А.В. Морозов, А.С. Рылов,
А.Н. Филиппов

Решение экзаменационных задач по алгебре и началам анализа за 11 класс

к сборнику «Алгебра и начала анализа: Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / И.Р. Высоцкий, Л.И. Звавич, Б.П. Пигарев и др.; Под ред. С.А. Шестакова — 2-е изд., испр. — М: Внешсигма-М, 2004»

Глава 1. Вычисления. Преобразование выражений
§ 1. Степень с натуральным показателем
Уровень А.

1.1.A01.

а) $\left(3\frac{1}{2}-1,52\right):1,1+\left(1\frac{1}{4}-1,842\right)\cdot 1\frac{13}{37}=1,98:1,1+(-0,592)\cdot\frac{50}{37}=$

$=\frac{198}{100}\cdot\frac{10}{11}-\frac{592}{1000}\cdot\frac{50}{37}=\frac{18}{10}-\frac{16}{20}=1;$

б) $\left(1\frac{3}{4}+0,91\right):1,4+\left(1\frac{1}{5}-1,911\right)\cdot 1\frac{21}{79}=2,66:1,4+(-0,711)\cdot\frac{100}{79}=$

$=\frac{266}{100}\cdot\frac{10}{14}-\frac{711}{1000}\cdot\frac{100}{79}=\frac{19}{10}-\frac{9}{10}=1.$

1.1.A02.

а) $\frac{P(1)-P(-1)}{10}=\frac{1+2+3+...+11-(1-2+3-4+...+9-10+11)}{10}=$

$=\frac{2\cdot(2+4+6+8+10)}{10}=\frac{60}{10}=6;$

б) $\frac{P(1)-P(-1)}{12}=\frac{3+5+7+9+...+27-(3-5+7-9+...+23-25+27)}{12}=$

$=\frac{2\cdot(5+9+13+17+21+25)}{12}=\frac{180}{12}=15.$

1.1.A03.

а) $\left(1\frac{3}{4}+1,44-1,75\right):1,2+(9,1-8,317)\cdot\frac{10}{87}=1,44:1,2+0,783\cdot\frac{10}{87}=$

=1,2+0,09=1,29;

б) $\left(1\frac{1}{4}+1,21-1,25\right):1,1+(9,7-9,416)\cdot\frac{10}{71}=1,21:1,1+0,284\cdot\frac{10}{71}=$

$=1,1+0,04=1,14$.

1.1.A04.

а) $\frac{P^3+Q^3}{P^2-PQ+Q^2}+\frac{P^3-Q^3}{P^2+PQ+Q^2}=\frac{(P+Q)(P^2-PQ+Q^2)}{(P^2-PQ+Q^2)}+$

$+\frac{(P-Q)(P^2+PQ+Q^2)}{(P^2+PQ+Q^2)}=(P+Q)+(P-Q)=2P=2\cdot(16x^2-24x+9)=$

$=2\cdot\left(16\cdot\frac{9}{16}-24\cdot\frac{3}{4}+9\right)=2\cdot(9-18+9)=0,\qquad$ *при* $x=0,75=\frac{3}{4};$

б) $\frac{P^3+Q^3}{P^2-PQ+Q^2}+\frac{P^3-Q^3}{P^2+PQ+Q^2}=(P+Q)+(P-Q)=2P=$

$=2\cdot(16x^2+40x+25)=2\cdot\left(16\cdot\frac{25}{16}+40\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+25\right)=$

$=2\cdot(25-50+25)=0,\qquad$ *при* $x=-1,25=-\frac{5}{4}$.

1.1.A05.

а) $\frac{3-5x_1}{x_1+x_2}+\frac{3-5x_2}{x_2+x_1}=\frac{3-5x_1+3-5x_2}{x_2+x_1}=\frac{6-5(x_2+x_1)}{x_2+x_1}=\frac{6-5\cdot(-2)}{-2}=$

$=-8$, так как $x_1+x_2=-2$ по теореме Виета;

б) $\frac{5+2x_1}{x_1+x_2}+\frac{5+2x_2}{x_2+x_1}=\frac{10+2(x_1+x_2)}{x_2+x_1}=\frac{10+2\cdot 20}{20}=\frac{50}{20}=2{,}5$,

так как $x_1+x_2=20$ по теореме Виета.

1.1.A06.

а) $\frac{5-2u}{u}+\frac{5+4v}{v}=\frac{5v-2uv+5u+4uv}{uv}=\frac{5(u+v)+2\cdot uv}{uv}=$

$=5\frac{u+v}{uv}+2=5\cdot\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{5}\right)}+2=5\cdot\frac{1}{2}+2=4{,}5$,

так как $u+v=-\frac{2}{5}$, а $uv=-\frac{4}{5}$ по теореме Виета;

б) $\frac{3+5u}{u}+\frac{3+4v}{v}=\frac{3v+5uv+3u+4uv}{uv}=\frac{3(u+v)}{uv}+9=3\cdot\frac{\frac{5}{3}}{\left(-\frac{4}{3}\right)}+9=$

$=-\frac{15}{4}+9=\frac{21}{4}=5{,}25$, так как $u+v=\frac{5}{3}$, а $uv=-\frac{4}{3}$ по теореме Виета.

Уровень В.

1.1.B01.

а) $\frac{vu^3-uv^3}{v-u}=\frac{uv(u^2-v^2)}{v-u}=\frac{uv(u-v)(u+v)}{v-u}=-uv(u+v)=$

$=-(-3)\cdot 6=18$, так как $u+v=6$, а $uv=-3$ по теореме Виета;

б) $\frac{vu^3-uv^3}{v-u}=-uv(u+v)=-(-5)\cdot 2=10$ по теореме Виета.

1.1.B02.

а) $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+4=\frac{u^2+v^2}{uv}+4=\frac{u^2+v^2+2uv}{uv}+2=\frac{(u+v)^2}{uv}+2=$

$=\frac{25}{-11}+2=-\frac{25}{11}+2=-\frac{3}{11}$, так как $u+v=-5$ и $uv=-11$;

б) $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+12=\frac{u^2+v^2}{uv}+2+10=\frac{u^2+v^2+2uv}{uv}+10=\frac{(u+v)^2}{uv}+10=$

$=\frac{100}{-15}+10=-\frac{100}{15}+10=\frac{50}{15}=3\frac{1}{3}$,

так как $u+v=10$ и $uv=-15$.

1.1.B03.

а) $\frac{u^3v^2-u^2v^3}{u^2-v^2}=\frac{(uv)^2(u-v)}{(u-v)(u+v)}=\frac{(uv)^2}{u+v}=\frac{\left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)^2}{\frac{12}{5}}=\frac{\frac{48}{25}}{\frac{12}{5}}=\frac{4}{5}$,

так как u+v=$\frac{12}{5}$, а uv=$-\frac{4\sqrt{3}}{5}$;

б) $\frac{u^3v^2-u^2v^3}{u^2-v^2}=\frac{(uv)^2}{u+v}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{10}{9}}{\frac{4}{3}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$, так как u+v=$\frac{4}{3}$ и uv=$-\frac{\sqrt{10}}{3}$.

1.1.B04.

а) $\frac{Q(x)}{P(x)}-P(x)=\frac{(x^2-3)^2(x^2+3)^2}{(x^2-3)^2}-(x^2-3)^2=(x^2+3)^2-(x^2-3)^2=$

$=2\cdot 6x^2=12x^2=1{,}08$, при x=–0,3

б) $\frac{Q(x)}{P(x)}-P(x)=\frac{(x^4-4)^2}{x^4-4x^2+4}-(x^4-4x^2+4)=\frac{(x^2-2)^2(x^2+2)^2}{(x^2-2)^2}-$

$-(x^2-2)^2=(x^2+2)^2-(x^2-2)^2=8x^2=8\cdot(-0,7)^2=3,92$, при x=–0,7.

1.1.B05.

а) $P^2(Q(x))-Q^2(P(x))=(P(Q(x))-Q(P(x))\cdot(P(Q(x))+Q(P(x)))=$

$=\left(5Q(x)-1-\frac{P(x)+1}{5}\right)\left(5Q(x)-1+\frac{P(x)+1}{5}\right)=$

$=\left(x+1-1-\frac{5x}{5}\right)\left(x+1-1+\frac{5x}{5}\right)=0\cdot 2x=0$, при x=117,399;

б) $P^6(Q(x))-Q^6(P(x))=(5Q(x)-1)^6-\left(\frac{P(x)+1}{5}\right)^6=x^6-x^6=0$, при x=117,277.

1.1.B06.

а) $(1+3x+2x^2)+(1+4x+2x^2)+(1+5x+2x^2)+\ldots+(1+17x+2x^2)=15\cdot 2x^2+$

$+(3+4+5+\ldots+17)x+15$, так что $x_1+x_2=\frac{-(3+4+5+...+17)}{2\cdot 15}=-\frac{\frac{15\cdot 20}{2}}{2\cdot 15}=-\frac{20}{4}=-5$;

б) $(2+3x+x^2)+(2+5x+x^2)+(2+7x+x^2)+\ldots+(2+27x+x^2)=$
$=13\cdot x^2+(3+5+7+\ldots+27)x+13\cdot 2$, так что

$x_1+x_2=\frac{-(3+5+7+...+27)}{13}=-\frac{\frac{13\cdot 30}{2}}{13}=-\frac{30}{2}=-15$.

1.1.B07.

а) $p=(7x^2-3y^2)^2=\left(\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}-\frac{(t^2+1)^2}{(1-t^2)^2}\right)^2=\frac{(-t^4+2t^2-1)^2}{(1-t^4)^4}=\frac{(t^2-1)^4}{(1-t^2)^4}=1$;

б) $p=(5x^2-6y^2)^2=\left(\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}-\frac{(t^2+1)^2}{(1-t^2)^2}\right)^2=\frac{(-t^4+2t^2-1)^2}{(1-t^2)^4}=\frac{(t^2-1)^4}{(1-t^2)^4}=1.$

1.1.В08.

а) $p=4x^4-12x^2y^2+9y^4=(2x^2-3y^2)^2=\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y\right)^2\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y\right)^2=$

$=\left(\frac{2t}{1-t}+\frac{t^2+1}{1-t}\right)^2\cdot\left(\frac{2t}{1-t}-\frac{t^2+1}{1-t}\right)^2=\left(\frac{t^2+2t+1}{1-t}\right)^2\cdot\left(\frac{t^2-2t+1}{t-1}\right)^2=$

$=\left(\frac{(t+1)^2}{1-t}\right)^2\cdot\left(\frac{(t-1)^2}{t-1}\right)^2=\frac{(1+t)^4\cdot(t-1)^4}{(t-1)^4}=(t+1)^4;$

б) $p=25x^4-60x^2y^2+36y^4=(5x^2-6y^2)^2=\left(\sqrt{5}x-\sqrt{6}y\right)^2\left(\sqrt{5}x+\sqrt{6}y\right)^2=$

$=\left(\frac{2t}{1-t}+\frac{t^2+1}{1-t}\right)^2\cdot\left(\frac{2t}{1-t}-\frac{t^2+1}{1-t}\right)^2=\left(\frac{(t-1)^2}{t-1}\right)^2\cdot\left(\frac{(t+1)^2}{1-t}\right)^2=(t+1)^4.$

1.1.В09.

а) $p=49x^2-42xy+9y^2+42x-18y-1=(7x-3y)^2+6(7x-3y)-1=$
$(-1)^2+6(-1)-1=-6$, при $7x-3y=-1$;
б) $p=81x^2-36xy+4y^2+9x-2y+5=(9x-2y)^2+(9x-2y)+5=3^2+3+5=17$,
при $9x-2y=3$.

1.1.В10.

а) $5uv+2(u^2+v^2)=2(u^2+v^2+2uv)+uv=2(u+v)^2+uv=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{5}{5}\right)=$

$=\frac{2}{25}-1=-\frac{23}{25}=-0,92;$

б) $2uv+3(u^2+v^2)=3(u^2+v^2+2uv)-4uv=3(u+v)^2-4uv=$

$=3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{27}{25}+\frac{4}{5}=\frac{47}{25}=1,88.$

1.1.В11.

а) $\frac{u^4-v^4}{u^2-v^2}-4=\frac{(u^2-v^2)(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)}-4=u^2+v^2-4=(u+v)^2-2uv=$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{4}{2}\right)-4=\frac{25}{4}=6,25;$

б) $\frac{u^4-v^4}{u^2-v^2}-5=\frac{(u^2-v^2)(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)}-5=u^2+v^2-5(u+v)^2-2uv-5=$

$=\left(\frac{7}{4}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)-5=\frac{49}{16}-\frac{5}{2}=\frac{9}{16}.$

1.1.В12.

а) $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+12=\frac{u^2+v^2}{uv}+12=\frac{(u+v)^2-2uv}{uv}+12=\frac{(u+v)^2}{uv}+10=$

$=\frac{(-7)^2}{-5\sqrt{17}}+10=\frac{-49\sqrt{17}}{85}+10=\frac{-49\sqrt{17}+850}{85};$

б) $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+4=\frac{u^2+v^2}{uv}+4=\frac{(u+v)^2-2uv}{uv}+4=\frac{(u+v)^2}{uv}+2=$

$=\frac{(-6)^2}{2\sqrt{6}}+2=\frac{36\sqrt{6}}{12}+2=3\sqrt{6}+2$.

Уровень С.

1.1.C01.

а) $P(x)=x^3+6x^2+12x+19=(x^3+6x^2+12x+8)+11=(x+2)^3+11=$

$=\left(-\sqrt[3]{11}\right)^3+11=-11+11=0$, при $x=-2-\sqrt[3]{11}$;

б) $P(x)=x^3+9x^2+27x+29=(x^3+9x^2+27x+27)+2=(x+3)^3+2=$

$=\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3+2=-2+2=0$, при $x=-3-\sqrt[3]{2}$.

1.1.C02.

а) $x-12y+7z=2\cdot(2x-5y+z)-(3x+2y-5z)=2\cdot4-3=8-3=5$, при $2x+5y+z=4$ и $3x+2y-5z=3$;

б) $6x+5y+11z=2\cdot(4x+2y+3z)-(2x-y-5z)=2\cdot3-1=5$, при $2x-y-5z=1$ и $4x+2y+3z=3$.

1.1.C03.

а) $\frac{u+v}{u^3+v^3}=\frac{u+v}{(u+v)(u^2-uv+v^2)}=\frac{1}{u^2-uv+v^2}=\frac{1}{(u+v)^2-3uv}=$

$=\frac{1}{\left(-\frac{5}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)}=\frac{1}{\frac{25}{4}+\frac{9}{7}}=\frac{28}{175+36}=\frac{28}{211}$;

б) $\frac{u+v}{u^3+v^3}=\frac{u+v}{(u+v)(u^2-uv+v^2)}=\frac{1}{u^2-uv+v^2}=\frac{1}{(u+v)^2-3uv}=$

$=\frac{1}{\left(-\frac{9}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}=\frac{1}{\frac{81}{4}+\frac{12}{5}}=\frac{20}{405+48}=\frac{20}{453}$.

1.1.C04.

а) $\frac{u^3-v^3}{u^6-v^6}=\frac{(u^3-v^3)}{(u^3-v^3)(u^3+v^3)}=\frac{1}{u^3+v^3}=\frac{1}{(u+v)(u^2-uv+v^2)}=$

$=\frac{1}{(u+v)((u+v)^2-3uv)}=\frac{1}{(-4)\cdot((-4)^2-3\cdot2)}=\frac{1}{(-4)\cdot10}=-\frac{1}{40}$;

б) $\frac{u^3-v^3}{u^6-v^6}=\frac{(u^3-v^3)}{(u^3-v^3)(u^3+v^3)}=\frac{1}{u^3+v^3}=\frac{1}{(u+v)(u^2-uv+v^2)}=$

$=\frac{1}{(u+v)((u+v)^2-3uv)}=\frac{1}{(-2)\cdot((-2)^2-3\cdot(-6))}=\frac{1}{(-2)\cdot22}=-\frac{1}{44}$.

1.1.C05.

а) $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=(u+v)((u+v)^2-3uv)=\frac{5}{2}\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{4}\right)=$

$=\frac{5}{2}\left(\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{22}{4}=\frac{55}{4}=13,75$;

б) $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=(u+v)((u+v)^2-3uv)=\frac{3}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)\right)=$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{21}{4}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{30}{4}=\frac{45}{4}=11,25.$$

1.1.С06.

а) $|u-v|=\sqrt{(u-v)^2}=\sqrt{u^2+v^2-2uv}=\sqrt{(u+v)^2-4uv}=$

$$=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{25}{4}-2}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2};$$

б) $|u-v|=\sqrt{(u-v)^2}=\sqrt{u^2+v^2-2uv}=\sqrt{(u+v)^2-4uv}=$

$$=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{4}\right)}=\sqrt{\frac{9}{16}+2}=\sqrt{\frac{41}{16}}=\frac{\sqrt{41}}{4}.$$

1.1.С07.

а) $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=((u+v)^2-2uv)^2-2(uv)^2=$

$$=\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^2-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{1}{3}+2\right)^2-2=\frac{49}{9}-2=\frac{31}{9}=3\frac{4}{9};$$

б) $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=((u+v)^2-2uv)^2-2(uv)^2=$

$$=\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\right)^2-2\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{1}{5}+2\right)^2-2=\frac{121}{25}-2=\frac{71}{25}=2,84\cdot$$

1.1.С08.

а) $\frac{u^3-v^3}{(u^2-v^2)}=\frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{(u-v)(u+v)}=\frac{(u+v)^2-uv}{u+v}=\frac{\left(-\frac{11}{\sqrt{6}}\right)^2-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}{\left(-\frac{11}{\sqrt{6}}\right)}=$

$$=\frac{\frac{121}{6}-2}{\left(-\frac{11}{\sqrt{6}}\right)}=-\frac{109\cdot\sqrt{6}}{66};$$

б) $\frac{u^3-v^3}{u^2-v^2}=\frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{(u-v)(u+v)}=\frac{(u+v)^2-uv}{u+v}=\frac{\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2-\left(-\frac{5\sqrt{11}}{\sqrt{11}}\right)}{\frac{15}{\sqrt{11}}}=$

$$=\frac{\frac{225}{11}+5}{\frac{15}{\sqrt{11}}}=\frac{280\sqrt{11}}{165}=\frac{56\sqrt{11}}{33}.$$

1.1.С09.

а) $(2x-3y)y+(2y-3x)x=2xy-3y^2+2xy-3x^2=-3(x^2+y^2+2xy)+$
$+10xy=-3(x+y)^2+10xy=-3\cdot121-10\cdot5=-413;$

б) $(5x+2y)y+(5y+2x)x=5xy+2y^2+5xy+2x^2=2(x^2+y^2-2xy)+14xy=$
$=2(x-y)^2+14xy=2\cdot 81+14(-12)=-6.$

1.1.C10.

а) $(3+2x)^2y+(3+2y)^2x=(9+12x+4x^2)y+(9+12y+4y^2)x=9(x+y)+24xy+$
$+4xy(x+y)=9\cdot(-5)+24\cdot 5+4\cdot 5(-5)=-25;$

б) $(4-3x)^2y+(4-3y)^2x=(16-24x+9x^2)y+(16-24y+9y^2)x=16(x+y)-48xy+$
$+9xy(x+y)=16\cdot 7-48\cdot 9+9\cdot 9\cdot 7=247$

1.1.C11.

а) $(5-3x^2)^2y+(5-3y^2)^2x=(25-30x^2+9x^4)y+(25-30y^2+9y^4)x=25(x+y)-$
$-30xy(x+y)+9xy(x^3+y^3)=25(x+y)-30xy(x+y)+9xy(x+y)((x+y)^2-3xy)=$
$=25\cdot 3-30\cdot(-2)\cdot 3+9(-2)\cdot 3\cdot(9+6)=-555;$

б) $(3-2x^2)^2y+(3-2y^2)^2x=(9-12x^2+4x^4)y+(9-12y^2+4y^4)x=9(x+y)-$
$-12xy(x+y)+4xy(x^3+y^3)=9(x+y)-12xy(x+y)+4xy\cdot(x+y)((x+y)^2-3xy)=$
$=9\cdot 4-12\cdot 2\cdot 4+4\cdot 2\cdot 4\cdot(16-6)=260.$

1.1.C12.

а) $A(x)=5p^2(x)+4p(x)q(x)-q^2(x)=(5p(x)-q(x))(p(x)+q(x))=$

$$=\left(\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{145}{6}+\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{6}-\frac{71}{6}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}-\frac{29}{6}-\frac{x^2}{6}+\frac{5x}{6}+\frac{71}{6}\right)=$$

$=(x^2-36)(x+7)=(x-6)(x+6)(x+7)$, так что $x_1+x_2+x_3=6+(-6)+(-7)=-7;$

б) $A(x)=8p^2(x)+7p(x)q(x)-q^2(x)=(8p(x)-q(x))(p(x)+q(x))=$

$$=\left(\frac{8}{9}x^2+\frac{8}{9}x-\frac{104}{9}+\frac{x^2}{9}-\frac{8x}{9}-\frac{40}{9}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{9}-\frac{13}{9}-\frac{x^2}{9}+\frac{8x}{9}+\frac{40}{9}\right)=$$

$=(x^2-16)(x+3)=(x-4)(x+4)(x+3)$, так что $x_1+x_2+x_3=4+(-4)+(-3)=-3.$

Уровень D.

1.1.D01.

а) $A(x)=4p^2(x)+3p(x)q(x)-q^2(x)=(4p(x)-q(x))(p(x)+q(x))=$

$$=\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{108}{5}+\frac{x^2}{5}-\frac{4x}{5}-\frac{17}{5}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{5}+\frac{x}{5}-\frac{27}{5}-\frac{x^2}{5}+\frac{4x}{5}+\frac{17}{5}\right)=$$

$=(x^2-25)(x-2)=(x+5)(x-5)(x-2)$, так что $x_1^2+x_2^2+x_3^2=25+25+4=54;$

б) $A(x)=2p^2(x)-p(x)q(x)-q^2(x)=(2p(x)+q(x))(p(x)-q(x))=$

$$=\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{16}{3}+\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}+\frac{13}{3}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}-\frac{8}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{13}{3}\right)=$$

$=(x^2-1)(x-7)=(x-1)(x+1)(x-7)$, так что $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+1+49=51.$

1.1.D02.

а) $A(x)=8p^2(x)-7p(x)q(x)-q^2(x)=(8p(x)+q(x))(p(x)-q(x))=$

$$=\left(\frac{8}{9}x^2+\frac{8}{9}x-\frac{136}{9}+\frac{x^2}{9}-\frac{8x}{9}-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{9}-\frac{17}{9}-\frac{x^2}{9}+\frac{8x}{9}+\frac{8}{9}\right)=$$

$=(x^2-16)(x-1)=(x-4)(x+4)(x-1)$, так что $x_1\cdot x_2\cdot x_3=4\cdot(-4)\cdot 1=-16;$

б) $A(x)=3p^2(x)-2p(x)q(x)-q^2(x)=(3p(x)+q(x))(p(x)-q(x))=$

$$=\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{39}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{4}-\frac{25}{4}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{13}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{25}{4}\right)=$$

$=(x^2-16)(x+3)=(x-4)(x+4)(x+3)$, так что $x_1\cdot x_2\cdot x_3=4\cdot(-4)\cdot(-3)=48.$

1.1.D03.

а) $A(x)=12p^2(x)-11p(x)q(x)-q^2(x)=(12p(x)+q(x))(p(x)-q(x))=$

$$=\left(\frac{12}{13}x^2+\frac{12}{13}x-\frac{36}{13}+\frac{x^2}{13}-\frac{12x}{13}-\frac{81}{13}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{13}+\frac{x}{13}-\frac{3}{13}-\frac{x^2}{13}+\frac{12x}{13}+\frac{81}{13}\right)=$$

$=(x^2-9)(x+6)=(x-3)(x+3)(x+6)$,

так что $x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2=3^2\cdot(-3)^2\cdot(-6)^2=54^2=2916$;

б) $A(x)=10p^2(x)+9p(x)q(x)-q^2(x)=(10p(x)-q(x))(p(x)+q(x))=$

$$=\left(\frac{10}{11}x^2+\frac{10}{11}x-\frac{410}{11}+\frac{x^2}{11}-\frac{10x}{11}+\frac{14}{11}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{11}+\frac{x}{11}-\frac{41}{11}-\frac{x^2}{11}+\frac{10x}{11}-\frac{14}{11}\right)=$$

$=(x^2-36)(x-5)$, так что $x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2=6^2\cdot(-6)^2\cdot5^2=(180)^2=32400$.

1.1.D04.

а) $2p(x)+p(7-x)=x+4$, тогда $2p(7-x)+p(7-(7-x))=7-x+4$,

то есть $2p(7-x)+p(x)=11-x$, так что $3p(x)=2\cdot(x+4)-(11-x)=3x-3$ и $p(x)=x-1$;

б) $3p(x)+p(8-x)=x+5$, тогда $3p(8-x)+p(8-(8-x))=(8-x)+5$,

то есть $3p(8-x)+p(x)=13-x$, и $8p(x)=3\cdot(x+5)-(13-x)=4x+2$, и $p(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$.

1.1.D05.

а) $A(x)=p^2(x)-9p(x)q(x)-10q^2(x)=(p(x)+q(x))(p(x)-10q(x))=$

$$=\left(\frac{46}{11}x^2-\frac{39}{11}x-\frac{26}{11}-\frac{2x^2}{11}+\frac{6x}{11}+\frac{15}{11}\right)\cdot\left(\frac{46x^2}{11}-\frac{39x}{11}-\frac{26}{11}+\frac{20x^2}{11}-\frac{60x}{11}-\frac{150}{11}\right)=$$

$=(4x^2-3x-1)(6x^2-9x-16)$, так что $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=$

$$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{9}{6}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{16}{6}\right)=$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}+\frac{16}{3}=\frac{53}{16}+\frac{16}{3}=\frac{415}{48};$$

б) $A(x)=p^2(x)+5p(x)q(x)-6q^2(x)=(p(x)+6q(x))(p(x)-q(x))=$

$$=\left(-\frac{23}{7}x^2-\frac{12}{7}x+\frac{34}{7}-\frac{12x^2}{7}-\frac{30x}{7}+\frac{78}{7}\right)\cdot\left(-\frac{23x^2}{7}-\frac{12x}{7}+\frac{34}{7}+\frac{2x^2}{7}+\frac{5x}{7}-\frac{13}{7}\right)=$$

$=(-5x^2-6x+16)(-3x^2-x+3)$, так что $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=$

$$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=\left(-\frac{6}{5}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{16}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-$$

$$-2\cdot\left(-\frac{3}{3}\right)=\frac{36}{25}+\frac{32}{5}+\frac{1}{9}+2=\frac{196}{25}+\frac{19}{9}=\frac{2239}{225}=9\frac{214}{225}.$$

1.1.D06.

а) $A(x)=p^2(x)-3p(x)q(x)-4q^2(x)=(p(x)-4q(x))(p(x)+q(x))=$

$$=\left(-\frac{11}{5}x^2+\frac{14}{5}x+\frac{16}{5}-\frac{24x^2}{5}-\frac{4x}{5}+\frac{44}{5}\right)\cdot\left(-\frac{11x^2}{5}+\frac{14x}{5}+\frac{16}{5}+\frac{6x^2}{5}+\frac{x}{5}-\frac{11}{5}\right)=$$

$(-7x^2+2x+12)(-x^2+3x+1)$, так что $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=$

$=(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) = \left(-\frac{12}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$;

б) $A(x) = p^2(x) - 5p(x)q(x) - 6q^2(x) = (p(x)+q(x))(p(x)-6q(x)) =$

$= \left(-\frac{13}{7}x^2 - \frac{13}{7}x + \frac{33}{7} - \frac{x^2}{7} + \frac{6x}{7} + \frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{13x^2}{7} - \frac{13x}{7} + \frac{33}{7} + \frac{6x^2}{7} - \frac{36x}{7} - \frac{12}{7}\right) =$

$= (-2x^2 - x + 5)(-x^2 - 7x + 3)$, так что $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 =$

$= (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{15}{2} = 7{,}5.$

1.1.D07.

а) $A(x) = p^2(x) - 7p(x)q(x) - 8q^2(x) = (p(x)+q(x))(p(x)-8q(x)) =$

$= \left(\frac{31}{9}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{26}{9} + \frac{5x^2}{9} - \frac{5x}{9} - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{31x^2}{9} - \frac{4x}{9} - \frac{26}{9} - \frac{40x^2}{9} + \frac{40x}{9} + \frac{8}{9}\right) =$

$= (4x^2 - x - 3)(-x^2 + 4x - 2)$, так что $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 \cdot (x_3 \cdot x_4)^2 =$

$= \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (2)^2 = \frac{9}{16} \cdot 4 = \frac{9}{4} = 2{,}25;$

б) $A(x) = p^2(x) + 7p(x)q(x) - 8q^2(x) = (p(x)+8q(x))(p(x)-q(x)) =$

$= \left(\frac{14}{9}x^2 + \frac{31}{9}x - \frac{34}{9} - \frac{32x^2}{9} + \frac{32x}{9} + \frac{16}{9}\right) \cdot \left(\frac{14x^2}{9} + \frac{31x}{9} - \frac{34}{9} + \frac{4x^2}{9} - \frac{4x}{9} - \frac{2}{9}\right) =$

$= (-2x^2 + 7x - 2)(2x^2 + 3x - 4)$, так что $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 \cdot (x_3 \cdot x_4)^2 = 1^2 \cdot (-2)^2 = 4.$

1.1.D08.

а) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 12x + 8y - 4 = (3x-2y)^2 - 4(3x-2y) - 4 = ((3x-2y)^2 -$ $-4(3x-2y)+4) - 8 = (3x-2y-2)^2 - 8 \geq -8$, так как $(3x-2y-2)^2 \geq 0$ для всех x и y;

б) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 12x - 18y - 3 = (2x+3y)^2 - 6(2x+3y) - 3 = ((2x+3y)^2 - 6(2x+3y)+$ $+9) - 12 = (2x+3y-3)^2 - 12 \geq -12$, так как $(2x+3y-3)^2 \geq 0$ для всех x и y.

1.1.D09.

а) $x^2 - 2xy + 9y^2 + 10x + y - 2 = (x-y)^2 + 8y^2 + 10x + y - 2 = (x-y)^2 + 10(x-y) + 8y^2 +$ $+11y - 2 = (x-y+5)^2 + 8y^2 + 11y - 27 = (x-y+5)^2 + 8\left(y + \frac{11}{16}\right)^2 - 30\frac{25}{32} \geq -30\frac{25}{32}$, так как $\left(y + \frac{11}{16}\right)^2 \geq 0$ и $(x-y+5)^2 \geq 0$ при любых x и y;

б) $x^2 - 4xy + 6y^2 - 12x + 2y - 3 = (x-2y)^2 + 2y^2 - 12x + 2y - 3 = (x-2y)^2 - 12(x-2y) +$ $+2y^2 - 22y - 3 = (x-2y-6)^2 + 2y^2 - 22y - 39 = (x-2y-6)^2 + 2\left(y - \frac{11}{2}\right)^2 - 99\frac{1}{2} \geq -99\frac{1}{2}$, так как $\left(y - \frac{11}{2}\right)^2 \geq 0$ и $(x-2y-6) \geq 0$ при любых x и y.

1.1.D10.

а) $x^2 + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 2xy = (x-y)^2 + 2xy = 1 + 2xy = 1 + 2x(x+1) = 2x^2 + 2x + 1 =$ $= 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, так как $x - y = -1$ и $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ для любого x;

б) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2xy=4-2x(2-x)=2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2\geq 2$, так как $x+y=2$ и $(x-1)^2\geq 0$ для любого x.

1.1.D11.

а) f(x)=40, то есть 32a+16b+8c+4d+2k+m=40, так что m=0 (иначе в левой части стояло бы нечетное число)

Далее 16a+8b+4c+2d+k=20, так что k=0 (иначе в левой части стояло бы нечетное число). Далее 8a+4b+2c+d=10, так что d=0 (иначе в левой части стояло бы нечетное число). Далее 4a+2b+c=5 (так что c=1 иначе в левой части стояло бы четное число). Далее 4a+2b=5–c=4, так что 2a+b=2, так что b=0 и a=1. То есть, a=1, b=0, c=1, d=0, k=0, m=0;

б) f(2)=42, то есть 32a+16b+8c+4d+2k+m=42,

2·(16a+8b+4c+2d+k)+m=2·21, так что m=0.

Далее 16a+8b+4c+2d+k=21, то есть 2·(8a+4b+2c+d)+k=2·10+1, так что k=1. Далее 8a+4b+2c+d=10, значит d=0. Теперь 4a+2b+c=5, то есть 4a+2b+c=2·2+1, так что c=1. Далее 2a+b=2, то есть b=0 и a=1. Так что, a=1, b=0, c=1, d=0, k=1, m=0

1.1.D12.

а) f(3)=325, то есть 243a+81b+27c+9d+3k+m=325, то есть 3(81a+27b+9c+ +3d+k)+m=3·(108)+1, так что m=1. Далее 81a+27b+9c+3d+k=108, то есть 3·(27a+9b+3c+d)+k=3·36, так что k=0. Далее 27a+9b+3c+d=36, то есть 3(9a+3b+c)+d=36=3·12, так что d=0. Далее 9a+3b+c=12, то есть 3(3a + b) + c =3·4, то есть c=0. Далее 3a+b=4, то есть b=1 и a=1. Так что, a=1, b=1, c=0, d=0, k=0, m=1.

б) f(3)=257, то есть 243a+81b+27c+9d+3k+m=257, то есть 3(81a+27b+9c+ +3d+k)+m=3·85+2, так что m=2. Далее 81a+27b+9c+3d+k=85, то есть 3·(27a+9b+3c+d)+k=3·28+1, так что k=1. Далее 27a+9b+3c+d=28, то есть 3·(9a+3b+c)+d=3·9+1, то есть d=1. Далее 9a+3b+c=9, так что b=c=0, a=1.

То есть a=1, b=0, c=0, d=1, k=1, m=2.

§ 2. Степень с целым показателем

Уровень A.

1.2.A01.

а) $$\frac{\frac{2x}{1-x}}{1-\left(\frac{1-x}{2x}\right)^{-1}}=\frac{\frac{2x}{1-x}}{1-\frac{2x}{1-x}}=\frac{2x}{1-x-2x}=\frac{2x}{1-3x}=\frac{2\cdot\frac{3}{10}}{1-3\cdot\frac{3}{10}}=6;\text{ при } x=\frac{3}{10};$$

б) $$\frac{\frac{2x}{2-x}}{2-\left(\frac{2-x}{2x}\right)^{-1}}=\frac{\frac{2x}{2-x}}{2-\frac{2x}{2-x}}=\frac{2x}{4-2x-2x}=\frac{2x}{4-4x}=\frac{x}{2-2x}=\frac{\frac{6}{7}}{2-\frac{12}{7}}=3,\text{ при } x=\frac{6}{7}.$$

1.2.A02.

а) $$\frac{a^2-9b^2}{c^2-8cd+16d^2}\cdot\frac{c^2-16d^2}{3b-a}=\frac{(a-3b)(a+3b)(c-4d)(c+4d)}{(c-4d)^2(3b-a)}=-\frac{(a+3b)(c+4d)}{c-4d}.;$$

б) $$\frac{a^2-25b^2}{c^2-4cd+4d^2}\cdot\frac{c^2-4d^2}{5b+a}=\frac{(a-5b)(a+5b)\cdot(c-2d)(c+2d)}{(c-2d)^2(5b+a)}=\frac{(a-5b)(c+2d)}{c-2d}$$

1.2.A03.

а) $f(4)=(2-4)^{-1}+3\cdot4^{-1}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$; $f(6)=(2-6)^{-1}+3\cdot6^{-1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$;

$f(f(4))=f(f(6))=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(2-\frac{1}{4}\right)^{-1}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{7}+12=12\frac{4}{7}$;

б) $f(8)=(4-8)^{-1}+8^{-1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$; $f(-4)=(4+4)^{-1}+(-4)^{-1}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$;

$f(f(8))=f(f(-4))=f\left(-\frac{1}{8}\right)=\left(4+\frac{1}{8}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=\frac{8}{33}-8=-7\frac{25}{33}$.

1.2.A04.

а) $(1-4x)f(f(x))=(1-4x)f(x)(1-2f(x))^{-1}=$

$$=\frac{(1-4x)x\cdot(1-2x)^{-1}}{1-2x\cdot(1-2x)^{-1}}=\frac{\frac{(1-4x)\cdot x}{1-2x}}{1-\frac{2x}{1-2x}}=\frac{(1-4x)x}{1-2x-2x}=\frac{(1-4x)x}{1-4x}=x=0,03;$$

б) $(1-10x)f(f(x))=(1-10x)f(x)\cdot(1-5f(x))^{-1}=$

$$=\frac{(1-10x)x(1-5x)^{-1}}{1-5x(1-5x)^{-1}}=\frac{\frac{(1-10x)x}{1-5x}}{1-\frac{5x}{1-5x}}=\frac{(1-10x)x}{1-5x-5x}=\frac{(1-10x)x}{1-10x}=x=0,09.$$

1.2.A05.

а) $$\frac{2x^{-2}}{3-x^{-2}}-\frac{2x^{-2}}{3+x^{-2}}=\frac{\frac{2}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}-\frac{\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3x^2-1}-\frac{2}{3x^2+1}=$$

$$=\frac{6x^2+2-6x^2+2}{(3x^2-1)(3x^2+1)}=\frac{4}{9x^4-1}=\frac{4}{9\cdot(0,5)^{-4}-1}=\frac{4}{9\cdot16-1}=\frac{4}{143};$$

б) $$\frac{2x^{-2}}{1-x^{-2}}+\frac{2x^{-2}}{1+x^{-2}}=\frac{\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}+\frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2x^2+2+2x^2-2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{4x^2}{x^4-1}=\frac{4\cdot(0,2)^{-2}}{(0,2)^{-4}-1}=\frac{4\cdot25}{5^4-1}=\frac{100}{624}=\frac{25}{156}.$$

1.2.A06.

а) $\frac{x^{-1}-2y^{-1}}{x^{-1}+2y^{-1}}=5^{-1}$; $\quad\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=\frac{1}{5}$; $\quad\frac{y-2x}{y+2x}=\frac{1}{5}$; $\quad 5y-10x=y+2x$;

$y=3x$; тогда $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}}\right)^{-1}=\frac{y^{-1}}{x^{-1}}=\frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$;

б) $\dfrac{x^{-1}-3y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}=4^{-1}$; $\quad \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\dfrac{1}{4}$; $\quad \dfrac{y-3x}{y-x}=\dfrac{1}{4}$; $\quad 4y-12x=y-x$;

y$=\dfrac{11}{3}x$; *тогда* $\left(\dfrac{x^{-1}}{y^{-1}}\right)^{-1}=\dfrac{y^{-1}}{x^{-1}}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{\frac{11}{3}x}=\dfrac{3}{11}$.

Уровень В.

1.2.В01.

а) $\dfrac{2c^2x}{ax-bx}\cdot\dfrac{a^2xy-b^2xy}{10c^4x^4}\cdot\dfrac{25c^2x^3}{ay+by}=\dfrac{2c^2x\cdot xy(a-b)(a+b)\cdot 25c^2x^3}{(a-b)x\cdot 10\cdot c^4\cdot x^4\cdot(a+b)y}=$

$=\dfrac{50c^4x^5y(a-b)(a+b)}{10c^4x^5y(a-b)(a+b)}=5$;

б) $\dfrac{3c^2x}{ax-bx}\cdot\dfrac{a^2xy-b^2xy}{6c^3x^5}\cdot\dfrac{4cx^4}{ay+by}=\dfrac{3c^2x\cdot xy(a-b)(a+b)\cdot 4cx^4}{x(a-b)\cdot 6c^3x^5\cdot y(a+b)}=$

$=\dfrac{12c^3x^6y(a-b)(a+b)}{6c^3x^6y(a-b)(a+b)}=2.$

1.2.В02.

а) $\dfrac{x^2-x}{x^2-bx+ax-ab}\cdot\dfrac{x^2-b^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^3-a^2x+x^2-a^2}{x^2+bx}=$

$=\dfrac{x(x-1)\cdot(x-b)(x+b)(x^2-a^2)(x+1)}{(x-b)(x+a)(x-1)(x+1)x(x+b)}=(x-a)$;

б) $\dfrac{3x^2-6x}{x^2+bx-ax-ab}\cdot\dfrac{x^2-b^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^3-a^2x+2x^2-2a^2}{x^2-bx}=$

$=\dfrac{3x(x-2)(x-b)(x+b)(x^2-a^2)(x+2)}{(x+b)(x-a)(x-2)(x+2)x(x-b)}=3(x+a).$

1.2.В03.

а) $\left(\dfrac{4ab}{16a^2+8ab+b^2}+\dfrac{3a}{4a+b}\right)\left(4+\dfrac{b}{a}\right)^2=\left(\dfrac{4ab}{(4a+b)^2}+\dfrac{3a(4a+b)}{(4a+b)^2}\right)\cdot\left(\dfrac{4a+b}{a}\right)^2=$

$=\dfrac{4ab+12a^2+3ab}{(4a+b)^2}\cdot\dfrac{(4a+b)^2}{a^2}=\dfrac{a(12a+7b)}{a^2}=\dfrac{12a+7b}{a}$;

б) $\left(\dfrac{ab}{25a^2+20ab+4b^2}-\dfrac{a}{5a+2b}\right)\left(5+\dfrac{2b}{a}\right)^2=\left(\dfrac{ab}{(5a+2b)^2}-\dfrac{a(5a+2b)}{(5a+2b)^2}\right)\times$

$\times\left(\dfrac{5a+2b}{a}\right)^2=\dfrac{ab-5a^2-2ab}{(5a+2b)^2}\cdot\dfrac{(5a+2b)^2}{a^2}=\dfrac{a(-b-5a)}{a^2}=-\dfrac{b+5a}{a}.$

1.2.В04.

