3$.

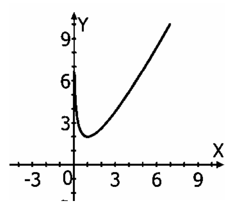
3. $F(x) = 3\ln(x - 1) + 2\ln(x + 1)$.

4. $S=\int\limits_0^2 2^x dx-2=\frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_0^2-2=\frac{1}{\ln 2}(4-1)-2=\frac{3}{\ln 2}-2$.

5. $f'(x)=2-{}^2\!/_x$; $f' = 0$ при $x = 1$, при $x \le 0$ $f'(x)$ неопределена

x	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
f'	–	+

на $(0; 1)$ убывает; на $(1; +\infty)$ возрастает; $x_{min} = 1$.



Карточка 3

1. $\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}$.

2. $f' = 0,5e^{x-1}$; $f'(2) = 0,5e$; $f(2) = 0,5e$;
$y = 0,5ex + 0,5e$.

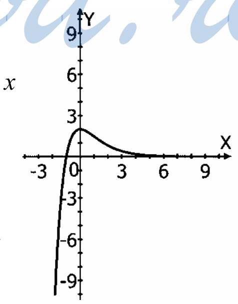
3. $\ln x(\ln x + 1) > 0$; $\ln x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, $x \in \left(-\infty;\ {}^1\!/_{10}\right) \cup (1; +\infty)$.

4. $3-\int\limits_{1/2}^{2} {}^1\!/_x\,dx=3-(\ln 2-\ln {}^1\!/_2)=3-\ln 4$.

5. $f'(x) = 2e^{-x} - 2(1 + x)e^{-x} = 2e^{-x}(1 - 1- x) = -2xe^{-x}$

x	< 0	> 0
f'	+	–

f возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$, $x_{max} = 0$.



Карточка 4

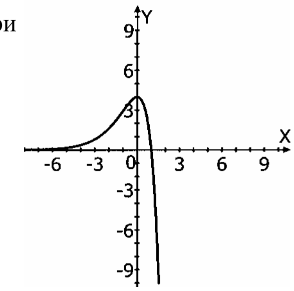
1. $F(x) = \ln x$.

2. $f'(x) = 4^{x-1}\ln 4\cos\frac{\pi}{2}x - 4^{x-1}\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x = 4^{x-1}\left(\ln 4\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right)$; $f'(1) = -\frac{\pi}{2}$

3. $\sqrt{3x-2} = 4 - x$; $3x - 2 = 16 - 8x + x^2$; $x^2 - 11x + 18 = 0$; $(x-9)(x-2) = 0$, т.к. при $x = 9$ $4 - x < 0$. Ответ: $x = 2$.

4. $f = \int_{-1}^{0}(1+e^x)dx = (x+e^x)\Big|_{-1}^{0} = 1 - \left(-1+\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e}$.

5. а) $f'(x) = -4e^x + 4(1-x)e^x = 4e^x(1 - x - 1) = = 4e^x x$; убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$, $x_{\min} = 0$;
б) см. график.



Карточка 5

1. $\left(x^n\right)^k = \sum_{k=1}^{n} x^{n-1} = nx^{n-1}$.

2. $0 < 4x - 3 < 1$; $3/4 < x < 1$; $x \in \left(3/4;\ 1\right)$.

3. $\ln x + \ln x = 4$; $\ln x = 2$; $x = e^2$.

4. $S = \int_{-1}^{2} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{-1}^{2} = -\left(\frac{1}{e^2} - e\right) = e - \frac{1}{e^2}$.

5. а) $f'(x) = x - \frac{1}{x}$; $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$, при $x < 0$ f неопределена, возрастает на $(1; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$, $x_{\max} = 1$.
б)