а) $\dfrac{1}{2a-8a^2}+\left(\dfrac{1}{16a^2-4a}+\dfrac{2}{1-16a^2}+\dfrac{1}{1+4a}\right)\left(\dfrac{4a+1}{4a-1}\right)^2=\dfrac{1}{2a(1-4a)}+$

$$+\left(\frac{4a+1-8a+16a^2-4a}{4a(4a-1)(4a+1)}\right)\left(\frac{4a+1}{4a-1}\right)^2=\frac{1}{2a(1-4a)}+\frac{(4a-1)^2}{4a(4a-1)(4a+1)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{4a+1}{4a-1}\right)^2=\frac{1}{2a(1-4a)}+\frac{4a+1}{4a(4a-1)}=\frac{-2+1+4a}{4a(4a-1)}=\frac{1-4a}{4a(1-4a)}=\frac{1}{4a};$$

б) $$\frac{1}{8a^2-10a}-\left(\frac{1}{16a^2-20a}+\frac{2}{25-16a^2}+\frac{1}{25+20a}\right)\left(\frac{4a+5}{4a-5}\right)^2=\frac{1}{2a(4a-5)}-$$

$$-\left(\frac{20a+25-40a+16a^2-20a}{4a\cdot5\cdot(4a-5)(4a+5)}\right)\left(\frac{4a+5}{4a-5}\right)^2=\frac{1}{2a(4a-5)}-\frac{(4a-5)^2}{20a(4a-5)(4a+5)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{4a+51}{4a-5}\right)^2=\frac{1}{2a(4a-5)}-\frac{4a+5}{20a(4a-5)}=\frac{10-4a-5}{20a(4a-5)}=\frac{5-4a}{20a(4a-5)}=-\frac{1}{20a}.$$

1.2.В05.

а) $$\left(3ab^{-1}-\frac{ba^{-1}}{3}\right):\left(3ab^{-1}+\frac{ba^{-1}}{3}+0,5^{-1}\right):\left(\left(1-\frac{ba^{-1}}{3}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\left(\frac{3a}{b}-\frac{b}{3a}\right):\left(\frac{3a}{b}+\frac{b}{3a}+2\right):\left(\left(1-\frac{b}{3a}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=\left(\frac{9a^2-b^2}{3ab}\right):$$

$$:\left(\frac{9a^2+b^2+6ab}{3ab}\right):\left(\left(\frac{3a-b}{3a}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=\frac{(3a-b)(3a+b)}{3ab}\cdot\frac{3ab}{(3a-b)^2}\cdot\frac{(3a+b)}{(3a-b)}=1;$$

б) $$\left(\frac{5ab^{-1}}{9}-\frac{9ba^{-1}}{5}\right):\left(\frac{5ab^{-1}}{9}+\frac{9ba^{-1}}{5}+(-0,5)^{-1}\right):\left(\left(1+\frac{9ba^{-1}}{5}\right)\cdot\frac{5a}{5a-9b}\right)=$$

$$=\left(\frac{5a}{9b}-\frac{9b}{5a}\right):\left(\frac{5a}{9b}+\frac{9b}{5a}-2\right):\left(\left(1+\frac{9b}{5a}\right)\cdot\frac{5a}{5a-9b}\right)=$$

$$=\left(\frac{25a^2-81b^2}{45ab}\right):\left(\frac{25a^2+81b^2-90ab}{45ab}\right):\left(\frac{5a+9b}{5a}\cdot\frac{5a}{5a-9b}\right)=$$

$$=\frac{(5a-9b)(5a+9b)\cdot45ab\cdot(5a-9b)}{45ab\cdot(5a-9b)^2(5a+9b)}=1.$$

1.2.В06.

а) $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}}\right)^{-1}=5^{-1};\quad \frac{x^{-1}}{y^{-1}}=5;\quad \frac{y}{x}=5;\quad y=5x,$ тогда

$$\frac{x^{-2}-2y^{-2}}{3x^{-2}-2y^{-2}}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{y^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{y^2}}=\frac{y^2-2x^2}{3y^2-2x^2}=\frac{25x^2-2x^2}{75x^2-2x^2}=\frac{23}{73};$$

б) $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}}\right)^{-1}=2^{-1};\quad \frac{x^{-1}}{y^{-1}}=2;\quad \frac{y}{x}=2;\quad y=2x,$ тогда

$$\frac{x^{-2}+3y^{-2}}{2x^{-2}+3y^{-2}}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{y^2}}{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{y^2}}=\frac{y^2+3x^2}{2y^2+3x^2}=\frac{4x^2+3x^2}{8x^2+3x^2}=\frac{7}{11}.$$

1.2.В07.

а) $3^{-1}+\dfrac{-133\cdot 16^{-1}+5\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}}{9-0{,}5^{-1}}\left(\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{-\frac{133}{16}+\frac{5\cdot 7^2}{16}}{9-2}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\frac{112}{16}}{9-2}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{7}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}=-1;$

б) $4^{-1}+\dfrac{-160\cdot 9^{-1}+4\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}{-4+0{,}125^{-1}}\left(\dfrac{2}{9}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{-\frac{160}{9}+\frac{4\cdot 7^2}{9}}{-4+8}\left(\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{36}{9}}{4}\left(-\dfrac{4}{9}\right)^{-1}=\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{9}{4}\right)=-2.$

1.2.В08.

а) $\left(\dfrac{x^{-2}}{2-x^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{x^{-2}}{2+x^{-2}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}\right)^{-2}=$

$=\left(\dfrac{1}{2x^2-1}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{2x^2+1}\right)^{-2}=(2x^2-1)^2-(2x^2+1)^2=-8x^2=$

$=-8\cdot(0{,}5)^{-4}=-8\cdot 16=-128;$

б) $\left(\dfrac{2x^{-2}}{5-x^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2x^{-2}}{5+x^{-2}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{2}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\frac{2}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}\right)^{-2}=$

$=\left(\dfrac{2}{5x^2-1}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2}{5x^2+1}\right)^{-2}=\dfrac{(5x^2-1)^2}{4}-\dfrac{(5x^2+1)^2}{4}=-\dfrac{20x^2}{4}=-5x^2=$

$=-5\cdot(0{,}5)^{-4}=-5\cdot 16=-80.$

1.2.В09.

а) $\dfrac{\frac{3x+4}{9x^2+12x+16}+\frac{3x-4}{9x^2-12x+16}}{\frac{3x+4}{9x^2+12x+16}-\frac{3x-4}{9x^2-12x+16}}=\dfrac{27x^3+64+27x^3-64}{27x^3+64-(27x^3-64)}=\dfrac{54x^3}{128}=\dfrac{27x^3}{64};$

б) $\dfrac{\frac{5x+4}{25x^2+20x+16}+\frac{5x-4}{25x^2-20x+16}}{\frac{5x+4}{25x^2+20x+16}-\frac{5x-4}{25x^2-20x+16}}=\dfrac{125x^3+64+125x^3-64}{125x^3+64-(125x^3-64)}=\dfrac{250x^3}{128}=\dfrac{125x^3}{64}.$

1.2.B10.

а) $\dfrac{x^2-y^2-x+y}{p^2-q^2+q+p}:\dfrac{7x-7y}{9q+9p}=\dfrac{(x-y)(x+y)-(x-y)}{(p-q)(p+q)+(p+q)}\cdot\dfrac{9(p+q)}{7(x-y)}=$

$=\dfrac{(x-y)(x+y-1)\cdot 9(p+q)}{(p+q)(p-q+1)\cdot 7(x-y)}=\dfrac{9(x+y-1)}{7(p-q+1)};$

б) $\dfrac{x^2-y^2+x+y}{p^2-q^2-q+p}:\dfrac{9x+9y}{4q-4p}=\dfrac{(x+y)(x-y+1)\cdot 4(q-p)}{(p-q)(p+q+1)\cdot 9(x+y)}=\dfrac{4(y-x-1)}{9(p+q+1)}.$

1.2.B11.

а) $\left(\dfrac{36b}{a^2+ab}+\dfrac{12}{a+b}+\dfrac{9}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{6b}{a}+2+\dfrac{a}{6b}\right)=\left(\dfrac{36b^2+12ab+a^2}{ab(a+b)}\right):$

$:\left(\dfrac{36b^2+12ab+a^2}{6ab}\right)=\dfrac{6}{a+b}=\dfrac{6}{3}=2;$

б) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{16}{a-b}-\dfrac{64a}{b^2-ab}\right):\left(\dfrac{b}{8a}+2+\dfrac{8a}{b}\right)=\left(\dfrac{b^2+16ab+64a^2}{ab(a-b)}\right):$

$:\left(\dfrac{b^2+16ab+64a^2}{8ab}\right)=\dfrac{8}{a-b}=\dfrac{8}{-3}=-2\dfrac{2}{3}\cdot$

1.2.B12.

а) $\left(6m-5n+\dfrac{120mn}{6m-5n}\right):\left(\dfrac{6m}{6m-5n}-\dfrac{5n}{5n+6m}+\dfrac{60mn}{36m^2-25n^2}\right)=$

$=\left(\dfrac{36m^2-60mn+25n^2+120mn}{6m-5n}\right):\left(\dfrac{6m(6m+5n)-5n(6m-5n)+60mn}{36m^2-25n^2}\right)=$

$=\dfrac{(6m+5n)^2}{(6m-5n)}\cdot\dfrac{(6m-5n)(6m+5n)}{(36m^2+60mn+25n^2)}=\dfrac{(6m+5n)^2\cdot(6m-5n)(6m+5n)}{(6m-5n)(6m+5n)^2}=$ 6m+5n=–4;

б) $\left(5m+8n-\dfrac{160mn}{5m+8n}\right):\left(\dfrac{5m}{5m+8n}-\dfrac{8n}{8n-5m}-\dfrac{80mn}{25m^2-64n^2}\right)=$

$=\left(\dfrac{25m^2+64n^2+80mn-160mn}{5m+8n}\right):\left(\dfrac{5m(5m-8n)+8n(5m+8n)-80mn}{25m^2-64n^2}\right)=$

$=\dfrac{(5m-8n)^2\cdot(5m-8n)(5m+8n)}{(5m+8n)(25m^2-80mn+64n^2)}=\dfrac{(5m-8n)^2\cdot(5m-8n)(5m+8n)}{(5m+8n)(5m-8n)^2}=$ 5m–8n=–3.

Уровень С.

1.2.C01.

а) $\dfrac{1}{x-\dfrac{3}{y+\dfrac{1}{z}}}\cdot\dfrac{3}{z+\dfrac{1}{y}}-\dfrac{3y}{xyz+x-3z}=\dfrac{1}{x-\dfrac{3z}{yz+1}}\cdot\dfrac{3y}{yz+1}-\dfrac{3y}{xyz+x-3z}=$

$=\dfrac{yz+1}{xyz+x-3z}\cdot\dfrac{3y}{yz+1}-\dfrac{3y}{xyz+x-3z}=\dfrac{3y}{xyz+x-3z}-\dfrac{3y}{xyz+x-3z}=0;$

б) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y-\dfrac{2}{z}}}\cdot\dfrac{3}{z-\dfrac{2}{y}}-\dfrac{6y}{xyz-2x+z}=\dfrac{2}{x+\dfrac{z}{yz-2}}\cdot\dfrac{3y}{yz-2}-\dfrac{6y}{xyz-2x+z}=$

$=\dfrac{2\cdot(yz-2)}{xyz-2x+z}\cdot\dfrac{3y}{yz-2}-\dfrac{6y}{xyz-2x+z}=\dfrac{6y}{xyz-2x+z}-\dfrac{6y}{xyz-2x+z}=0.$

1.2.C02.

а) $\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)^2+\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)=$

$=\dfrac{(y^2-z^2)^2}{z^2y^2}+\dfrac{(z^2-x^2)^2}{x^2z^2}+\dfrac{(x^2+y^2)^2}{y^2x^2}-\dfrac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)}{xy\cdot xz\cdot yz}=$

$=\dfrac{y^4x^2-2x^2y^2z^2+z^4x^2+z^4y^2-2x^2\cdot y^2\cdot z^2+x^4y^2+x^4z^2+2x^2y^2z^2+y^4z^2}{(xyz)^2}-$

$-\dfrac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)}{(xyz)^2}=$

$=\dfrac{y^4x^2+y^4z^2+z^4x^2+z^4y^2+x^4y^2+x^4z^2-2x^2y^2z^2-(y^4x^2-y^4z^2+z^4y^2-z^4x^2+x^4z^2-x^4y^2)}{(xyz)^2}=$

$=\dfrac{2(y^4z^2+z^4x^2+x^4y^2)-2x^2y^2z^2}{(xyz)^2}=2\left(\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{z^2}{y^2}+\dfrac{x^2}{z^2}\right)-2;$

б) $\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)^2+\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)^2-\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=$

$=\dfrac{(y^2-z^2)^2}{z^2y^2}+\dfrac{(z^2-x^2)^2}{x^2z^2}+\dfrac{(x^2-y^2)^2}{y^2x^2}-\dfrac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2+y^2)}{(xyz)^2}=$

$=\dfrac{x^2y^4+x^2z^4-2x^2y^2z^2+y^2z^4+y^2x^4-2z^2x^2y^2+z^2x^4+z^2y^4-2x^2y^2z^2}{(xyz)^2}-$

$-\dfrac{(y^4z^2-y^4x^2-z^4x^2-z^4y^2+x^4z^2-x^4y^2+2x^2y^2z^2)}{(xyz)^2}=$

$=\dfrac{2y^4x^2+2z^4x^2+2z^4y^2+2x^4y^2-8x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=2\left(\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{y^2}+\dfrac{z^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{z^2}\right)-8.$

1.2.C03.

а) $\dfrac{(x+2a)(x+2b)}{(c+a)(c+b)}+\dfrac{(x+2b)(x-2c)}{(a-b)(a+c)}+\dfrac{(x-2c)(x+2a)}{(b+c)(b-a)}=$

$=\dfrac{(x+2a)(x+2b)(a-b)+(x+2b)(x-2c)(c+b)-(x-2c)(x+2a)(a+c)}{(a+c)(a-b)(b+c)}=$

$=\dfrac{(a-b)x^2+2(a^2-b^2)x+4ab(a-b)+(c+b)x^2+2(b^2-c^2)x-4bc(c+b)-(a+c)x^2}{(a+c)(a-b)(b+c)}-$

$$-\frac{2(a^2-c^2)x-4ac(a+c)}{(a+c)(a-b)(b+c)}=\frac{4(a^2b-ab^2-bc^2-b^2c+a^2c+ac^2)}{a^2b-ab^2+a^2c-abc+abc-cb^2+c^2a-c^2b}=4;$$

б) $\frac{(x-5a)(x+5b)}{(c-a)(c+b)}+\frac{(x+5b)(x-5c)}{(a+b)(a-c)}+\frac{(x-5c)(x-5a)}{(b+c)(b+a)}=$

$$=\frac{(x-5a)(x+5b)(a+b)-(x+5b)(x-5c)(b+c)+(x-5c)(x-5a)(c-a)}{(a+b)(c-a)(c+b)}=$$

$$=\frac{x^2(a+-b)+5x(b^2-a^2)-25ab(a+b)-x^2(b+c)-5x(b^2-c^2)+25bc(b+c)+x^2(c-a)}{(a+b)(c-a)(c+b)}-$$

$$-\frac{5x(c^2-a^2)-25ac(c-a)}{(a+b)(c-a)(c+b)}=25\left(\frac{ac}{(a+b)(c+b)}+\frac{bc}{(a+b)(c-a)}-\frac{ab}{(c-a)(c+b)}\right)=$$

$$=\frac{25(ac^2-a^2c+bc^2+b^2c-a^2b-ab^2)}{(ac^2-a^2c+abc-a^2b+bc^2-abc+b^2c-ab^2)}=25\ .$$

1.2.C04.

а) $\frac{x^2+y(3x+11y)}{xy+2y^2}=5$, то есть $x^2+3xy+11y^2=5xy+10y^2$, $x^2-2xy+y^2=0$,

$(x-y)^2=0$, $y=x$, тогда $\frac{x^3-2xy^2-3x^2y+7y^3}{x^3-2y^3}=\frac{x^3-2x^3-3x^3+7x^3}{x^3-2x^3}=-3;$

б) $\frac{x^2+y(7x+10y)}{xy+2y^2}=3$, то есть $x^2+7xy+10y^2=3xy+6y^2$, $x^2+4xy+4y^2=0$,

$(x+2y)^2=0$, $x=-2y$, тогда

$$\frac{x^3+3xy^2+3x^2y-3y^3}{x^3+13y^3}=\frac{(x+y)^3-4y^3}{x^3+13y^3}=\frac{-y^3-4y^3}{-8y^3+13y^3}=-1.$$

1.2.C05.

а) $(xy)^{-5}=1$, так что $xy=1$, $x=\frac{1}{y}$, тогда: $(6x-y)^{-2}(x^{-2}+36y^{-2})+12(6x-y)^{-3}(x^{-1}-6y^{-1})$

$$=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{36}{y^2}}{(6x-y)^2}+\frac{12\left(\frac{1}{x}-\frac{6}{y}\right)}{(6x-y)^3}=\frac{36x^2+y^2}{x^2y^2(6x-y)^2}-\frac{12(6x-y)}{xy(6x-y)^3}=\frac{36x^2+\frac{1}{x^2}}{\left(6x-\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{12\left(6x-\frac{1}{x}\right)}{\left(6x-\frac{1}{x}\right)^3}=$$

$$=\frac{36x^4+1}{(6x^2-1)^2}-\frac{12(6x^2-1)x^2}{(6x^2-1)^3}=\frac{(36x^4+1)(6x^2-1)-12x^2(6x^2-1)}{(6x^2-1)^3}=$$

$$=\frac{216x^6-108x^4+18x^2-1}{(6x^2-1)^3}=\frac{(6x^2-1)^3}{(6x^2-1)^3}=1\ ;$$

б) $(xy)^{-7}=1$, так что $xy=1$, $x=\frac{1}{y}$.

Тогда $(4x-y)^{-2}(x^{-2}+16y^{-2})=8(4x-y)^{-3}(x^{-1}+4y^{-1})=\frac{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{16}{y^2}\right)}{\left(4x-\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{8\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)}{\left(4x-\frac{1}{x}\right)^3}=$

$$=\frac{16x^4+1}{(4x^2-1)^2}-\frac{8x^2(4x+1)}{(4x^2-1)^3}=\frac{(16x^4+1)(4x^2-1)-8x^2(4x^2+1)}{(4x^2-1)^3}=$$
$$=\frac{64x^6-48x^4+12x^2-1}{(4x^2-1)^3}=\frac{(4x^2-1)^3}{(4x^2-1)^3}=1.$$

1.2.С06.

а) $\frac{4x^2+4xy-y^2}{4x^2+3xy+2y^2}=-0,8$; $4x^2+4xy-y^2=-3,2x^2-2,4xy-1,6y^2$;

$7,2x^2+6,4xy+0,6y^2=0$; $36x^2+32xy+3y^2=0$; $36\left(\frac{x}{y}\right)^2+32\left(\frac{x}{y}\right)+3=0$;

$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=-16\pm\sqrt{148}=-16\pm2\sqrt{37}$;

x и y одного знака, значит, $\frac{x}{y}>0$, но $\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}<0$, следовательно, решений нет.

б) $\frac{3x^2-3xy-4y^2}{2x^2+5xy+4y^2}=-0,6$; $-3(2x^2+5xy+4y^2)=5(3x^2-3xy-4y^2)$;

$21x^2-8y^2=0$; $21\left(\frac{x}{y}\right)^2=8$; $\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{8}{21}}$; x и y одного знака, значит, $\frac{x}{y}>0$, следовательно, подходит только $\frac{x}{y}=2\sqrt{\frac{2}{21}}$.

1.2.С07.

а) $x^2+\frac{9}{x^2}=16$, $\left(x+\frac{3}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{9}{x^2}+6\right)=22$, $\left(x+\frac{3}{x}\right)=\pm\sqrt{22}$;

$x^3+\frac{27}{x^3}=\left(x+\frac{3}{x}\right)\left(x^2-3+\frac{9}{x^2}\right)=\pm\sqrt{22}(16-3)=\pm13\sqrt{22}$;

б) $x^2+\frac{16}{x^2}=9$; $\left(x+\frac{4}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{16}{x^2}+8\right)=9+8=17$, $\left(x+\frac{4}{x}\right)=\pm\sqrt{17}$;

$x^3+\frac{64}{x^3}=\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(x^2+\frac{16}{x^2}-4\right)=\pm\sqrt{17}(9-4)=\pm5\sqrt{17}$.

1.2.С08.

а) $\frac{1}{x^2+7xy+6y^2}-\frac{7}{6x^2+37xy+6y^2}+\frac{1}{y^2+6x^2+7xy}=$

$$=\frac{6x+y+x+6y}{(x+6y)(x+y)(y+6x)}-\frac{7}{6x^2+37xy+6y^2}=$$
$$=7\left(\frac{(x+y)(6x^2+37xy+6y^2-(x^2+7xy+6y^2)(6x+y)}{(6x^2+37xy+6y^2)(x^2+7xy+6y^2)(6x+y)}\right)=$$
$$=7\left(\frac{6x^3+37x^2y+6xy^2+6x^2y+37xy^2+6y^2-6x^3-42x^2y-36xy^2-x^2y-7xy^2-6y^3}{(6x^2+37xy+6y^2)(x+y)(6x+y)(x+6y)}\right)=7\cdot0=0;$$

б) $\frac{1}{x^2+5xy+4y^2}-\frac{5}{4x^2+17xy+4y^2}+\frac{1}{y^2+4x^2+5xy}=$

$=\frac{4x+y+x+4y}{(x+y)(4x+y)(x+4y)}-\frac{5}{4x^2+17xy+4y^2}=\frac{5(x+y)}{(x+y)(4x^2+17xy+4y^2)}-$

$-\frac{5}{4x^2+17xy+4y^2}=0$.

1.2.C09.

а) $\left(\frac{18x^3+3x^2}{27x^3-1}-\frac{3x^2+x}{9x^2+3x+1}\right)\left(1+\frac{3x+1}{x}-\frac{3x^2+13x}{3x^2+x}\right)=$

$=\left(\frac{18x^3+3x^2-(3x^2+x)(3x-1)}{27x^3-1}\right)\left(\frac{3x^2+x+(3x+1)^2-3x^2-13x}{3x^2+x}\right)=$

$=\left(\frac{18x^3+3x^2-9x^3+x}{27x^3-1}\right)\cdot\left(\frac{3x^2+x+9x^2+6x+1-3x^2-13x}{3x^2+x}\right)=$

$=\frac{x(9x^2+3x+1)}{(3x-1)(9x^2+3x+1)}\cdot\frac{(9x^2-6x+1)}{x(3x+1)}=\frac{3x-1}{3x+1}$;

б) $\left(\frac{14x^3+7x^2}{x^3-1}-\frac{7x^2+7x}{x^2+x+1}\right)\left(1+\frac{x+1}{7x}-\frac{7x^2+11x}{7x^2+7x}\right)=$

$=\left(\frac{14x^3+7x^2-7x(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)\cdot\left(\frac{7x^2+7x+(x+1)(x+1)-7x^2-11x}{7x(x+1)}\right)=$

$=\frac{(14x^3+7x^2-7x^3+7x)}{(x+1)(x^2+x+1)}\cdot\frac{(7x^2+7x+x^2+2x+1-7x^2-11x)}{7x(x+1)}=$

$=\frac{7x(x^2+x+1)\cdot(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)\cdot 7x\cdot(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$.

1.2.C10.

а) $16x^2+9x^{-2}+3=(4x-3x^{-1})^2+24+3=6^2+27=63$.;

б) $25x^2+x^{-2}-9=(-5x+x^{-1})^2+1=25+1=26$.

1.2.C11.

а) $d(x)=\frac{x^3-6x^2-40x}{x(|x+4|+10)+40}=\frac{x(x^2-6x-40)}{x(|x+4|+10)+40}=\frac{(x+4)(x-10)}{|x+4|+10+\frac{40}{x}}=$

$=\begin{cases}-x, & x<-4\\ \frac{x(x-10)}{x+10}, & x\ge -4\end{cases}$;

$d(20)-d(-20)=\frac{24\cdot 10}{24+10+2}-\frac{(-16)(-30)}{16+10-2}=\frac{240}{36}-\frac{480}{24}=\frac{40}{6}-20=-\frac{40}{3}$;

б) $d(x)=\frac{x^3+x^2-56x}{x(|x+8|+7)+56}=\frac{x(x-7)(x+8)}{x|x+8|+7(x+8)}$

$d(14)-d(-14)=\frac{14\cdot(7)\cdot(22)}{14\cdot 22+7\cdot 22}-\frac{(-14)(-21)(-6)}{(-14)\cdot 6+7\cdot(-6)}=\frac{14}{3}-14=-\frac{28}{3}$.

1.2.C12.

а) $(xy)^2=\left(-\frac{3}{x+y}\right)^{-1}=3$; $(xy)^2=3$ и $-\frac{x+y}{3}=3$; $x+y=-9$, тогда

$(x^{-1}+y^{-1})(x^{-3}-y^{-3})^{-1}(x^3-y^3)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)^{-1}(x^3-y^3)=$

$=\frac{(x+y)}{xy}\cdot\frac{x^3y^3}{y^3-x^3}\cdot(x^3-y^3)=-(xy)^2(x+y)=3\cdot 9=27;$

б) $(xy)^3=\left(-\frac{7}{x-y}\right)^{-1}=1$; $(xy)^3=1$; $\frac{x-y}{7}=-1$;$x-y=-7$, тогда

$(x^{-1}-y^{-1})(x^{-4}-y^{-4})^{-1}(x^4-y^4)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)^{-1}(x^4-y^4)=$

$=\frac{(y-x)}{xy}\cdot\frac{x^4y^4}{y^4-x^4}\cdot(x^4-y^4)=(x-y)(xy)^3=-7.$

Уровень D.

1.2.D01.

а) $f(x)=\frac{x^3}{x-2}+\frac{x^2}{x-3}-\frac{8}{x-2}-\frac{9}{x-3}$; $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}+\frac{x^2-9}{x-3}=x^2+2x+4+x+3=x^2+3x+7$, при $x\in(-\infty;-2]$.

Функция $f(x)=x^2+3x+7$ убывает при $x\in(-\infty;-2]$, значит, $\min f(x)=f(-2)=5$, следовательно, данная функция принимает все значения из промежутка $[5;+\infty)$ и не принимает значение 2.

б) $f(x)=\frac{x^3}{x-3}+\frac{x^2}{x-1}-\frac{27}{x-3}-\frac{1}{x-1}$.

$f(x)=\frac{x^3-27}{x-3}+\frac{x^2-1}{x-1}=x^2+3x+9+x+1=x^2+4x+10$, при $x\in(-\infty;-3]$. Функция $f(x)=x^2+4x+10$ убывает при $x\in(-\infty;-3]$, значит, $\min f(x)=f(-3)=7$, следовательно, данная функция принимает все значения из промежутка $[7;\infty)$ и не принимает значение 5.

1.2.D02.

а) $(xy^{-2}+x^{-2}y)^{-1}=\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)^{-1}=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\frac{(xy)^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=$

$=\frac{(xy)^2}{(x+y)((x+y)^2-3xy)}=\frac{1}{4(16+3)}=\frac{1}{76};$

б) $(xy^{-2}-x^{-2}y)^{-2}=\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right)^{-2}=\left(\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}\right)^{-2}=\frac{(xy)^4}{(x^3-y^3)^2}=$

$$=\frac{(xy)^4}{((x-y)(x^2+xy+y^2))^2}=\frac{(xy)^4}{((x-y)((x-y)^2+3xy))^2}=\frac{1}{(2\cdot(4+3))^2}=\frac{1}{196}.$$

1.2.D03.

а) $2x^3y^{-4}=\frac{x^{-7}+y^{-7}}{(xy)^{-3}}$, $2x^3y^{-4}\cdot(xy)^{-3}=x^{-7}+y^{-7}$; $2y^{-7}=x^{-7}+y^{-7}$; $x^{-7}=y^{-7}$;

x=y, так что $\frac{x^2+2xy+2y^2}{x^2-3xy+4y^2}=\frac{y^2+2y^2+2y^2}{y^2-3y^2+4y^2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$;

б) $2xy^{-4}=\frac{x^{-5}+y^{-5}}{(xy)^{-1}}$; $2xy^{-4}\cdot(xy)^{-1}=x^{-5}+y^{-5}$; $2y^{-5}=x^{-5}+y^{-5}$; $x^{-5}=y^{-5}$; x=y, так что

$\frac{x^2+4xy+2y^2}{2x^2-xy+3y^2}=\frac{y^2+4y^2+2y^2}{2y^2-y^2+3y^2}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$.

1.2.D04.

а) $xy^{-1}+x^{-1}y=\frac{26}{5}$; $\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{26}{5}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{26}{5}\left(\frac{x}{y}\right)+1=0$;

$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{13}{5}\pm\sqrt{\frac{144}{25}}$, $\left(\frac{x}{y}\right)=5$ или $\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{5}$, т.е. x=5y или y=5x.

Тогда: $\frac{3x^2-2xy-4y^2}{4x^2-xy-y^2}=\frac{75y^2-10y^2-4y^2}{100y^2-5y^2-y^2}=\frac{61}{94}$ или

$\frac{3x^2-2xy-4y^2}{4x^2-xy-y^2}=\frac{3x^2-10y^2-100x^2}{4x^2-5x^2-25x^2}=\frac{107}{26}=3\frac{22}{26}=3\frac{11}{13}$;

б) $xy^{-1}+x^{-1}y=\frac{5}{2}$; $\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{5}{2}$; $2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+2=0$;

$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}$, $\left(\frac{x}{y}\right)=2$ или $\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}$, то есть x=2y или y=2x;

Тогда: $\frac{5x^2+4xy-3y^2}{2x^2+xy+3y^2}=\frac{20y^2+8y^2-3y^2}{8y^2+2y^2+3y^2}=\frac{25}{13}=1\frac{12}{13}$ или

$\frac{5x^2+4xy-3y^2}{2x^2+xy+3y^2}=\frac{5x^2+8x^2-12x^2}{2x^2+2x^2+12x^2}=\frac{1}{16}$.

1.2.D05.

а) $xy^{-1}-5x^{-1}y=-4\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}$; $xy^{-1}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2-5x^{-1}y\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2=-4$;

$\left(\frac{y}{x}\right)-5\left(\frac{y}{x}\right)^3=-4$; $\frac{y}{x}=1$; y=x, так что

$\frac{3x^2+4xy+2y^2}{x^2+xy+4y^2}=\frac{3x^2+4x^2+2x^2}{x^2+x^2+4x^2}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$;

б) $xy^{-1}+4x^{-1}y=5\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-2}$, $xy^{-1}\cdot\dfrac{y^2}{x^2}+4x^{-1}y\cdot\dfrac{y^2}{x^2}=5$; $\left(\dfrac{y}{x}\right)+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^3=5$,

$\left(\dfrac{y}{x}\right)=1$; y=x, так что $\dfrac{4x^2-xy-y^2}{3x^2+xy+2y^2}=\dfrac{4x^2-x^2-x^2}{3x^2+x^2+2x^2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

1.2.D06.

а) $f(x)=\dfrac{x^2+10x+61}{x+5}=\dfrac{(x+5)^2+36}{x+5}=(x+5)+\dfrac{36}{(x+5)}$.

Если f(x)=a, то $(x+5)+\dfrac{36}{(x+5)}=a$,

$(x+5)^2-a(x+5)+36=0$.

Так что, чтобы это уравнение имело решение нужно чтоб выполнялось условие Д≥0, то есть $a^2-4\cdot 36\geq 0$, то есть $a^2\geq 144$, $|a|\geq 12$. Так что $|f(x)|\geq 12$; т.е. $f(x)\in(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$, следовательно, значение данной функции не может быть равным 5.

б) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+29}{x-2}=\dfrac{(x-2)^2+25}{x-2}=(x-2)+\dfrac{25}{x-2}$.

Если f(x)=a, то $(x-2)+\dfrac{25}{x-2}=a$, то есть $(x-2)^2-a(x-2)+25=0$.

Уравнение имеет решение, если Д≥0, то есть $a^2-4\cdot 25\geq 0$, $a^2\geq 100$, $|a|\geq 10$. Так что $|f(x)|\geq 10$, т.е. $f(x)\in(-\infty;-10]\cup[10;+\infty)$, следовательно, значение данной функции не может быть равным –7.

1.2.D07.

а) $xy^{-1}+x^{-1}y=-2$, то есть $\left(\dfrac{x}{y}\right)+\left(\dfrac{y}{x}\right)=-2$;

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)+1=0$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)=-1$, y=–x. Так что $\dfrac{2x+y}{4x-3y}=\dfrac{2x-x}{4x+3x}=\dfrac{1}{7}$;

б) $xy^{-1}+x^{-1}y=2$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)+\left(\dfrac{y}{x}\right)=2$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}\right)+1=0$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)=1$, x=y,

так что $\dfrac{5x+3}{3x-4y}=\dfrac{5x+3x}{3x-4x}=-8$.

1.2.D08.

а) $xy^{-1}-21x^{-1}y=-4$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)-21\left(\dfrac{y}{x}\right)=-4$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+4\left(\dfrac{x}{y}\right)-21=0$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)=-7$ (так как (x;y) – лежит в четвертой четверти).

Тогда x=–7y и $\dfrac{x+2y}{2x+3y}=\dfrac{-7y+2y}{-14y+3y}=\dfrac{5}{11}$;

б) $xy^{-1}-40x^{-1}y=3$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)-40\left(\dfrac{y}{x}\right)=3$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}\right)-40=0$;

$\left(\frac{x}{y}\right)$=–5 (так как (x;y) – лежит во второй четверти).

Тогда x=–5y и $\frac{3x-y}{4x-3y}=\frac{-15y-y}{-20y-3y}=\frac{16}{23}$.

1.2.D09.

а) xy^{-1}–$24x^{-1}y$=2; $\left(\frac{x}{y}\right)-24\left(\frac{y}{x}\right)=2$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)$–24=0;

$\left(\frac{x}{y}\right)$=6 (так как (x;y) – точка третьей четверти). Тогда x=6y и

$\frac{x+y}{3x-4y}=\frac{6y+y}{18y-4y}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$;

б) xy^{-1}–$40x^{-1}y$=3; $\left(\frac{x}{y}\right)-40\left(\frac{y}{x}\right)=3$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)$–40=0;

$\left(\frac{x}{y}\right)$=8 (так как (x;y) – точка первой четверти).

Тогда x=8y и $\frac{x-2y}{2x-3y}=\frac{8y-2y}{16y-3y}=\frac{6}{13}$.

1.2.D10.

а) xy^{-1}+$12x^{-1}y$=–7; $\left(\frac{x}{y}\right)^2+7\left(\frac{x}{y}\right)$+12=0; $\left(\frac{x}{y}\right)$=–3 или $\left(\frac{x}{y}\right)$=–4.

Тогда x=–3y или x=–4y и $\frac{3x+2y}{x-y}=\frac{-9y+2y}{-3y-y}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ или

$\frac{3x+2y}{x-y}=\frac{-12y+2y}{-4y-y}=\frac{10}{5}=2$;

б) xy^{-1}+$6x^{-1}y$=–5; $\left(\frac{x}{y}\right)^2+5\left(\frac{x}{y}\right)$+6=0; $\left(\frac{x}{y}\right)$=–2 или $\left(\frac{x}{y}\right)$=–3.

Тогда x=–2y или x=–3y и $\frac{x+3y}{2x-5y}=\frac{-2y+3y}{-4y-5y}=-\frac{1}{9}$ или $\frac{x+3y}{2x-5y}=\frac{-3y+3y}{-6y-5y}=0$.

1.2.D11. а) Допустим $\frac{x^2+xy+5y^2}{(x-2y)^2}=a$. Тогда $x^2+xy+5y^2=ax^2-4axy+4ay^2$;

$x^2(a-1)-x(4ay+y)+4ay^2-5y^2=0$. Уравнение имеет решение, если Д≥0:
Д=$(4ay+y)^2-4(a-1)(4ay^2-5y^2)=16a^2y^2+8ay^2+y^2-16a^2y^2+20ay^2+16ay^2-$
$-20y^2=y^2\,(44a-19)\geq 0$ при $a\geq\frac{19}{44}$.

Так что $\frac{x^2+y+5y^2}{(x-2y)^2}\geq\frac{19}{44}$; следовательно, значение данного выражения может быть равным 4.

б) Допустим $\frac{x^2+xy+4y^2}{(x-y)^2}=a$, тогда $x^2+xy+4y^2=a(x-y)^2$;

$x^2(a-1)-x(2ay+y)+ay^2-4y^2=0$. Решение есть, если Д≥0.

То есть $Д=y^2(2a+1)^2-4y^2(a-4)(a-1)=y^2(4a^2+1+4a-4a^2+16a+4a-16)=$

$=y^2(24a-15)\geq 0$ при $a\geq\frac{5}{8}$, следовательно, значение данного выражения может быть равным 1.

1.2.D12.

а) $f(x)=\frac{(x+2)^3}{x}+\frac{(x-1)^2}{x-2}-\frac{8}{x}-\frac{1}{x-2}=\frac{(x+2)^3-8}{x}+\frac{(x-1)^2-1}{x-2}=$

$=\frac{x^3+6x^2+12x}{x}+\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2+6x+12+x=x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$.

То есть f(x) – возрастает на промежутке $[3;+\infty)$.

Так что $f(x)\geq f(3)=42$, следовательно, функция не принимает значение 22.

б) $f(x)=\frac{(x+3)^3}{x}-\frac{(x+1)^2}{x+2}-\frac{27}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{(x+3)^3-27}{x}-\frac{(x+1)^2-1}{x+2}=$

$=\frac{x^3+9x^2+27x}{x}-\frac{x^2+2x}{x+2}=x^2+9x+27-x=x^2+8x+27$. Так что $f(x)\geq f(5)=92$ (так как f(x) – возрастает на промежутке $[5;+\infty)$). следовательно, функция не принимает значение 48.

§ 3. Степень с рациональным показателем

Уровень А.

1.3.A01.

а) $\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{9}}}\right)^{-9}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}\right)^{-9\cdot\frac{1}{4}}=\left(a^{\frac{2}{9}}\right)^{-\frac{9}{4}}=a^{-\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{4}}=a^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{\frac{1}{0,25}}=\sqrt{4}=2;$

б) $\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{16}}}\right)^{-16}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{a}{a^4}\right)^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{0,2}=5$.

1.3.A02.

а) $\sqrt{x\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}=x^{\frac{19}{30}}=\left(5^{-\frac{30}{19}}\right)^{\frac{19}{30}}=5^{-1}=0,2;$

б) $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[7]{x}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}}=x^{\frac{9}{14}}=\left(5^{-\frac{14}{9}}\right)^{\frac{9}{14}}=5^{-1}=\frac{1}{5}=0,2.$

1.3.A03.

а) $\frac{x-9y}{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-27y\sqrt{y}}{x-9y}=\frac{(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}-$

$-\frac{(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(x+3\sqrt{xy}+9y)}{(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}=\sqrt{x}+3\sqrt{y}-\frac{x+3\sqrt{xy}+9y}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}=$

$=\frac{x+6\sqrt{xy}+9y-(x+3\sqrt{xy}+9y)}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}=\frac{3\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}=\frac{3\sqrt{25}}{\sqrt{10^{-1}}+3\sqrt{250}}=$

$=\frac{15}{\sqrt{\frac{1}{10}}+3\sqrt{250}}=\frac{15\sqrt{10}}{1+150}=\frac{15\sqrt{10}}{151};$

б) $\frac{x-4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}+8y\sqrt{y}}{x-4y}=\frac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}-$

$-\frac{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(x-2\sqrt{xy}+4y)}{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})}=\sqrt{x}-2\sqrt{y}-\frac{x-2\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2-(x-2\sqrt{xy}+4y)}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=\frac{-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=\frac{-2\sqrt{25}}{\sqrt{2^{-1}}-2\sqrt{50}}=$

$=\frac{-10\cdot\sqrt{2}}{1-2\sqrt{100}}=\frac{-10\sqrt{2}}{1-20}=\frac{10\sqrt{2}}{19}.$

1.3.A04.

а) $\frac{19}{2}-\sqrt{14}+\frac{9\sqrt{70}}{14\sqrt{5}-5\sqrt{14}}-\sqrt{5}=\frac{19}{2}+\frac{9\sqrt{70}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{14}\right)\left(14\sqrt{5}-5\sqrt{14}\right)}{14\sqrt{5}-5\sqrt{14}}=$

$=\frac{19}{2}+\frac{9\sqrt{70}-70-14\sqrt{70}+5\sqrt{70}+70}{14\sqrt{5}-5\sqrt{14}}=\frac{19}{2}+0=\frac{19}{2};$

б) $\frac{17}{2}-\sqrt{11}+\frac{5\sqrt{66}}{11\sqrt{6}-6\sqrt{11}}-\sqrt{6}=\frac{17}{2}+\frac{5\sqrt{66}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)\left(11\sqrt{6}-6\sqrt{11}\right)}{11\sqrt{6}-6\sqrt{11}}=$

$=\frac{17}{2}+\frac{5\sqrt{66}-66+6\sqrt{66}-11\sqrt{66}+66}{11\sqrt{6}-6\sqrt{11}}=\frac{17}{2}+0=\frac{17}{2}.$

1.3.A05.

а) $\left(\frac{1}{3-\sqrt{5}}-\frac{1}{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{45}\right)=\left(\frac{3+\sqrt{5}-3+\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\right)\cdot\sqrt{5}\cdot\left(1+\sqrt{9}\right)=$

$=\frac{2\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5}\cdot 4=10;$

б) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{75}\right)=\left(\frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{4-3}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{4}-\sqrt{25}\right)=$

$=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(2-5)=-18.$

1.3.А06.

а) $\left(\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4x+9y}}}\right)^{4x-\frac{81y^2}{4x}}\right)^{\frac{4x}{4x-9y}} = a^{-\frac{1}{4x+9y}\cdot\frac{16x^2-81y^2}{4x}\cdot\frac{4x}{4x-9y}} =$

$= a^{-\frac{16x^2-81y^2}{16x^2-81y^2}} = a^{-1} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\frac{4}{9}} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4};$

б) $\left(\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{8x+9y}}}\right)^{8x-\frac{81y^2}{8x}}\right)^{\frac{8x}{8x-9y}} = a^{-\frac{1}{8x+9y}\cdot\frac{64x^2-81y^2}{8x}\cdot\frac{8x}{8x-9y}} =$

$= a^{-\frac{64x^2-81y^2}{64x^2-81y^2}} = a^{-1} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-1} = \dfrac{9}{8} = 1\dfrac{1}{8}.$

Уровень В.

1.3.В01.

а) $\dfrac{x+6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{x+6\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}+1} = \dfrac{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} -$

$- \dfrac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+6\sqrt{x-1}+5}{\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{x}+5-\dfrac{\left(\sqrt{x-1}+1\right)\left(\sqrt{x-1}+5\right)}{\sqrt{x-1}+1} =$

$= \sqrt{x}+5-\sqrt{x-1}-5 = \sqrt{x}-\sqrt{x-1};$

б) $\dfrac{x+6\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+4} - \dfrac{x+6\sqrt{x-2}+6}{\sqrt{x-2}+4} = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+4} -$

$- \dfrac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2+6\sqrt{x-2}+8}{\sqrt{x-2}+4} = \dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt{x}+4} - \dfrac{\left(\sqrt{x-2}+2\right)\left(\sqrt{x-2}+4\right)}{\sqrt{x-2}+4} =$

$= \sqrt{x}+4-\sqrt{x-2}-4 = \sqrt{x}-\sqrt{x-2}.$

1.3.В02.

а) $\sqrt{18-4\sqrt{14}}+\sqrt{18+4\sqrt{14}} = \sqrt{\left(\sqrt{14}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{14}+2\right)^2} = \sqrt{14}-2+\sqrt{14}+2 = 2\sqrt{14};$

б) $\sqrt{21-4\sqrt{17}}+\sqrt{21+4\sqrt{17}} = \sqrt{\left(\sqrt{17}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{17}+4\right)^2} =$

$= \sqrt{17}-4+\sqrt{17}+4 = 2\sqrt{17}.$

1.3.В03.

а) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2} = 2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-1 = 4\sqrt{3};$

б) $\sqrt{21+4\sqrt{5}}+\sqrt{21-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{5}-1\right)^2}=2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}-1=4\sqrt{5}.$

1.3.B04.

а) $6+2\sqrt{12,5}+\dfrac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{7}+\sqrt{14}}=6+\dfrac{2\sqrt{25}}{\sqrt{2}}+\dfrac{6\sqrt{14}}{\sqrt{7}\left(2+\sqrt{2}\right)}=6+5\sqrt{2}+\dfrac{6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\left(6+5\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)+6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{12+16\sqrt{2}+10+6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{22\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{22}{\sqrt{2}}=11\sqrt{2};$

б) $5+8\sqrt{4,5}-\dfrac{5\sqrt{10}}{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}=5+\dfrac{8\sqrt{9}}{\sqrt{2}}-\dfrac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}\left(2-\sqrt{2}\right)}=5+12\sqrt{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\left(5+12\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{10+19\sqrt{2}-24-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{14\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{14}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}.$

1.3.B05.

а) $\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right):(x^3-x)\cdot x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}:\left(x\left(x^2-1\right)\right)\cdot\sqrt{x}=$

$=\dfrac{(x^2-1)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot x\cdot(x^2-1)}=\dfrac{1}{x}=x^{-1}=(49^{-1})^{-1}=49;$

б) $\left(x^{\frac{5}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right):(x^5+x)\cdot x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{x^4+1}{x^{\frac{3}{2}}}:\left(x\left(x^4+1\right)\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}=$

$=\dfrac{(x^4+1)\cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\cdot x\cdot(x^4+1)}=\dfrac{1}{x}=x^{-1}=(64^{-1})^{-1}=64.$

1.3.B06.

а) $1-\left(x^{-\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-x\right)x^{\frac{-1}{6}}=1-\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)}{x^{\frac{1}{6}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{6}}}=$

$=1-\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)=1-1+x^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{4}{3}};$

б) $1-\left(x^{-\frac{1}{10}}-x^{\frac{3}{10}}\right)\left(x^{\frac{3}{5}}+x\right)x^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1-x^{\frac{4}{10}}}{x^{\frac{1}{10}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{5}}\cdot\left(1+x^{\frac{2}{5}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}}=$

$=1-\dfrac{\left(1-x^{\frac{2}{5}}\right)\left(1+x^{\frac{2}{5}}\right)\cdot x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}}=1-\left(1-x^{\frac{4}{5}}\right)=x^{\frac{4}{5}}.$

1.3.В07.

а) $1-x^6(x^{-2,7}-x^{-2,3})(x^{-3,3}+x^{-2,9}+x^{-2,5})=1-x^6\frac{\left(1-x^{\frac{2}{5}}\right)}{x^{2,7}}\cdot$

$\cdot\frac{\left(1+x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{4}{5}}\right)}{x^{3,3}}=1-\frac{x^6\cdot\left(1^3-\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^3\right)}{x^6}=x^{\frac{6}{5}};$

б) $1-x^6(x^{-3,5}+x^{-3,1})(x^{-2,5}-x^{-2,1}+x^{-1,7})=1-x^6\cdot\frac{\left(1+x^{0,4}\right)}{x^{3,5}}\cdot$

$\cdot\frac{\left(1-x^{0,4}+x^{0,8}\right)}{x^{2,5}}=1-\frac{x^6\cdot\left(1+x^{0,4}\right)\left(1-x^{0,4}+\left(x^{0,4}\right)^2\right)}{x^6}=1-\left(1+\left(x^{0,4}\right)^3\right)=-x^{1,2}.$

1.3.В08.

а) $\frac{x-15}{\sqrt{x+1}-4}-\frac{x-3}{2+\sqrt{x+1}}=\frac{(x-15)(2+\sqrt{x+1})-(x-3)(\sqrt{x+1}-4)}{(\sqrt{x+1}-4)(2+\sqrt{x+1})}=$

$=\frac{2x+x\sqrt{x+1}-30-15\sqrt{x+1}-x\sqrt{x+1}+4x+3\sqrt{x+1}-12}{2\sqrt{x+1}-8+x+1-4\sqrt{x+1}}=\frac{6(x-2\sqrt{x+1}-7)}{x-2\sqrt{x+1}-7)}=6;$

б) $\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}-\frac{x-12}{3+\sqrt{x-3}}=\frac{(x-4)(3+\sqrt{x-3})-(x-12)(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}+1)(3+\sqrt{x-3})}=$

$=\frac{3x-12+x\sqrt{x-3}-4\sqrt{x-3}-x\sqrt{x-3}-x+12\sqrt{x-3}+12}{3\sqrt{x-3}+3+x-3+\sqrt{x-3}}=\frac{2(x+4\sqrt{x-3})}{x+4\sqrt{x-3})}=2.$

1.3.В09.

а) $f(3+x)f(3-x)=(3+x)^{\frac{1}{6}}(3-x)^{\frac{1}{6}}\cdot(3-x)^{\frac{1}{6}}(3+x)^{\frac{1}{6}}=$

$=\left((3+x)^{\frac{1}{6}}(6-(3+x))^{\frac{1}{6}}\right)^2=f^2(3+x);$

$(f(3+x)\cdot f(3-x))^3=\left((3+x)^{\frac{2}{6}}(3-x)^{\frac{2}{6}}\right)^3=(3+x)(3-x)=9-x^2=$

$=9-\left(7^{-1}\cdot7^{\frac{1}{2}}\right)^2=9-\left(7^{-\frac{1}{2}}\right)^2=9-7^{-1}=8\frac{6}{7};$

б) $f(2+x)f(2-x)=(2+x)^{\frac{1}{4}}(4-(2+x))^{\frac{1}{4}}\cdot(2-x)^{\frac{1}{4}}(4-(2-x))^{\frac{1}{4}}=$

$=(2+x)^{\frac{1}{4}}(2-x)^{\frac{1}{4}}\cdot(2-x)^{\frac{1}{4}}(2+x)^{\frac{1}{4}}=\left((2+x)^{\frac{1}{4}}(4-(2+x))^{\frac{1}{4}}\right)^2=f^2(2+x);$

$(f(2+x)\cdot f(2-x))^2=\left((2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{1}{2}}\right)^2=(2+x)(2-x)=4-x^2=$

$=4-\left(2^{-1}\cdot7^{\frac{1}{2}}\right)^2=4-\left(2^{-2}\cdot7\right)=4-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}.$

1.3.B10.

а) $f(6+x)f(6-x)=\sqrt[5]{(6+x)^3(12-(6+x))^3}\cdot\sqrt[5]{(6-x)^3(12-(6-x))^3}=$

$=\sqrt[5]{(6+x)^3(6-x)^3}\cdot\sqrt[5]{(6+x)^3(6-x)^3}=\left(\sqrt[5]{(6+x)^3(12-(6+x))^3}\right)^2=f^2(6+x);$

$(f(6+x)\cdot f(6-x))^5=\left(\sqrt[5]{(6+x)^6(6-x)^6}\right)^5=(6+x)^6(6-x)^6=(36-x^2)^6=\left(36-\left(\sqrt{35}\right)^2\right)^6=1;$

б) $f(4+x)f(4-x)=\sqrt[3]{(4+x)^2(8-(4+x))^2}\cdot\sqrt[3]{(4-x)^2(8-(4-x))^2}=$

$=\sqrt[3]{(4+x)^2(4-x)^2}\cdot\sqrt[3]{(4+x)^2(4-x)^2}=\left(\sqrt[3]{(4+x)^2(8-(4+x))^2}\right)^2=f^2(4+x);$

$(f(4+x)\cdot f(4-x))^3=\left(\sqrt[3]{(4+x)^4(4-x)^4}\right)^3=(4+x)^4(4-x)^4=(16-x^2)^4=\left(16-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)^4=1.$

1.3.B11.

а) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{7}+2)^2}=$

$=\sqrt{7}-2-(\sqrt{7}+2)=-4;$ $(-4)^2-16=16-16=0$, значит, данное число является корнем уравнения $x^2-16=0$;

б) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}=$

$=3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}=-4\sqrt{2};$ $(-4\sqrt{2})^2-32=32-32=0$, значит, данное число является корнем уравнения $x^2-32=0$.

1.3.B12.

а) $\left(\frac{1}{3x^{0,5}+2y^{0,5}}+\frac{1}{3x^{0,5}-2y^{0,5}}\right)\left(3x-\frac{4}{3}y\right)=\left(\frac{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}+3\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{\left(3\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}\right)\cdot$

$\cdot\left(\frac{9x-4y}{3}\right)=\frac{6\sqrt{x}}{9x-4y}\cdot\frac{9x-4y}{3}=2\sqrt{x}=2\cdot\sqrt{16}=8;$

б) $\left(\frac{1}{2x^{0,5}+3y^{0,5}}-\frac{1}{2x^{0,5}-3y^{0,5}}\right)\left(2x-\frac{9}{2}y\right)=\left(\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}-2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)}\right)\cdot$

$\cdot\left(\frac{4x-9y}{2}\right)=\frac{-6\sqrt{y}}{4x-9y}\cdot\frac{4x-9y}{2}=-3\sqrt{y}=-3\sqrt{81}=-27.$

Уровень С.

1.3.C01.

а) $\frac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{\sqrt{161-72\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{161+72\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}}{\sqrt{(9-4\sqrt{5})^2}}-\frac{\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}}{\sqrt{(9+4\sqrt{5})^2}}=$

$=\frac{\sqrt{7}-1}{9-4\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+1}{9+4\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{7}-1)(9+4\sqrt{5})-(\sqrt{7}+1)(9-4\sqrt{5})}{81-16\cdot5}=$

$= 9\sqrt{7} - 9 + 4\sqrt{35} - 4\sqrt{5} - 9\sqrt{7} - 9 + 4\sqrt{35} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{35} - 18$;

б) $\dfrac{\sqrt{12-2\sqrt{11}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{12+2\sqrt{11}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{11}-1)^2}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}} - \dfrac{\sqrt{(\sqrt{11}+1)^2}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{11}-1}{3-2\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{11}+1}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{11}-1)(3+2\sqrt{2}) - (\sqrt{11}+1)(3-2\sqrt{2})}{9-4\cdot 2} =$

$= 3\sqrt{11} - 3 + 2\sqrt{22} - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{11} - 3 + 2\sqrt{22} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{22} - 6.$

1.3.C02.

а) $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} - b\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a-\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1} - \left(\dfrac{-b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}} = \dfrac{\dfrac{2ba\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \dfrac{2ab\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}}{\dfrac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} =$

$= \dfrac{2ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2\sqrt{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} = -\sqrt{ab};$

б) $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{10b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{10a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{10ab}\right)^{-1} + \left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{10ab}\right)^{-1}} = \dfrac{\dfrac{10ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{10ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\dfrac{10b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{10a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}} = \dfrac{10ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{10\sqrt{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \sqrt{ab}.$

1.3.C03.

а) $(3-x)^{-1}\sqrt{x^3-3x^3-9x+27} = (3-x)^{-1}\cdot\sqrt{x^2(x-3)-9(x-3)} =$

$= (3-x)^{-1}\cdot\sqrt{(x-3)(x^2-9)} = (3-x)^{-1}\cdot\sqrt{(x-3)^2}\cdot\sqrt{(x+3)} =$

$= \dfrac{x-3}{3-x}\cdot\sqrt{x+3} = -\sqrt{x+3}$, так как x>3;

б) $(4-x)^{-1}\sqrt{x^3-9x^3+24x-16} = (4-x)^{-1}\cdot\sqrt{(x-1)(x-4)^2} =$

$= (4-x)^{-1}(x-4)\cdot\sqrt{x-1} = -\sqrt{x-1}$, так как x>4.

1.3.C04.

а) $\sqrt{16x^2-8x+1} - \sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(4x-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$ = |4x–1|–|x–2|=
=1–4x–(2–x)=–1–3x, так как x<–2;

б) $\sqrt{9x^2+6x+1} - \sqrt{x^2-8x+16} = \sqrt{(3x+1)^2} - \sqrt{(x-4)^2}$ = |3x+1|–|x–4|=
=–1–3x–(4–x)=–5–2x, так как x<–9.

1.3.C05.

а) $\sqrt{(-3-x)^2} - \sqrt{(-2-x)^2}$ =|–3–x|–|–2–x|=3+x–(2+x)=1; при 2<x<4;

б) $\sqrt{(-4-x)^2} - \sqrt{(-3-x)^2}$ =|–4–x|–|–3–x|=4+x–(3+x)=1; при –2<x<7.

1.3.С06. а) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)-2x^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=(125-4)^{\frac{1}{2}}=11;$

б) Очевидно, в новом задачнике опечатка, задача осталась как в старом!

1.3.С07.

а) $\dfrac{2\left(1-\sqrt{b}\right)-\sqrt{ab}\left(1-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}-1}+\dfrac{4\left(2+\sqrt{a}\right)-\sqrt{ab}\left(2+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}+2}=\sqrt{ab}-2+4-\sqrt{ab}=2;$

б) $\dfrac{2\left(2-\sqrt{b}\right)-\sqrt{ab}\left(2-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}-2}+\dfrac{5\left(\sqrt{a}+1\right)-\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}=\sqrt{ab}-1+5-\sqrt{ab}=4.$

1.3.С08.

а) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}-27}{x-9}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\left(-1-\dfrac{6}{\sqrt{x}-3}\right)=$

$=\left(\dfrac{(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\dfrac{3-\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-3}\right)=\dfrac{x+6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+3}\cdot$

$\cdot\dfrac{\sqrt{x}-3}{(-3-\sqrt{x})}=\dfrac{(\sqrt{x}+3)^2\cdot(\sqrt{x}-3)}{-(\sqrt{x}+3)^2}=3-\sqrt{x};$

б) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}-64}{x-16}+\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right):\left(-1-\dfrac{8}{\sqrt{x}-4}\right)=$

$=\left(\dfrac{(\sqrt{x}-4)(x+4\sqrt{x}+16)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}+\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right):\left(\dfrac{4-\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-4}\right)=\dfrac{x+8\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}+4}\cdot$

$\cdot\dfrac{\sqrt{x}-4}{(-4-\sqrt{x})}=\dfrac{(\sqrt{x}+4)^2\cdot(\sqrt{x}-4)}{-(\sqrt{x}+4)^2}=4-\sqrt{x}.$

1.3.С09.

а) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-4}-\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right):\left(1-\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}\right)=\left(\dfrac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}-\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right):$

$:\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)=\dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2\cdot(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)\cdot(\sqrt{x}-2)}=\sqrt{x}-2;$

б) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x-1}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)=\left(\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):$

$:\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1.$

1.3.C10.

а) $\dfrac{\dfrac{5}{\sqrt{x+5}}-\sqrt{x+5}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}}:\dfrac{\sqrt{x+5}}{(x+5)\sqrt{x-5}+(x-5)\sqrt{x+5}}-5x=$

$=\dfrac{(5-(x+5))\cdot\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5})}\cdot\dfrac{(\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-5})\cdot(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5})}{\sqrt{x+5}}-5x=$

$=(5-x-5)(x-5)-5x=-x^2$;

б) $\dfrac{\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{x-7}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+7}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-7}}}:\dfrac{\sqrt{x-7}}{(x-7)\sqrt{x+7}-(x+7)\sqrt{x-7}}-7x=$

$=\dfrac{(7+x-7)\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x-7}\cdot\sqrt{x-7}\cdot\sqrt{x+7}(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+7})}{(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+7})\cdot\sqrt{x-7}}-7x=x(x+7)-7x=x^2.$

1.3.C11.

а) $\dfrac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x^2+4x+16}{x+2\sqrt{x}+4}=\dfrac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{(x^3-64)\cdot(\sqrt{x}-2)}{(x\sqrt{x}-8)(x-4)}=$

$=\dfrac{(x^3-64)(x-4)-(x^3-64)(x-4)}{(\sqrt{x}+2)(x\sqrt{x}-8)(x-4)}=0;$

б) $-\dfrac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{x^2+9x+81}{x+3\sqrt{x}+9}=-\dfrac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{(x^3-729)\cdot(\sqrt{x}-3)}{(x\sqrt{x}-27)(x-9)}=$

$=\dfrac{-(x^3-729)(x-9)+(x^3-729)(x-9)}{(\sqrt{x}+3)(x\sqrt{x}-27)(x-9)}=0.$

1.3.C12.

а) $(3-x)^{-1}\sqrt{x^3-5x^2+3x+9}=(3-x)^{-1}\sqrt{(x+1)(x-3)^2}=$

$=(3-x)^{-1}\cdot(3-x)\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}$, так как $-1\le x<3$;

б) $(1-x)^{-1}\sqrt{x^3+3x^2-9x+5}=(1-x)^{-1}\sqrt{(x-1)^2(x+5)}=$

$=(1-x)^{-1}\cdot(1-x)\sqrt{x+5}=\sqrt{x+5}$, так как $-5\le x<1$.

Уровень D.

1.3.D01. а) $\sqrt{x-18\sqrt{x-81}}-\sqrt{x+18\sqrt{x-81}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-81}-9\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x-81}+9\right)^2}=$

$=\sqrt{x-81}-9-\sqrt{x-81}-9=-18$, так как $x>165$;

б) $\sqrt{x-22\sqrt{x-121}}-\sqrt{x+22\sqrt{x-121}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-121}-11\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x-121}+11\right)^2}=$

$=\sqrt{x-121}-11-\sqrt{x-121}-11=-22$, так как $x>244$.

1.3.D02. а) $\dfrac{x^9-x}{x+x\sqrt{x}+x^2+x^2\sqrt{x}+...+x^8\sqrt{x}}=\dfrac{x(x^8-1)}{x(1+\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}+...+x^7\sqrt{x})}=$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{x}+...+(\sqrt{x})^{15})}{1+\sqrt{x}+...+(\sqrt{x})^{15}}=\sqrt{x}-1=\sqrt{1,96}-1=1,4-1=0,4;$$

б) $$\frac{x^9-x^3}{x^3+x^3\sqrt{x}+x^4+x^4\sqrt{x}+...+x^8\sqrt{x}}=\frac{x^3(x^6-1)}{x^3(1+\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}+x^2+...+x^5\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2+...+(\sqrt{x})^{11})}{(1+\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2+...+(\sqrt{x})^{11})}=\sqrt{x}-1=\sqrt{1,69}-1=1,3-1=0,3.$$

1.3.D03. а) $f(g(x))=\sqrt[5]{\frac{g(x)-5}{g(x)-3}}=\sqrt[5]{\frac{\frac{5-3x^5}{1-x^5}-5}{\frac{5-3x^5}{1-x^5}-3}}=\sqrt[5]{\frac{2x^5}{2}}=\sqrt[5]{x^5}=x;$

$g(f(x))=\frac{5-3f^5(x)}{1-f^5(x)}=\frac{5-3\frac{x-5}{x-3}}{1-\frac{x-5}{x-3}}=\frac{2x}{2}=x=f(g(x)).$ $f(g(-2))=-2;$

б) $f(g(x))=\sqrt[5]{\frac{g(x)-4}{g(x)-1}}=\sqrt[5]{\frac{\frac{4-x^5}{1-x^5}-4}{\frac{4-x^5}{1-x^5}-1}}=\sqrt[5]{\frac{3x^5}{3}}=\sqrt[5]{x^5}=x;$

$g(f(x))=\frac{4-f^5(x)}{1-f^5(x)}=\frac{4-\frac{x-4}{x-1}}{1-\frac{x-4}{x-1}}=\frac{3x}{3}=x=f(g(x)).$ $f(g(2))=2.$

1.3.D04. а) $f(5-x)+f(5+x)=\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(-x-1)^2}}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{(-1-x)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{-x\sqrt[3]{-x}}=0;$

б) $f(4-x)+f(4+x)=\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)^2}}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{(1+x)^2}}{-x\sqrt[3]{-x}}=0.$

1.3.D05. а) $x\cdot\frac{1+\frac{7}{\sqrt{x+49}}}{7-\sqrt{x+49}}+\frac{49}{\sqrt{x+49}}+\sqrt{x+49}=x\cdot\frac{\sqrt{x+49}+7}{\sqrt{x+49}(7-\sqrt{x+49})}+$

$+\frac{49+x+49}{\sqrt{x+49}}=x\cdot\frac{(\sqrt{x+49}+7)^2}{(\sqrt{x+49})(49-(x+49))}+\frac{98+x}{\sqrt{x+49}}=$

$=\frac{-x-49-49-14\sqrt{x+49}+98+x}{\sqrt{x+49}}=\frac{-14\sqrt{x+49}}{\sqrt{x+49}}=-14;$

б) $x\cdot\frac{1-\frac{3}{\sqrt{x+9}}}{3+\sqrt{x+9}}-\frac{9}{\sqrt{x+9}}-\sqrt{x+9}=\frac{(\sqrt{x+9}-3)^2\cdot x}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})(\sqrt{x+9}-3)}-$

$-\frac{9+(x-9)}{\sqrt{x+9}}=\frac{(x+18-6\sqrt{x+9})\cdot x}{\sqrt{x+9}\cdot x}=\frac{x+18}{\sqrt{x+9}}=\frac{-6\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+9}}=-6.$

1.3.D06. а) p(x)= $\dfrac{5+5x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}-x^2}{1+x\sqrt{x}}=\dfrac{(1+x\sqrt{x})(5-\sqrt{x})}{1+x\sqrt{x}}=5-\sqrt{x}\le 5.$

Так что p(x)≤5, в частности p(x)=4 может быть при x=1;

б) p(x)= $\dfrac{6+2x^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{x}-x^2}{3+x\sqrt{x}}=\dfrac{(3+x\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{3+x\sqrt{x}}=2-\sqrt{x}\le 2.$

Так что p(x)≤2, в частности p(x)=1 при x=1.

1.3.D07. а) p(x)= $x^{-0,5}+\dfrac{25x^{-0,5}-x^{0,5}}{x+5x^{0,5}}=x^{-0,5}+\dfrac{25-x}{x(x^{0,5}+5)}=x^{-0,5}+$

$+\dfrac{(5-x^{0,5})(5+x^{0,5})}{x(x^{0,5}+5)}=x^{-0,5}+\dfrac{5}{x}-x^{-0,5}=\dfrac{5}{x}>0$,

так как x>0, в частности p(x)=2 при x= $\dfrac{5}{2}$;

б) p(x)= $x^{-0,5}+\dfrac{36x^{-0,5}-x^{0,5}}{x+6x^{0,5}}=x^{-0,5}+\dfrac{36-x}{x(x^{0,5}+6)}=x^{-0,5}+$

$+\dfrac{(6-x^{0,5})(6+x^{0,5})}{x(6+x^{0,5})}=x^{-0,5}+\dfrac{6}{x}-x^{-0,5}=\dfrac{6}{x}>0$,

так как x>0. В частности p(x)=2 при x=3.

1.3.D08. а) p(x)= $\dfrac{(x-1)^{-\frac{1}{2}}-9}{(x-1)^{-\frac{1}{2}}+3(x-1)^{-\frac{1}{4}}}-(x-1)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{((x-1)^{-\frac{1}{4}}-3)((x-1)^{-\frac{1}{4}}+3)}{(x-1)^{-\frac{1}{4}}((x-1)^{-\frac{1}{4}}+3)}-$

$-(x-1)^{\frac{1}{4}}=1-3(x-1)^{\frac{1}{4}}-(x-1)^{\frac{1}{4}}=1-4(x-1)^{\frac{1}{4}}<1$, так как (x–1)>0.

В частности, p(x)=–2 при $(x-1)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4},\quad x=1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=1+\dfrac{81}{256}=\dfrac{337}{256}$;

б) p(x)= $\dfrac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}-16}{(x+2)^{-\frac{1}{2}}+4(x+2)^{-\frac{1}{4}}}+3(x+2)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{((x+2)^{-\frac{1}{4}}-4)((x+2)^{-\frac{1}{4}}+4)}{(x+2)^{-\frac{1}{4}}((x+2)^{-\frac{1}{4}}+4)}+$

$+3(x+2)^{\frac{1}{4}}=1-4(x+2)^{\frac{1}{4}}+3(x+2)^{\frac{1}{4}}=1-(x+2)^{\frac{1}{4}}<1$, так как x+2>0.

В частности, p(x)=–1 при $(x+2)^{\frac{1}{4}}=2,\quad x=-2+2^4=14.$

1.3.D09.

а) $(\sqrt{x+52}+\sqrt{x-20})\left(\dfrac{3}{\sqrt{x-20}+\sqrt{x-17}}+\dfrac{3}{\sqrt{x-17}+\sqrt{x-14}}+...+\dfrac{3}{\sqrt{x+49}+\sqrt{x+52}}\right)=$

$=(\sqrt{x+52}+\sqrt{x-20})\left(\dfrac{3(\sqrt{x-20}-\sqrt{x-17})}{x-20-x+17}+\dfrac{3(\sqrt{x-17}-\sqrt{x-14})}{x-17-x+14}+...+\dfrac{3(\sqrt{x+49}-\sqrt{x+52})}{x+49-x-52}\right)=$

$=(\sqrt{x+52}+\sqrt{x-20})\cdot(\sqrt{x-17}-\sqrt{x-20}+\sqrt{x-14}-\sqrt{x-17}+...+$

$+\sqrt{x+52}-\sqrt{x+49})=(\sqrt{x+52}+\sqrt{x-20})(\sqrt{x+52}-\sqrt{x-20})=$
$=(x+52-x+20)=72;$

б) $(\sqrt{x+51}+\sqrt{x-23})\left(\dfrac{2}{\sqrt{x-23}+\sqrt{x-21}}+\dfrac{2}{\sqrt{x-17}+\sqrt{x-14}}+\ldots+\dfrac{2}{\sqrt{x+49}+\sqrt{x+51}}\right)=$

$=(\sqrt{x+51}+\sqrt{x-23})\left(\dfrac{2(\sqrt{x-21}-\sqrt{x-23}}{x-21-x+23}+\dfrac{2(\sqrt{x-19}-\sqrt{x-21}}{x-19-x+21}+\ldots+\dfrac{2(\sqrt{x+51}-\sqrt{x+49}}{x+51-x-49}\right)==$

$(\sqrt{x+51}+\sqrt{x-23})\cdot(\sqrt{x-21}-\sqrt{x-23}+\sqrt{x-19}-\sqrt{x-21}+\ldots+$
$+\sqrt{x+51}-\sqrt{x+49})=(\sqrt{x+51}+\sqrt{x-23})(\sqrt{x+51}-\sqrt{x-23})=$
$=(x+51-x+23)=74.$

1.3.D10. а) $\sqrt{a^2-8ab+16b^2}+\left(\dfrac{2a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{4b\sqrt{a}}{2a-\sqrt{ab}}+4\sqrt{b}\right)=$

$=\sqrt{(a-4b)^2}+\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{8a\sqrt{b}}{\sqrt{a}(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)=|a-4b|+\dfrac{1}{8}=$

$=|3{,}78–18{,}48|+\dfrac{1}{8}=14{,}7+\dfrac{1}{8}=14{,}825;$

б) $\sqrt{9a^2-6ab+b^2}+\left(\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{-5b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}+5\sqrt{b}\right)=$

$=\sqrt{(3a-b)^2}+\left(\dfrac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{5a\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)=|3a-b|-\dfrac{1}{5}=$

$=|3{,}3–4{,}62|–\dfrac{1}{5}=1{,}32–0{,}2=1{,}12.$

1.3.D11.

а) $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}-\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\sqrt{(\sqrt{x-9}+3)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-9}-3)^2}=$
$=\sqrt{x-9}+3-|\sqrt{x-9}-3|=\sqrt{x-9}+3-(3-\sqrt{x-9})=2\sqrt{x-9}$, так как $9<x<18$ и $\sqrt{x-9}<3$;

б) $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}-\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=\sqrt{(\sqrt{x-16}+4)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-16}-4)^2}=$
$=\sqrt{x-16}+4-|\sqrt{x-16}-4|=\sqrt{x-16}+4-(4-\sqrt{x-16})=2\sqrt{x-16}$, так как $16<x<32$ и $\sqrt{x-16}<4$.

1.3.D12. а) $f(4–x)+f(4+x)=\left(\dfrac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}+\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}\right)+$

$+\left(\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right)=0$ при $–2<x<2$.

б) $f(1–x)+f(1+x)=\left(\dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}+\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}\right)+$

$+\left(\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}\right)=0$ при –3<x<1.

§ 4. Тригонометрические выражения

Уровень А

1.4.А01. а) cosα=$\frac{15}{17}$, 0<α<$\frac{\pi}{2}$; sinα=$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\frac{8}{17}$,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{8}{15}$, ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=\frac{15}{8}$;

б) cosα=–$\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2}$<α<π; sinα=$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}$,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{12}$, ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{12}{5}$.

1.4.А02. а) sinα=–$\frac{15}{17}$, $\frac{35\pi}{2}$<α<$\frac{37\pi}{2}$; cosα=$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\frac{8}{17}$,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{15}{8}$, ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{8}{15}$;

б) sinα=$\frac{12}{13}$, $-\frac{27\pi}{2}$<α<–$\frac{25\pi}{2}$; cosα=–$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\frac{5}{13}$,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$, ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{5}{12}$.

1.4.А03. а) cosα=$\frac{7}{25}$, 4π<α<5π; sinα=$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\frac{24}{25}$,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{24}{7}$, ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=\frac{7}{24}$;

б) cosα=$\frac{21}{29}$, 9π<α<10π; sinα=–$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{441}{841}}=-\frac{20}{29}$,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{20}{21}$, ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{21}{20}$.

1.4.А04. а) tg$\frac{182\pi}{9}$ tg$\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$=tg$\frac{2\pi}{9}$ tg$\frac{4\pi}{7}$<0;

б) tg$\frac{46\pi}{5}$ tg$\left(-\frac{136\pi}{7}\right)$=tg$\frac{\pi}{5}\cdot$ tg$\frac{4\pi}{7}$<0.

1.4.А05. а) tgα=–$\frac{7}{24}$, $\frac{3\pi}{2}$<α<2π; ctgα=$\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{24}{7}$,

cosα=$\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{49}{576}}}=\frac{24}{25}$, sinα=tgα·cosα=–$\frac{7}{25}$;

б) $tg\alpha=\frac{35}{12}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{12}{35}$, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1225}{144}}}=\frac{12}{37}$,

$\sin\alpha=tg\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{35}{37}$.

1.4.A06.

а) $\cos\frac{314\pi}{5}\sin\frac{385\pi}{8}=\cos\frac{4\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{8}<0$; б) $\cos\frac{246\pi}{5}\sin\frac{405\pi}{8}=\cos\frac{6\pi}{5}\cdot\sin\frac{5\pi}{8}<0$.

Уровень B.

1.4.B01. а) $ctg\alpha=2$, $-\frac{17\pi}{2}<\alpha<-\frac{15\pi}{2}$; $tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}}=$

$=\sqrt{\frac{1}{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=ctg\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$;

б) $ctg\alpha=-4$, $\frac{7\pi}{2}<\alpha<\frac{9\pi}{2}$; $tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}=-\frac{1}{4}$, $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}}=$

$=-\sqrt{\frac{1}{1+16}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos\alpha=ctg\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$.

1.4.B02. а) $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$, $2\pi<\alpha<3\pi$,

так что $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$ и $(\sin\alpha+\cos\alpha)=$

$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$;

б) $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}$, $-3\pi<\alpha<-2\pi$, так что $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$ и $(\sin\alpha+\cos\alpha)=$

$=-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=-\sqrt{1+\frac{2}{5}}=-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

1.4.B03. а) $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{11}$, $\frac{13\pi}{2}<\alpha<\frac{15\pi}{2}$, так что $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha-\sin\alpha=$

$=-\sqrt{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=-\sqrt{1-2\cos\alpha\sin\alpha}=-\sqrt{1+\frac{6}{11}}=-\sqrt{\frac{17}{11}}$;

б) $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{15}$, $-\frac{7\pi}{2}<\alpha<-\frac{5\pi}{2}$, так что $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha-\sin\alpha=$

$=-\sqrt{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=-\sqrt{1-2\cos\alpha\sin\alpha}=-\sqrt{1+\frac{2}{15}}=-\sqrt{\frac{17}{15}}$.

1.4.B04. а) $\frac{\sin^3 35^\circ-\cos^3 35^\circ}{\sin 35^\circ-\cos 35^\circ}-\frac{\sin^2 35^\circ+\cos^2 35^\circ}{tg35^\circ+ctg35^\circ}=\frac{(\sin 35^\circ-\cos 35^\circ)(1+\sin 35^\circ\cos 35^\circ)}{\sin 35^\circ-\cos 35^\circ}-$

$-\frac{1\cdot\cos 35^\circ\sin 35^\circ}{\sin^2 35^\circ+\cos^2 35^\circ}=1+\sin 35^\circ\cos 35^\circ-\sin 35^\circ\cos 35^\circ=1;$

б) $\frac{\sin^3 24^\circ-\cos^3 24^\circ}{\sin 24^\circ-\cos 24^\circ}-\frac{\sin^2 24^\circ+\cos^2 24^\circ}{tg24^\circ+ctg24^\circ}=\frac{(\sin 24^\circ-\cos 24^\circ)(1+\sin 24^\circ\cos 24^\circ)}{\sin 24^\circ-\cos 24^\circ}-$

$-\frac{\sin 24^\circ\cos 24^\circ}{\sin^2 24^\circ+\cos^2 24^\circ}=1+\sin 24^\circ\cos 24^\circ-\sin 24^\circ\cos 24^\circ=1.$

1.4.B05. а) $\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}+15\alpha\right)+tg\left(-\frac{\pi}{2}-27\alpha\right)}{\cos^2(2\pi-4\alpha)+\cos^2\left(10\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}+15\alpha\right)+ctg(27\alpha)}{\cos^2(4\alpha)+\sin^2(10\alpha)}=$

$=\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)+ctg\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{0+1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2;$

б) $\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}-21\alpha\right)+tg\left(-\frac{5\pi}{2}-15\alpha\right)}{\cos^2(3\pi-4\alpha)+\cos^2\left(-2\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}=\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}-21\alpha\right)+ctg(15\alpha)}{\cos^2(4\alpha)+\sin^2(2\alpha)}=$

$=\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)+ctg\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{0+1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2.$

1.4.B06.

а) $\frac{2\cos 13^\circ\cos 43^\circ-\cos 56^\circ}{2\sin 58^\circ\cos 13^\circ-\sin 71^\circ}=\frac{2\cos 13^\circ\cos 43^\circ-(\cos 13^\circ\cos 43^\circ-\sin 13^\circ\sin 43^\circ)}{2\sin 58^\circ\cos 13^\circ-(\sin 13^\circ\cos 58^\circ+\cos 13^\circ\sin 58^\circ)}=$

$=\frac{\cos 13^\circ\cos 43^\circ+\sin 13^\circ\sin 43^\circ}{\sin 58^\circ\cos 13^\circ-\sin 13^\circ\cos 58^\circ}=\frac{\cos 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}};$

б) $\frac{2\cos 10^\circ\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 10^\circ-\sin 50^\circ}=\frac{2\cos 10^\circ\cos 70^\circ-(\cos 10^\circ\cos 70^\circ-\sin 10^\circ\sin 70^\circ)}{2\sin 40^\circ\cos 10^\circ-(\sin 40^\circ\cos 10^\circ+\cos 40^\circ\sin 10^\circ)}=$

$=\frac{\cos 10^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ\cos 10^\circ-\sin 10^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1.$

1.4.B07. а) $\frac{\sin^2 11^\circ+\sin^2 79^\circ}{\cos^2 53^\circ+\cos^2 37^\circ}=\frac{\sin^2 11^\circ+\cos^2 11^\circ}{\cos^2 53^\circ+\sin^2 53^\circ}=\frac{1}{1}=1;$

б) $\frac{\sin^2 8^\circ+\sin^2 82^\circ}{\cos^2 51^\circ+\cos^2 39^\circ}=\frac{\sin^2 8^\circ+\cos^2 8^\circ}{\sin^2 39^\circ+\cos^2 39^\circ}=\frac{1}{1}=1.$

1.4.B08. а) $\cos 14^\circ\cos 74^\circ<\cos 14^\circ\cdot\cos 60^\circ<\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

б) cos10º·cos40º<cos10º·cos30º<cos30º= $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.4.В09. а) $(\sin^2 37^\circ+\cos^2 38^\circ)-(\cos^2 37^\circ+\sin^2 38^\circ)=\cos 76^\circ-\cos 74^\circ<0$,
так что $\sin^2 37 + \cos^2 38 < \cos^2 37^\circ+\sin^2 38^\circ$;
б) $\sin^2 6^\circ+\cos^2 9^\circ-(\sin^2 9^\circ+\cos^2 6^\circ)=\cos 18^\circ-\cos 12^\circ<0$,
так что $\sin^2 6 + +\cos^2 9^\circ<\sin^2 9^\circ+\cos^2 6^\circ$.

1.4.В10. а) $\dfrac{\cos\left(3\alpha-\frac{21\pi}{4}\right)}{\sin\left(3\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos\left(3\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(3\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos\left(3\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(3\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}=1$;

б) $\dfrac{\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\alpha+\frac{21\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{16\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}=$

$=\dfrac{\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}{-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)}=-1.$

1.4.В11. а) sinαcosα= $\frac{1}{2}-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$;

б) sinαcosα= $\frac{(3\sin\alpha+3\cos\alpha)^2-9}{18}=\frac{-8}{18}=-\frac{4}{9}$.

1.4.В12.

а) tgα+ctgα= $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, так что cosαsinα= $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=-\frac{1}{8}$;

б) sinαcosα= $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\frac{1}{9}$.

Уровень С.

1.4.С01. а) $\dfrac{\sin 112^\circ}{16\sin 7^\circ}=\dfrac{\sin 112^\circ\cdot\cos 7^\circ}{16\sin 7^\circ\cdot\cos 7^\circ}=\dfrac{\sin 112^\circ\cdot\cos 7^\circ}{8\sin 14^\circ}=\dfrac{\sin 112^\circ\cdot\cos 7^\circ\cdot\cos 14^\circ}{4\sin 28^\circ}=$

$=\dfrac{\sin 112^\circ\cos 7^\circ\cos 14^\circ\cos 28^\circ}{2\sin 56^\circ}=\cos 7^\circ\cos 14^\circ\cos 28^\circ\cos 56^\circ$;

б) $\dfrac{\sin 256^\circ}{16\sin 16^\circ}=\dfrac{2\sin 128^\circ\cdot\cos 128^\circ}{16\sin 16^\circ}=\dfrac{4\sin 64^\circ\cos 64^\circ\cos 128^\circ}{16\sin 16^\circ}=$

$=\dfrac{8\sin 32^\circ\cos 32^\circ\cos 64^\circ\cos 128^\circ}{16\sin 16^\circ}=\dfrac{16\sin 16^\circ\cos 16^\circ\cos 32^\circ\cos 64^\circ\cos 128^\circ}{16\sin 16^\circ}=$

$=\cos 16^\circ\cos 32^\circ\cos 64^\circ\cos 128^\circ$.

1.4.С02. а) $\dfrac{\sin 12^\circ+\sin 10^\circ}{\sin 12^\circ-\sin 10^\circ}=\dfrac{2\sin 11^\circ\cos 1^\circ}{2\sin 1^\circ\cos 11^\circ}=\dfrac{tg 11^\circ}{tg 1^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin 32^\circ + \sin 22^\circ}{\sin 32^\circ - \sin 22^\circ} = \dfrac{2\sin 27^\circ \cos 5^\circ}{2\sin 5^\circ \cos 27^\circ} = \dfrac{tg27^\circ}{tg5^\circ}$.

1.4.С03. а) $\dfrac{\cos 17^\circ - \cos 29^\circ}{\cos 17^\circ + \cos 29^\circ} = \dfrac{-2\sin(-6^\circ)\sin 23^\circ}{2\cos 6^\circ \cos 23^\circ} = \dfrac{\sin 6^\circ \sin 23^\circ}{\cos 6^\circ \cos 23^\circ} =$

$= tg6^\circ tg23^\circ > tg23^\circ \sin 6^\circ$;

б) $\dfrac{\cos 6^\circ - \cos 8^\circ}{\cos 6^\circ + \cos 8^\circ} = \dfrac{2\sin 1^\circ \sin 7^\circ}{2\cos 1^\circ \cos 7^\circ} = tg1^\circ tg7^\circ > tg7^\circ \sin 1^\circ$.

1.4.С04.

а) $-\dfrac{\cos(2\alpha+\beta) - \cos(2\alpha-\beta)}{\cos(2\alpha-\beta) + \cos(2\alpha+\beta)} - tg2\alpha tg\beta = \dfrac{2\sin 2\alpha \sin\beta}{2\cos 2\alpha \cos\beta} - tg2\alpha tg\beta =$

$=$tg2αtgβ–tg2αtgβ=0;

б) $-\dfrac{\cos(\alpha-2\beta) - \cos(\alpha+2\beta)}{\cos(\alpha-2\beta) + \cos(\alpha+2\beta)} + tg\alpha tg2\beta = -\dfrac{2\sin\alpha \sin 2\beta}{2\cos\alpha \cos 2\beta} + tg\alpha tg2\beta =$

=–tgαtg2β+tgαtg2β=0.

1.4.С05. а) $\dfrac{\sin(\alpha+2\beta) - \sin(\alpha-2\beta)}{\sin(\alpha-2\beta) + \sin(\alpha+2\beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg2\beta}{tg\alpha} = \dfrac{2\sin 2\beta \cos\alpha}{2\sin\alpha \cos 2\beta} + \dfrac{tg\alpha - tg2\beta}{tg\alpha} =$

$= \dfrac{tg2\beta}{tg\alpha} + \dfrac{tg\alpha - tg2\beta}{tg\alpha} = 1$;

б) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta) + \sin(2\alpha-\beta)}{\sin(2\alpha-\beta) - \sin(2\alpha+\beta)} - \dfrac{tg\beta - tg2\alpha}{tg\beta} = -\dfrac{2\sin 2\alpha \cos\beta}{2\sin\beta \cos 2\alpha} - \dfrac{tg\beta - tg2\alpha}{tg\beta} =$

$= -\dfrac{tg2\alpha}{tg\beta} + \dfrac{tg2\alpha - tg\beta}{tg\beta} = -1$.

1.4.С06.

а) 3ctg²α–ctg²β– $\dfrac{3\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \sin^2\beta - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}$ = 3ctg²α–ctg²β–

$-3\dfrac{ctg^2\alpha}{\sin^2\beta} - 1 + \dfrac{ctg^2\beta}{\sin^2\alpha} = 3ctg^2\alpha\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2\beta}\right) - ctg^2\beta\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right) - 1 =$

$= 3ctg^2\alpha\left(-\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}\right) - ctg^2\beta\left(\dfrac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) - 1 = -3ctg^2\alpha ctg^2\beta +$

$+ ctg^2\beta ctg^2\alpha - 1 = -2ctg^2\alpha ctg^2\beta - 1$;

б) 2ctg²α–3ctg²β– $\dfrac{2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha \sin^2\beta - 3\cos^2\beta}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}$ = 2ctg²α–3ctg²β–

$-\dfrac{2ctg^2\alpha}{\sin^2\beta} + 2 + \dfrac{3ctg^2\beta}{\sin^2\alpha} = 2ctg^2\alpha\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2\beta}\right) + 2 - 3ctg^2\beta\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right) =$

$= -2ctg^2\alpha ctg^2\beta + 2 + 3ctg^2\beta ctg^2\alpha = 2 + ctg^2\alpha ctg^2\beta$.

1.4.С07.

а) $\dfrac{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha} - tg6\alpha + 1 = \dfrac{2\sin 6\alpha \cos\alpha + \sin 6\alpha}{2\cos\alpha \cos 6\alpha + \cos 6\alpha} - tg6\alpha + 1 =$

$$=\frac{\sin 6\alpha(2\cos\alpha+1)}{\cos 6\alpha(2\cos\alpha+1)}-tg6\alpha+1=tg6\alpha-tg6\alpha+1=1;$$

б) $$\frac{\sin 4\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 7\alpha+\cos 10\alpha}-tg7\alpha-1=\frac{2\sin 7\alpha\cos 3\alpha+\sin 7\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 7\alpha+\cos 7\alpha}-tg7\alpha-1=$$

$$=\frac{\sin 7\alpha(2\cos 3\alpha+1)}{\cos 7\alpha(2\cos 3\alpha+1)}-tg7\alpha-1=tg7\alpha-tg7\alpha-1=-1.$$

1.4.С08.

а) $$1-\cos\alpha\cos\beta+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{tg\alpha+tg\beta}=1-\cos\alpha\cos\beta+\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}\cdot$$

$$\cdot\cos\alpha\cos\beta=1-\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta=1;$$

б) $$2-\sin\alpha\sin\beta+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ctg\alpha+ctg\beta}=2-\sin\alpha\sin\beta+\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}\cdot$$

$$\cdot\sin\alpha\sin\beta=2-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta=2.$$

1.4.С09.

а) $$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{-2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=2tg\alpha=\frac{18}{5};$$

б) $$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{-2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=2tg\alpha=\frac{18}{5};$$

1.4.С10.

а) $$\frac{9ctg\alpha+2tg\alpha+6tg3\alpha+3ctg3\alpha}{3ctg\alpha+2tg3\alpha}-\frac{tg\alpha+3tg3\alpha}{tg3\alpha}=$$

$$=\frac{3(ctg\alpha+2tg3\alpha)+\dfrac{2}{ctg\alpha}+\dfrac{3}{tg3\alpha}}{3ctg\alpha+2tg3\alpha}-\frac{tg\alpha+3tg3\alpha}{tg3\alpha}=3+\frac{1}{ctg\alpha tg3\alpha}-\frac{1}{ctg\alpha tg3\alpha}-3=0;$$

б) $$\frac{6ctg\alpha+tg\alpha+2tg3\alpha+3ctg3\alpha}{3ctg\alpha+tg3\alpha}-\frac{tg\alpha+2tg3\alpha}{tg3\alpha}=$$

$$=\frac{2(3ctg\alpha+tg3\alpha)+\dfrac{tg3\alpha+3ctg\alpha}{ctg\alpha tg3\alpha}}{3tg\alpha+tg3\alpha}-\frac{tg\alpha}{tg3\alpha}-2=2+\frac{1}{ctg\alpha tg3\alpha}-\frac{1}{ctg\alpha tg3\alpha}-2=0.$$

1.4.С11.

а) $$\frac{\cos\left(\frac{43\pi}{4}-\frac{\alpha}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{41\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}=$$

$$=-\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)}=-ctg\left(\frac{\alpha}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)=-ctg\left(\frac{\alpha}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{tg\frac{\alpha}{12}\cdot tg\frac{\pi}{4}-1}{tg\frac{\alpha}{12}+tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{12}-1}{1+\frac{1}{12}}=-\frac{11}{13};$$

б) $$\frac{\cos\left(\frac{35\pi}{4}-\frac{12\alpha}{11}\right)}{\cos\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{33\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}=$$

$$=-\frac{\cos\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{3\pi}{4}\right)}=-ctg\left(\frac{12\alpha}{11}-\frac{3\pi}{4}\right)=-ctg\left(\frac{12\alpha}{11}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{tg\frac{12\alpha}{11}\cdot tg\frac{\pi}{4}-1}{tg\frac{12\alpha}{11}+tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{12}{11}-1}{1+\frac{12}{11}}=\frac{1}{23}.$$

1.4.C12.

а) $\sin^{27}\left(tg\frac{8\pi}{13}\right)+\cos^{17}\left(tg\frac{8\pi}{13}\right)\le\sin^2\left(\mathrm{tg}\frac{8\pi}{13}\right)+\cos^2\left(\mathrm{tg}\frac{8\pi}{13}\right)\le 1<1{,}08$;

б) $\sin^{23}\left(tg\frac{4\pi}{11}\right)+\cos^{9}\left(tg\frac{4\pi}{11}\right)\le\sin^2\left(\mathrm{tg}\frac{4\pi}{11}\right)+\cos^2\left(\mathrm{tg}\frac{4\pi}{11}\right)\le 1<1{,}04$.

Уровень D.

1.4.D01.

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$
$=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\cdot\left(\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1}{2}\right)^2=1-3\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-1}{2}\right)^2=1-3\cdot\frac{9}{64}=\frac{37}{64};$$

б) $$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\cdot\left(\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1}{2}\right)^2=$$

$$=1-3\cdot\left(\frac{\frac{4}{9}-1}{2}\right)^2=1-3\cdot\frac{25}{324}=\frac{83}{108}.$$

1.4.D02. а) $\frac{4\sin x-3\cos x}{3\sin x+2\cos x}=3$; 4sinx–3cosx=9sinx+6cosx;

–9cosx=5sinx; tgx=$\frac{-9}{5}$, ctg2x=$\frac{1-tg^2x}{2tgx}=\frac{1-\frac{81}{25}}{-\frac{18}{5}}=\frac{56\cdot5}{18\cdot25}=\frac{28}{45}$;

б) $\frac{4\sin x+\cos x}{5\sin x-3\cos x}=2$; 4sinx+cosx=10sinx–6cosx;

7cosx=6sinx; tgx=$\frac{7}{6}$, ctg2x=$\frac{1-tg^2x}{2tgx}=\frac{1-\frac{49}{36}}{\frac{7}{3}}=-\frac{13\cdot3}{36\cdot7}=-\frac{13}{84}$.

1.4.D03.

а) $\frac{2\cos^2x-\sin2x}{\cos2x+2\sin^2x}=2$; $2\cos^2x-2\sin x\cos x=2(\cos^2x-\sin^2x)+4\sin^2x$,

$2\sin^2x+2\sin x\cos x=0$; 1+ctgx=0; ctgx=–1;

б) $\frac{2\cos^2x+\sin2x}{\cos2x-2\sin^2x}=2$; $2\cos^2x+2\sin x\cos x=2(\cos^2x-\sin^2x)-4\sin^2x$,

$6\sin^2x+2\sin x\cos x=0$; $\sin^2x(6+2\mathrm{ctg}x)=0$; ctgx=–3.

1.4.D04. а) $\sin^4\frac{\pi}{12}+\sin^4\frac{7\pi}{12}+\sin^4\frac{5\pi}{12}+\sin^4\frac{11\pi}{12}=$

$=2\sin^4\frac{\pi}{12}+2\sin^4\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}\right)=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}\right)^2-$

$-4\sin^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{12}=2-\sin^2\frac{\pi}{6}=2-\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}$;

б) $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{9\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}=$

$=2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2-$

$-4\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}=2-\sin^2\frac{\pi}{4}=2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$.

1.4.D05.

а) $(\cos(2x+y)+\cos(x+2y))^2=\cos^2(2x+y)+\cos^2(x+2y)+2\cos(2x+y)\cos(x+2y)=\frac{1}{4}$;

$(\sin(2x+y)-\sin(x+2y))^2=\sin^2(2x+y)+\sin^2(x+2y)-2\sin(2x+y)\sin(x+2y)=1$, так что

$\frac{1}{4}+1=2+2(\cos(2x+y)\cos(x+2y)-\sin(2x+y)\sin(x+2y))=$

$=2+2\cos(3x+3y)$. Так что $\cos3(x+y)=\left(\frac{1}{4}+1-2\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$;

б) (cos(x+3y)+cos(3x+y))^2=cos^2(x+3y)+cos^2(3x+y)+
+2cos(x+3y)cos(3x+y)=1;

(sin(x+3y)–sin(3x+y))^2=sin^2(x+3y)+sin^2(3x+y)–2sin(x+3y)sin(3x+y)=$\frac{1}{9}$, так

что $1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$ =2+2(cos(x+3y)cos(3x+y)–sin(x+3y)sin(3x+y))=

=2+2cos(4x+4y). Так что cos4(x+y)=$\dfrac{\frac{10}{9}-2}{2}=-\frac{4}{9}$.

1.4.D06.

а) sinα=$\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot 2}{1+4}=\frac{4}{5}$;

cosα=$\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$.

Тогда sin^{4}α+5sin^{2}αcos^{2}α+4cos^{4}α=

$=\left(\frac{4}{5}\right)^4+5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2+4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{256+720+324}{5^4}=\frac{1300}{625}=\frac{52}{25}=2\frac{2}{25}$;

б) sinα=$\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{-4}{1+4}=-\frac{4}{5}$;

cosα=$\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-4}{1+5}=-\frac{3}{6}$.

Тогда 4sin^{4}α+sin^{2}αcos^{2}α–3cos^4

α= $4\left(\frac{4}{5}\right)^4+\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2-3\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{1024+14-243}{5^4}=\frac{925}{625}=\frac{37}{25}=1\frac{12}{25}$.

1.4.D07.

а) tg^{2}α+ctg^{2}α=(tgα+ctgα)^2–2=9–2=7; tg^{4}α+ctg^{4}α=(tg^{2}α+ctg^{2}α)^2–2=49–2=47;
tg^{6}α+ctg^{6}α=(tg^{2}α+ctg^{2}α)(tg^{4}α+ctg^{4}α–1)=7·(47–1)=322;
б) tg^{2}α+ctg^{2}α=(tgα–ctgα)^2+2=9+2=11; tg^{4}α+ctg^{4}α=(tg^{2}α+ctg^{2}α)^2–2=121–2=119;
tg^{6}α+ctg^{6}α=(tg^{2}α+ctg^{2}α)(tg^{4}α+ctg^{4}α–1)=11·(119–1)=1298.

1.4.D08.

а) Тогда 2sin7x=sin2x+sin12x; 2sin7x=2sin7xcos5x;

cos5x=1; 5x=2πk, k$\in$Z; x=$\frac{2\pi}{5}k$, k$\in$Z; или sin7x = 0; 7x = πn, n $\in$ Z;

tg70x=tg(28πk)=0, k$\in$Z; 70x = 10πn и tg70x = 0.

б) Тогда 2sin6x=sinx+sin11x; 2sin6x=2sin6xcos5x;

cos5x=1; $x=\frac{2\pi}{5}k$, $k\in Z$; $tg120x=tg(48\pi k)=0$, $k\in Z$ или sin6x = 0; 6x = πn,

$n\in Z$; 120x = 20πn; tg120x = 0.

1.4.D09.

а) Тогда $\cos^2 8x=\cos 2x\cdot\cos 14x$; $\cos^2 8x=\frac{1}{2}(\cos 16x+\cos 12x)$;

$\cos^2 8x=\frac{1}{2}(2\cos^2 8x-1+\cos 12x)$; cos12x=1; $12x=2\pi k$, $k\in Z$;

$x=\frac{\pi}{6}k$, $k\in Z$; $tg24x=tg(4\pi k)=0$, $k\in Z$;

б) Тогда $\cos^2 7x=\cos 5x\cdot\cos 9x=\frac{1}{2}(\cos 14x+\cos 4x)=\cos^2 7x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$;

cos4x=1; $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$;

$tg8x=tg(4\pi k)=0$, $k\in Z$.

1.4.D10. а) Тогда $\sin^2 4x=\sin 3x\sin 5x=-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 4x-\cos 2x)$;

cos2x=1; $2x=2\pi k$, $x=\pi k$, $k\in Z$; $tg4x=tg4\pi k=0$, $k\in Z$;

б) Тогда $\sin^2 8x=\sin 4x\cdot\sin 12x=-\frac{1}{2}(\cos 16x-\cos 8x)=$

$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 8x-\cos 8x)$, так что cos8x=1; $x=\frac{\pi}{4}k$, $k\in Z$;

$tg20x=tg5\pi k=0$, $k\in Z$.

1.4.D11.

а) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=2$;

$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=1$;

$2+1=3=2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=2+2\cos(\alpha-\beta)$,

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$;

б) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)+(\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)=(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2$

$2+2\cos(\alpha+\beta)=4$

$\cos(\alpha+\beta)=1$.

1.4.D12.

а) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$, $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$, тогда

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{9}{32}=\frac{23}{32}$;

б) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$, $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$;

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{32}{81}=\frac{49}{81}$.

§ 5. Степень с действительным показателем

Уровень А.

1.5.А01.

а) $\left(f(-2)f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left((6)^{-2}\cdot(6)^{\frac{1}{2}}\right)^2=6^{\left(-2+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}=6^{-3}=\frac{1}{216}$;

б) $\left(f(-1)f\left(\frac{1}{4}\right)\right)^4=\left(7^{-1}\cdot 7^{\frac{1}{4}}\right)^4=7^{\left(-1+\frac{1}{4}\right)4}=7^{-3}=\frac{1}{343}$.

1.5.А02.

а) $f^2(x)-g^2(x)=\left(\frac{7\cdot 2^{2x}+5\cdot 2^{-2x}}{2}\right)^2-\left(\frac{7\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{-2x}}{2}\right)^2=$

$=\frac{49\cdot 2^{4x}+70+25\cdot 2^{-4x}}{4}-\frac{49\cdot 2^{4x}-70+25\cdot 2^{-4x}}{4}=\frac{140}{4}=35$;

б) $f^2(x)-g^2(x)=\left(\frac{3\cdot 5^{2x}-4\cdot 5^{-2x}}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 5^{2x}+4\cdot 5^{-2x}}{2}\right)^2=$

$=\frac{9\cdot 5^{4x}-24+16\cdot 5^{-4x}}{4}-\frac{9\cdot 5^{4x}+24+16\cdot 5^{-4x}}{4}=\frac{-48}{4}=-12$.

1.5.А03.

а) $5f(3)+9f(2)+7f(1)+2f(0)=5\cdot(0,1)^3+9\cdot(0,1)^2+7\cdot 0,1+2=$
$=0,005+0,09+0,7+2=2,795$;

б) $6f(3)+9f(2)+4f(1)+4f(0)=6\cdot(0,1)^3+9\cdot(0,1)^2+4\cdot(0,1)+4=$
$=0,006+0,09+0,4+4=4,496$.

1.5.А04.

а) $5f(-3)+8f(-2)+f(-1)+2f(0)=5\cdot 10^{-3}+8\cdot 10^{-2}+10^{-1}+2=$
$=0,005+0,08+0,1+2=2,185$;

б) $5f(-3)+2f(-2)+2f(-1)+4f(0)=5\cdot 10^{-3}+2\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-1}+4=$
$=0,005+0,02+0,2+4=4,225$.

1.5.А05.

а) $f^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)+g^5(-0,2)=\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left((0,1)^{-0,2}\right)^5=6^{-1}+0,1^{-1}=\frac{1}{6}+10=10\frac{1}{6}$;

б) $f^{-3}\left(\frac{1}{3}\right)+2g^4(-0,25)=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}+2\cdot\left((0,2)^{-0,25}\right)^4=3^{-1}+2\cdot 0,2^{-1}=$

$=\frac{1}{3}+10=10\frac{1}{3}$.

1.5.А06.

а) $f(x)=5^x\cdot 0,2^{2x}=5^x\cdot 0,04^x=(0,2)^x$, основание функции — 0,2;

б) $f(x)=10^{2x}\cdot 0,13^x=100^x\cdot(0,001)^x=(0,1)^x$, основание функции — 0,1. Уровень В.

1.5.В01. а) f(x)=$7^{2x}\cdot 81^{-\frac{x}{2}}=49^x\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left(\frac{49}{9}\right)^x$, основание функции — $\frac{49}{9}$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$;

б) f(x)=$4^{3x}\cdot 64^{-\frac{x}{2}}=64^x\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^x=8^x$, основание функции — 8; $f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{8}=2$.

1.5.В02. а) f(x)=$\left(3\sqrt{3}\right)^{2x}\cdot 9^{-0,5x}=27^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=9^x$, основание функции — 9;

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{9}=3$;

б) f(x)=$\left(4\sqrt{2}\right)^{2x}\cdot 16^{-0,25x}=(32)^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=16^x$, основание функции — 16;

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{16}=2$.

1.5.В03. а) f(x)=$\frac{3^{x+1}+3^{x+2}}{4^{x+2}-4^{x+1}}=\frac{3^{x+1}(1+3)}{4^{x+1}(4-1)}=\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^x$,

основание функции — $\frac{3}{4}$; 9f(–1)= $9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=9\cdot\frac{4}{3}=12$;

б) f(x)=$\frac{4^{x+1}+4^{x+2}}{5^{x+2}-5^{x+1}}=\frac{4^x(4+16)}{5^x(25-5)}=\left(\frac{4}{5}\right)^x$, основание функции — $\frac{4}{5}$;

16f(–1)=$16\cdot\frac{5}{4}=20$.

1.5.В04. а) f(x)=$\frac{3^{x+1}+3^{x+3}+3^{x+2}}{5^{x+2}+14\cdot 5^x}=\frac{3^x(3+27+9)}{5^x(25+14)}=\left(\frac{3}{5}\right)^x$,

основание функции — $\frac{3}{5}$; 9f(–2)= $9\cdot\frac{25}{9}=25$;

б) f(x)=$\frac{4^{x+1}+4^{x+2}+4^{x+3}}{7^{x+2}+35\cdot 7^x}=\frac{4^x(4+16+64)}{7^x(49+35)}=\left(\frac{4}{7}\right)^x$, основание функции — $\frac{4}{7}$;

4f(–2)=$\frac{49}{16}\cdot 4=\frac{49}{4}=12\frac{1}{4}$.

1.5.В05. а) f(2x)–8g²(x)=$\frac{5^{2x}+5^{-2x}}{8}-8\cdot\left(\frac{5^x-5^{-x}}{8}\right)^2=\frac{5^{2x}+5^{-2x}}{8}-$

$-\frac{5^{2x}-2+5^{-2x}}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$;

б) f(2x)–14g²(x)=$\frac{2^{2x}+2^{-2x}}{14}-14\cdot\left(\frac{2^x-2^{-x}}{14}\right)^2=\frac{2^{2x}+2^{-2x}}{14}-$

$-\dfrac{2^{2x}-2+2^{-2x}}{14}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}.$

1.5.B06. а) g(2x)–6g^2(x)=$\dfrac{4^{2x}+4^{-2x}}{6}-6\cdot\left(\dfrac{4^{x}+4^{-x}}{6}\right)^2=\dfrac{4^{2x}+4^{-2x}}{6}-$

$-\dfrac{4^{2x}+2+4^{-2x}}{6}=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3};$

б) g(2x)–2g^2(x)=$\dfrac{7^{2x}+7^{-2x}}{2}-2\left(\dfrac{7^{x}+7^{-x}}{2}\right)^2=\dfrac{7^{2x}+7^{-2x}}{2}-\ \dfrac{7^{2x}+2+7^{-2x}}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1.$

1.5.B07. а) $6^a-\dfrac{1}{6^a}=6;$ $(6^a)^2–6\cdot(6^a)–1=0;$

$6^a=3+\sqrt{10}$ (так как $6^a>0$). Тогда $(6^a–6)6^a=(\sqrt{10}–3)(\sqrt{10}+3)=10–9=1;$

б) $4^a+\dfrac{1}{4^a}=4;$ $(4^a)^2–4\cdot(4^a)+1=0;$ $4^a=2\pm\sqrt{3}$

$(4^a–4)4^a=(\sqrt{3}–2)(\sqrt{3}+2)=3–4=–1$ или

$(4^a–4)4^a=(–2–\sqrt{3})(2–\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}–2)=3–4=–1$. Так что $(4^a–4)4^a=–1$.

1.5.B08. а) f(–1)=–4, то есть $\dfrac{1}{5}$a+2b=–4 и f(1)=–2, то есть 5a+$\dfrac{1}{2}$b=–2, так что

$\begin{cases}a+10b=-20\\10a+b=-4\end{cases};\quad \begin{cases}99b=-196\\99a=-20\end{cases};\quad \begin{cases}a=-\dfrac{20}{99}\\b=-1\dfrac{97}{99}\end{cases};$

б) f(–1)=1, то есть $\dfrac{1}{3}$a+5b=1; f(1)=–4, то есть 3a+$\dfrac{1}{5}$b=–4, так что

$\begin{cases}a+15b=3\\15a+b=-20\end{cases};\quad \begin{cases}224b=65\\224a=-303\end{cases};\quad \begin{cases}b=\dfrac{65}{224}\\a=-1\dfrac{79}{224}\end{cases}.$

1.5.B09. а) f(2)=$\left(\dfrac{2^{3^2}(2^3)^2}{(2^{3^2})^2}\right)^{-2}=\left(\dfrac{2^9\cdot2^6}{2^{18}}\right)^{-2}=(2^{-3})^{-2}=2^6=64;$

б) f(–1)=$\left(\dfrac{3^{3^2}\cdot(3^3)^2}{(3^{3^2})^2}\right)^{1}=\dfrac{3^9\cdot3^6}{3^{18}}=\dfrac{3^{15}}{3^{18}}=3^{-3}=\dfrac{1}{27}.$

1.5.B10. а) f(2)=$\left(\dfrac{6^{-3^2}(6^3)^{-2}}{(6^{3^{-2}})^{18}}\right)^{-\frac{2}{17}}=\left(\dfrac{6^{-9}\cdot6^{-6}}{6^2}\right)^{-\frac{2}{17}}=(6^{-17})^{-\frac{2}{17}}=6^2=36;$

б) f(6)=$\left(\dfrac{3^{-2^3}\cdot(3^2)^{-3}}{(3^{2^{-3}})^{16}}\right)^{-\frac{6}{16}}=\left(\dfrac{3^{-8}\cdot3^{-6}}{3^2}\right)^{-\frac{6}{16}}=(3^{-16})^{-\frac{6}{16}}=3^6=729.$

1.5.B11. а) $f(44)=7^{44}=(7^4)^{11}$, $g(33)=8^{33}=(8^3)^{11}$; $h(22)=9^{22}=(9^2)^{11}$.
Так что $f(44)>g(33)>h(22)$;
б) $f(60)=5^{60}=(5^4)^{15}$; $g(45)=7^{45}=(7^3)^{15}$; $h(30)=3^{30}=(3^2)^{15}$, так что $f(60)>g(45)>f(30)$.
1.5.B12. а) $f(160)=5^{160}=25^{80}<27^{80}=3^{240}=g(240)$. $f(160)<g(240)$;
б) $f(270)=5^{270}=(125)^{90}<(1024)^{90}=4^{450}=g(450)$. $f(270)<g(450)$.

Уровень С.

1.5.C01. а) $f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{5}\right)-g(3)=\sqrt{11}-\sqrt[5]{3}-27<0$;

б) $f\left(\frac{1}{5}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)-g(2)=\sqrt[5]{17}-\sqrt[3]{4}-16<0$.

1.5.C02. а) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[7]{25}}\right)^{\frac{14}{3}}=\left(5^{\frac{1}{2}-\frac{2}{7}}\right)^{\frac{14}{3}}=\left(5^{\frac{3}{14}}\right)^{\frac{14}{3}}=5$;

б) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{64}}\right)^{-\frac{6}{7}}=\left(4^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{6}{7}}=\left(4^{-\frac{7}{6}}\right)^{-\frac{6}{7}}=4$.

1.5.C03. а) $f^2(17)+f^2(-17)=(3^{17})^2+(3^{-17})^2=(3^{17}+3^{-17})^2-2=(f(17)+f(-17))^2-2=a^2-2$;
б) $f^2(24)+f^2(-24)=(7^{24})^2+(7^{-24})^2=(7^{24}-7^{-24})^2+2=(f(24)-f(-24))^2+2=a^2+2$.

1.5.C04. а) $4\cdot6^x+3\cdot6^y=4\cdot 6^{\frac{x+y}{2}}\cdot6^{\frac{x-y}{2}}+3\cdot\frac{6^{\frac{x+y}{2}}}{6^{\frac{x-y}{2}}}=4ab+3\frac{a}{b}$;

б) $2\cdot3^x-5\cdot3^y=2\cdot 3^{\frac{x+y}{2}}\cdot3^{\frac{x-y}{2}}-5\frac{3^{\frac{x+y}{2}}}{3^{\frac{x-y}{2}}}=2ab-5\frac{a}{b}$.

1.5.C05. а) $\frac{2^a+4\cdot2^b}{2^a-2\cdot2^b}=-7$; $\frac{2^b(2^{a-b}+4)}{2^b(2^{a-b}-2)}=-7$; $\frac{2^{a-b}+4}{2^{a-b}-2}=-7$;

$2^{a-b}+4=-7\cdot2^{a-b}+14$; $8\cdot2^{a-b}=10$; $2^{a-b}=1\frac{2}{8}$;

б) $\frac{7^a+3\cdot7^b}{7^a+7^b}=\frac{7^b(7^{a-b}+3)}{7^b(7^{a-b}+1)}=2$; $7^{a-b}+3=2\cdot7^{a-b}+2$; $7^{a-b}=1$.

1.5.C06. а) $f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-n)+\ldots=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}+\ldots+\frac{1}{6^n}+\ldots=$

$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$;

б) $f(-1)-f(-2)+f(-3)+\ldots+(-1)^{n-1}f(-n)+\ldots=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{5^n}+\ldots=$

$=\frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{6}$.

1.5.C07. а) f(3)+f(6)+f(9)+…+f(3n)+…=$0,4^3+0,4^6+0,4^9+\ldots+0,4^{3n}+\ldots=$

$$=\frac{0,4^3}{1-0,4^3}=\frac{0,064}{0,936}=\frac{8}{117};$$

б) f(2)+f(4)+f(6)+…+f(2n)+…=$0,3^2+0,3^4+0,3^6+\ldots+0,3^{2n}+\ldots=$

$$=\frac{0,3^2}{1-(0,3)^2}=\frac{0,09}{1-0,09}=\frac{9}{91}.$$

1.5.C08. а) f(1)+f(3)+f(5)+…+f(2n–1)+…=$0,3+0,3^3+0,3^5+\ldots+0,3^{2n-1}+\ldots=$

$$=\frac{0,3}{1-0,3^2}=\frac{0,3}{0,91}=\frac{30}{91};$$

б) f(1)+f(4)+f(7)+…+f(3n–2)+…=$0,2+0,2^4+0,2^7+\ldots+0,2^{3n-2}+\ldots=$

$$=\frac{0,2}{1-0,2^3}=\frac{0,2}{0,992}=\frac{25}{124}.$$

1.5.C09. а) f(–1)–f(–3)+f(–5)+…+$(-1)^{n-1}$f(–2n+1)+…=

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{2n-1}}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{9}}=\frac{3}{10};$$

б) f(–3)–f(–7)+f(–11)+…+$(-1)^{n-1}$f(–4n+1)+…=

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{4n-1}}+\ldots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{16}\right)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{16}}=\frac{2}{17}.$$

1.5.C10. а) $5^{\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{3}{2^2}}\cdot5^{\frac{3}{2^3}}\cdot\ldots\cdot5^{\frac{3}{2^n}}\cdot\ldots=(5)^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{3}{2^n}+\ldots}=(5)^{\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=5^{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}}=5^3=125;$

б) $4^{\frac{3}{7}}\cdot4^{\frac{3}{7^2}}\cdot4^{\frac{3}{7^3}}\cdot\ldots\cdot4^{\frac{3}{7^n}}\cdot\ldots=(4)^{\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\ldots+\frac{3}{7^n}+\ldots}=(4)^{\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{1}{7}}}=4^{\frac{\frac{3}{7}}{\frac{6}{7}}}=4^{\frac{1}{2}}=2.$

1.5.C11. а) f(x)f(y)–g(x)g(y)=$\dfrac{(3^x+3^{-x})(3^y+3^{-y})}{16}-\dfrac{(3^y-3^{-y})(3^x-3^{-x})}{16}=$

$$=\frac{2\cdot(3^{x-y}+3^{y-x})}{16}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{x-y}+3^{-(x-y)}}{4}=\frac{1}{2}\cdot f(x-y)=\frac{15}{2};$$

б) f(x)f(y)–g(x)g(y)=$\dfrac{(4^x+4^{-x})(4^y+4^{-y})}{36}-\dfrac{(4^x-4^{-x})(4^y-4^{-y})}{36}=$

$$=\frac{4^{x+y}+4^{x-y}+4^{y-x}+4^{-x-y}-4^{x+y}+4^{x-y}+4^{y-x}-4^{-x-y}}{36}=$$

$$=\frac{4^{x-y}+4^{y-x}}{18}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4^{x-y}+4^{-(x-y)}}{6}\right)=\frac{1}{3}\cdot f(x-y)=3.$$

1.5.C12. а) $3^{\frac{22y^2+5}{11y^2}}=3^{2+\frac{5}{11y^2}}=9\cdot3^{\frac{5}{11y^2}}=9\cdot(3^5)^{\frac{1}{11y^2}}=9\cdot(\sqrt[11]{3^5})^{\frac{1}{y^2}}>9$

$2^{\frac{15x^2-11}{5x^2}} = 2^{3-\frac{11}{5x^2}} = 8\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{1}{2^{11}}}\right)^{\frac{1}{x^2}} < 8;$ Так что $3^{\frac{22y^2+5}{11y^2}} > 2^{\frac{15x^2-11}{5x^2}}$, для всех x и y;

б) $3^{\frac{8y^2+3}{4y^2}} = 3^{2+\frac{3}{4y^2}} = 9\cdot(\sqrt[4]{27})^{\frac{1}{y^2}} > 9$, а $2^{\frac{9x^2-4}{3x^2}} = 2^{3-\frac{4}{3x^2}} = 8\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^{\frac{1}{x^2}} < 8;$

так что $3^{\frac{8y^2+3}{4y^2}} > 2^{\frac{9x^2-4}{3x^2}}$, для всех x и y.

Уровень D.

1.5.D01. а) $\frac{f(61)}{g(76)} = \frac{6^{61}}{4^{76}} = \frac{6^{61}}{2^{152}} = \frac{3^{61}}{2^{91}} = \frac{3\cdot 3^{60}}{2\cdot 2^{90}} = \frac{3\cdot(3^4)^{15}}{2\cdot(2^6)^{15}} = \frac{3\cdot(81)^{15}}{2\cdot(64)^{15}} > 1$,

так что f(61)>g(76);

б) $\frac{f(33)}{g(41)} = \frac{6^{33}}{4^{41}} = \frac{6^{33}}{2^{82}} = \frac{3^{33}}{2^{49}} = \frac{3\cdot 3^{32}}{2\cdot 2^{48}} = \frac{3\cdot 9^{16}}{2\cdot 8^{16}} > 1$, так что f(33)>g(41).

1.5.D02. а) $(5-5^{2x})^2\cdot 5^{-x}+(5-5^{-2x})\cdot 5^x=25\cdot 5^{-x}-10\cdot 5^x+5^{3x}+25\cdot 5^x-10\cdot 5^{-x}+5^{-3x}=$
$=15(5^x+5^{-x})+5^{3x}+5^{-3x}=15\cdot 5+(5^x+5^{-x})(5^{2x}-1+5^{-2x})=$
$=75+5\cdot(1+(5^x+5^{-x})^2-2)=75+5\cdot(25-3)=185;$
б) $(4+2^{2x})^2\cdot 2^{-x}+(4+2^{-2x})^2\cdot 2^x=16\cdot 2^{-x}+8\cdot 2^x+2^{3x}+16\cdot 2^x+8\cdot 2^{-x}+2^{-3x}=$
$=24(2^x+2^{-x})+2^{3x}+2^{-3x}=24\cdot 4+(2^x+2^{-x})(2^{2x}-1+2^{-2x})=$
$=96+4\cdot((2^x+2^{-x})^2-3)=96+4(16-3)=148.$

1.5.D03. а) f(x)=$\left(\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right)^2-\frac{25^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+1-8\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}{25^x\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}\right)^2\cdot$

$$\cdot\frac{5^{4x}}{5^{4x}\cdot\left(9\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{5}\right)^{4x}\right)}=\left(\frac{\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)^3-\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-2\left(\frac{3}{5}\right)^x-1+8\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}\left(3-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)^2}=\left(\frac{-\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-2\left(\frac{3}{5}\right)^x-3\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)\left(3-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{-\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-3\right)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right)}{\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)\left(3-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}\right)^2=\left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x}\right)^2=\left(\frac{3^x+5^x}{5^x-3^x}\right)^2.$$

Так что f(11)–f(–11)=$\left(\frac{3^{11}+5^{11}}{5^{11}-3^{11}}\right)^2-\left(\frac{3^{-11}+5^{-11}}{5^{-11}-3^{-11}}\right)^2=\left(\frac{3^{11}+5^{11}}{5^{11}-3^{11}}\right)^2-\left(\frac{5^{11}+3^{11}}{3^{11}-5^{11}}\right)^2=0$;

б) f(x)=$\left(\left(\left(\frac{7}{2}\right)^x-1\right)^2-\frac{4^x\left(\left(\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}-1\right)^2-4\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^x\right)}{4^x\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)^x\right)}\right)^2\cdot$

$$\cdot\frac{2^{4x}}{2^{4x}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}\left(9-6\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^x+\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}\right)}=\left(\frac{\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)^x\right)^3-\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}+2\left(\frac{7}{2}\right)^x-1+4\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^x}{\left(\frac{7}{2}\right)^x\left(3-\left(\frac{7}{2}\right)^x\right)\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)\right)^x}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{-\left(\frac{7}{2}\right)^x\left(\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{7}{2}\right)^x-3\right)}{\left(\frac{7}{2}\right)^x\left(3-\left(\frac{7}{2}\right)^x\right)\left(1-\left(\frac{7}{2}\right)^x\right)}\right)^2=\left(\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^x+1}{1-\left(\frac{7}{2}\right)^x}\right)^2=\left(\frac{2^x+7^x}{2^x-7^x}\right)^2.$$

Так что f(–4)–f(4)=$\left(\frac{2^{-4}+7^{-4}}{2^{-4}-7^{-4}}\right)^2-\left(\frac{2^4+7^4}{2^4-7^4}\right)^2=\left(\frac{2^4+7^4}{7^4-2^4}\right)^2-\left(\frac{2^4+7^4}{2^4-7^4}\right)^2=0$.

1.5.D04. а) Обозначим $\left(\frac{5}{14}\right)^x=t$, тогда f(x)=$\frac{t-9}{t-3\sqrt{t}+9}\cdot\frac{\left(\sqrt{t}\right)^3+27}{\sqrt{t}-3}-\frac{6}{\left(\sqrt{t}\right)^{-1}}-9=$

$$=\frac{(\sqrt{t}-3)(\sqrt{t}+3)\cdot(\sqrt{t}+3)(t-3\sqrt{t}+9)}{(t-3\sqrt{t}+9)(\sqrt{t}-3)}-6\sqrt{t}-9=(\sqrt{t}+3)^2-6\sqrt{t}-9=t=\left(\frac{5}{14}\right)^x.$$

Так что $f\left(-\frac{4}{5}\right)>f\left(-\frac{7}{9}\right)$, так как $-\frac{4}{5}<-\frac{7}{9}$, а $\frac{5}{14}<1$;

б) Обозначим $\left(\frac{2}{7}\right)^x=t$, тогда f(x)=$\frac{t-9}{t-3\sqrt{t}+9}\cdot\frac{\left(\sqrt{t}\right)^3+27}{\sqrt{t}+3}+\frac{6}{\left(\sqrt{t}\right)^{-1}}-9=$

$$=\frac{(\sqrt{t}-3)(\sqrt{t}+3)\cdot(\sqrt{t}-3)(t+3\sqrt{t}+9)}{(t+3\sqrt{t}+9)(\sqrt{t}+3)}+6\sqrt{t}-9=(\sqrt{t}-3)^2+6\sqrt{t}-9=t=\left(\frac{2}{7}\right)^x.$$

Так что $f\left(-\frac{7}{12}\right)>f\left(-\frac{2}{7}\right)$, так как $-\frac{7}{12}<-\frac{2}{7}$, а $\frac{2}{7}<1$.

1.5.D05. а) Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=t$, тогда:

$$f(x)=3^{\frac{3x}{2}}(t^3-1):\frac{2\cdot 3^x(t^2+t+1)}{3^{\frac{x}{2}}((\sqrt{t}-1)^2+(\sqrt{t}+1)^2)}+5\cdot 2^{\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{3^{\frac{3x}{2}}\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot(t-1)(t^2+t+1)(2t+2)}{3^x\cdot 2\cdot(t^2+t+1)}+5\cdot 2^{\frac{x}{2}}=3^x(t^2-1)+5\cdot 2^{\frac{x}{2}}=$$

$$=3^x\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right)+5\cdot 2^{\frac{x}{2}}=2^x-3^x+5\cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$ f(4)=16–81+5·4=–45;

б) Обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}}=t$, тогда: $f(x)=5^{\frac{3x}{2}}(t^3-1):\frac{2\cdot 5^x(t^2+1+t)}{5^{\frac{x}{2}}((\sqrt{t}+1)^2+(\sqrt{t}-1)^2)}-4\cdot 2^{\frac{x}{2}}=$

$$=\frac{5^{\frac{3x}{2}}\cdot(t-1)(t^2+t+1)\cdot 5^{\frac{x}{2}}\cdot 2\cdot(t+1)}{2\cdot 5^x\cdot(t^2+t+1)}-4\cdot 2^{\frac{x}{2}}=5^x(t^2-1)-4\cdot 2^{\frac{x}{2}}=$$

$$=5^x\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-1\right)-4\cdot 2^{\frac{x}{2}}=2^x-5^x-4\cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$ f(2)=4–25–4·2=–29.

1.5.D06. а) $f(x)=\frac{\left(3^{\frac{x}{2}}-5^{\frac{x}{2}}\right)\left(3^{\frac{x}{2}}+5^{\frac{x}{2}}\right)}{3^{\frac{x}{2}}\left(3^x+5^{\frac{x}{4}}\right)}\cdot\frac{5^{\frac{x}{4}}\cdot 3^{\frac{x}{4}}\left(3^{\frac{x}{4}}+5^{\frac{x}{4}}\right)}{3^{\frac{x}{2}}+5^{\frac{x}{2}}}\cdot\frac{3^{\frac{x}{4}}}{5^{\frac{x}{4}}\cdot\left(3^{\frac{x}{4}}-5^{\frac{x}{4}}\right)^2}=$

$$=\frac{\left(3^{\frac{x}{4}}-5^{\frac{x}{4}}\right)\left(3^{\frac{x}{4}}+5^{\frac{x}{4}}\right)\cdot 5^{\frac{x}{4}}\cdot 3^{\frac{x}{2}}\left(3^{\frac{x}{4}}+5^{\frac{x}{4}}\right)\cdot\left(3^{\frac{x}{2}}+5^{\frac{x}{2}}\right)}{3^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{\frac{x}{4}}\left(3^x+5^{\frac{x}{4}}\right)\left(3^{\frac{x}{2}}+5^{\frac{x}{2}}\right)\left(3^{\frac{x}{4}}-5^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{\left(3^{\frac{x}{4}}+5^{\frac{x}{4}}\right)^2}{\left(3^x+5^{\frac{x}{4}}\right)\left(3^{\frac{x}{4}}-5^{\frac{x}{4}}\right)};$$

$$f(8)=\frac{(3^2+5^2)^2}{(3^8+5^2)(3^2-5^2)}=\frac{1156}{-6586\cdot 16}=-\frac{289}{26344};$$

б) $f(x)=\frac{\left(9^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{x}{2}}\right)\left(9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}\right)}{9^{\frac{x}{2}}\left(9^x-2^{\frac{x}{4}}\right)}\cdot\frac{2^{\frac{x}{4}}\cdot 9^{\frac{x}{4}}\left(2^{\frac{x}{4}}-9^{\frac{x}{4}}\right)}{9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}}\cdot\frac{9^{\frac{x}{4}}}{2^{\frac{x}{4}}\cdot\left(9^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{4}}\right)^2}=$

$$=\frac{\left(9^{\frac{x}{4}}-2^{\frac{x}{4}}\right)\left(9^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{4}}\right)\left(9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}\right)\cdot 2^{\frac{x}{4}}\cdot 9^{\frac{x}{2}}\left(2^{\frac{x}{4}}-9^{\frac{x}{4}}\right)}{9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}\left(9^x-2^{\frac{x}{4}}\right)\left(9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}\right)\left(9^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{-\left(9^{\frac{x}{4}}-2^{\frac{x}{4}}\right)^2}{\left(9^x-2^{\frac{x}{4}}\right)\left(9^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{4}}\right)};$$

f(4)= $\dfrac{-(9-2)^2}{(9^4-2)(9+2)} = -\dfrac{49}{11\cdot 6559} = -\dfrac{7}{11\cdot 937} = -\dfrac{7}{10307}$.

1.5.D07. а) $f^3(1)-f^3(2)+f^3(3)+\ldots+(-1)^{n-1}f^3(n)+\ldots=$

$=(0,1)^3-(0,1)^6+(0,1)^9+\ldots+(-1)^{n-1}(0,1)^{3n}+\ldots=\dfrac{(0,1)^3}{1-(-0,1)^3}=\dfrac{0,001}{1,001}=\dfrac{1}{1001}$;

б) $f^2(1)+f^2(2)+f^2(3)+\ldots+f^2(n)+\ldots=(0,2)^2+(0,2)^4+(0,2)^6+\ldots+(0,2)^{2n}+\ldots=$

$=\dfrac{(0,2)^2}{1-(+0,2)^2}=\dfrac{0,04}{0,96}=\dfrac{1}{24}$.

1.5.D08. а) $f^2(-1)+f^2(-2)+f^2(-3)+\ldots+f^2(-n)+\ldots=$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\ldots=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}}=\frac{1}{15};$$

б) $f^3(-1)-f^3(-2)+f^3(-3)+\ldots+(-1)^{n-1}f^3(-n)+\ldots=$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^6+\left(\frac{1}{3}\right)^9+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{\frac{1}{27}}{\frac{28}{27}}=\frac{1}{28}.$$

1.5.D09.

а) $5^{2x}+5^{2y}+25^x\cdot5^y-25^y\cdot5^x=(5^x-5^y)^2+2\cdot5^{x+y}+5^{x+y}(5^x-5^y)=9+2\cdot125+125\cdot3=634$;

б) $3^{2x}+3^{2y}+9^x\cdot3^y+9^y\cdot3^x=3^{2x}+3^{2y}+3^{2x+y}+3^{x+2y}=3^{2x}+3^{2y}+3^{2+x}+3^{2+y}=$

$=3^{2x}+3^{2y}+9(3^x+3^y)=(3^x+3^y)^2-2\cdot3^{x+y}+90=10^2-2\cdot3^2+90=190-18=172.$

1.5.D10. а) Обозначим $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x=t$, тогда

$$f(x)=\left(5t^2+11t-8+\frac{t+11}{t+1}\right):\left(5t-4+\frac{5}{t+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{5t^3+16t^2+4t+3}{t+1}\right)\cdot\left(\frac{t+1}{5t^2+t+1}\right)=\frac{(t+3)(5t^2+t+1)}{(5t^2+t+1)}=t+3=$$

$=\left(\dfrac{2}{7}\right)^x+3$; f(–2)= $\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+3=\dfrac{49}{4}+3=15\dfrac{1}{4}$;

б) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x=t$, тогда $f(x)=\left(2t^2+t+2+\dfrac{t+4}{t+4}\right):\left(2t-7+\dfrac{31}{t+4}\right)=$

$=\dfrac{(2t^2+t+3)(t+4)}{(2t^2+t+3)}=t+4=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x+4$; f(–1)= $\dfrac{2}{5}+4=4\dfrac{2}{5}$.

1.5.D11.

а) $\dfrac{3^{228\sqrt{11}}}{2^{342\sqrt{10}}}=\dfrac{\left(3^{2\sqrt{11}}\right)^{114}}{\left(2^{3\sqrt{10}}\right)^{114}}=\dfrac{\left(9^{\sqrt{11}}\right)^{114}}{\left(8^{\sqrt{10}}\right)^{114}}>1$, так что $3^{228\sqrt{11}}>2^{342\sqrt{10}}$;

б) $\dfrac{3^{230\sqrt{6}}}{2^{345\sqrt{5}}}=\dfrac{\left(3^{2\sqrt{6}}\right)^{115}}{\left(2^{3\sqrt{5}}\right)^{115}}=\dfrac{\left(9^{\sqrt{6}}\right)^{115}}{\left(8^{\sqrt{5}}\right)^{115}}>1$, так что $3^{230\sqrt{6}}>2^{345\sqrt{5}}$.

1.5.D12. а) Надо сравнить $\dfrac{\sqrt{7}^{\sqrt{3}}}{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}}$ с 1. Возведем в квадрат.

$\dfrac{7^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{5}}}=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{5^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}<\left(\dfrac{7}{5}\right)^{2}\cdot\dfrac{1}{5^{0,5}}<2\cdot\dfrac{1}{2}=1$. Значит, $\sqrt{7}^{\sqrt{3}}<\sqrt{5}^{\sqrt{5}}$;

б) Надо сравнить $\dfrac{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}}{\sqrt{3}^{\sqrt{7}}}$ с 1. Возведем в квадрат.

$\dfrac{5^{\sqrt{5}}}{3^{\sqrt{7}}}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{3^{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}>\dfrac{5}{3}\cdot1>1$. Значит, $\sqrt{5}^{\sqrt{5}}<\sqrt{3}^{\sqrt{7}}$.

§ 6. Логарифмические выражения

Уровень А.

1.6.A01. а) $\left(8^{\log_8\sqrt[3]{5}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5$; б) $\left(6^{\log_6\sqrt[5]{3}}\right)^5=\left(\sqrt[5]{3}\right)^5=3$.

1.6.A02. а) $\log_6 36+\log_2 32=2+5=7$; б) $\log_5 25+\log_3 27=2+3=5$.

1.6.A03. а) $\log_{27}81+\log_{27}9=\dfrac{4}{3}\log_3 3+\dfrac{2}{3}\log_3 3=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}=2$;

б) $\log_{16}8+\log_{16}32=\log_{16}(8\cdot32)=\log_{16}256=2$.

1.6.A04. а) $\log_3 54-\log_3 2=\log_3\dfrac{54}{2}=\log_3 27=3$; б) $\log_2 24-\log_2 6=\log_2\dfrac{24}{6}=$

$=\log_2 4=2$.

1.6.A05. а) $\left(5^{\log_3 5}\right)^{\log_5 3}=5^{\log_3 5\cdot\log_5 3}=5^{\log_3 5\cdot\frac{1}{\log_3 5}}=5^1=5$;

б) $\left(4^{\log_7 3}\right)^{\log_4 7}=\left(4^{\log_4 7}\right)^{\log_7 3}=(7)^{\log_7 3}=3$.

1.6.A06.

а) $\log_{99}9+\log_{99}11=\log_{99}(9\cdot11)=1$; б) $\log_{12}3+\log_{12}4=\log_{12}(3\cdot4)=\log_{12}12=1$.

Уровень В

1.6.B01.

а) $\sqrt{\log_{16}4+\log_{16}24-\log_{16}6}=\sqrt{\log_{16}\dfrac{4\cdot24}{6}}=\sqrt{\log_{16}16}=1$;

б) $\sqrt{\log_4 32+\log_4 14-\log_4 7}=\sqrt{\log_4\dfrac{32\cdot14}{7}}=\sqrt{\log_4 64}=\sqrt{3}$.

1.6.B02. а) $\log_{16}\log_3 81=\log_{16}4=\dfrac{1}{2}\log_4 4=\dfrac{1}{2}$; б) $\log_{27}\log_4 64=\log_{27}3=\dfrac{1}{3}$.

1.6.B03. а) $\log_4\dfrac{1}{64}+\log_5\dfrac{1}{25}+\log_3\dfrac{1}{9}=-3-2-2=-7$;

б) $\log_3\dfrac{1}{81}-\log_4\dfrac{1}{16}+\log_2\dfrac{1}{8}=-4+2-3=-5$.

1.6.B04. а) $\log_{18}126 - \log_{18}7 = \log_{18}\frac{126}{7} = \log_{18}18 = 1$;

б) $\log_{15}120 - \log_{15}8 = \log_{15}\frac{120}{8} = \log_{15}15 = 1$.

1.6.B05. а) $\log_{2004}\mathrm{tg}45^\circ + \log_{\frac{1}{2}}\cos 45^\circ = \log_{2004}1 + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

б) $\log_{2003}\mathrm{ctg}45^\circ + \log_{\frac{3}{4}}\cos 30^\circ = \log_{2003}1 + \log_{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

1.6.B06. а) $\sqrt{7^{\log_7 5} + 6^{\log_6 2} + 2^{\log_2 18}} = \sqrt{5+2+18} = 5$;

б) $\sqrt{9^{\log_9 2} + 8^{\log_8 6} + 5^{\log_5 41}} = \sqrt{2+6+41} = 7$.

1.6.B07.
а) $\log_3 81 + \log_4 16 + \log_6 36 = 4+2+2 = 8$; б) $\log_3 27 - \log_2 64 + \log_5 25 = 3-6+2 = -1$.

1.6.B08. а) $\log_{3\sqrt{3}}(9\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^5 = \frac{5}{3}$; б) $\log_{4\sqrt{2}}(8\sqrt{2}) = \frac{1}{5}\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^7 = \frac{7}{5}$.

1.6.B09. а) $9^{2-\log_3 5} = 3^{4-2\log_3 5} = 3^{4-\log_3 25} = \frac{3^4}{3^{\log_3 25}} = \frac{81}{25} = 3\frac{6}{25}$;

б) $4^{3-\log_2 3} = 2^{6-2\log_2 3} = \frac{2^6}{2^{\log_2 9}} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$.

1.6.B10. а) $64^{\log_8 2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 8} = 8^{2\log_8 2} - 5^{-\log_5 8} = 8^{\log_8 4} - 5^{\log_5 \frac{1}{8}} = 4 - \frac{1}{8} = 3\frac{7}{8}$;

б) $64^{\log_8 3} - \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 8} = 8^{2\log_8 3} - 5^{-\log_5 8} = 8^{\log_8 9} - 5^{\log_5 \frac{1}{8}} = 9 - \frac{1}{8} = 8\frac{7}{8}$.

1.6.B11. а) $\frac{2^{\log_5 25}}{9^{\log_{81} 4}} = \frac{2^2}{9^{\log_9 2}} = \frac{2^2}{2} = 2$; б) $\frac{3^{\log_2 16}}{7^{\log_{49} 9}} = \frac{3^4}{7^{\log_7 3}} = \frac{3^4}{3} = 3^3 = 27$.

1.6.B12. а) $\sqrt{25^{\log_5 6} - 4^{\log_4 32}} = \sqrt{5^{2\log_5 6} - 4^{\log_4 32}} = \sqrt{36-32} = 2$;

б) $\sqrt[4]{49^{\log_7 5} - 3^{\log_3 9}} = \sqrt[4]{49^{\log_{49} 25} - 3^{\log_3 9}} = \sqrt[4]{25-9} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Уровень С.

1.6.C01. а) $\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} + 6^{\log_{\sqrt{6}} 11} = \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{\sqrt{11}} 5} + 6^{\log_6 121} = 5 + 121 = 126$;

б) $\left(\sqrt{19}\right)^{\log_{19} 49} + 10^{\log_{\sqrt{10}} 11} = \left(\sqrt{19}\right)^{\log_{\sqrt{19}} 7} + 10^{\log_{10} 121} = 7 + 121 = 128$.

1.6.C02. а) $\log_{\sin\frac{2\pi}{5}}\left(2\sqrt[3]{3}\cos\frac{\pi}{5}\right) + \log_{\sin\frac{2\pi}{5}}\sin\frac{\pi}{5} =$

$= \log_{\sin\frac{2\pi}{5}}\left(2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\sqrt[3]{3}\right) = \log_{\sin\frac{2\pi}{5}}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\sqrt[3]{3}\right) =$

$= 1 + \log_{\sin\frac{2\pi}{5}}\sqrt[3]{3} = 1 + \frac{1}{3}\log_{\sin\frac{2\pi}{5}}3 = 1 + \frac{1}{3\log_3\sin\frac{2\pi}{5}} = 1 + \frac{1}{3b}$;

б) $\log_{\sin\frac{2\pi}{13}}\left(2\sqrt[3]{49}\cos\frac{\pi}{3}\right)+\log_{\sin\frac{2\pi}{13}}\sin\frac{\pi}{13}=\log_{\sin\frac{2\pi}{13}}\left(\sin\frac{2\pi}{13}\cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)=$

$=1+\frac{2}{3}\log_{\sin\frac{2\pi}{13}}7=1+\frac{2}{3\log_7\sin\frac{2\pi}{13}}=1+\frac{2}{3b}$.

1.6.C03. а) $\log_{\frac{1}{2}}\log_{25}5-9^{\frac{1}{\log_5 3}}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}-3^{2\log_3 5}=1-25=-24$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}\log_{27}3-16^{\frac{1}{\log_5 4}}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}-4^{2\log_4 5}=1-25=-24$.

1.6.C04. а) $32^{\log_{0,5}\sqrt[5]{45}}=32^{\log_{\frac{1}{32}}45}=32^{-\log_{32}5}=\frac{1}{45}$;

б) $64^{\log_{0,25}\sqrt[3]{47}}=4^{3\cdot\log_{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{47}}=4^{\log_{\frac{1}{4}}47}=4^{\log_4\frac{1}{47}}=\frac{1}{47}$.

1.6.C05. а) $-\log_3\log_9\sqrt[27]{\sqrt[3]{9}}=-\log_3\frac{1}{81}=4$;

б) $-\log_4\log_8\sqrt[16]{\sqrt[4]{8}}=-\log_4\frac{1}{64}=\log_4 64=3$.

1.6.C06. а) $\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}=\frac{1}{\log_4 12}+\frac{1}{\log_3 12}=\log_{12}4+\log_{12}3=\log_{12}12=1$;

б) $\frac{\log_2 18+\log_9 18}{\log_2 18\cdot\log_9 18}=\frac{1}{\log_9 18}+\frac{1}{\log_2 18}=\log_{18}9+\log_{18}2=\log_{18}18=1$.

1.6.C07. а) $9^{\log_3 5+2\log_{\frac{1}{9}}4}=3^{2\log_3 5}\cdot 9^{2\log_9\frac{1}{4}}=25\cdot\frac{1}{16}=1\frac{9}{16}$;

б) $4^{\log_2 5+4\log_{\frac{1}{16}}3}=4^{\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}3}=4^{\log_2\frac{5}{3}}=4^{\log_4\frac{25}{9}}=\frac{25}{9}=2\frac{7}{9}$.

1.6.C08. а) $25^{\log_{16}2+\log_5\sqrt{7}}=25^{\frac{1}{4}+\log_{25}7}=\sqrt[4]{25}\cdot 7=7\sqrt{5}$;

б) $49^{\log_{81}3+\log_7\sqrt{6}}=49^{\frac{1}{4}+\log_{49}6}=49^{\frac{1}{4}+\log_{49}6}=49^{\frac{1}{4}}\cdot 49^{\log_{49}6}=\sqrt{7}\cdot 6=6\sqrt{7}$.

1.6.C09. а) $\frac{\log_3 6}{\log_6 3}-\frac{\log_3 18}{\log_2 3}=\log_3^2 6-\log_3 18\cdot\log_3 2=$

$=(1+\log_3 2)^2-(2+\log_3 2)\log_3 2=1$;

б) $\frac{\log_3 63}{\log_7 3}-\frac{\log_3 21}{\log_{21} 3}=\frac{\log_3 63}{\log_7 3}-\log_3^2 21=$

$=\log_3 7\cdot(2+\log_3 7)-(1+\log_3 7)^2=2\log_3 7+\log_3^2 7-1-2\log_3 7-\log_3^2 7=-1$.

1.6.C10. а) $\log_a\sqrt[6]{ab}=\frac{1}{6}\log_a ab=\frac{1}{6}(1+\log_a b)=\frac{1}{6}(1+29)=5$;

б) $\log_a\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{3}\log_a\frac{a}{b}=\frac{1}{3}(1-\log_a b)=\frac{1}{3}(1+11)=4$.

1.6.C11. а) $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}-3\log_8 35=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{36}-\log_2 35=\log_2 36-\log_2 35>0$, так что $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}>3\log_8 35$;

б) $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}-5\log_{32} 26=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{25}-\log_2 26=\log_2 25-\log_2 26<0$, так что $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}<5\log_{32} 26$.

1.6.C12. а) $49^{\frac{1}{3}\log_7 27+2\log_7\sqrt{6}}=49^{\log_7 3+\log_7 6}=49^{\log_7 18}=49^{\log_{49} 324}=324$;

б) $36^{\frac{1}{4}\log_6 16+4\log_6\sqrt[4]{2}}=36^{\log_6 2+\log_6 2}=36^{\log_6 4}=36^{\log_{36} 16}=16$.

Уровень D.

1.6.D01. а) $2\log_2\frac{32}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\log_2(11+2\sqrt{30})=2\log_2\frac{32}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\log_2(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=$

$=2\log_2 32-2\log_2(\sqrt{5}+\sqrt{6})+2\log_2(\sqrt{5}+\sqrt{6})=10$;

б) $2\log_3\frac{9}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\log_3(13+2\sqrt{42})=2\log_3 9-2\log_3(\sqrt{7}+\sqrt{6})+$

$+\log_3(\sqrt{7}+\sqrt{6})^2=\ 2\cdot 2-2\log_3(\sqrt{7}+\sqrt{6})+2\log_3(\sqrt{7}+\sqrt{6})=4$.

1.6.D02. а) $\log_{70}320=\frac{\log_7 320}{\log_7 70}=\frac{\log_7 2^6+\log_7 5}{\log_7 7+\log_7 2+\log_7 5}=\frac{6\log_7 2+\frac{2}{\log_5 7}}{1+\log_7 2+\frac{1}{\log_5 7}}=$

$=\frac{6b+\frac{1}{a}}{1+b+\frac{1}{a}}=\frac{6ab+1}{a+ab+1}$;

б) $\log_{30}576=\frac{\log_5 576}{\log_5 30}=\frac{\log_5 2^6+\log_5 3^2}{\log_5 5+\log_5 2+\log_5 3}=\frac{6\log_5 2+\frac{2}{\log_3 5}}{1+\log_5 2+\frac{1}{\log_3 5}}=$

$=\frac{6b+\frac{2}{a}}{1+b+\frac{1}{a}}=\frac{6ab+2}{a+ab+1}$.

1.6.D03. а) $\frac{\log_3 153}{\log_{51} 3}-\frac{\log_3 459}{\log_{17} 3}=(\log_3 9+\log_3 17)(\log_3 3+\log_3 17)-(\log_3 17+$

$+\log_3 27)\cdot\log_3 17=2\log_3^2 3+3\log_3 17+\log_3^2 17-\log_3^2 17-3\log_3 17=2$;

б) $\frac{\log_2 176}{\log_{22} 2}-\frac{\log_2 352}{\log_{11} 2}=(\log_2 16+\log_2 11)(\log_2 2+\log_2 11)-$

$-(\log_2 11+\log_2 32)\log_2 11= 4\log_2^2 2+5\log_2 11+\log_2^2 11-\log_2^2 11-5\log_2 11=4.$

1.6.D04. а) $\left(3^{2+\log_3 5}+4\right)^{\log_7 9}=(9\cdot 5+4)^{\log_{49}81}=49^{\log_{49}81}=81;$

б) $\left(3^{2+\log_3 5}-9\right)^{\log_6 7}=(9\cdot 5-9)^{\log_{36}49}=36^{\log_{36}49}=49.$

1.6.D05. а) $\left(21-2^{2+\log_2 5}\right)\log_5\sqrt[3]{3}\cdot\log_3 125=(21-4\cdot 5)\log_5\sqrt[3]{3}\cdot\log_3 125=$

$=\left(\frac{1}{3}\log_5 3\right)\cdot\left(3\log_3 5\right)=1;$

б) $\left(22-5^{1+\log_5 4}\right)\log_2\sqrt[4]{3}\cdot\log_3 16=(22-5\cdot 4)\cdot\frac{1}{4}\log_2 3\cdot 4\log_3 2=2.$

1.6.D06. а) $\dfrac{13^{\log_{11}3}\cdot 11^{\log_3 13}\cdot 3^{\log_{13}11}}{13^{\log_3 11}\cdot 11^{\log_{13}3}\cdot 3^{\log_{11}13}}=\dfrac{13^{\frac{\log_{13}3}{\log_{13}11}}\cdot 11^{\frac{\log_{11}13}{\log_{11}3}}\cdot 3^{\frac{\log_3 11}{\log_3 13}}}{13^{\log_3 11}\cdot 11^{\log_{13}3}\cdot 3^{\log_{11}13}}=$

$=\dfrac{3^{\frac{1}{\log_{13}11}}\cdot 13^{\frac{1}{\log_{11}3}}\cdot 11^{\frac{1}{\log_3 13}}}{13^{\frac{1}{\log_{11}3}}\cdot 11^{\frac{1}{\log_3 13}}\cdot 3^{\frac{1}{\log_{13}11}}}=1;$

б) $\dfrac{19^{\log_{17}5}\cdot 17^{\log_5 19}\cdot 5^{\log_{19}17}}{19^{\log_5 17}\cdot 17^{\log_{19}5}\cdot 5^{\log_{17}19}}=\dfrac{19^{\frac{\log_{19}5}{\log_{19}17}}\cdot 17^{\frac{\log_{17}19}{\log_{17}5}}\cdot 5^{\frac{\log_5 17}{\log_5 19}}}{19^{\log_5 17}\cdot 17^{\log_{19}5}\cdot 5^{\log_{17}19}}=$

$=\dfrac{5^{\frac{1}{\log_{19}17}}\cdot 19^{\frac{1}{\log_{17}5}}\cdot 17^{\frac{1}{\log_5 19}}}{19^{\frac{1}{\log_{17}5}}\cdot 17^{\frac{1}{\log_5 19}}\cdot 5^{\frac{1}{\log_{19}17}}}=1.$

1.6.D07. а) $6\lg(4-2\sqrt{3})-12\lg(\sqrt{3}-1)=6\lg(4-2\sqrt{3})-6\lg(4-2\sqrt{3})=0;$
б) $5\lg(4+2\sqrt{3})-10\lg(\sqrt{3}+1)=5\lg(4+2\sqrt{3})-5\lg(\sqrt{3}+1)^2=5\lg(4+2\sqrt{3})-$
$-5\lg(4+2\sqrt{3})=0.$

1.6.D08. а) $(1-\log_3 15)(1-\log_5 15)=\log_3\frac{3}{15}\cdot\log_5\frac{5}{15}=\log_3\frac{1}{5}\log_5\frac{1}{3}=\log_3 5\cdot\log_5 3=1;$

б) $(1-\log_4 36)(1-\log_9 36)=\log_4\frac{4}{36}\cdot\log_9\frac{9}{36}=\log_4\frac{1}{9}\log_9\frac{1}{4}=\log_4 9\cdot\log_9 4=1.$

1.6.D09. а) $\dfrac{\log_2 14}{\log_{28}2}-\dfrac{\log_2 7}{\log_{56}2}=(\log_2 2+\log_2 7)(\log_2 4+\log_2 7)-(\log_2 7+\log_2 8)\log_2 7=$

$=\log_2 2\cdot\log_2 4+3\log_2 7+\log_2^2 7-\log_2^2 7-3\log_2 7=\log_2 2\cdot\log_2 4=2;$

б) $\dfrac{\log_3 6}{\log_{18}3}-\dfrac{\log_3 2}{\log_{54}3}=(\log_3 2+\log_3 3)(\log_3 2+\log_3 9)-$
$-(\log_3 27+\log_3 2)\log_3 2=(1+\log_3 2)(\log_3 2+2)-(\log_3 2+3)\log_3 2=3\log_3 2+$
$+\log_3^2 2+2-\log_3^2 2-3\log_3 2=2.$

1.6.D10. а) $\dfrac{\log_6 42\cdot\log_7 42}{\log_6 7+\log_7 6+2}=\dfrac{(1+\log_6 7)(1+\log_7 6)}{\log_6 7+\log_7 6+2}=$

$=\dfrac{1+\log_7 6\cdot\log_6 7+\log_6 7+\log_7 6}{\log_6 7+\log_7 6+2}=\dfrac{2+\log_6 7+\log_7 6}{2+\log_6 7+\log_7 6}=1;$

б) $\dfrac{\log_3 24\cdot\log_8 24}{\log_3 8+\log_8 3+2}=\dfrac{(1+\log_3 8)(1+\log_8 3)}{\log_3 8+\log_8 3+2}=$

$=\dfrac{1+\log_3 8\cdot\log_8 3+\log_3 8\cdot\log_8 3}{2+\log_3 8+\log_8 3}=\dfrac{2+\log_3 8+\log_8 3}{2+\log_3 8+\log_8 3}=1.$

1.6.D11. а) $\dfrac{1}{1+\log_2 11+\log_2 13}+\dfrac{1}{1+\log_{11} 2+\log_{11} 13}+\dfrac{1}{1+\log_{13} 2+\log_{13} 11}=$

$=\dfrac{1}{\log_2(11\cdot13\cdot2)}+\dfrac{1}{\log_{11}(11\cdot2\cdot13)}+\dfrac{1}{\log_{13}(13\cdot2\cdot11)}=$

$=\log_{286}2+\log_{286}11+\log_{286}13=\log_{286}(2\cdot11\cdot13)=1;$

б) $\dfrac{1}{1+\log_3 5+\log_3 13}+\dfrac{1}{1+\log_5 3+\log_5 13}+\dfrac{1}{1+\log_{13} 3+\log_{13} 5}=$

$=\dfrac{1}{\log_3(3\cdot5\cdot13)}+\dfrac{1}{\log_5(5\cdot3\cdot13)}+\dfrac{1}{\log_{13}(13\cdot3\cdot5)}=$

$=\log_{(3\cdot5\cdot13)}3+\log_{(3\cdot5\cdot13)}5+\log_{(3\cdot5\cdot13)}13=\log_{(3\cdot5\cdot13)}(3\cdot5\cdot13)=1.$

1.6.D12. а) $\dfrac{1}{\log_2 102}+\dfrac{1}{\log_3 102}+\dfrac{1}{\log_{17} 102}=\log_{102}2+\log_{102}3+\log_{102}17=$

$=\log_{102}(2\cdot3\cdot17)=\log_{102}102=1;$

$\log_3 2\cdot\log_{17}3\cdot\log_2 17=\dfrac{\log_3 2}{\log_3 17}\cdot\log_2 17=\log_{17}2\cdot\log_2 17=1$, так что

$\dfrac{1}{\log_2 102}+\dfrac{1}{\log_3 102}+\dfrac{1}{\log_{17} 102}=\log_3 2\cdot\log_{17}3\cdot\log_2 17=1;$

б) $\dfrac{1}{\log_3 231}+\dfrac{1}{\log_7 231}+\dfrac{1}{\log_{11} 231}=\log_{231}3+\log_{231}7+\log_{231}11=\log_{231}(3\cdot7\cdot11)=1;$

$\log_7 3\cdot\log_{11}7\cdot\log_3 11=\log_7 3\cdot\dfrac{\log_{11} 7}{\log_{11} 3}=\log_7 3\cdot\log_3 7=1$, так что

$\dfrac{1}{\log_3 231}+\dfrac{1}{\log_7 231}+\dfrac{1}{\log_{11} 231}=\log_7 3\cdot\log_{11}7\cdot\log_3 11=1.$

Глава 2. Уравнения и системы уравнений

§ 1. Целые алгебраические уравнения

Уровень А.

2.1.A01.

а) $|5x-8|=9x$; $\begin{cases}5x-8\ge 0\\ 5x-8=9x\end{cases}$, и $\begin{cases}5x-8\le 0\\ 5x-8=-9x\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge \dfrac{8}{5}\\ x=-2\end{cases}$, и $\begin{cases}x\le \dfrac{8}{5}\\ x=\dfrac{8}{14}\end{cases}$; то есть $x=\dfrac{8}{14}$;

б) $|2x-3|=4x$; $\begin{cases}2x-3\ge 0\\ 2x-3=4x\end{cases}$, и $\begin{cases}2x-3\le 0\\ 2x-3=-4x\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ x=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$, и $\begin{cases}x\le \dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$; то есть $x=\dfrac{1}{2}$.

2.1.A02.

а) $(4+x)^2=(4+x)(17x+2)$; $(4+x)(4+x-17x-2)=0$; $(4+x)(2-16x)=0$; $x=-4$ и $x=\frac{1}{8}$;

б) $(2+x)^2=(2+x)(55x-4)$; $(2+x)(2+x-55x+4)=0$; $(2+x)(6-54x)=0$; $x=-2$ и $x=\frac{1}{9}$.

2.1.A03. а) $(x^2+3x-23)^3=(4x-3)^3$; $x^2+3x-23=4x-3$; $x^2-x-20=0$; $x=-4$ и $x=5$;
б) $(x^2+8x+7)^3=(2x-1)^3$; $x^2+8x+7=2x-1$; $x^2+6x+8=0$; $x=-2$ и $x=-4$.

2.1.A04. а) $\begin{cases}2x^2+xy=40\\3x-y=10\end{cases}$; $\begin{cases}y=3x-10\\2x^2+x(3x-10)=40\end{cases}$; $\begin{cases}y=3x-10\\5x^2-10x-40=0\end{cases}$;

$\begin{cases}y=3x-10\\x^2-2x-8=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ и $\begin{cases}x=-2\\y=-16\end{cases}$;

б) $\begin{cases}3x^2+xy=35\\2x-y=30\end{cases}$; $\begin{cases}y=2x-30\\3x^2+x(2x-30)=35\end{cases}$; $\begin{cases}y=2x-30\\x^2-6x-7=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=-1\\y=-32\end{cases}$ и $\begin{cases}x=7\\y=-16\end{cases}$.

2.1.A05. а) $\begin{cases}x^2-y=6\\x^2+y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x^2=2\\y=-4\end{cases}$; $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-4\end{cases}$ и $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-4\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x^2+y=7\\x^2-y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x^2=6\\y=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\sqrt{6}\\y=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x=-\sqrt{6}\\y=1\end{cases}$.

2.1.A06. а) $\begin{cases}-x+2y=9\\x^2-2y=3\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x=12\\-x+2y=9\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x-12=0\\-x+2y=9\end{cases}$; $\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$ и $\begin{cases}x=4\\y=\frac{13}{2}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}-x+3y=4\\x^2-3y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x=2\\x^2-3y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x-2=0\\y=\frac{1}{3}(x^2+2)\end{cases}$; $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.

Уровень В.

2.1.B01. а) $\frac{\left(x^2+\frac{5}{32}x-\frac{1}{32}\right)^3}{27}=\frac{\left(x^2+\frac{5}{24}x+\frac{1}{24}\right)^3}{64}$;

$\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{5}{32}x-\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{5}{24}x+\frac{1}{24}\right)$; $\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{96}x-\frac{1}{96}=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{96}x+\frac{1}{96}$;

$32x^2+5x-1=24x^2+5x+1$; $8x^2=2$; $x^2=\frac{1}{4}$; $x=\pm\frac{1}{2}$;

б) $\frac{\left(x^2-\frac{1}{32}x-\frac{1}{96}\right)^3}{8}=\frac{\left(x^2-\frac{3}{64}x+\frac{1}{64}\right)^3}{27}$; $\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{32}x-\frac{1}{96}\right)=\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{3}{64}x+\frac{1}{64}\right)$;

$96x^2-3x-1=64x^2-3x+1$; $32x^2=2$; $x^2=\frac{1}{16}$; $x=\pm\frac{1}{4}$.

2.1.B02. а) $\begin{cases}25x^2+2x-y=x^4-1\\2x-y=-1\end{cases}$; $\begin{cases}y=2x+1\\x^4-1=25x^2-1\end{cases}$; $\begin{cases}y=2x+1\\x^2(x^2-25)=0\end{cases}$;

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=5 \\ y=11 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-5 \\ y=-9 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 16x^2+4x-y=x^4-2 \\ 4x-y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=4x+2 \\ 16x^2-2=x^4-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=4x+2 \\ x^2(x^2-16)=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=4 \\ y=18 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-4 \\ y=-14 \end{cases}$.

2.1.В03. а) $\begin{cases} x^2+3y^3=49 \\ x^2-3y^3=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=25 \\ y^3=8 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2-3y^3=6 \\ x^2+3y^3=12 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=9 \\ y^3=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$.

2.1.В04. а) (h(x)+1)(h(x)+2)=0; h(x)=–1 или h(x)=–2;
$5x^2-4x-1=-1$ или $5x^2-4x-1=-2$; $5x^2-4x=0$ или $5x^2-4x+1=0$;

$x(5x-4)=0$ или $5x^2-4x+1=0$; x=0 или x=$\frac{4}{5}$ (во втором случае D < 0);

б) (h(x)–2)(h(x)–1)=0; h(x)=2 или h(x)=1;
$5x^2-3x+2=2$ или $5x^2-3x+2=1$; $5x^2-3x=0$ или $5x^2-3x+1=0$;

x(5x–3)=0 (во втором случае Д<0);   x=0 или x=$\frac{3}{5}$.

2.1.В05. а) $p^2(x)=16p(x)$; p(x)(p(x)–16)=0; p(x)=0 или p(x)=16;

5x–4=0 или 5x–4=16; x=$\frac{4}{5}$ или x=4;

б) $p^2(x)=-17p(x)$; p(x)(p(x)+17)=0; p(x)=0 или p(x)=–17;

6x–5=0 или 6x–5=–17; x=$\frac{5}{6}$ или x=–2.

2.1.В06. а) $\begin{cases} x+4y^2=0 \\ 4x^2+y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4y^2 \\ 64y^4+y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4y^2 \\ y(64y^3+1)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-\frac{1}{4} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x+6y^2=0 \\ 6x^2+y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-6y^2 \\ 6^3y^4+y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-6y^2 \\ y(6^3y^3+1)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-\frac{1}{6} \\ x=-\frac{1}{6} \end{cases}$.

2.1.В07. а) 6|x+2|=5|x|; $\begin{cases} 6x+12=5x \\ x\ge 0, x\le -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 6x+12=-5x \\ -2\le x\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-12 \\ x\ge 0 \quad и \quad x\le -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\frac{12}{11} \\ -2\le x\le 0 \end{cases}$; x=–12 или x=$-\frac{12}{11}$;

б) 9|x+2|=8|x|; $\begin{cases} 9x+18=8x \\ x\ge 0 \quad и \quad x\le -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 9x+18=-8x \\ -2\le x\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-18 \\ x \ge 0 \quad и \quad x \le -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{18}{17} \\ -2 \le x \le 0 \end{cases}$; x=–18 или x=$-\dfrac{18}{17}$.

2.1.B08. а) $\begin{cases} xy^2=-36 \\ x^2y=-48 \end{cases}$; $\begin{cases} xy^2=-36 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{48}{36} \end{cases}$; $\begin{cases} xy^2=-36 \\ x=\dfrac{12}{9}y \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{12}{9}y \\ y^3=-27 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} xy^2=-75 \\ x^2y=45 \end{cases}$; $\begin{cases} xy^2=-75 \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{45}{75} \end{cases}$; $\begin{cases} y^3=125 \\ x=-\dfrac{3}{5}y \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$.

2.1.B09. а) $(x^2–11x+9)^2=(2x+9)^2$; $x^2–11x+9=2x+9$ и $x^2–11x+9=–2x–9$;
$x^2–13x=0$ или $x^2–9x+18=0$; x=0 или x=13 или x=3 или x=6;
б) $(x^2–12x+10)^4=(3x+10)^4$; $x^2–12x+10=3x+10$ и $x^2–12x+10=–3x–10$;
$x^2–15x=0$ или $x^2–9x+20=0$; x=0 или x=15 или x=4 или x=5.
2.1.B10. а) $144x^4=(x^3+35x)^2$; $12x^2=x^3+35x$ или $12x^2=–x^3–35x$;
$x(x^2–12x+35)=0$ или $x(x^2+12x+35)=0$; x=0 или x=–5 или x=–7 или x=5 или x=7;
б) $169x^4=(x^3+40x)^2$; $13x^2=x^3+40x$ или $13x^2=–x^3–40x$;
$x(x^2–13x+40)=0$ или $x(x^2+13x+40)=0$; x=0 или x=±5 или x=±8.

2.1.B11. а) $\dfrac{|x-25|}{x}=-6$; |x–25|=–6x; $\begin{cases} x-25=-6x \\ x-25 \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 25-x=-6x \\ x-25 \le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=\dfrac{25}{7} \\ x \ge 25 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-5 \\ x \le 25 \end{cases}$; то есть x=–5;

б) $\dfrac{|4x-7|}{x}=-5$; |4x–7|=–5x; $\begin{cases} 4x-7=-5x \\ 4x-7 \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4x-7=5x \\ 4x-7 \le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=\dfrac{7}{9} \\ x \ge \dfrac{7}{4} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-7 \\ x \le \dfrac{7}{4} \end{cases}$; то есть x=–7.

2.1.B12. а) $(4x^2+3x–10)^2=9x^4$; $4x^2+3x–10=3x^2$ или $4x^2+3x–10=–3x^2$;
$x^2+3x–10=0$ или $7x^2+3x–10=0$; x=–5 или x=2 или x=1 или x=$-\dfrac{10}{7}$;
б) $(3x^2–4x–11)^2=4x^4$; $3x^2–4x–12=2x^2$ или $3x^2–4x–12=–2x^2$;
$x^2–4x–12=0$ или $5x^2–4x–12=0$; x=–2 или x=6 или x=2 или x=$-\dfrac{6}{5}$.

Уровень С.

2.1.C01. а) $\dfrac{(x^2+18x+45)^2}{5}+\dfrac{(5x^2+7x-24)^2}{5}=\dfrac{(x^2+20x+51)^2}{5}$;
$(x+3)^2(x+15)^2+(x+3)^2(5x–8)^2=(x+3)^2(x+17)^2$;
$(x+3)^2(26x^2–50x+289–x^2–34x–289)=0$; $(x + 3)^2(25x^2 – 84x) = 0$
x=–3 или x=0 или $x=\dfrac{84}{25}$;

б) $\dfrac{(x^2+25x+24)^2}{3}+\dfrac{(3x^2-7x-10)^2}{3}=\dfrac{(x^2+27x+26)^2}{3}$;
$(x+1)^2(x+24)^2+(x+1)^2(3x-10)^2=(x+1)^2(x+26)^2$;
$(x+1)^2(10x^2-12x+676-x^2-52x-676)=0$

$(x+1)^2(9x^2-64x)=0$; $x=-1$ или $x=0$ или $x=\dfrac{64}{9}=7\dfrac{1}{9}$.

2.1.С02.
а) $(x^2+5x+1)^2+2x^2+10x=1$; $(x^2+5x)^2+4(x^2+5x)+1=1$; $(x^2+5x)(x^2+5x+4)=0$;
$x(x+5)(x+1)(x+4)=0$; $x=-5$ или $x=-4$ или $x=-1$ или $x=0$;
б) $(x^2+6x+1)^2+3x^2+18x=1$; $(x^2+6x)^2+5(x^2+6x)+1=1$; $(x^2+6x)(x^2+6x+5)=0$;
$x(x+6)(x+1)(x+5)=0$; $x=-6$ или $x=-5$ или $x=-1$ или $x=0$.

2.1.С03. а) $\begin{cases}16x^2+3x-y^2=x^4+8\\3x-y^2=8\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{8+y^2}{3}\\16x^2+8=x^4+8\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{8+y^2}{3}\\x^4-16x^2=0\end{cases}$;

$\begin{cases}y^2=3x-8\\x^2(x^2-16)=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ и $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$;

а) $\begin{cases}25x^2+5x-y^2=x^4+16\\5x-y^2=16\end{cases}$; $\begin{cases}y^2=5x-16\\25x^2+16=x^4+16\end{cases}$; $\begin{cases}x^2(x^2-25)=0\\y^2=5x-16\end{cases}$;

$\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ и $\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$.

2.1.С04. а) $\begin{cases}(x-3)^4(y-5)^5=1\\(x-3)^5(y-5)^4=1\end{cases}$; $\begin{cases}\dfrac{x-3}{y-5}=1\\(x-3)^4(y-5)^5=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=y-2\\(y-5)^9=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$;

б) $\begin{cases}(x-5)^4(y-1)^5=1\\(x-5)^5(y-1)^4=1\end{cases}$; $\begin{cases}\dfrac{y-1}{x-5}=1\\(x-5)^4(y-1)^5=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=y+4\\(y-1)^9=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$.

2.1.С05. а) $\begin{cases}x^2+y^3=5\\5x-2y^3=-12\end{cases}$; $\begin{cases}2x^2+5x=-2\\y^3=5-x^2\end{cases}$; $\begin{cases}2x^2+5x+2=0\\y^3=5-x^2\end{cases}$;

$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=\sqrt[3]{\dfrac{19}{4}}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x^2-y^3=2\\11x+3y^3=-14\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2+11x=-8\\y^3=x^2-2\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2+11x+8=0\\y^3=x^2-2\end{cases}$;

$\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-\dfrac{8}{3}\\y=\sqrt[3]{\dfrac{46}{9}}\end{cases}$.

2.1.C06. а) $\begin{cases}(3x^2-y-11)(x-2)=0\\ x^2+2y^2=6\end{cases}$; $\begin{cases}x-2=0\\ x^2+2y^2=6\end{cases}$ или $\begin{cases}y=3x^2-11\\ x^2+2y^2=6\end{cases}$;

$\begin{cases}x=2\\ y^2=1\end{cases}$ или $\begin{cases}y=3x^2-11\\ 18x^4-131x^2+236=0\end{cases}$; так как x и y – целые числа, то $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

или $\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$.

б) $\begin{cases}(2x^2+y-3)(x-1)=0\\ x^2-2y^2=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x-1=0\\ x^2-2y^2=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}y=3-2x^2\\ x^2-2y^2=-1\end{cases}$;

$\begin{cases}x=1\\ y^2=1\end{cases}$ или $\begin{cases}y=3-2x^2\\ -8x^4+25x^2-17=0\end{cases}$, так что $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$.

2.1.C07. а) $|x^2+11x+28|=|x^2-14|$; $x^2+11x+28=x^2-14$ или $x^2+11x+28=14-x^2$; $-11x=42$ или $2x^2+11x+14=0$;

$x=-\frac{42}{11}$ или $x=\frac{-11\pm 3}{4}$; $x=-\frac{42}{11}$ или $x=-2$ или $x=-\frac{7}{2}$;

б) $|x^2-11x+24|=|x^2-12|$; $x^2-11x+24=12-x^2$ или $x^2-11x+24=x^2-12$;

$11x=36$ или $2x^2-11x+12=0$; $x=3\frac{3}{11}$ или $x=\frac{11\pm 5}{4}$; $x=3\frac{3}{11}$ или $x=4$ или $x=\frac{3}{2}$.

2.1.C08. а) $\begin{cases}x^3-y^3=-91\\ y-x=1\end{cases}$; $\begin{cases}x-y=-1\\ x^2+xy+y^2=91\end{cases}$; $\begin{cases}y=x+1\\ x^2+x^2+x+x^2+2x+1=91\end{cases}$;

$\begin{cases}y=x+1\\ 3x^2+3x-90=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=-6\\ y=-5\end{cases}$ или $\begin{cases}x=5\\ y=6\end{cases}$;

б) $\begin{cases}y^3-x^3=65\\ x-y=-5\end{cases}$; $\begin{cases}y-x=5\\ y^2+xy+x^2=13\end{cases}$; $\begin{cases}y=x+5\\ x^2+10x+25+x^2+5x+x^2=13\end{cases}$;

$\begin{cases}y=x+5\\ 3x^2+15x+12=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=-1\\ y=4\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-4\\ y=1\end{cases}$.

2.1.C09. а) $h(h(x))=76$; $h(5x^2-x)=76$; $5\cdot(5x^2-x)^2-(5x^2-x)-76=0$;

$(5x^2-x)=4$ или $(5x^2-x)=-\frac{19}{5}$; $5x^2-x-4=0$ или $5x^2-x+\frac{19}{5}=0$;

$x=1$ или $x=-\frac{4}{5}$ (во втором случае Д<0);

б) $h(h(x))=33$; $h(4x^2-x)=33$; $4(4x^2-x)^2-(4x^2-x)-33=0$;

$(4x^2-x)=3$ или $4x^2-x=-\frac{11}{4}$; $4x^2-x-3=0$ или $4x^2-x+\frac{11}{4}=0$;

$x=1$ или $x=-\frac{3}{4}$ (во втором случае Д<0).

2.1.C10. а) $p(p(x^2))=p(3x^2-2)=3(3x^2-2)-2=-14x$; $9x^2+14x-8=0$; $x=-2$ или $x=\frac{4}{9}$;

б) $p(p(x^2)=p(2x^2-3)=2(2x^2-3)-3=-9x$; $4x^2+9x-9=0$; $x=-3$ или $x=\frac{3}{4}$.

2.1.C11. а) $|5x-24|=x^2+2x+6$; $\begin{cases} 5x-24=x^2+2x+6 \\ 5x-24\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 24-5x=x^2+2x+6 \\ 5x-24\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2-3x+30=0 \\ x\ge \dfrac{24}{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+7x-18=0 \\ x\le \dfrac{24}{5} \end{cases}$;

в первом случае Д<0, так что $\begin{cases} x=-9 \quad и \quad x=2 \\ x\le \dfrac{24}{5} \end{cases}$; $x=-9$ или $x=2$;

б) $|3x-19|=x^2-x+4$; $\begin{cases} 3x-19=x^2-x+4 \\ 3x-19\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 19-3x=x^2-x+4 \\ 3x-19\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2-4x+23=0 \\ x\ge \dfrac{19}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+2x-15=0 \\ x\le \dfrac{19}{3} \end{cases}$;

в первом случае Д<0, так что $\begin{cases} x=-5 \quad и \quad x=3 \\ x\le \dfrac{19}{3} \end{cases}$; $x=-5$ или $x=3$.

2.1.C12. а) $4|5x+8|-25x^2=80x+64$;

$\begin{cases} 20x+32-25x^2=80x+64 \\ 5x+8\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -20x-32-25x^2=80x+64 \\ 5x-8\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-\dfrac{4}{5} \quad и \quad x=-\dfrac{8}{5} \\ x\ge -\dfrac{8}{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} 25x^2+100x+96=0 \\ x\le -\dfrac{8}{5} \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-\dfrac{8}{5} \quad и \quad x=-\dfrac{4}{5} \\ x\ge -\dfrac{8}{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{12}{5} \quad и \quad x=-\dfrac{8}{5} \\ x\le -\dfrac{8}{5} \end{cases}$; $x=-\dfrac{12}{5}$ или $x=-\dfrac{8}{5}$ или $x=-\dfrac{4}{5}$;

б) $2|4x+9|-16x^2=72x+81$;

$\begin{cases} 8x+18-16x^2=72x+81 \\ 4x+9\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -8x-18-16x^2=72x+81 \\ 4x+9\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 16x^2+64x+63=0 \\ x\ge -\dfrac{9}{4} \end{cases}$ или $\begin{cases} 16x^2+80x+99=0 \\ x\le -\dfrac{9}{4} \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-\dfrac{9}{4} \ , \quad x=-\dfrac{7}{4} \\ x\ge -\dfrac{9}{4} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{9}{4} \quad и \quad x=-\dfrac{11}{4} \\ x\le -\dfrac{9}{4} \end{cases}$; $x=-\dfrac{11}{4}$ или $x=-\dfrac{9}{4}$ или $x=-\dfrac{7}{4}$.

Уровень D.

2.1.D01. а) $(8x-25)^{17}+(2x+5)^{34}=0$; $((2x+5)^2)^{17}=(25-8x)^{17}$;
$(2x+5)^2=25-8x$; $4x^2+28x=0$; $x=0$ или $x=-7$;
б) $(12x-49)^{25}+(2x+7)^{50}=0$; $((2x+7)^2)^{25}=(49-12x)^{25}$;

$4x^2+28x+49=49-12x$; $x(4x+40)=0$; $x=0$ или $x=-10$.

2.1.D02. а) $|x^2+5x-14|=-5x-x^2+14$; $|x^2+5x-14|=-(x^2+5x-14)$; $x^2+5x-14\le 0$; $(x+7)(x-2)\le 0$; $-7\le x\le 2$; б) $|x^2-2x-15|=2x-x^2+15$; $|x^2-2x-15|=-(x^2-2x-15)$; $x^2-2x-15\le 0$; $(x-5)(x+3)\le 0$; $-3\le x\le 5$.

2.1.D03. а) $|x^2-8x|=x^2-8x+24$;

$\begin{cases} x^2-8x=x^2-8x+24 \\ x^2-8x\ge 0 \end{cases}$; или $\begin{cases} -x^2+8x=x^2-8x+24 \\ x^2-8x\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 0=24 \\ x^2-8x\ge 0 \end{cases}$; или $\begin{cases} x^2-8x+12=0 \\ x^2-8x\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \quad и \quad x=6 \\ x(x-8)\le 0 \end{cases}$; $x=2$ или $x=6$;

б) $|x^2+10x|=x^2+10x+18$; $\begin{cases} x^2+10x=x^2+10x+18 \\ x^2+10x\ge 0 \end{cases}$; или $\begin{cases} -x^2-10x=x^2+10x+18 \\ x^2+10x\le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 0=18 \\ x^2+10x\ge 0 \end{cases}$; или $\begin{cases} x^2+10x+9=0 \\ x^2+10x\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \quad и \quad x=-9 \\ x(x+10)\le 0 \end{cases}$; $x=-9$ или $x=-1$.

2.1.D04. а) $|x^2+3x-28|=x^2+3x-28$; $x^2+3x-28\ge 0$; $(x+7)(x-4)\ge 0$; $x\le -7$ и $x\ge 4$; $x\in(-\infty;-7]\cup[4;+\infty)$;

б) $|x^2-12x+32|=x^2-12x+32$; $x^2-12x+32\ge 0$; $(x-4)(x-8)\ge 0$; $x\le 4$ и $x\ge 8$. $x\in(-\infty;4]\cup[8;+\infty)$.

2.1.D05. а) $(x^2+8x+10)^2-4x^2-32x=37$; $(x^2+8x)^2+16(x^2+8x)+63=0$; $x^2+8x=-9$ или $x^2+8x=-7$; $x^2+8x+9=0$ или $x^2+8x+7=0$; $x=-4\pm\sqrt{7}$ или $x=-1$ или $x=-7$;

б) $(x^2-6x+4)^2-2x^2+12x=32$; $(x^2-6x)^2+6(x^2-6x)-16=0$; $x^2-6x=-8$ или $x^2-6x=2$; $x^2-6x+8=0$ или $x^2-6x-2=0$; $x=2$ или $x=4$ или $x=3\pm\sqrt{11}$.

2.1.D06. а) $\begin{cases} (x+y)^2-7(x+y)=8 \\ (x-2y)^2+8(x-2y)=-16 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=8 \quad и \quad x+y=-1 \\ x-2y=-4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=8 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-2y=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x+y)^2+4(x+y)=5 \\ (x-y)^2+6(x-y)=-9 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=1 \quad и \quad x+y=-5 \\ x-y=-3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$.

2.1.D07. а) $\begin{cases} |x|-3|y|=2 \\ x+3|y|=8 \end{cases}$; $\begin{cases} |x|+x=10 \\ 3|y|=8-x \end{cases}$; $\begin{cases} x=5 \\ |y|=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |x|+2|y|=9 \\ x-2|y|=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} |x|+x=6 \\ 2|y|=x+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ |y|=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$.

2.1.D08. а) $\begin{cases} xy-x-y=-1 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-1)(y-1)=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

или $\begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x+y-xy=7 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y-xy=7 \\ (x+y)^2-2xy=13 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y)^2-2(x+y)=-1 \\ x+y-xy=7 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=1 \\ 1-xy=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$.

2.1.D09.
а) $(x^2+4x+3)^2+(x^2-2x-15)^2=36(x+3)^2$; $(x+3)^2\,(x+1)^2+(x+3)^2\,(x-5)^2=36(x+3)^2$;
$(x+3)^2\,((x+1)^2+(x-5)^2-36)=0$; $(x+3)^2\,(2x^2-8x-10)=0$; x=–3 или x=5 или x = –1;
б) $(x^2+x-20)^2+(x^2+8x+15)^2=25(x+5)^2$; $(x+5)^2(x-4)^2+(x+5)^2(x+3)^2=25(x+5)^2$;
$(x+5)^2(2x^2-2x)=0$; x=–5 или x=0 или x=1.

2.1.Д10. а) $(x^2+3x-4)^2+(x^2+2x-3)^2=(x^2+x-2)^2+(x^2-1)^2$;
$(x+4)^2(x-1)^2+(x+3)^2(x-1)^2=(x+2)^2\,(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^2$;
$(x-1)^2((x+4)^2+(x+3)^2-(x+2)^2-(x+1)^2)=0$; $(x-1)^2(8x+20)=0$, x=1 или $x=-2\frac{1}{2}$;
б) $(x^2+4x+3)^2+(x^2+3x+2)^2=(x^2-1)^2+(x^2-x-2)^2$;
$(x+3)^2(x+1)^2+(x+2)^2(x+1)^2=(x-1)^2(x+1)^2-(x-2)^2(x+1)^2$;
$(x+1)^2((x+3)^2+(x+2)^2-(x-1)^2-(x-2)^2)=0$; $(x+1)^2(16x+8)=0$, x=–1 или $x=-\frac{1}{2}$.

2.1.Д11. а) $h(h(x)+1)=h(3x^2+4x)=3(3x^2+4x)^2+4(3x^2+4x)-1=63$;
$3(3x^2+4x)^2+4(3x^2+4x)-64=0$; $3x^2+4x=4$ или $3x^2+4x=-\frac{16}{3}$; $3x^2+4x-4=0$ или
$3x^2+4x+\frac{16}{3}=0$; во втором случае Д<0; x=–2 или $x=\frac{2}{3}$;
б) $h(h(x)+1)=h(3x^2+8x)=3(3x^2+8x)^2+8(3x^2+8x)-1=50$;
$3(3x^2+8x)^2+8(3x^2+8x)-51=0$; $3x^2+8x=3$ или $3x^2+8x=-\frac{17}{3}$; $3x^2+8x-3=0$ или
$3x^2+8x+\frac{17}{3}=0$; во втором случае Д<0; x=–3 или $x=\frac{1}{3}$.

2.1.D12. а) $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y=-13 \\ (x-2)^2-2(y+3)^2=2x+y-1 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2=0 \\ (x-2)^2-2(y+3)^2=2x+y-1 \end{cases}$;
верхнее уравнение выполняется только при x=2 и y=–3.
Тогда нижнее будет выглядеть 0–2·0=4–3–1; 0=0 верно. Так что $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y=-5 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=x+3y+7 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2=0 \\ x+3y+7=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$.

§ 2. Рациональные уравнения

Уровень А.

2.2.А01. а) $\frac{3}{x^2}=-1-\frac{4}{x}$; $3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$;

$\left(\frac{1}{x}\right)=-1$ или $\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{3}$; x=–1 или x=–3;

б) $\frac{2}{x^2}=-5+\frac{7}{x}$; –5x^2+7x–2=0; 5x^2–7x+2–0; x=1 или x=$\frac{2}{5}$.

2.2.A02. а) x^{-2}=(5+3x)$^{-2}$; x=5+3x или x=–5–3x; x=–$\frac{5}{2}$ или x=–$\frac{5}{4}$;

б) x^{-2}=(2–7x)$^{-2}$; x=2–7x или x=7x–2; x=$\frac{1}{4}$ или x=$\frac{1}{3}$.

2.2.A03.

а) –10x^{-1}+x^{-2}=–16; –16x^2+10x–1=0; 16x^2–10x+1=0; x=$\frac{1}{2}$ или x=$\frac{1}{8}$;

б) 9x^{-1}+x–2=–18; –18x^2–9x–1=0; 18x^2+9x+1=0; x=–$\frac{1}{6}$ или x=–$\frac{1}{3}$.

2.2.A04. а) 1–6(x–6)$^{-1}$+9(x–6)$^{-2}$=0, (x–6)^2–6(x–6)+9=0; x–6=3; x=9;
б) 1–4(x+7)$^{-1}$+4(x+7)$^{-2}$=0, (x+7)^2–4(x+7)+4=0; x+7=2; x= –5.

2.2.A05. а) $\begin{cases}(x+7y)^{-1}=\frac{1}{2}\\(5x-y)^{-1}=1\\3x-19y=-4\end{cases}$; $\begin{cases}x+7y=2\\5x-y=1\\3x-19y=-4\end{cases}$; $\begin{cases}5x-y=1\\36x=9\\3x-19y=-4\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}-\frac{19}{4}=-4\end{cases}$.

Следовательно, $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

б) $\begin{cases}(x+11y)^{-1}=\frac{1}{3}\\(3x+y)^{-1}=1\\3x+17y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x+11y=3\\3x+y=1\\3x+17y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x+11y=3\\3x+y=1\\16y=4\end{cases}$; $\begin{cases}y=\frac{1}{4}\\x=3-11y\\3x=1-y\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

2.2.A06. а) $f(x)$=4(x+8)$^{-1}$, $g(x)=\frac{x+8}{x+11}$; g(x)=f(x) т.е.

$4(x+8)^{-1}=\frac{x+8}{x+11}$, 4$x$+44=$x^2$+16$x$+64,
x^2+12x+20=0, x_1=–2, x_2=–10 т.е. x=–10;
б) $f(x)$=9(x+11)$^{-1}$, $g(x)=\frac{x+11}{x+9}$; $f(x)$=g(x)

$9(x+11)^{-1}=\frac{x+11}{x+9}$, 9$x$+99=$x^2$+22$x$+121
x^2+13x+22=0, x_1=–2, x_2=–11, т.е. x=–2.

Уровень В.

2.2.B01. а) $\begin{cases}(x-2)(y+2)^{-1}=-1\\3x^2+2y^2=20\end{cases}$; $\begin{cases}x-2=-y-2\\y\neq-2\\3x^2+2y^2=20\end{cases}$; $\begin{cases}x=-y\\y\neq-2\\y^2=4\end{cases}$; $\begin{cases}y=2\\x=-2\end{cases}$;

б) $\begin{cases}(x-1)(y-1)^{-1}=1\\ 2x^2+3y^2=5\end{cases}$: $\begin{cases}x-1=y-1\\ y-1\neq 0\\ 2x^2+3y^2=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=y\\ y\neq 1\\ 5y^2=5\end{cases}$; $\begin{cases}y=-1\\ x=-1\end{cases}$.

2.2.B02. а) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=-7\\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-14\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{7}{x}=-7\\ \frac{7}{y}=-14\end{cases}$; $\begin{cases}x=-1\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\frac{3}{x}-\frac{2}{y}=11\\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=15\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1}{x}=3\\ \frac{1}{y}=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=-1\end{cases}$.

2.2.B03. а) $x^2-x=32-\frac{60}{(x^2-x)}$; $(x^2-x)^2-32(x^2-x)+60=0$; $(x^2-x)=2$ или $(x^2-x)=30$;
$x^2-x-2=0$ или $x^2-x-30=0$; $x=-1$ или $x=2$ или $x=-5$ или $x=6$;
наибольший корень $x = 6$;

б) $x^2-x=14-\frac{24}{x^2-x}$; $(x^2-x)2-14(x^2-x)+24=0$; $x^2-x=2$ или $x^2-x=12$;
$x^2-x-2=0$ или $x^2-x-12=0$; $x=-1$ или $x=2$ или $x=-3$ или $x=4$,
наибольший корень $x = 4$.

2.2.B04. а) $\frac{8}{|2+x|}=-x$; $-x|2+x|=8$;

$\begin{cases}-x^2-2x-8=0\\ 2+x>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+2x-8=0\\ 2+x<0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+2x+8=0\\ 2+x>0\end{cases}$ или

$\begin{cases}(x-2)(x+4)=0\\ 2+x<0\end{cases}$; в первой системе Д<0; $\begin{cases}x=2 \quad и \quad x=-4\\ x<-2\end{cases}$;

наименьший корень $x=-4$;

б) $\frac{9}{|8+x|}=-x$; $-x|x+8|=9$; $\begin{cases}x^2+8x+9=0\\ x+8>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+8x-9=0\\ x+8<0\end{cases}$; $\begin{cases}x=-4\pm\sqrt{7}\\ x>-8\end{cases}$

или $\begin{cases}x=-9 \quad и \quad x=1\\ x<-8\end{cases}$; $x=-4\pm\sqrt{7}$ или $x=-9$, наименьший корень $x=-9$.

2.2.B05. а) $\frac{1}{|x-1|}=\frac{2}{5-x}$; $\begin{cases}2|x-1|=5-x\\ x-1\neq 0, \quad 5-x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}2x-2=5-x\\ x-1>0\end{cases}$ или

$\begin{cases}2-2x=5-x\\ x-1<0\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\ x>1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-3\\ x<1\end{cases}$; $x=\frac{7}{3}$ или $x=-3$;

б) $\frac{1}{|x-2|}=\frac{2}{3+x}$; $\begin{cases}3+x=2|x-2|\\ |x-2|\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}3+x=2x-4\\ x-2>0\end{cases}$ или $\begin{cases}3+x=4-2x\\ x-2<0\end{cases}$;

$\begin{cases} x=7 \\ x>2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x<2 \end{cases}$; x=$\frac{1}{3}$ или x=7.

2.2.B06. а) $\begin{cases} (x-4y)(x+1)^{-1}=2 \\ \frac{1}{x-4y}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+1)\frac{1}{x-4y}=\frac{1}{2} \\ x-4y=\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x+1=\frac{1}{8} \\ x-4y=\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{7}{8} \\ y=-\frac{9}{32} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x-3y)(x+1)^{-1}=2 \\ \frac{1}{x-3y}=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x-3y=\frac{1}{5} \\ x+1=\frac{1}{10} \end{cases}$; $\begin{cases} y=-\frac{11}{30} \\ x=-\frac{9}{10} \end{cases}$.

2.2.B07. а) $\begin{cases} (x^2-3x-10)(3x-y)^{-1}=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-3x-10=0 \\ 3x-y\neq 0 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x^2+5x+6)(2x-y)^{-1}=0 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+5x+6=0 \\ 2x-y\neq 0 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y\neq 2x \\ y=-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ y\neq 2x \\ y=-\frac{14}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-\frac{14}{3} \end{cases}$.

2.2.B08. а) $\frac{1}{|x+2|}=\frac{4}{3-x}$; $\begin{cases} 4|x+2|=3-x \\ |x+2|\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+8=3-x \\ x+2>0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} -4x-8=3-x \\ x+2<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ x>-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\frac{11}{3} \\ x<-2 \end{cases}$; x=–1 или x=–$\frac{11}{3}$;

f(–1) = 1, $f\left(-\frac{11}{3}\right)=\frac{3}{5}$, значит, координаты общих точек графиков

(–1; 1) и $\left(-\frac{11}{3}; \frac{3}{5}\right)$.

б) $\frac{1}{|x-2|}=\frac{4}{5-x}$; $\begin{cases} 5-x=4|x-2| \\ |x-2|\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5-x=4x-8 \\ x-2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5-x=-4x+8 \\ x-2<0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=\frac{13}{5} \\ x>2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1 \\ x<2 \end{cases}$; x=$\frac{13}{5}$ или x=1; f$\left(\frac{13}{5}\right)$=g$\left(\frac{13}{5}\right)=\frac{5}{3}$, f(1)=g(1)=1, значит,

координаты общих точек графиков $\left(\frac{13}{5}; \frac{5}{3}\right)$ и (1; 1).

2.2.B09. а) $\frac{5x^{-1}-4}{2x^{-1}+1}=\frac{7-3x}{13-x}$; $\begin{cases}65x^{-1}-57+4x=14x^{-1}+1-3x\\ 13-x\neq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}7x^2-58x+51=0\\ x\neq 13\end{cases}$; x = 1 или x = $\frac{51}{7}$;

б) $\frac{13x^{-1}-4}{7x^{-1}-3}=\frac{x+3}{3-x}$; $\begin{cases}39x^{-1}-25+4x=21x^{-1}-2-3x\\ 3-x\neq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}7x^2-23x+18=0\\ x\neq 3\end{cases}$; $\begin{cases}x=2 \quad и \quad x=\frac{9}{7}\\ x\neq 3\end{cases}$; x=$\frac{9}{7}$ и x=2.

2.2.B10. а) $\frac{1+x}{x-5}=\frac{7-2x}{3x-9}$; $\begin{cases}3x^2-6x-9=-2x^2+17x-35\\ x-5\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}5x^2-23x+26=0\\ x\neq 5\end{cases}$;

$\begin{cases}x=2 \quad и \quad x=\frac{13}{5}\\ x\neq 5\end{cases}$; x=2 и x=$\frac{13}{5}$, оба корня не принадлежат интервалу (0;1);

б) $\frac{13-2x}{5-x}=\frac{6+x}{4+2x}$; $\begin{cases}-4x^2+18x+52=-x^2-x+30\\ 5-x\neq 0, 4+2x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2-19x-22=0\\ x\neq 5, x\neq -2\end{cases}$; x=$\frac{22}{3}$ или x = –1, оба корня не принадлежат интервалу (4;5).

2.2.B11. а) $\frac{x^2+3x}{x+8}=\frac{x+8}{x^2+3x}$; $\begin{cases}(x+8)^2=(x^2+3x)^2\\ x+8\neq 0, x^2+3x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+3x=x+8\\ x+8\neq 0, x^2+3x\neq 0\end{cases}$ или

$\begin{cases}x^2+3x=-x-8\\ x+8\neq 0, x^2+3x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+2x-8=0\\ x\neq -8, x\neq 0, x\neq -3\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+4x+8=0\\ x\neq -8, x\neq 0, x\neq -3\end{cases}$;

во втором случае Д<0, так что x=–4 и x=2;

б) $\frac{x^2-3x}{x+5}=\frac{x+5}{x^2-3x}$; $\begin{cases}(x^2-3x)^2=(x+5)^2\\ x+5\neq 0\\ x^2-3x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-3x=x+5\\ x+5\neq 0\\ x^2-3x\neq 0\end{cases}$ или

$\begin{cases}x^2-3x=-x-5\\ x+5\neq 0\\ x^2-3x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-4x-5=0\\ x\neq -5\\ x^2-3x\neq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+4x+8=0\\ x\neq -8\\ x^2-3x\neq 0\end{cases}$;

во втором случае Д<0, так что x=5 и x=–1, значит, значения данных функций не равны при всех x, кроме –5; –1; 0; 3; 5.

2.2.B12. а) $\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-1}{3x}$; $\begin{cases}6x^2=3x^2+5x-2\\ x\neq 0, x\neq -2\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2-5x+2=0\\ x\neq 0, x\neq -2\end{cases}$; x=1 или x=$\frac{2}{3}$;

б) $\frac{2x+5}{x+5}=\frac{4x+1}{4x}$; $\begin{cases}8x^2+20x=4x^2+21x+5\\ x\neq 0, x\neq -5\end{cases}$; $\begin{cases}4x^2-x-5=0\\ x\neq 0, x\neq -5\end{cases}$; x=–1 или x=$\frac{5}{4}$,

f(–1) = g(–1) = $\frac{3}{4}$; $f\left(\frac{5}{4}\right)=g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{6}{5}$.

Уровень С.

2.2.С01. а) $\begin{cases} 2yx^{-1}-\dfrac{1}{xy}=9 \\ yx^{-1}+\dfrac{1}{xy}=18 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=9 \\ \dfrac{1}{xy}=9 \end{cases}$; $\begin{cases} y=9x \\ \dfrac{1}{9x^2}=9 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{81} \\ y=9x \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{9} \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{9} \\ y=-1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} yx^{-1}+\dfrac{1}{xy}=8 \\ 6yx^{-1}-\dfrac{1}{xy}=20 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=4 \\ \dfrac{1}{xy}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=4x \\ \dfrac{1}{4x^2}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{16} \\ y=4x \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{4} \\ y=-1 \end{cases}$.

2.2.С02.

а) $\begin{cases} x+2y+\dfrac{1}{2y+x}=2 \\ y(x+2y)=3 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+2y)^2-2(x+2y)+1=0 \\ y(x+2y)=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y=1 \\ y(x+2y)=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x+3y+\dfrac{1}{3y+x}=2 \\ y(3y+x)=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+3y)^2-2(x+3y)+1=0 \\ y(x+3y)=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+3y=1 \\ y(x+3y)=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$.

2.2.С03. а) $\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{6}{x^2+2x}$; $\begin{cases} x^2+2x=6|x| \\ x\neq 0, x\neq -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2x=6x \\ x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+2x=-6x \\ x<0, x\neq -2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=4 \\ x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-8 \\ x<0 \end{cases}$; x=4 или x=–8;

б) $\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{5}{x^2-3x}$; $\begin{cases} x^2-3x=5|x| \\ x\neq 0, x\neq 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-3x=5x \\ x>0, x\neq 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2-3x=-5x \\ x<0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=8 \\ x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2 \\ x<0 \end{cases}$; x=8 или x=–2.

2.2.С04.

а) $\dfrac{5}{|x|}+21=\dfrac{4}{x^2}$; $21|x|^2+5|x|-4=0$; $|x|=\dfrac{1}{3}$ и $|x|=-\dfrac{4}{7}$; $x=\pm\dfrac{1}{3}$;

б) $\dfrac{3}{|x|}+20=\dfrac{2}{x^2}$; $20|x|^2+3|x|-2=0$; $|x|=\dfrac{1}{4}$ и $|x|=-\dfrac{2}{5}$; $x=\pm\dfrac{1}{4}$.

2.2.С05.

а) $\dfrac{1}{|x^2+3x-45|}=\dfrac{1}{|4x^2-3x|}$; $|x^2+3x-45|=|4x^2-3x|\neq 0$;

$\begin{cases} x^2+3x-45=4x^2-3x \\ 4x^2-3x\neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+3x-45=3x-4x^2 \\ 3x-4x^2\neq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3x^2-6x+45=0 \\ x(4x-3)\neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5x^2-45=0 \\ x(3x-4)\neq 0 \end{cases}$;

первое уравнение не имеет решений, т.к. $D<0$, значит, x=–3 или x=3;

б) $\frac{1}{|x^2-4x-64|}=\frac{1}{|3x^2+4x|}$; $|x^2-4x-64|=|3x^2+4x|\neq 0$;

$\begin{cases} x^2-4x-64=3x^2+4x \\ 3x^2+4x\neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2-4x-64=-3x^2-4x \\ 3x^2+4x\neq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x^2+8x+64=0 \\ x(3x+4)\neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4x^2-64=0 \\ x(3x+4)\neq 0 \end{cases}$;

в первом случае Д<0, так что $\begin{cases} x^2=16 \\ x(3x+4)\neq 0 \end{cases}$; x=±4.

2.2.С06. а) $\begin{cases} x+2y+\frac{1}{2y+x}=\frac{26}{5} \\ 3x-\frac{1}{2y+x}=\frac{29}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} (x+2y)^2-\frac{26}{5}(x+2y)+1=0 \\ 3x-\frac{1}{2y+x}=\frac{29}{5} \end{cases}$;

$\begin{cases} 5(x+2y)^2-26(x+2y)+5=0 \\ 3x=\frac{29}{5}+\frac{1}{2y+x} \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2y=\frac{1}{5} \\ 3x=\frac{54}{5} \end{cases}$;

$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\frac{18}{5} \\ y=-\frac{17}{10} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x+3y+\frac{1}{3y+x}=\frac{17}{4} \\ 4x-\frac{1}{3y+x}=\frac{63}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} 4(x+3y)^2-17(3y+x)+4=0 \\ 4x=\frac{63}{4}+\frac{1}{3y+x} \end{cases}$;

$\begin{cases} x+3y=4 \\ 4x=16 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+3y=\frac{1}{4} \\ 4x=\frac{79}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\frac{79}{16} \\ y=-\frac{25}{16} \end{cases}$.

2.2.С07. а) $\begin{cases} x^2-y^2=3(x+y) \\ \frac{1}{4x-3y}=\frac{1}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y)(x-y-3)=0 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=0 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2-y^2=4(x+y) \\ \frac{1}{5x-4y}=\frac{1}{9} \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y)(x-y-4)=0 \\ 5x-4y=9 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=0 \\ 5x-4y=9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=4 \\ 5x-4y=9 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$.

2.2.C08. а) $\begin{cases} 2xy+\dfrac{y}{x}=-3 \\ 11\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-12 \end{cases}$; $\begin{cases} 2xy+\dfrac{y}{x}=-3 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+12\left(\dfrac{x}{y}\right)+11=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-1 \\ 2xy=-2 \end{cases}$ или

$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-11 \\ 2xy=-\dfrac{32}{11} \end{cases}$; $\begin{cases} 2y^2=2 \\ x=-y \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x^2=32 \\ y=-\dfrac{x}{11} \end{cases}$; $\begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=4 \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-4 \\ y=\dfrac{4}{11} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3xy+\dfrac{y}{x}=-4 \\ \dfrac{7y}{x}+\dfrac{x}{y}=-8 \end{cases}$; $\begin{cases} 3xy+\dfrac{y}{x}=-4 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+8\left(\dfrac{x}{y}\right)+7=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-1 \\ 3xy=-3 \end{cases}$ или $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-7 \\ 3xy=-\dfrac{27}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-y \\ 3y^2=3 \end{cases}$

или $\begin{cases} x=-7y \\ 3x^2=27 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ y=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ y=\dfrac{3}{7} \end{cases}$.

2.2.C09. а) f(g(x))+g(f(x))= $\dfrac{g(x)-3}{g(x)-1}-(f(x))^{-1}=\dfrac{-x^{-1}-3}{-x^{-1}-1}-\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{1+3x}{1+x}-$

$-\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{(1+3x)(x-3)-(x^2-1)}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{2x^2-8x-2}{(1+x)(x-3)}=\dfrac{2(x^2-4x-1)}{(1+x)(x-3)}=0$.

$x^2-4x-1=0$, $x=2\pm\sqrt{5}$, отрицательный корень $x=2-\sqrt{5}$;

б) f(g(x))+g(f(x))= $\dfrac{g(x)+1}{g(x)+5}-(f(x))^{-1}=\dfrac{-x^{-1}+1}{-x^{-1}+5}-\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{x-1}{5x-1}-$

$-\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{(x^2-1)-(x+5)(5x-1)}{(5x-1)(x+1)}=\dfrac{-4(x^2+6x-1)}{(5x-1)(x+1)}=0$.

$x^2+6x-1=0$, $x=-3\pm\sqrt{10}$, отрицательный корень $x=-3-\sqrt{10}$.

2.2.C10. а) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x}\right)^{-1}=\dfrac{2}{3}x^2$; $x\neq0$ и $x\neq-3$;

$\left(\dfrac{x+3-x}{x(x+3)}\right)^{-1}+\left(\dfrac{3x-3x-9}{x(x+3)}\right)^{-1}=\dfrac{2}{3}x^2$; $\dfrac{x(x+3)}{3}-\dfrac{x(x+3)}{9}=\dfrac{2}{3}x^2$; $\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{2}{3}x=\dfrac{2}{3}x^2$;

$x\left(\dfrac{4}{9}x-\dfrac{2}{3}\right)=0$, $x=\dfrac{3}{2}$ (так как $x\neq0$);

б) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)^{-1}+\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{4}{x}\right)^{-1}=\dfrac{3}{8}x^2$; $x\neq0$ и $x\neq1$;

$\left(\frac{x-1-x}{x(x-1)}\right)^{-1}+\left(\frac{4x-4x+4}{x(x-1)}\right)^{-1}=\frac{3}{8}x^2$; $-x(x-1)+\frac{x(x-1)}{4}=\frac{3}{8}x^2$; $-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x=\frac{3}{8}x^2$;

$x\left(\frac{9}{8}x-\frac{3}{4}\right)=0$, $x=\frac{2}{3}$ (так как $x\neq 0$);

2.2.C11. а) $\frac{2x+3}{|x+2|}=\frac{2x+3}{2x}$; $(2x+3)(2x-|x+2|)=0$; $2x+3=0$ или $\begin{cases}2x=|x+2|\\ x\neq 0\end{cases}$;

$x=-\frac{3}{2}$ или $\begin{cases}2x=x+2\\ x+2>0\end{cases}$ или $\begin{cases}2x=-x-2\\ x+2<0\end{cases}$; $x=-\frac{3}{2}$ или $x=2$;

б) $\frac{3x-1}{|x+4|}=\frac{3x-1}{3x}$; $(3x-1)(3x-|x+4|)=0$;

$3x-1=0$ или $\begin{cases}3x=|x+4|\\ x+4\neq 0, x\neq 0\end{cases}$; $x=\frac{1}{3}$ или $\begin{cases}3x=x+4\\ x+4>0\end{cases}$ или $\begin{cases}3x=-x-4\\ x+4<0\end{cases}$ — решений нет; $x=\frac{1}{3}$ или $x=2$. Искомые ординаты: $g\left(\frac{1}{3}\right)=0=f\left(\frac{1}{3}\right)$; $g(2)=f(2)=\frac{5}{6}$.

2.2.C12. а) $\left(\frac{x^2-2x}{x+18}\right)^{-1}=\left(\frac{x+18}{x^2-2x}\right)^{-1}$; $\frac{x^2-2x}{x+18}=\frac{x+18}{x^2-2x}$;

$\begin{cases}(x^2-2x)^2=(x+18)^2\\ x+18\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-2x=x+18\\ x+18\neq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2-2x=-x-18\\ x+18\neq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}x^2-3x-18=0\\ x\neq -18\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2-x+18=0\\ x\neq -18\end{cases}$, во втором случае Д<0, так что

$\begin{cases}(x-6)(x+3)=0\\ x\neq -18\end{cases}$; $x=6$ или $x=-3$;

б) $\left(\frac{x^2+4x}{x+10}\right)^{-1}=\left(\frac{x+10}{x^2+4x}\right)^{-1}$; $\frac{x^2+4x}{x+10}=\frac{x+10}{x^2+4x}$;

$\begin{cases}(x^2+4x)^2=(x+10)^2\\ x+10\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+4x=x+10\\ x\neq -10\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+4x=-x-10\\ x\neq -10\end{cases}$;

$\begin{cases}x^2+3x-10=0\\ x\neq -10\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2-x+18=0\\ x\neq -18\end{cases}$, во второй системе Д<0, так что

$\begin{cases}(x+5)(x-2)=0\\ x\neq -10\end{cases}$; $x=2$ или $x=-5$.

Уровень D.

2.2.D01.

а) $\begin{cases}\frac{1}{y^2+x}=\frac{1}{3}\\ x^2-2y^4=2\end{cases}$; $\begin{cases}x+y^2=3\\ x^2-2y^4=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=3-y^2\\ (3-y^2)^2-2y^4=2\end{cases}$;

$\begin{cases} x = 3 - y^2 \\ y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2 - x} = \dfrac{1}{2} \\ 2y^4 - x^2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 - x = 2 \\ 2y^4 - x^2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y^2 - 2 \\ 2y^4 - (y^2 - 2)^2 = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 3 - y^2 \\ y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

2.2.D02. а) $-\dfrac{1}{|x^2 - 2x|} + 6 = \dfrac{5}{(x^2 - 2x)^2}$; $6|x^2-2x|^2-|x^2-2x|-5=0$;

$|x^2-2x|=1$ (так как $|x^2-2x|>0$); $x^2-2x=1$ или $x^2-2x=-1$;

$x^2-2x-1=0$ или $x^2-2x+1=0$; $x=1 \pm\sqrt{2}$ или $x=1$;

б) $-\dfrac{1}{|x^2 + 2x|} + 3 = \dfrac{4}{(x^2 + 2x)^2}$; $3|x^2+2x|^2+|x^2+2x|-4=0$;

$|x^2+2x|=1$ (так как $|x^2+2x|>0$); $x^2+2x=1$ или $x^2+2x=-1$;

$x^2+2x-1=0$ или $x^2+2x+1=0$; $x=-1 \pm\sqrt{2}$ или $x=-1$.

2.2.D03. а) $(-3|x|)^{-1}(x^2+3|x|-7)=-3|x|(x^2+3|x|-7)^{-1}$;

$\begin{cases} (-3|x|)^2 = (x^2 + 3|x| - 7)^2 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 3|x| - 7 = 3|x| \\ x \neq 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} x^2 + 3|x| - 7 = -3|x| \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 7 \\ x \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} |x| = 1 \quad и \quad |x| = -7 \\ x \neq 0 \end{cases}$;

$x=\pm\sqrt{7}$ или $x=\pm 1$;

б) $(-2|x|)^{-1}(x^2+2|x|-21)=-2|x|(x^2+2|x|-21)^{-1}$;

$\begin{cases} (-2|x|)^2 = (x^2 + 2|x| - 21)^2 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 2|x| - 21 = 2|x| \\ x \neq 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} x^2 + 2|x| - 21 = -2|x| \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 21 \\ x \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} |x| = -7 \quad и \quad |x| = 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$;

$x=\pm\sqrt{21}$ или $x=\pm 3$.

2.2.D04. а) $\begin{cases} (x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 5 \\ \dfrac{1}{x^2 - 2xy + 9y^2} = 9^{-1} \end{cases}$; $\begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ (x+y)^2 = 1 \\ x^2 - 2xy + 9y^2 = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ (x+y)^2 = 1 \\ (x-y)^2 + 8y^2 = 9 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ (x+y)^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

x+6y достигает наибольшего значения при $\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases}(x+y)^2+3(x+y)^2=4\\ \dfrac{1}{x^2+2xy+7y^2}=7^{-1}\end{cases}$; $\begin{cases}(x+y)^2=1\\ (x-y)^2=1\\ (x+y)^2+6y^2=7\end{cases}$; $\begin{cases}(x+y)^2=1\\ (x-y)^2=1\\ y^2=1\end{cases}$;

$\begin{cases}y=1\\ x=0\end{cases}$ или $\begin{cases}y=-1\\ x=0\end{cases}$, но x–8y принимает наибольшее значение при $\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$.

2.2.D05. а) $\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^2+14\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2-25}-15\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^2=0$;

$\dfrac{(x-1)^2(x-5)^2+14(x^2-1)(x^2-25)-15(x+1)^2(x+5)^2}{(x+5)^2(x-5)^2}=0$;

$(x^2–6x+5)^2+14(x^4–26x^2+25)–15(x^2+6x+5)^2=0$;
$x^4+36x^2+25–12x^3–60x+10x^2+14x^4–364x^2+350–15x^4–540x^2–375–180x^3–$
$–900x–150x^2=–192x^3–1008x^2–960x=0$;

$–48x(4x^2+21x+20)=0$; x=0 или x=–4 или x=$-\dfrac{5}{4}$;

б) $\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^2+13\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2-1}-14\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2=0$;
$(x–3)^2(x–1)^2+13(x^2–9)(x^2–1)–14(x+3)^2(x+1)^2=0$;
$(x^2–4x+3)^2+13(x^4–10x^2+9)–14(x^2+4x+3)^2=0$;
$x^4–8x^3+22x^2–24x+9+13x^4–130x^2+117–14x^4–112x^3–308x^2–336x–126=0$;

$–120x^3–416x^2–360x=0$; $–8x(15x^2+52x+45)=0$; x=0 или x=$-\dfrac{5}{3}$ или x=$-\dfrac{9}{5}$.

2.2.D06. а) $\dfrac{16}{|x^2-20x|}=\dfrac{1}{25}-\dfrac{4}{5x}$; $\dfrac{16}{|x^2-20x|}=\dfrac{5x-100}{25x}$;

400x=5(x–20)·|x|·|x–20|; $\begin{cases}400x=5x\cdot(x-20)^2\\ x(x-20)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}400x=-5x\cdot(x-20)^2\\ x(x-20)<0\end{cases}$;

$\begin{cases}(x-20)^2=80\\ x(x-20)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-20)^2=-80\\ x(x-20)<0\end{cases}$; так что $\begin{cases}x=20\pm\sqrt{80}\\ x(x-20)>0\end{cases}$; x=20+4$\sqrt{5}$;

б) $\dfrac{25}{|x^2-10x|}=\dfrac{2x-20}{4x}$;100x=2·(x–10)·|x(x–10)|;

$\begin{cases}100x=2x\cdot(x-10)^2\\ x(x-10)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}100x=-2x\cdot(x-10)^2\\ x(x-10)<0\end{cases}$;

$\begin{cases}(x-10)^2=50\\ x(x-10)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-10)^2=-50\\ x(x-10)<0\end{cases}$; так что $\begin{cases}x=10\pm\sqrt{50}\\ x(x-10)>0\end{cases}$; x=10+5$\sqrt{2}$.

2.2.D07. а) $\dfrac{x+5}{x(x-1)}+\dfrac{1}{|x-1|}=\dfrac{7x-10}{2x}$; Если x–1>0, то есть x>1, то:

$\dfrac{x+5+x}{x(x-1)}=\dfrac{(7x-10)(x-1)}{2x(x-1)}$; $\dfrac{4x+10}{2x(x-1)}=\dfrac{7x^2-17x+10}{2x(x-1)}=0$;

$7x^2–21x=0$; $7x(x – 3) = 0$, т.е. x = 0 или x = 3. Но x > 1, значит x = 3

Если x<1, то $\frac{x+5-x}{x(x-1)}=\frac{7x^2-17x+10}{2x(x-1)}$; $\frac{10}{2x(x-1)}=\frac{7x^2-17x+10}{2x(x-1)}$;

$7x\left(x-\frac{17}{7}\right)=0$, т.е. x = 0 или $x=\frac{17}{7}$.

Но 0 не входит в О.Д.З., $\frac{17}{7}>1$, значит, x = 3.

б) $\frac{x+6}{x(x-2)}+\frac{3}{|x-2|}=\frac{7x-9}{3x}$; Если x–2>0, то есть x>2, то:

$\frac{x+6+3x}{x(x-2)}=\frac{7x^2-23x+18}{3x(x-2)}$; $\frac{12x+18}{3(x-2)x}=\frac{7x^2-23x+18}{3x(x-2)}$;

7x – 35x = 0, т.е. x = 0 или x = 5. Но 0 не входит в О.Д.З., так что x = 5.

Если x < 2, то $\frac{x+6-3x}{x(x-2)}=\frac{7x^2-23x+18}{3x(x-2)}$; $\frac{-6x+18}{3x(x-2)}=\frac{7x^2-23x+18}{3x(x-2)}$;

$7x^2 – 17x = 0$, т.е. x = 0 или $x=\frac{17}{7}$. Но 0 не входит в О.Д.З., а $\frac{17}{7}>2$, значит, x = 5.

2.2.D08. а) $\frac{x^2}{x+4}+\frac{3x}{x^2-4}-4=0$; $\frac{x^2}{x+4}-1+3\left(\frac{x}{x^2-4}-1\right)=0$;

$\frac{x^2-x-4}{x+4}-3\frac{x^2-x-4}{x^2-4}=0$;

$\left[\begin{array}{l} x^2-x-4=0 \\ \frac{x^2-4-3(x+4)}{(x+4)(x^2-4)}=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2} \\ x^2-3x-16=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{3\pm\sqrt{73}}{2} \end{array}\right.$;

б) $\frac{x^2}{x+3}+\frac{4x}{x^2-3}-5=0$; $\frac{x^2}{x+3}-1+4\left(\frac{x}{x^2-3}-1\right)=0$;

$(x^2-x-3)\left(\frac{1}{x+3}-\frac{4}{x^2-3}\right)=0$;

$\left[\begin{array}{l} x^2-x-3=0 \\ \frac{x^2-3-4(x+3)}{(x+3)(x^2-3)}=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ x^2-4x-15=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ x=2\pm\sqrt{19} \end{array}\right.$;

2.2.D09. а) $\frac{3}{x^2+8x-20}-\frac{x+3}{x^2+12x+20}=\frac{1}{x^2-4}$;

$\frac{3}{(x+10)(x-2)}-\frac{x+3}{(x+2)(x+10)}-\frac{1}{(x+2)(x-2)}=0$;

$\frac{3(x+2)-(x+3)(x-2)-(x+10)}{(x+10)(x+2)(x-2)}=0$; $\frac{3x+6-x^2-x+6-x-10}{(x+10)(x+2)(x-2)}=0$;

$\frac{-(x^2-x-2)}{(x+10)(x+2)(x-2)}=0$; $\frac{-(x-2)(x+1)}{(x+10)(x+2)(x-2)}=0$; x=–1;

б) $\frac{2}{x^2+8x-48}-\frac{x-1}{x^2+16x+48}=\frac{1}{x^2-16}$;

$\frac{2}{(x+12)(x-4)}-\frac{x-1}{(x+12)(x+4)}-\frac{1}{(x-4)(x+4)}=0$;

$\frac{2(x+4)-(x-1)(x-4)-(x+12)}{(x+12)(x+4)(x-4)}=0$; $\frac{-(x^2-6x+8)}{(x+12)(x+4)(x-4)}=0$;

$\frac{-(x-4)(x-2)}{(x+12)(x+4)(x-4)}=0$; x=2.

2.2.D10. а) $\frac{x^7-4x^5+3x^2-2x-16}{x^7-4x^5+4x^2-3x-22}=1$; $x^7-4x^5+3x^2-2x-16=x^7-4x^5+4x^2-3x-22\neq 0$;
$x^2-x-6=0$; x=–2 и x=3; $(-2)^7-4(-2)^5+4(-2)^2-3(-2)-22=0$,
$(3)^7-4(3)^5+4(3)^2-3\cdot 3-22\neq 0$, так что x=3;

б) $\frac{x^7-9x^5+2x^2-2x-24}{x^7-9x^5+3x^2+3x-18}=1$; $x^7-9x^5+2x^2-2x-24=x^7-9x^5+3x^2+3x-18\neq 0$;
$x^2+5x+6=0$; x=–2 и x=–3; $(-2)^7-9(-2)^5+3(-2)^2+3(-2)-18\neq 0$,
$(-3)^7-9(-3)^5+3(-3)^2+3(-3)-18=0$, так что x=–2.

2.2.D11. а) $\frac{x^2-4x+5}{x^2-3x+5}-\frac{2x}{x^2-2x+5}=1$;

$\frac{(x^2-4x+5)(x^2-2x+5)-2x(x^2-3x+5)-(x^2-3x+5)(x^2-2x+5)}{(x^2-3x+5)(x^2-2x+5)}=0$;

$\frac{x^4-6x^3+18x^2-30x+25-2x^3+6x^2-10x-x^4+5x^3-16x^2+25x-25}{(x^2-3x+5)(x^2-2x+5)}=0$

$\frac{-3x^3+8x^2-15x}{(x^2-3x+5)(x^2-2x+5)}=0$;

$-x(3x^2-8x+15)=0$; x=0, т.к. D выражения в скобках меньше 0.

б) $\frac{x^2+2x+5}{x^2+x+5}-\frac{3x}{x^2+2x+5}=1$;

$\frac{(x^2+2x+5)^2-3x(x^2+x+5)-(x^2+x+5)(x^2+25+5)}{(x^2+x+5)(x^2+2x+5)}=0$;

$\frac{(x^2+2x+5)(x^2+2x+5-x^2-x-5)-3x(x^2+x+5)}{(x^2+x+5)(x^2+2x+5)}=0$

$\frac{x^3+2x^2+5x-3x^3-3x^2-15x}{(x^2+x+5)(x^2+2x+5)}=0$;

$-x(2x^2+x+10)=0$; x=0, т.к. D выражения в скобках меньше 0.

2.2.D12. а) $\frac{x^4-10x^3+25x^2-81}{2x-5+\sqrt{61}}=0$; $(x^2-5x+9)(x^2-5x-9)=0$, $x\neq\frac{5-\sqrt{61}}{2}$

x=$\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$, x$\neq$ $\frac{5-\sqrt{61}}{2}$; x=$\frac{5+\sqrt{61}}{2}$;

б) $\frac{x^4-6x^3+9x^2-64}{2x-3+\sqrt{41}}=0$; (x^2–3x+8)(x^2–3x–8)=0, x $\neq$ $\frac{3-\sqrt{41}}{2}$

x=$\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$, x$\neq$ $\frac{3-\sqrt{41}}{2}$, так что x=$\frac{3+\sqrt{41}}{2}$.

§ 3. Иррациональные уравнения

Уровень А.

2.3.А01. а) $\sqrt[3]{\frac{x+7}{3x+17}}=1$; $\frac{x+7}{3x+17}=1$; x+7=3x+17; x=–5;

б) $\sqrt[3]{\frac{x+2}{5x+22}}=-1$; $\frac{x+2}{5x+22}=-1$; x+2=–5x–22; x=–4.

2.3.А02.

а) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5$; 16x^2+16x+29=25; 4x^2+4x+1=0; x=–$\frac{1}{2}$;

б) $\sqrt{9x^2-12x+85}=9$; 9x^2–12x+85=81; 9x^2–12x+4=0; (3x–2)^2=0; x=$\frac{2}{3}$.

2.3.А03.

а) $\sqrt[3]{9x^2-42x-76}=-5$; 9x^2–42x–76=–125; 9x^2–42x+49=0; (3x–7)^2=0; x=$\frac{7}{3}$;

б) $\sqrt[3]{4x^2-36x+17}=-4$; 4x^2–36x+17=–64; 4x^2–36x+81=0; (2x–9)^2=0; x=$\frac{9}{2}$.

2.3.А04. а) $\sqrt[3]{2x^2-9x+8}=2$; 2x^2–9x+8=8; x(2x–9)=0; x=0 и x=$\frac{9}{2}$;

б) $\sqrt[3]{5x^2+9x+64}=4$; 5x^2+9x+64=64; 5x^2+9x+64=0; x(5x+9)=0; x=0 или x=–$\frac{9}{5}$.

2.3.А05. а) $\sqrt[4]{246+23x+5x^2}=4$; 246+23x+5x^2=256;
5x^2 + 23x – 10 = 0; x = –5 и x = 0,4;

б) $\sqrt[4]{102-52x+7x^2}=3$; 102–52x+7x^2=81; 7x^2–52x+21=0; x=7 или x=$\frac{3}{7}$.

2.3.А06. а) $\sqrt[4]{64x^2+32x+85}=3$; 64x^2+32x+85=81;

64x^2+32x+4=0; 16x^2+8x+1=0; x=–$\frac{1}{4}$;

б) $\sqrt[4]{49x^2-14x+257}=4$; 49x^2–14x+257=256; 49x^2–14x+1=0; x=$\frac{1}{7}$.

Уровень В.

2.3.В01. а) $\sqrt[3]{7x^3+36x^2+63x+27}=2x+3$;
7x^3+36x^2+63x+27=8x^3+36x^2+54x+27; x^3–9x=0; x=0 и x = ±3;

б) $\sqrt[3]{9x^3-36x^2+53x-27}=2x-3$;
9x^3–36x^2+53x–27=8x^3–36x^2+54x–27; x^3–x=0; x = ±1 и x = 0.

2.3.В02. а) $\sqrt[3]{9x+1}=3x+1$; $9x+1=27x^3+27x^2+9x+1$; $27x^2(x+1)=0$; $x=0$ и $x=-1$;

б) $\sqrt[3]{9x-1}=3x-1$; $9x-1=27x^3-27x^2+9x-1$; $27x^2(x-1)=0$; $x=0$ и $x=-1$.

2.3.В03. а) $\sqrt{6-14x+9x^2}=2x-1$; $6-14x+9x^2=4x^2-4x+1$; $2x-1\geq 0$; $x\geq\frac{1}{2}$;

$5x^2-10x+5=0$; $5(x-1)^2=0$; $x=1$;

б) $\sqrt{-23+6x+6x^2}=3x-2$; $-23+6x+6x^2=9x^2-12x+4$; $3x-2\geq 0$; $x\geq\frac{2}{3}$;

$3x^2-18x+27=0$; $3(x-3)^2=0$; $x=3$.

2.3.В04. а) $\sqrt{5x+1}=\sqrt{7x-9}$; $\begin{cases}5x+1=7x-9\\5x+1\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=5\\x\geq-\frac{1}{5}\end{cases}$; $x=5$;

б) $\sqrt{4x-7}=\sqrt{3x-4}$; $\begin{cases}4x-7=3x-4\\4x-7\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\x\geq\frac{7}{4}\end{cases}$; $x=3$.

2.3.В05. а) $\sqrt{6x^2-3x-1}=\sqrt{2x-1}$;

$\begin{cases}6x^2-3x-1=2x-1\\2x-1\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}6x^2-5x=0\\x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}x(6x-5)=0\\x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$; $x=\frac{5}{6}$;

б) $\sqrt{7x^2+x-2}=\sqrt{7x-2}$;

$\begin{cases}7x^2+x-2=7x-2\\7x-2\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}7x^2-6x=0\\7x-2\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x(7x-6)=0\\x\geq\frac{2}{7}\end{cases}$; $x=\frac{6}{7}$.

2.3.В06. а) $(7x-4)\sqrt{8+3x}=0$; $\begin{cases}(7x-4)=0\\8+3x\geq 0\end{cases}$ или $8+3x=0$; $x=\frac{4}{7}$ и $x=-\frac{8}{3}$;

б) $(3x+5)\sqrt{7+3x}=0$; $\begin{cases}3x+5=0\\7+3x\geq 0\end{cases}$ или $7+3x=0$; $x=-\frac{5}{3}$ и $x=-\frac{7}{3}$.

2.3.В07. а) $(x^2+8x+15)\sqrt{4x-7}=0$; $\begin{cases}x^2+8x+15=0\\4x-7\geq 0\end{cases}$ или $4x-7=0$;

$\begin{cases}x=-3\ \ и\ =-5\\x\geq\frac{7}{4}\end{cases}$ и $x=\frac{7}{4}$; $x=\frac{7}{4}$;

б) $(x^2+6x+5)\sqrt{9x-2}=0$; $\begin{cases}x^2+6x+5=0\\9x-2\geq 0\end{cases}$ или $9x-2=0$; $\begin{cases}x=-1\ \ и\ \ x=-5\\x\geq\frac{2}{9}\end{cases}$ и

$x=\frac{2}{9}$; $x=\frac{2}{9}$.

2.3.В08. а) $(8-3x)\sqrt{10+3x-4x^2}=0$; $\begin{cases}8-3x=0\\10+3x-4x^2\geq 0\end{cases}$ и $10+3x-4x^2=0$;

$\begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ (5+4x)(2-x)\ge 0 \end{cases}$ и x=2 и x=$-\frac{5}{4}$; x=2 и x=$-\frac{5}{4}$;

б) (7x–4) $\sqrt{2-7x-9x^2}$ =0; $\begin{cases} 7x-4=0 \\ 2-7x-9x^2\ge 0 \end{cases}$ и 2–7x–9x^2=0;

$\begin{cases} x=\frac{4}{7} \\ (2-9x)(1+x)\ge 0 \end{cases}$ и x=$\frac{2}{9}$ и x=–1; x=$\frac{2}{9}$ и x=–1.

2.3.В09. а) $\sqrt{4x+25}$ =4x–5; 4x+25=16x^2–40x+25; 4x–5≥0; x≥$\frac{5}{4}$;

16x^2–44x=0; 4x(4x–11)=0; x=$\frac{11}{4}$;

б) $\sqrt{9x+16}$ =3x–4; 9x+16=9x^2–24x+16; 3x–4≥0; x≥$\frac{4}{3}$;

9x^2–33x=0; 3x(3x–11)=0; x=$\frac{11}{3}$.

2.3.В10. а) (4x^2–x–5) $\sqrt{2x+7}$ =0; $\begin{cases} 4x^2-x-5=0 \\ 2x+7\ge 0 \end{cases}$ и 2x+7=0;

$\begin{cases} x=-1 \quad и \quad x=\frac{5}{4} \\ x\ge -\frac{7}{2} \end{cases}$ и x=–$\frac{7}{2}$; x=–1, x=$\frac{5}{4}$ и x=–$\frac{7}{2}$;

б) (4x^2–7x+3) $\sqrt{5x+6}$ =0; $\begin{cases} 4x^2-7x+3=0 \\ 5x+6\ge 0 \end{cases}$ и 5x+6=0; $\begin{cases} x=1 \quad и \quad x=\frac{3}{4} \\ x\ge -\frac{6}{5} \end{cases}$

и x=–$\frac{6}{5}$; x=–$\frac{6}{5}$, x=1 и x=$\frac{3}{4}$.

2.3.В11. а) (2–9x–5x^2) $\sqrt{-9-5x}$ =0; $\begin{cases} 2-9x-5x^2=0 \\ -9-5x\ge 0 \end{cases}$ и –9–5x=0;

$\begin{cases} x=-2, \quad x=\frac{1}{5} \\ x\le -\frac{9}{5} \end{cases}$ и x=–$\frac{9}{5}$; x=–2 и x=–$\frac{9}{5}$;

б) (3–5x–2x^2) $\sqrt{-8-9x}$ =0; $\begin{cases} 3-5x-2x^2=0 \\ -8-9x\ge 0 \end{cases}$ и –8–9x=0;

$\begin{cases} x=-3, \quad x=\frac{1}{2} \\ x\le -\frac{8}{9} \end{cases}$ и x=–$\frac{8}{9}$; x=–3 и x=–$\frac{8}{9}$.

2.3.B12. а) $\sqrt{-x^2-13x-9}=\sqrt{-7x-9}$;

$\begin{cases}-x^2-13x-9=-7x-9\\ -7x-9\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+6x=0\\ x\le -\dfrac{9}{7}\end{cases}$; x=–6;

б) $\sqrt{-x^2-16x-3}=\sqrt{-8x-3}$; $\begin{cases}-x^2-16x-3=-8x-3\\ -8x-3\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+8x=0\\ x\le -\dfrac{3}{8}\end{cases}$; x=–8.

Уровень С.

2.3.С01. а) $\sqrt{6x^3+9x^2+24x+22}$ =3x+4; 3x+4≥0; x≥–$\dfrac{4}{3}$;

$6x^3+9x^2+24x+22=9x^2+24x+16$; $6x^3=-6$; x=–1;

б) $\sqrt{5x^3+9x^2+12x-36}$ =3x+2; 3x+2≥0; x≥–$\dfrac{2}{3}$;

$5x^3+9x^2+12x-36=9x^2+12x+4$; $5x^3-40=0$; $x^3=8$; x=2.

2.3.С02. а) (2x–1) $\sqrt{-x-3}$ =2x–1; (2x–1)($\sqrt{-x-3}$ –1)=0;

$\begin{cases}2x-1=0\\ -x-3\ge 0\end{cases}$ и $\sqrt{-x-3}$ =1; $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ x\le -3\end{cases}$ и –x–3=1; x=–4;

б) (x–2) $\sqrt{-x-1}$ =x–2; (x–2)($\sqrt{-x-1}$ –1)=0;

$\begin{cases}x-2=0\\ -x-1\ge 0\end{cases}$ и $\sqrt{-x-1}$ –1=0; $\begin{cases}x=2\\ x\le -1\end{cases}$ и x=–2; x=–2.

2.3.С03. а) $\begin{cases}2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1\\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=-2\\ \sqrt[3]{y}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=-8\\ y=1\end{cases}$;

б) $\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3\\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=-1\\ \sqrt[3]{y}=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=-1\\ y=27\end{cases}$.

2.3.С04. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x+y=26\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}=6-\sqrt{y}\\ (6-\sqrt{y})^2+y=26\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}=6-\sqrt{y}\\ 2y-12\sqrt{y}+10=0\end{cases}$;

$\begin{cases}\sqrt{x}=6-\sqrt{y}\\ (\sqrt{y})^2-6\sqrt{y}+5=0\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{y}=5\\ \sqrt{x}=1\end{cases}$ и $\begin{cases}\sqrt{y}=1\\ \sqrt{x}=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=1\\ y=25\end{cases}$ и $\begin{cases}x=25\\ y=1\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=7\\ x+y=25\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}=7-\sqrt{y}\\ (7-\sqrt{y})^2+y=25\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}=7-\sqrt{y}\\ (\sqrt{y})^2-7\sqrt{y}+12=0\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x}=4\end{cases}$

и $\begin{cases}\sqrt{y}=4\\ \sqrt{x}=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=16\\ y=9\end{cases}$ и $\begin{cases}x=9\\ y=16\end{cases}$.

2.3.С05. а) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\\ \left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2+3\sqrt[3]{xy}=3\end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{xy}=-2 \end{cases}$. Откуда $\begin{cases} \sqrt[3]{y}=-1 \\ \sqrt[3]{x}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt[3]{y}=-2 \\ \sqrt[3]{x}=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1 \\ y=-8 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=-1 \\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}=7 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=-1 \\ \left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2+3\sqrt[3]{xy}=7 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=-1 \\ \sqrt[3]{xy}=2 \end{cases}$. Откуда

$\begin{cases} \sqrt[3]{x}=1 \\ \sqrt[3]{y}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt[3]{x}=-2 \\ \sqrt[3]{y}=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-8 \\ y=-1 \end{cases}$.

2.3.C06. а) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=5 \\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2-5\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)+3=0 \\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}=1 \\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \end{cases}$ и

$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2} \\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{y}=\sqrt{x} \\ 5\sqrt{y}=10 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt{x}=\dfrac{2}{3}\sqrt{y} \\ \dfrac{11}{3}\sqrt{y}=10 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=\dfrac{400}{121} \\ y=\dfrac{900}{121} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=9 \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2-9\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)+4=0 \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}=4 \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$ и

$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{1}{2} \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{256}{25} \\ y=\dfrac{4096}{25} \end{cases}$ и $\begin{cases} x=36 \\ y=9 \end{cases}$.

2.3.C07. а) $\begin{cases} \sqrt{25x^2-6xy-5y^2}=-5x-2 \\ x+y=-5 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=-x-5 \\ \sqrt{25x^2-6x(-x-5)-5(x+5)^2}=-5x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-x-5 \\ \sqrt{26x^2-20x-125}=-5x-2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-x-5 \\ 26x^2-20x-125=25x^2+20x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-x-5 \\ x^2-40x-129=0 \\ x\le-\dfrac{2}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \sqrt{16x^2-18xy-17y^2}=-4x+5 \\ x+y=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-4-x \\ \sqrt{16x^2-18x(-4-x)-17(4+x)^2}=-4x+5 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=-4-x \\ 17x^2-64x-272=16x^2-40x+25 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-4-x \\ x^2-24x-297=0 \\ x\le\dfrac{5}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-9 \\ y=5 \end{cases}$.

2.3.C08. а) $\sqrt{5x^3+26x^2+36x+25}$ =5+3x; 5+3x≥0;

$5x^3+26x^2+36x+25=25+30x+9x^2$; $x\ge-\frac{5}{3}$;

$5x^3+17x^2+6x=0$; $x(5x^2+17x+6)=0$; $x\ge-\frac{5}{3}$; x=0 и $x=-\frac{2}{5}$;

б) $\sqrt{2x^3+15x^2-30x+9}$ =3–4x; 3–4x≥0; $2x^3+15x^2-30x+9=9-24x+16x^2$; $x\le\frac{3}{4}$;

$2x^3-x^2-6x=0$; $x(2x^2-x-6)=0$; $x\le\frac{3}{4}$; x=0 и $x=-\frac{3}{2}$;

2.3.C09. а) $\sqrt{7x^4+24x^3+13x^2+20x+25}$ =2x+5; 2x+5≥0

$7x^4+24x^3+13x^2+20x+25=4x^2+20x+25$; $x\ge-\frac{5}{2}$; $x^2(7x^2+24x+9)=0$, x=0 и $x=-\frac{3}{7}$;

б) $\sqrt{7x^4+19x^3+3x^2+12x+4}$ =3x+2; 3x+2≥0

$7x^4+19x^3+3x^2+12x+4=9x^2+12x+4$; $x\ge-\frac{2}{3}$; $x^2(7x^2+19x-6)=0$, x=0 и $x=\frac{2}{7}$.

2.3.C10. а) $\begin{cases}2x+9y-\sqrt{xy}=71\\2x-9y+\sqrt{xy}=73\end{cases}$; $\begin{cases}x=36\\9y-6\sqrt{y}=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=36\\(3\sqrt{y}-1)^2=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=36\\y=\frac{1}{9}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}5x+4y-\sqrt{xy}=79\\5x-4y+\sqrt{xy}=81\end{cases}$; $\begin{cases}x=16\\4y-4\sqrt{y}=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=16\\(2\sqrt{y}-1)^2=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=16\\y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

2.3.C11.

а) $\begin{cases}4\sqrt{3x^2-8x-2}+3\sqrt{y+3}=7\\4\sqrt{y+3}-3\sqrt{3x^2-8x-2}=1\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{y+3}=1\\\sqrt{3x^2-8x-2}=1\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2-8x-3=0\\y+3=1\end{cases}$;

$\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$ и $\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=-2\end{cases}$;

б) $\begin{cases}2\sqrt{3x^2-10x+9}+3\sqrt{y-2}=5\\2\sqrt{y-2}-3\sqrt{3x^2-10x+9}=-1\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2-10x+8=0\\y-2=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ и $\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\y=3\end{cases}$.

2.3.C12.

а) $\begin{cases}\sqrt{y-x+1}=5\\\sqrt{-15-x-y}=2y-3\end{cases}$; $\begin{cases}y=25+x-1\\-15-x-y=(2y-3)^2\\2y-3\ge0\end{cases}$;

$\begin{cases}x=y+1-25\\-15-(y+1-25)-y-4y^2+12y-9=0\\2y-3\ge0\end{cases}$; $\begin{cases}x=y-24\\4y^2-10y=0\\2y-3\ge0\end{cases}$; $\begin{cases}x=-\frac{86}{4}\\y=\frac{10}{4}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\sqrt{2y-x+3}=1\\ \sqrt{6-x-2y}=3y-2\end{cases}$; $\begin{cases}x=2y+2\\ 6-(2y+2)-2y=(3y-2)^2\\ 3y-2\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=2y+2\\ 9y^2-8y=0\\ 3y-2\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{34}{9}\\ y=\dfrac{8}{9}\end{cases}$.

Уровень D.

2.3.D01. а) $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-4}=3$;

x+5–3 $\sqrt[3]{(x+5)^2(x-4)}+3\sqrt[3]{(x+5)(x-4)^3}-x+4=27$;

$\sqrt[3]{(x+5)(x-4)}(\sqrt[3]{x-4}-\sqrt[3]{x+5})=6$; $\sqrt[3]{(x+5)(x-4)}=-2$;

$x^2+x-20=-8$; $x^2+x-12=0$; x=–4 и x=3;

б) $\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x-10}=1$; x–3–3 $\sqrt[3]{(x-3)^2(x-10)}+3\sqrt[3]{(x-10)^2(x-3)}-x+10=1$;

$\sqrt[3]{(x-10)(x-3)}(\sqrt[3]{x-10}-\sqrt[3]{x-3})=-2$; $\sqrt[3]{(x-10)(x-3)}=2$;

$x^2-13x+30=8$; $x^2-13x+22=0$; x=2 и x=11.

2.3.D02. а) $\dfrac{\sqrt{22x-13}-5x+2}{\sqrt{x+24}-5}=0$; $\begin{cases}\sqrt{22x-13}=5x-2\\ \sqrt{x+24}\ne 5\end{cases}$;

$\begin{cases}22x-13=25x^2-20x+4\\ 5x-2\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$; $\begin{cases}25x^2-42x+17=0\\ x\ge\dfrac{2}{5}\\ x\ne 1\end{cases}$; $\begin{cases}x=1 \quad и \quad x=\dfrac{17}{25}\\ x\ge\dfrac{2}{5}\\ x\ne 1\end{cases}$; x=$\dfrac{17}{25}$;

б) $\dfrac{\sqrt{16x+25}-4x-7}{\sqrt{x+2}-1}=0$; $\begin{cases}\sqrt{16x+25}=4x+7\\ \sqrt{x+2}\ne 1\end{cases}$;

$\begin{cases}16x+25=16x^2+56x+49\\ 4x+7\ge 0\\ x\ne -1\end{cases}$; $\begin{cases}16x^2+40x+24=0\\ x\ge -\dfrac{7}{4}\\ x\ne -1\end{cases}$; $\begin{cases}x=-1 \quad и \quad x=-\dfrac{3}{2}\\ x\ge -\dfrac{7}{4}\\ x\ne -1\end{cases}$; x=$-\dfrac{3}{2}$.

2.3.D03. а) $5\sqrt{\dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}}-3\sqrt{\dfrac{5x^2-2x+3}{3x^2-2x+5}}=2$;

$\begin{cases}25\dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}+9\dfrac{5x^2-2x+3}{3x^2-2x+5}-30=4\\ \dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}>0\end{cases}$;

$\begin{cases}25\left(\dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}\right)^2-34\left(\dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}\right)+9=0\\ \dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}>0\end{cases}$

$\frac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}=1$ и $\frac{3x^2-2x+5}{5x^2-2x+3}=\frac{9}{25}$;

$3x^2–2x+5=5x^2–2x+3$ и $75x^2–50x+125=45x^2–18x+27$;

$2x^2–2=0$ и $30x^2–32x+98=0$; во втором случае Д<0, так что $x=\pm1$;

б) $5\sqrt{\frac{5x^2-3x+2}{2x^2-3x+5}}-7\sqrt{\frac{2x^2-3x+5}{5x^2-3x+2}}=-2$;

$$5\left(\sqrt{\frac{5x^2-3x+2}{2x^2-3x+5}}\right)^2+2\left(\sqrt{\frac{5x^2-3x+2}{2x^2-3x+5}}\right)-7=0$$

$\sqrt{\frac{5x^2-3x+2}{2x^2-3x+5}}=1$; $\frac{5x^2-3x+2}{2x^2-3x+5}=1$; $5x^2–3x+2=2x^2–3x+5$; $3x^2=3$; $x=\pm1$.

2.3.D04. а) $2\sqrt{\frac{3x^2-x+4}{42x^2+17x+37}}+\sqrt[4]{\frac{3x^2-x+4}{42x^2+17x+37}}-1=0$;

$\sqrt[4]{\frac{3x^2-x+4}{42x^2+17x+37}}=\frac{1}{2}$; $\frac{3x^2-x+4}{42x^2+17x+37}=\frac{1}{16}$;

$48x^2–16x+64=42x^2+17x+37$; $6x^2–33x+27=0$; $2x^2–11x+9=0$; $x=1$ и $x=\frac{9}{2}$;

б) $2\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{17x^2+22x-64}}+3\sqrt[4]{\frac{2x^2-3x+1}{17x^2+22x-64}}-2=0$;

$\sqrt[4]{\frac{2x^2-3x+1}{17x^2+22x-64}}=\frac{1}{2}$; $\frac{2x^2-3x+1}{17x^2+22x-64}=\frac{1}{16}$;

$32x^2–48x+16=17x^2+22x–64$; $15x^2–70x+80=0$; $3x^2–14x+16=0$; $x=2$ и $x=\frac{8}{3}$.

2.3.D05.

а) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$; $\begin{cases}(2\sqrt{y}+\sqrt{x})^3=64\\(2\sqrt{y}-\sqrt{x})^3=8\end{cases}$; $\begin{cases}2\sqrt{y}+\sqrt{x}=4\\2\sqrt{y}-\sqrt{x}=2\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}=1\\\sqrt{y}=\frac{3}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}x=1\\y=\frac{9}{4}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$; $\begin{cases}(\sqrt{x}+3\sqrt{y})^3=64\\(\sqrt{x}-3\sqrt{y})^3=8\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=4\\\sqrt{x}-3\sqrt{y}=2\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x}=3\\\sqrt{y}=\frac{1}{3}\end{cases}$; $\begin{cases}x=9\\y=\frac{1}{9}\end{cases}$.

2.3.D06. а) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$; $\begin{cases}10x+6\sqrt{xy}+8y=24\\-9x-6\sqrt{xy}-9y=-24\end{cases}$; $\begin{cases}10x+6\sqrt{xy}+8y=24\\x=y\end{cases}$;

$\begin{cases}18x+6|x|=24\\x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}24x=24\\x\ge0\\y=x\end{cases}$ или $\begin{cases}12x=24\\x<0\\y=x\end{cases}$, значит, $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$;

б) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$; $\begin{cases}4x-12\sqrt{xy}+14y=18\\-3x+12\sqrt{xy}-15y=-18\end{cases}$; $\begin{cases}4x-12\sqrt{xy}+14y=18\\x=y\end{cases}$;

$\begin{cases}18x-12\,|\,x\,|=18\\ x=y\end{cases}$; $\begin{cases}6x=18\\ x=y\\ x\geq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}30x=18\\ x=y\\ x<0\end{cases}$, значит, $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$.

2.3.D07. а) $\begin{cases}\sqrt{x^2+5x-6}=y\\ \sqrt{y^2+5y-6}=x\end{cases}$; $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x^2+5x-6=y^2\\ y^2+5y-6=x^2\end{cases}$; $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ y^2+5y-6+(5x-6)=y^2\\ x^2+5x-6=y^2\end{cases}$;

$\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+y=\dfrac{12}{5}\\ 37x-12y=30\end{cases}$; $\begin{cases}49x=\dfrac{294}{5}\\ 49y=\dfrac{294}{5}\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{6}{5}\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\sqrt{x^2+4x-7}=y\\ \sqrt{y^2+4y-7}=x\end{cases}$; $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x^2+4x-7=y^2\\ (x^2+4x-7)+4y-7=x^2\end{cases}$; $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x^2-y^2+4x-7=0\\ x+y=\dfrac{14}{4}\end{cases}$;

(x–y)(x+y)+4x–7=$\dfrac{14}{4}$ (x–y)+4x–7=$\dfrac{30}{4}$ x–$\dfrac{14}{4}$ y–7=0;

$\begin{cases}x+y=\dfrac{14}{4}\\ 30x-14y=28\end{cases}$; $\begin{cases}44x=\dfrac{308}{4}\\ 44y=\dfrac{308}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{7}{4}\\ y=\dfrac{7}{4}\end{cases}$.

2.3.D08. а) $\begin{cases}|\,x-3\,|=3\sqrt{y+2}\\ |\,y+2\,|=3\sqrt{x-3}\end{cases}$; $\begin{cases}(x-3)=3\sqrt{y+2}\\ (y+2)=3\sqrt{3\sqrt{y+2}}\end{cases}$; $\begin{cases}(x-3)=3\sqrt{y+2}\\ (y+2)^4=729(y+2)\end{cases}$;

$\begin{cases}y+2=0\\ x-3=0\end{cases}$ или $\begin{cases}y+2=9\\ x-3=9\end{cases}$; $\begin{cases}y=-2\\ x=3\end{cases}$ или $\begin{cases}y=7\\ x=12\end{cases}$;

б) $\begin{cases}|\,x-1\,|=5\sqrt{y-2}\\ |\,y-2\,|=5\sqrt{x-1}\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)=5\sqrt{y-2}\\ (y-2)=5\sqrt{5\sqrt{y-2}}\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)=5\sqrt{y-2}\\ (y-2)^4=5^6(y-2)\end{cases}$;

$\begin{cases}y-2=0\\ x-1=0\end{cases}$ или $\begin{cases}y-2=25\\ (x-1)=25\end{cases}$; $\begin{cases}y=-2\\ x=3\end{cases}$ или $\begin{cases}y=27\\ x=26\end{cases}$.

2.3.D09. а) $\dfrac{\sqrt{3x^2+35x-11}-4x+1}{\sqrt{5x+1}-x-1}=0$;

$\begin{cases}\sqrt{3x^2+35x-11}=4x-1\\ \sqrt{5x+1}\neq x+1\end{cases}$; $\begin{cases}3x^2+35x-11=16x^2-8x+1\\ 4x-1\geq 0,\quad 5x+1\geq 0,\quad x+1\geq 0\\ 5x+1\neq(x+1)^2\end{cases}$;

$\begin{cases}13x^2-43x+12=0\\ x\ge\dfrac{1}{4}\\ 5x+1\ne(x+1)^2\end{cases}$; $\begin{cases}x=3 \quad и \quad x=\dfrac{4}{13}\\ x\ge\dfrac{1}{4}\\ 5x+1\ne(x+1)^2\end{cases}$; x= $\dfrac{4}{13}$;

б) $\dfrac{\sqrt{4x^2+40x-11}-3x-2}{\sqrt{11x+9}-x-3}=0$; $\begin{cases}\sqrt{4x^2+40x-11}=3x+2\\ \sqrt{11x+9}\ne x+3\end{cases}$;

$\begin{cases}3x+2\ge0, \quad x+3\ge0, \quad 11x+9\ge0\\ 4x^2+40x-11=9x^2+12x+4\\ 11x+9\ne(x+3)^2\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge-\dfrac{2}{3}\\ 5x^2-28x+15=0\\ 11x+9\ne(x+3)^2\end{cases}$; $\begin{cases}x=5 \quad и \quad x=\dfrac{3}{5}\\ x\ge-\dfrac{2}{3}\\ 11x+9\ne(x+3)^2\end{cases}$; x= $\dfrac{3}{5}$.

2.3.D10. а) $\begin{cases}x+4\sqrt{y}=28\\ y-4\sqrt{x}=28\end{cases}$; x–y+4($\sqrt{y}+\sqrt{x}$)=0; $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+4)=0$

$\begin{cases}\sqrt{x}=-\sqrt{y}\\ y=28+4\sqrt{x}\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}-4\\ y=28+4\sqrt{x}-16\end{cases}$;

$\begin{cases}x=y=0\\ 0=28+0\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}-4\\ (\sqrt{y})^2-4\sqrt{y}-12=0\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{y}=6\\ \sqrt{x}=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=4\\ y=36\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x+3\sqrt{y}=37\\ y-3\sqrt{x}=37\end{cases}$; (x–y)+3($\sqrt{x}+\sqrt{y}$)=0; $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+3)=0$

$\begin{cases}\sqrt{x}=-\sqrt{y}\\ y=37+3\sqrt{x}\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}-3\\ y=37+3\sqrt{x}\end{cases}$; $\begin{cases}x=y=0\\ 0=37+0\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}-3\\ y=37+3\sqrt{y}-9\end{cases}$;

$\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}-3\\ (\sqrt{y})^2-3\sqrt{y}-28=0\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{y}=7\\ \sqrt{x}=4\end{cases}$; $\begin{cases}y=49\\ x=16\end{cases}$.

2.3.D11. а) $\begin{cases}x+5y+\sqrt{x^2-25y^2-36}=6\\ (x^2-36)\sqrt{x^2-25y^2-36}=0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-25y^2-36=0\\ x+5y=6\end{cases}$ или

$\begin{cases}x^2-36=0\\ y=0\\ x+5y+\sqrt{x^2-25y^2-36}=6\end{cases}$; $\begin{cases}6(x-5y)-36=0\\ x+5y=6\end{cases}$ или $\begin{cases}x=6\\ y=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=6\\ y=0\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x-2y+\sqrt{x^2-4y^2-49}=-7\\ (x^2-49)\sqrt{x^2-4y^2-49}=0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-4y^2-49=0\\ x-2y=-7\end{cases}$ или

$\begin{cases} x^2-49=0 \\ y=0 \\ x-2=-7 \end{cases}$; $\begin{cases} -7(x+2y)-36=0 \\ x-2y=-7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-7 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-7 \\ y=0 \end{cases}$.

2.3.D12. а) $\begin{cases} 3x+4y+4\sqrt{3x+4y}=5 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} (\sqrt{3x+4y})^2+4(\sqrt{3x+4y})-5=0 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=4 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{3x+4y}=1 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3(x+5)+4(y+3)=28 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=4 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{x+5}=4-\sqrt{y+3} \\ 7\left(\sqrt{y+3}\right)^2-24\sqrt{y+3}+20=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x+5}=4-\sqrt{y+3} \\ \sqrt{y+3}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+5}=4-\sqrt{y+3} \\ \sqrt{y+3}=\frac{10}{7} \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{x+5}=2 \\ \sqrt{y+3}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+5}=\frac{18}{7} \\ \sqrt{y+3}=\frac{10}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\frac{79}{49} \\ y=-\frac{47}{49} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x+2y+7\sqrt{3x+2y}=8 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} (\sqrt{3x+2y})^2+7(\sqrt{3x+2y})-8=0 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{3x+2y}=1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3(x+1)+2(y+2)=8 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{x+1}=2-\sqrt{y+2} \\ 5\sqrt{y+2}-12\sqrt{y+2}+4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x+1}=2-\sqrt{y+2} \\ \sqrt{y+2}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+1}=2-\sqrt{y+2} \\ \sqrt{y+2}=\frac{2}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+1}=0 \\ \sqrt{y+2}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+1}=\frac{8}{5} \\ \sqrt{y+2}=\frac{2}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\frac{39}{25} \\ y=-\frac{46}{25} \end{cases}$.

§ 4. Тригонометрические уравнения

Уровень А.

2.4.A01. а) $(2\cos x+1)(3\sin x-4)=0$

$\left[\begin{array}{l} \cos x=-\frac{1}{2} \\ \sin x=\frac{4}{3} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z \\ \text{нет решений, т.к. } |\sin x|\le 1 \end{array}\right.$; т.е. $x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$;

б) $(2\sin x+1)(4\cos x+5)=0$

$\left[\begin{array}{l} \sin x=-\frac{1}{2} \\ \cos x=-\frac{5}{4} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z \\ \text{нет решений, т.к. } |\cos x|\le 1 \end{array}\right.$; т.е. $x=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

2.4.A02. а) $4\sin^2 x-12\sin x+5=0$

$t=\sin x$, $4t^2-12t+5=0$, $t_1=\frac{5}{2}, t_2=\frac{1}{2}$; т.к. $|t|\le 1$, то $\sin x=\frac{1}{2}$,

$x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;

б) $4\cos^2 x+4\cos x-3=0$; $t=\cos x$, $4t^2+4t-3=0$, $t_1=\frac{1}{2}, t_2=-\frac{3}{2}$; т.к. $|t|\le 1$, то

$\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

2.4.A03. а) $2\sin 2x=2\cos 2x+\sqrt{3}$, $2(\cos 2x-\sin 2x)=-\sqrt{3}$,

$\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k+\pi, x=\pm\frac{\pi}{12}+\pi k+\frac{\pi}{2}, k\in Z$;

б) $\sqrt{2}\cos^2 x=\sqrt{2}\sin^2 x+1$, $\sqrt{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1$,

$\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}, 2x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in Z$.

2.4.A04. а) $\cos x\sin(-x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2x=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$, $x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in Z$;

б) $\sin x\cos(-x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{1}{2}\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, 2x=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$, $x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

2.4.A05.

а) $\operatorname{tg}^2 x=\sqrt{3}\operatorname{tg}(-x)$, $\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0\\ \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\end{array}\right., \left[\begin{array}{l}x=\pi k, k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi m, m\in Z\end{array}\right.$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2(-x)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x(\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1)=0$. $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0\\ \operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right., \left[\begin{array}{l}x=\pi k, k\in Z\\ x=\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in Z\end{array}\right.$.

2.4.A06. а) $\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x+2=0$, $\operatorname{tg} x=t$, $t^2+3t+2=0$, $t_1=-1$, $t_2=-2$

т.е. $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1\\ \operatorname{tg} x=-2\end{array}\right., \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z\\ x=-\operatorname{arctg}(2)+\pi m, m\in Z\end{array}\right.$;

б) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-4=0$, $\operatorname{tg} x=t$, $t^2-3t-4=0$, $t_1=-1$, $t_2=4$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1\\ \operatorname{tg} x=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z\\ x=\operatorname{arctg} 4+\pi m, m\in Z\end{array}\right.$.

Уровень B.

2.4.B01. а) $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$,
$3\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$,
$3\sin x(\sin x-\cos x)-2\cos x(\sin x-\cos x)=0$,
$(3\sin x-2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$,

$$\left[\begin{array}{l}3\sin x=2\cos x\\ \sin x=\cos x\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=\dfrac{2}{3}\\ \operatorname{tg} x=1\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}x=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi k,\ k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.;$$

б) $2\sin^2 x-5\sin x\cos x-7\cos^2 x=0$, т.к. $\cos x=0$, то поделим на него и получим:
$2\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg} x-7=0$, $\operatorname{tg} x=t$, $2t^2-5t-7=0$
$2t^2+2t-7t-7=0$, $2t(t+1)-7(t+1)=0$, $(2t-7)(t+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l}2t-7=0\\ t+1=0\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=\dfrac{7}{2}\\ \operatorname{tg} x=-1\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}x=\operatorname{arctg}\dfrac{7}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right..$$

2.4.B02. а) $\dfrac{\cos 4x+1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$, $\begin{cases}\cos 4x=-1\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases}$,

$$\begin{cases}4x=\pi+2\pi k,\ k\in Z\\ x+\dfrac{\pi}{4}\neq \pi l,\ l\in Z\end{cases},\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in Z\end{cases}$$

тогда $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

б) $\dfrac{\sin 4x-1}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)}=0$, $\begin{cases}\sin 4x-1=0\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\neq 0\end{cases}$,

$$\begin{cases}4x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\\ x-\dfrac{\pi}{8}\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z\end{cases},\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\\ x\neq \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z\end{cases};\ \text{тогда}\ x=\dfrac{\pi}{8}+\pi k,\ k\in Z.$$

2.4.B03. а) $3\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg} x+2=0$,
$3\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} x+2=0$, $3\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)-2(\operatorname{tg} x-1)=0$
$(3\operatorname{tg} x-2)(\operatorname{tg} x-1)=0$

$$\left[\begin{array}{l}3\operatorname{tg} x-2=0\\ \operatorname{tg} x-1=0\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=\dfrac{2}{3}\\ \operatorname{tg} x=1\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}x=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi k,\ k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in Z\end{array}\right.$$

т.е. наибольший отрицательный корень $-\dfrac{3\pi}{4}$;

б) $2\text{tg}^2x-3\text{tg}\,x+1=0$, $2\text{tg}^2x-2\text{tg}\,x-\text{tg}\,x+1=0$
$2\text{tg}\,x(\text{tg}\,x-1)-(\text{tg}\,x-1)=0$, $(2\text{tg}\,x-1)(\text{tg}\,x-1)=0$

$$\left[\begin{array}{l}2\text{tg}\,x-1=0\\ \text{tg}\,x-1=0\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}\text{tg}\,x=\frac{1}{2}\\ \text{tg}\,x=1\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}x=\text{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in Z\end{array}\right.$$

тогда наибольший отрицательный корень равен $-\frac{3\pi}{4}$.

2.4.В04. а) $2(\cos^3x-\sin^3x)=1{,}5(\cos x-\sin x)$
$2(\cos x-\sin x)(\cos^2x+\cos x\sin x+\sin^2x)=1{,}5(\cos x-\sin x)$
$(\cos x-\sin x)(2+\sin 2x-1{,}5)=0$, $(\cos x-\sin x)\left(\sin 2x+\frac{1}{2}\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ \sin 2x+\frac{1}{2}=0\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}\text{tg}\,x=1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ 2x=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right..$$

т.е. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ 2x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$;

б) $2(\cos 3x+\sin 3x)=2{,}5(\cos x+\sin x)$
$2(\cos x+\sin x)(\cos^2x-\sin x\cos x+\sin^2x)=2{,}5(\cos x+\sin x)$
$(\cos x+\sin x)(2-\sin 2x-2{,}5)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}\text{tg}\,x=-1\\ x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z\\ x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right..$$

2.4.В05. а) $tg\pi x=tg(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{3})$ $\quad -1<x<5$;

$$\begin{cases}\pi x=\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{3}+\pi k\\ x\neq\frac{1}{2}+k\\ \frac{x}{2}+\frac{1}{3}\neq l\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{2}{3}+2k\\ x\neq\frac{1}{2}+k\\ x\neq-\frac{1}{3}+l\end{cases},\ k,l\in\mathrm{Z};\ -1<\frac{2}{3}+2k<5;\ -1\frac{2}{3}<2k<4\frac{1}{3}.$$

Значит, $k=0;\ 1;\ 2;\quad x=\frac{2}{3}; x=\frac{2}{3}+2=2\frac{2}{3};\ x=\frac{2}{3}+4=4\frac{2}{3}$.

б) $tg\pi x=tg(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3})$; $3<x<6$;

$$\begin{cases} x=\dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{3}+k \\ x\neq\dfrac{1}{2}+l \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{1}{2}+m \end{cases};\quad \begin{cases} x=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{6k}{5} \\ x\neq\dfrac{1}{2}+l \\ x\neq 5+6m \end{cases};\ 3<-\frac{2}{5}+\frac{6k}{5}<6;\ 3\frac{2}{5}<\frac{6k}{5}<6\frac{2}{5};$$

$\frac{17}{5}<\frac{6k}{5}<\frac{32}{5}$; $17<6k<32$; $\frac{17}{6}<k<\frac{32}{6}$, т.е. $k=3,\ 4,\ 5$; $x=3\frac{1}{5}$; $4\frac{2}{5}$; $5\frac{3}{5}$.

2.4.B06. а) $\sqrt{3}tg(\pi x-\frac{\pi}{7})=1$; $-2<x<1$;

$$tg(\pi x-\frac{\pi}{7})=tg(\frac{\pi}{6}+\pi k);\ \begin{cases} \pi x-\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{\pi}{6}+\pi k \\ \pi x-\dfrac{\pi}{7}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k \end{cases};\ \begin{cases} x=\dfrac{13}{42}+k \\ x\neq\dfrac{9}{14}+k \end{cases};$$

$-2<\frac{13}{42}+k<1$; $-2\frac{13}{42}<k<\frac{29}{42}$, т.е. $k=-2,-1,0$;

$k=-2$; $x=\frac{13}{42}-2=-\frac{71}{42}$; $k=-1$; $x=\frac{13}{42}-1=-\frac{29}{42}$; $k=0$; $x=\frac{13}{42}$.

б) $\sqrt{3}tg(\pi x-\frac{\pi}{5})=-3$; $-1<x<2$; $tg(\pi x-\frac{\pi}{3})=tg(-\frac{\pi}{3}+\pi k)$;

$\pi x-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{3}+\pi k$; $x=-\frac{2}{15}+k$, $k\in Z$;

$k=0; x=-\frac{2}{15}$; $k=1; x=\frac{13}{15}$; $k=2; x=\frac{28}{15}$.

2.4.B07. а) $2\cos(2\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{2}=0$; $2<x<4$; $\cos\left(2\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$2\pi x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z;\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13}{24}+n,\ n\in Z \\ x=-\dfrac{5}{24}+k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

Условию $2<x<4$ удовлетворяют только $x=\frac{61}{24}$; $\frac{85}{24}$; $\frac{67}{24}$; $\frac{91}{24}$;

б) $2\cos(2\pi x-\frac{\pi}{4})-1=0$; $-1<x<1$; $\cos\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$;

$$2\pi x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;\ \begin{cases} x=\dfrac{7}{24}+n,\ n\in Z \\ x=-\dfrac{1}{24}+k,\ k\in Z \end{cases}.$$

Условию $-1<x<1$ удовлетворяют только $x=-\frac{17}{24}$; $-\frac{1}{24}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{23}{24}$.

2.4.B08. а) $(2\sin x+1)(\text{tg } x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = 3\end{array}\right.$, очевидно, наименьший положительный корень будет при tg x=3, в I–ой четверти, корни $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ лежат в III и IV четверти.

Итак, x=arctg 3;

б) (2cos x+1)(tg x–4)=0

аналогично решения уравнения 2cos x+1=0 лежат во II и III четверти, а tg x=4 – в I и III четверти. Наименьший положителный корень лежит в I–ой четверти: является решением tg x=4.

Итак, x=arctg 4.

2.4.В09. а) $(\cos x - \sin x)^2((\cos x - \sin x)^2 - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = \sin x \\ \cos x = 0 \\ \sin x = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi n}{2}\end{array}\right.$ Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{\pi}{4} + \pi k$;

б) $(\sin x + \cos x)^2((\sin x + \cos x)^2 - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\cos x \\ \sin x = 0 \\ \cos x = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi n}{2}\end{array}\right.$ Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}, -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$.

2.4.В10. а) $5 - 10\sin^2 x - 6\sin x - 1 = 0$ $5\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{2}{5} \\ \sin x = -1\end{array}\right.$ Ответ: $(-1)^n \arcsin\dfrac{2}{5} + \pi n, -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$;

б) $6\cos^2 x + 8\cos x + 2 = 0$ $3\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$

$(3\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{3} \\ \cos x = -1\end{array}\right.$ Ответ: $\pm\arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi n, \pi + 2\pi k$.

2.4.В11. а) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{4} = \pi n \\ 4x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{3}{4}\pi + \pi n \\ x = \dfrac{\pi k}{4}\end{array}\right.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$;

б) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{6} = \pi n \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi n \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{3}\end{array}\right.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

2.4.B12. а) $4\cos^4 x=12-13\cos^2 x$ $4\cos^4 x+13\cos^2 x-12=0$

$\cos^2 x=\dfrac{-13\pm\sqrt{169+192}}{8}$ $\cos^2 x\geq 0 \Rightarrow$ $\cos^2 x=\dfrac{-13+\sqrt{361}}{8}=\dfrac{3}{4}$

$\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $x=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$ Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$;

б) $4\sin^4 x+11\sin^2 x-3=0$

$4\sin^4 x+12\sin^2 x-\sin^2 x-3=0$

$(4\sin^2 x-1)(\sin^2 x+3)=0$

$\sin x=\pm\dfrac{1}{2}$ Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$.

Уровень С.

2.4.С01. а) $\cos^4 13x-\sin^4 13x=\cos 7x$;

$(\cos^2 13x-\sin^2 13x)(\cos^2 13x+\sin^2 13x)=\cos 7x$;

$\cos 26x=\cos 7x$

$$\left[\begin{array}{l}26x=7x+2\pi k,\ k\in Z\\ 26x=-7x+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.;\Rightarrow\left[\begin{array}{l}19x=2\pi k,\ k\in Z\\ 33x=2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.;\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi k}{19},\ k\in Z\\ x=\dfrac{2\pi n}{33},\ n\in Z\end{array}\right.;$$

б) $\cos^4 14x-\sin^4 14x=\cos 9x$; $\cos 28x=\cos 9x$;

$$\left[\begin{array}{l}28x=9x+2\pi k,\ k\in Z\\ 28x=-9x+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}19x=2\pi k,\ k\in Z\\ 37x=2\pi n,\ k\in Z\end{array}\right.>\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi k}{19},\ k\in Z\\ x=\dfrac{2\pi n}{37},\ n\in Z\end{array}\right..$$

2.4.С02 а) $\sin^4 9x-\cos^4 9x=\cos 11x$;

$\sin^2 9x-\cos^2 9x=\cos 11x$; $-\cos 18x=\cos 11x$;

$$\cos 18x=\cos(\pi+11x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}18x=11x+\pi(2k+1),\ k\in Z\\ 18x=-11x+\pi(24-1),\ n\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi k+\pi}{7},\ k\in Z\\ x=\dfrac{2\pi n-\pi}{29},\ n\in Z\end{array}\right..$$

б) $\sin^4 12x-\cos^4 12x=\cos 9x$; $-\cos 24x=\cos 9x$; $\cos 24x=\cos(\pi+9x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}24x=\pi+9x+2\pi k,\ k\in Z\\ -24x=-9x+\pi(2n-1),\ n\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi k+\pi}{15},\ k\in Z\\ x=\dfrac{2\pi n-\pi}{33},\ n\in Z\end{array}\right..$$

2.4.С03. а) $\sin(3x-\frac{\pi}{8})=\cos(x-\frac{\pi}{9})$;

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{9}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{5\pi}{8}-3x=x-\dfrac{\pi}{9}+2\pi k,\ k\in Z\\ \dfrac{5\pi}{8}-3x=-x+\dfrac{\pi}{9}+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{53\pi}{288}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\\ x=\dfrac{37\pi}{144}-\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.;$$

б) $\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\cos(3x+\frac{6\pi}{5})$; $\cos(\frac{\pi}{2}-x+\frac{2\pi}{3})=\cos(3x+\frac{6\pi}{5})$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{7\pi}{6}-x=3x+\frac{6\pi}{5}+2\pi k,\ k\in Z \\ \frac{7\pi}{6}-x=-3x-\frac{6\pi}{5}+2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{120}+\frac{\pi k}{2}+2\pi k,\ k\in Z \\ x=\frac{71\pi}{60}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right. .$$

2.4.C04. а) $\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\sqrt{-\cos x}=0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x\le 0 \end{cases} \\ \cos x=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}\pi+2\pi n \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi k$;

б) $\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\sin x}=0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x\le 0 \end{cases} \\ \sin x=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ x=\pi k \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \pi k$.

2.4.C05.

а) $\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\operatorname{tg} x-1}=0$ $\begin{cases} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} x\ne 1 \end{cases}$ $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$ Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$;

б) $\frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\operatorname{tg} x+1}=0$ $\begin{cases} \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} x\ne -1 \end{cases}$ $x=-\frac{3}{4}\pi+2\pi n$ Ответ: $-\frac{3}{4}\pi+2\pi n$.

2.4.C06.

а) $tg(\frac{\pi}{4}-x)ctg(x-\frac{\pi}{6})=0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\frac{\pi}{4}-x)=0 \\ \cos(x-\frac{\pi}{6})=0 \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}-x=\pi k,\ k\in Z \\ x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ x=\frac{2\pi}{3}+\pi m,\ m\in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ наибольший отрицательный корень $x_н=-\frac{\pi}{3}$.

б) $tg(\frac{\pi}{6}-x)ctg(x-\frac{\pi}{4})=0$; $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}-x=\pi k,\ k\in Z \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}-\pi k,\ k\in Z \\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi l,\ l\in Z \end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ наибольший отрицательный корень $x_н=-\frac{\pi}{4}$.

2.4.C07. а) $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

$$\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)\left(2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=2\pi n\\ x-\frac{\pi}{4}=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{5\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$;

б) $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$

$$\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1\right)\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\\ x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

2.4.C08. а) $6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-2=0$

$$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-2=0$$

$$\left(3\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+2\right)\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\frac{2}{3}\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n\\ \frac{\pi}{6}-2x=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$;

б) $10\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

$$10\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+5\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$$

$$\left(2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\left(5\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}\\ \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\\ 2x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\arccos\dfrac{1}{5}+2\pi k\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{8}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi k$.

2.4.C09.

а) $4\sin 2x\cos 4x=\dfrac{1}{\cos 2x}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin 4x\cos 4x=1\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 8x=1\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{4}\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\end{cases}$ Ответ: $\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{4}$;

б) $4\cos 3x\cos 6x=\dfrac{1}{\sin 3x}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 12x=1\\ \sin 3x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}12x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ 3x\neq\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{6}\\ x\neq\dfrac{\pi k}{3}\end{cases}$ Ответ: $\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{6}$.

2.4.C10.

а) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos 4x\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x=\cos 4x$

$\Leftrightarrow\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x=\cos 4x\Leftrightarrow\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{3x-\frac{\pi}{6}}{2}\sin\dfrac{5x+\frac{\pi}{6}}{2}=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{3x-\frac{\pi}{6}}{2}=0\\ \sin\dfrac{5x+\frac{\pi}{6}}{2}=0\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}3x-\dfrac{\pi}{6}=2\pi n\\ 5x+\dfrac{\pi}{6}=2\pi k\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2}{3}\pi n\\ x=-\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2}{5}\pi k\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n;\ -\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}\pi k$;

б) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin 5x\quad \sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}=\sin 5x$

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 5x\quad 2\sin\dfrac{4x+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{6x-\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$$\left[\begin{array}{l}4x+\dfrac{\pi}{4}=2\pi n\\ 6x-\dfrac{\pi}{4}=\pi+2\pi k\end{array}\right.$$ Ответ: $-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{3}$.

2.4.C11. а) $\left(x^2-7x+10\right)\sqrt{\cos x}=0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \begin{cases}x^2-7x+10=0\\ \cos x\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\\ \begin{cases}x=2,\ x=5\\ \cos x\ge 0\end{cases}\end{array}\right..$$ Ответ: 5, $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$;

б) $\left(x^2-6x+8\right)\sqrt{\sin x}=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \begin{cases}x^2-6x+8=0\\ \sin x\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ \begin{cases}x=2,\ x=4\\ \sin x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$ Ответ: 2, πn.

2.4.C12. а) sin x+2cos 4x=3 $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1\\ \cos 4x=1\end{cases}$

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ 4x=2\pi k\end{cases} \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=\dfrac{\pi k}{2}\end{cases}$$ Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$;

б) $\cos x+3\sin\dfrac{x}{4}=4 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=1\\ \sin\dfrac{x}{4}=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi n\\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi n\\ x=2\pi+8\pi k\end{cases}$$

Ответ: $2\pi+8\pi k$.

Уровень D.

2.4.D01. а) $\cos 6\pi x\sin 9\pi x=\cos\pi x\sin 14\pi x$; $x\in[3,4]$;

$\sin 9\pi x\cos 6\pi x=\sin 14\pi x\cos\pi x$;

$\dfrac{1}{2}[\sin 15x\pi+\sin 3\pi x]=\dfrac{1}{2}[\sin 15\pi x+\sin 13\pi x]$;

$\sin 3\pi x=\sin 13\pi x$; $\left[\begin{array}{l}3\pi x=13\pi x+2\pi k,\ k\in Z\\ 3\pi x=\pi-13\pi x+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{k}{5},\ k\in Z\\ x=\dfrac{2n+1}{16},\ n\in Z\end{array}\right.$, значит,

число решений уравнения, принадлежащих отрезку [3; 4], равно 14.

б) $\cos 4\pi x\sin 8\pi x=\cos\pi x\sin 11\pi x$, $x\in[-2,-1]$;

$\frac{1}{2}[\sin 12\pi x + \sin 4\pi x] = \frac{1}{2}[\sin 12\pi x + \sin 10\pi x]$; $\sin 4\pi x = \sin 10\pi x$;

$$\left[\begin{array}{l} 4\pi x = 10\pi x + 2\pi k,\ k \in Z \\ 4\pi x = \pi - 10\pi x + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{k}{3},\ k \in Z \\ x = \frac{2n+1}{14},\ n \in Z \end{array}\right. .$$

Отрезку $[-2,-1]$ принадлежат 11 корней уравнения.

2.4.D02.

а) $8\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 3 = -2\cos 2x$; $4[\cos x - \cos 2x] - 3 = -2\cos 2x$;

$2\cos 2x - 4\cos x + 3 = 0$; $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$;

$\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x_{наим} = \frac{\pi}{3}$;

б) $8\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3 = 6\cos 2x$; $4[\cos 2x + \cos x] - 3 - 6\cos 2x = 0$;

$2\cos 2x - 4\cos x + 3 = 0$; $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$;

Аналогично с а) $x_{наим} = \frac{\pi}{3}$.

2.4.D03.

а) $ctg(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5}) = tg(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi x}{5})$;

$\cos(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi x}{5}) = \sin(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5})\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi x}{5})$; $\cos(2\pi + \frac{\pi x}{5}) = 0$;

$2\pi + \frac{\pi x}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $x = -\frac{15}{2} + 5k = -7\frac{1}{2} + 5k$, $k \in Z$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5}) \neq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi x}{5}) \neq 0 \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5} \neq \pi l,\ l \in Z \\ \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi x}{5} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{35}{4} + 5l,\ l \in Z \\ x \neq \frac{5}{4} + \frac{5}{2}m,\ m \in Z \end{array}\right. .$$

Решения не противоречат.

Первый положительный корень $x_1 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $x_{48} = \frac{5}{2} + 47\cdot 5 = \frac{475}{2}$;

$$S_{48} = \frac{x_1 + x_{48}}{2}\cdot 48 = \frac{\frac{5}{2} + \frac{475}{2}}{2}\cdot 48 = \frac{480}{4}\cdot 48 = 480\cdot 12 = 5760 .$$

б) $ctg(\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi x}{4}) = tg(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2})$;

$\cos(\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi x}{4})\cos(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi x}{4})\sin(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2})$;

$\cos(\pi + \frac{\pi x}{4}) = 0$; $\pi + \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{x}{4} = -\frac{1}{2} + k$, $k \in Z$; $x = -2 + 4k$, $k \in Z$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin(\frac{3\pi}{5}+\frac{3\pi x}{4})\neq 0\\ \cos(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2})\neq 0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{5}+\frac{3\pi x}{4}\neq \pi l,\ l\in Z\\ \frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3x}{4}\neq l-\frac{3}{5},\ l\in Z\\ x\neq -\frac{1}{5}+2m,\ m\in Z\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x\neq\frac{4}{5}+\frac{4}{3}l,\ l\in Z\\ x\neq -\frac{1}{5}+2m,\ m\in Z\end{array}\right..$$

Область, где решения не существуют, не пересекается с решением.

$x_1 = 2$; $x_{50} = 2+4\cdot 49 = 198$;

$$S_{50}=\frac{x_1+x_{50}}{2}\cdot 50=\frac{2+198}{2}\cdot 50=5000\ .$$

2.4.D04.

а) $35cox4x+12\cos 2x = 35\sin 2x+12\sin 4x$;

$35(\cos 4x-\sin 2x)=12(\sin 4x-\cos 2x)$;

$35(1-\sin 2x-2\sin^2 2x)=12(2\sin 2x\cos 2x-\cos 2x)$;

$-35(2\sin 2x-1)(\sin 2x+1)=12\cos 2x(2\sin 2x-1)$;

$(12\cos 2x+35\sin 2x+35)(2\sin 2x-1)=0$;

$$(2\sin 2x-1)(\frac{12}{\sqrt{12^2+35^2}}\cos 2x+\frac{35}{\sqrt{1369}}\sin 2x+\frac{35}{37})=0\ ;$$

$2\sin 2x-1=0$; $\sin 2x=\frac{1}{2}$; $2x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$;

$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$ - I-серия решений.

$\frac{12}{37}\cos 2x+\frac{35}{37}\sin 2x=-\frac{35}{37}$; $\arcsin\frac{12}{37}+2x=(-1)^n\arcsin(-\frac{35}{37})+\pi n$;

$$x=\frac{(-1)^n\arcsin(-\frac{35}{37})+\pi n-\arcsin\frac{12}{37}}{2},\ n\in Z$$ — II серия решений.

б) $9\cos 3x+40\cos 4x=9\sin 4x-40\sin 3x$;

$9(-\cos 3x+\sin 4x)=40(\sin 3x+\cos 4x)$.

Воспользуемся формулами

$$\sin\alpha+\cos\beta=(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2})(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2})\ ;$$

$$\sin\alpha-\cos\beta=(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2})(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2})\ .$$

Получим $9(\sin\frac{7x}{2}+\cos\frac{7x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})=40(\sin\frac{7x}{2}+\cos\frac{7x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{7x}{2}+\cos\frac{7x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7x}{2})=0\\ \sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})=0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}+\frac{7x}{2}=\pi k,\ k\in Z\\ \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right..$$

2.4.D05. а) $\sin^2 x+\sin^2 5x+\sin^2 7x+\sin^2 11x=2$;

$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 10x}{2}+\frac{1-\cos 14x}{2}+\frac{1-\cos 22x}{2}=2$;

$4-\cos 2x-\cos 10x-\cos 14x-\cos 22x=4$;

$\cos 2x+\cos 22x+\cos 10x+\cos 14x=0$;

$2\cos 12x\cos 10x+2\cos 12x\cos 2x=0$;

$\cos 12x(\cos 10x+\cos 2x)=0$; $\cos 12x\cdot\cos 6x\cdot\cos 4x=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 12x=0\\ \cos 6x=0\\ \cos 4x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}12x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 6x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{12},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi l}{4},\ l\in Z\end{array}\right..$$

б) $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 9x+\cos^2 10x=2$;

$\frac{\cos 6x+1}{2}+\frac{\cos 8x+1}{2}+\frac{\cos 18x+1}{2}+\frac{\cos 20x+1}{2}=2$;

$\cos 6x+\cos 20x+\cos 8x+\cos 18x=0$;

$\cos 13x\cos 7x+\cos 13x\cos 5x=0$; $\cos 13x\cos 6x\cos x=0$;

$$\left[\begin{array}{l}13x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 6x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{26}+\frac{\pi k}{13},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi l}{6},\ l\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right..$$

2.4.D06. а) $\cos^4 5x-\sin^4 5x=\sin x$; $\cos^2 5x-\sin^2 5x=\sin x$;

$\frac{\cos 10x+1}{2}-\frac{1-\cos 10x}{2}=\sin x$; $\cos 10x-\sin x=0$;

$\sin x-\cos 10x=0$.

Воспользуемся формулами из 2.4.D04.

$(\sin\frac{11x}{2}+\cos\frac{11x}{2})(\cos\frac{9x}{2}+\sin\frac{9x}{2})=0$; $\sin(11x+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{9x}{2}+\frac{\pi}{4})=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\frac{11x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi k,\ k\in Z\\ \frac{9x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi k}{11},\ k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{9},\ n\in Z\end{array}\right..$$

б) $\sin^4 13x-\cos^4 13x=\sin x$; $(\sin^2 13x-\cos^2 13x)=\sin x$;

$-\cos 26x=\sin x$; $\cos 26x+\sin x=0$;

$(\sin\frac{27}{2}x+\cos\frac{27}{2}x)(\cos\frac{25}{2}x-\sin\frac{25}{2}x)=0$;

$\sin(\frac{27}{2}x+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{25}{2}x+\frac{\pi}{4})=0$;

$\left[\begin{array}{l}\frac{27}{2}x+\frac{\pi}{4}=\pi k,\ k\in Z\\ \frac{25}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{54}+\frac{2\pi k}{27},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{50}+\frac{2\pi n}{25},\ n\in Z\end{array}\right.$.

2.4.D07. а) $\sin^2 8x+\sin^2 9x=\sin^2 17x$;

$\frac{1-\cos16x}{2}+\frac{1-\cos18x}{2}=\frac{1-\cos34x}{2}$; $1-\cos16x-\cos18x+\cos34x=0$;

$1-2\cos17x\cos x+2\cos^2 17x-1=0$; $\cos17x(\cos17x-\cos x)=0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos17x=0\\ \cos17x=\cos x\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}17x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 17x=\pm x+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{34}+\frac{\pi k}{17},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi n}{8},\ n\in Z\\ x=\frac{\pi n}{9},\ m\in Z\end{array}\right.$;

б) $\cos^2 4x+\cos^2 9x=\cos^2 13x+1$;

$\frac{\cos8x+1}{2}+\frac{\cos18x+1}{2}=\frac{\cos26x+1}{2}+1$;

$\cos8x+\cos18x-\cos26x-1=0$;

$2\cos13x\cos5x-2\cos^2 13x+1-1=0$;

$\cos13x(\cos5x-\cos13x)=0$;

$\left[\begin{array}{l}13x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 13x=\pm5x+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{26}+\frac{\pi k}{13},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi n}{9},\ n\in Z\\ x=\frac{\pi l}{4},\ l\in Z\end{array}\right.$.

2.4.D08. а) $\frac{\cos9x-\sin7x}{\sin9x-\cos7x}=\sqrt{3}$;

$\frac{(\sin8x+\cos8x)(-\sin x-\cos x)}{(\sin8x+\cos8x)(\cos x-\sin x)}=\sqrt{3}$; $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\sqrt{3}$;

$\left\{\begin{array}{l}\sin x+\cos x=\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\cos x\\ \sin(x-\frac{\pi}{4})\neq0\\ \sin(8x+\frac{\pi}{4})\neq0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\sin x-\cos x\\ x-\frac{\pi}{4}\neq\pi k,\ k\in Z\\ 8x+\frac{\pi}{4}\neq\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{32},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{32},\ n\in Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{32},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}+\pi k\ ,\ k\in Z.$$

б) $\frac{\sin x-\cos 5x}{\cos x-\sin 5x}=\sqrt{3}$; $\frac{(\sin 3x+\cos 3x)(\cos 2x+\sin 2x)}{(\sin 3x+\cos 3x)(\sin 2x-\cos 2x)}=\sqrt{3}$;

$$\begin{cases} \cos 2x+\sin 2x=\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x \\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x \\ 3x+\frac{\pi}{4}\neq\pi l,\ l\in Z \\ 2x-\frac{\pi}{4}\neq\pi n,\ n\in Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \\ x\neq\frac{\pi l}{3}-\frac{\pi}{12},\ l\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ x\neq\frac{\pi l}{3}-\frac{\pi}{12},\ l\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ x\neq\frac{\pi l}{3}-\frac{\pi}{12},\ l\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi l}{3}-\frac{\pi}{12},\ l\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\ ,\ k\in Z.$$

2.4.D09.

а) $\frac{\sqrt{3}-tg3x}{\sqrt{3}tg7x-1}=\frac{\cos 7x}{\cos 3x}$;

$\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x$;

$\cos(3x+\frac{\pi}{6})=-\cos(7x+\frac{\pi}{3})$; $\cos(3x+\frac{\pi}{6})+\cos(7x+\frac{\pi}{3})=0$;

$\cos(5x+\frac{\pi}{4})\cos(2x+\frac{\pi}{12})=0$; $\left[\begin{array}{l} 5x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k \\ 2x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5} \\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2} \end{array}\right.$, $k,n\in \mathrm{Z}$;

б) $\frac{\sqrt{3}ctg3x-1}{\sqrt{3}-ctg9x}=\frac{\sin 9x}{\sin 3x}$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin 3x\neq 0 \\ \mathrm{ctg}9x\neq\sqrt{3} \\ \sin 9\mathrm{x}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq\frac{\pi k}{9},\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{54}+\frac{\pi n}{9},\ n\in Z \end{cases}$;

$\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=\sqrt{3}\sin 9x-\cos 9x$; $\sin(\frac{\pi}{3}-3x)=\sin(9x-\frac{\pi}{6})$;

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-3x=9x-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ \frac{\pi}{3}-3x=\frac{\pi}{6}-9x+(2l+1)\pi \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6} \\ x=-\frac{\pi}{36}+\frac{(2l+1)}{6}\pi \end{array}\right.$, $l,n\in \mathrm{Z}$.

2.4.D10. а) $\frac{tg4x}{tg14x}=0$; $\begin{cases} \mathrm{tg}4x=0 \\ \mathrm{tg}14x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=\pi k,\ k\in Z \\ 14x\neq\pi n,\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi k}{4},\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi n}{14},\ n\in Z \end{array}\right. \Rightarrow$

$x=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 2n,\ k,\ n\in Z.$

б) $\frac{ctg3x}{ctg24x}=0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ctg}3x=0 \\ \mathrm{ctg}24x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z \\ 24x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z \\ x\neq\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{24},\ n\in Z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z.$

2.4.D11. а) $\frac{\sin(8x-\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3})}=0$. Область определения $\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z.$

Решение: $8x-\frac{\pi}{6}=\pi n$, $x=\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in Z.$

б) $\frac{\cos(3x+\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{x}{9}-\frac{\pi}{3})}=0$. Область определения $\frac{x}{9}-\frac{\pi}{3}\neq\pi k$, $x\neq 3\pi+9\pi k$.

Решение: $3x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $x=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z.$

2.4.D12. а) $\frac{2}{\sin x}+13\cos x=-13\sin x$; $x\neq\pi k$ — область определения;

$2+13\sin x\cos x=-13\sin^2 x$; $2+\frac{13}{2}\sin 2x=-\frac{13}{2}(1-\cos 2x)$;

$13(\sin 2x - \cos 2x) = -13 - 4$; $13(\cos 2x - \sin 2x) = 17$,

$\sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{17}{13}$; $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{17}{13\sqrt{2}}$;

$2x + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{17}{13\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{8} \pm \frac{\arccos(\frac{17}{13\sqrt{2}})}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

б) $49\cos x + 11\sin x = \frac{4}{\cos x}$. Область определения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$;

$49\cos^2 x + 11\sin x\cos x - 4 = 0$; $49(\frac{\cos 2x + 1}{2}) + \frac{11}{2}\sin 2x - 4 = 0$;

$49\cos 2x + 11\sin 2x = -41$; $\frac{49}{\sqrt{2522}}\cos 2x + \frac{11}{\sqrt{2522}}\sin 2x = -\frac{41}{\sqrt{2522}}$,

$\cos(2x - \arccos\frac{49}{\sqrt{2522}}) = -\frac{41}{\sqrt{2522}}$;

$2x - \arccos\frac{49}{\sqrt{2522}} = \pm\arccos(-\frac{41}{\sqrt{2522}}) + 2\pi k$, $k \in Z$;

$x = \frac{\arccos\frac{49}{\sqrt{2522}} \pm \arccos(-\frac{41}{\sqrt{2522}})}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

§ 5. Показательные уравнения

Уровень А.

2.5.А01.

а) $5^{3x} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $5^{3x} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}$; $5^{3x} = 5^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow 3x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{9}$. Отв: $x = -\frac{1}{9}$.

б) $2^{3x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $2^{3x} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$; $2^{3x} = 2^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow 3x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$. Отв: $x = -\frac{1}{12}$.

2.5.А02.

а) $3^{x^2+3x-1} = \frac{1}{27}$; $3^{x^2+3x-1} = \frac{1}{3^3}$; $3^{x^2+3x-1} = 3^{-3} \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = -3$;

$x^2 + 3x + 2 = 0$; $D = 9 - 4\cdot 2 = 1$; $x = \frac{-3 \pm 1}{2}$; $x_1 = -2$; $x_2 = -1$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

б) $4^{x^2-8x+12} = \frac{1}{64}$; $4^{x^2-8x+12} = 4^{-3} \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = -3$;

$x^2 - 8x + 15 = 0$; $D = 64 - 4\cdot 15 = 4$; $x = \frac{8 \pm 2}{2}$; $x_1 = 5, x_2 = 3$. Отв: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

2.5.А03.

а) $\begin{cases} 2^{x-3y} = 16 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x-3y} = 2^4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 3y = 4 \,|\cdot 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

Вычтем 2 уравнение системы из первого, тогда

$\begin{cases} -7y = 3 \\ x = 4 + 3y \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\dfrac{3}{7} \\ x = \dfrac{19}{7} \end{cases}$. Ответ: $x = \dfrac{19}{7}, y = -\dfrac{3}{7}$.

б) $\begin{cases} 64^{x-3y} = 8 \\ 12x + y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 8^{2x-6y} = 8 \\ 12x + y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 6y = 1 \\ 12x + y = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x - 6(2 - 12x) = 1 \\ y = 2 - 12x \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 12 + 72x - 1 = 0 \\ y = 2 - 12x \end{cases}$; $\begin{cases} 74x = 13 \\ y = 2 - 12x \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{13}{74} \\ y = 2 - 12x \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \dfrac{13}{74} \\ y = 2 - 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{13}{74} \\ y = 2 - \dfrac{78}{37} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{13}{74} \\ y = 2 - \dfrac{78}{37} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{13}{74} \\ y = -\dfrac{4}{37} \end{cases}$; Ответ: $x = \dfrac{13}{74}, y = -\dfrac{4}{37}$.

2.5.A04.

а) $4^{2x} - 3 \cdot 4^x - 4 = 0$.

Пусть $4^x = t$, тогда уравнение имеет вид: $t^2 - 3t - 4 = 0$;

$D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$; $t = \dfrac{3 \pm 5}{2}$; $t_1 = 4, t_2 = -1$; $4^x = 4 \Rightarrow x = 1$;

$4^x = -1 \Rightarrow$ решений нет. Ответ: $x = 1$.

б) $2^{2x} - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$. Пусть $2^x = t$, тогда уравнение имеет вид:

$t^2 - 14t - 32 = 0$; $D = 14^2 + 4 \cdot 32 = 18^2$; $t = \dfrac{14 \pm 18}{2}$; $t_1 = -2$; $t_2 = 16$;

$2^x = -2 \Rightarrow$ решений нет; $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$. Ответ: $x = 4$.

2.5.A05.

а) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{5x-y} = 25 \\ 2^{2x-y} = \dfrac{1}{32} \end{cases}$; $\begin{cases} 5^{y-5x} = 5^2 \\ 2^{2x-y} = 2^{-5} \end{cases}$; $\begin{cases} y - 5x = 2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2 + 5x \\ 2x - (2 + 5x) = -5 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 2 + 5x \\ 2x - 2 - 5x + 5 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2 + 5x \\ -3x = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2 + 5 \\ x = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 7 \\ x = 1 \end{cases}$. Ответ: $x = 1, y = 7$.

б) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-y} = 27 \\ 5^{3x-y} = \dfrac{1}{25} \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{y-2x} = 3^3 \\ 5^{3x-y} = 5^{-2} \end{cases}$; $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 3 + 2x \\ 3x - 3 - 2x = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 3 + 2x \\ x = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$. Ответ: $x = 1, y = 5$.

2.5.A06. а) $4^{4x-17} = 64$; $4x - 17 = 3$; $4x = 20$; $x = 5$. Ответ: $x = 5$

б) $5^{2x-8} = 25$; $5^{2x-8} = 5^2$; $2x - 8 = 2$; $2x = 10$; $x = 5$. Ответ: $x = 5$

Уровень В.

2.5.В01. а) $2^{5x-4}=16^{x+3}$; $5x-4=4x+12$; $x=16$. Ответ: $x=16$

б) $3^{5x+2}=81^{x-1}$; $3^{5x+2}=3^{4x-4}$; $5x+2=4x-4$; $x=-6$. Ответ: $x=-6$.

2.5.В02. а) $2000^{x^2-9}=1999^{x^2-9}$; $x^2-9=0$; $x=\pm 3$; Ответ: $x=\pm 3$

б) $2003^{x^2-36}=2004^{x^2-36}$; $x^2-36=0$; $x=\pm 6$.; Ответ: $x=\pm 6$.

2.5.В03. а) $(\frac{1}{36})^{x+1}=\sqrt{6}$; $6^{-2x-2}=6^{\frac{1}{2}}$; $-2x-2=\frac{1}{2}$; $-2x=2\frac{1}{2}$; $x=-1\frac{1}{4}$.

Ответ: $x=-1\frac{1}{4}$.

б) $(\frac{1}{64})^{x-1}=4\sqrt{2}$; $2^{-6x+6}=\sqrt{32}$; $2^{-6x+6}=\sqrt{2^5}$; $2^{-6x+6}=2^{\frac{5}{2}}$;

$-6x=\frac{5}{2}-6$; $-6x=-\frac{7}{2}$; $x=\frac{7}{12}$. Ответ: $x=\frac{7}{12}$.

2.5.В04. а) $4^{x^2-8x+12}=\frac{1}{64}$; $x^2-8x+12=-3$; $x^2-8x+15=0$; $x_1=3, x_2=5$

(по т. Виета) Ответ: $x_1=3, x_2=5$.

б) $3^{x^2+3x-2}=\frac{1}{81}$; $x^2+3x-2=-4$; $x^2+3x+2=0$; $x_1=-2, x_2=-1$.

Ответ: $x_1=-2, x_2=-1$.

2.5.В05. а) $3\cdot 2^{x+3}-2^{x+4}=4$; $3\cdot 2^x\cdot 2^3-2^x\cdot 2^4=4$; $24\cdot 2^x-16\cdot 2^x=4$; $8\cdot 2^x=4$;
$2^3\cdot 2^x=4$; $2^{x+3}=2^2$; $x+3=2$; $x=-1$.
Ответ: $x=-1$.
б) $3^{x+1}+2\cdot 3^{x+2}=21$; $3^x\cdot 3+2\cdot 3^x\cdot 3^2=21$; $3\cdot 3^x+18\cdot 3^x=21$; $21\cdot 3^x=21$; $3^x=1$;
$x=0$. Ответ: $x=0$.
2.5.В06. а) $2^{4x+3}-3\cdot 2^{4x-1}-5\cdot 2^{4x+1}=-56$.
Пусть $4x-1=t$, тогда уравнение примет вид:
$2^{t+4}-3\cdot 2^t-5\cdot 2^{t+2}=-56$; $2^t\cdot 2^4-3\cdot 2^t-5\cdot 2^t\cdot 4=-56$;
$16\cdot 2^t-3\cdot 2^t-20\cdot 2^t=-56$; $-7\cdot 2^t=-56$; $2^t=2^3$;
$4x-1=3 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$. Ответ: $x=1$.
б) $4^{2x+1}+3\cdot 4^{2x-1}-5\cdot 4^{2x}=-64$.
Пусть $2x-1=t$, тогда уравнение примет вид:
$4^{t+1}+3\cdot 4^t-5\cdot 4^{t+1}=-64$; $16\cdot 4^t+3\cdot 4^t-20\cdot 4^t=-64$; $-4^t=-64$;
$4^t=64$; $t=3$; $2x-1=3 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$. Ответ: $x=2$.
2.5.В07. а) $3^{x^2-3x}=27^{x^2-3}$; $x^2-3x=3x^2-9$; $-2x^2-3x+9=0$; $2x^2+3x-9=0$;
$D=9+4\cdot 2\cdot 9=81$; $x=\frac{-3\pm 9}{-4}$; $x_1=-3$, $x_2=\frac{3}{2}$. Ответ: $x_1=-3, x_2=\frac{3}{2}$.

б) $4^{x^2+5x}=16^{x^2+3}$; $4^{x^2+5x}=4^{2(x^2+3)}$; $4^{x^2+5x}=4^{2x^2+6}$; $x^2+5x=2x^2+6$;
$-x^2+5x-6=0$; $x^2-5x+6=0$; $x_1=2, x_2=3$. Ответ: $x_1=2, x_2=3$.

2.5.В08. а) $3^{2x}-2\cdot 3^x-3=0$.

Пусть $3^x = t$, тогда уравнение примет вид: $t^2 - 2t - 3 = 0$;

$t = 3, t = -1$; $3^x = 3 \Rightarrow x = 1; 3^x = -1$ не имеет решений. Ответ: $x = 1$.

б) $2^{2x} - 3\cdot 2^x - 4 = 0$ Пусть $2^x = t$, тогда уравнение примет вид: $t^2 - 3t - 4 = 0$;

$t = 4, t = -1$; $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$; $2^x = -1$ - решений нет. Ответ: $x = 2$.

2.5.B09. а) $35^{1-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}\cdot 7^x$; $35^{1-x} = 5^x 7^x$; $35^{1-x} = 35^x$; $1 - x = x$;

$1 = 2x; x = \frac{1}{2}$. Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

б) $63^{3-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x}\cdot 9^x$; $63^{3-x} = 7^x\cdot 9^x$; $63^{3-x} = 63^x$; $3 - x = x$;

$2x = 3; x = \frac{3}{2}$. Ответ: $\frac{3}{2}$.

2.5.B10. а) $\begin{cases} 4\cdot 11^x + y = 48 \\ 11^x + 4y = 27 \end{cases}$; $\begin{cases} 4t + y = 48 \\ 11^x + 4y = 27 \end{cases}$; $\begin{cases} 4(27 - 4y) + y = 48 \\ 11^x = 27 - 4y \end{cases}$;

$4(27 - 4y) + y = 48$; $108 - 16y + y = 48$; $-15y = -60$;

$y = 4$; $11^x = 27 - 4\cdot 4$; $11^x = 11 \Rightarrow x = 1$. Ответ: $x = 1, y = 4$.

б) $\begin{cases} 3\cdot 5^x + y = 78 \\ 5^x - 3y = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\cdot 5^x + y = 78 \\ 5^x = 16 + 3y \end{cases}$; $\begin{cases} 3(16 + 3y) + y = 78 \\ 5^x = 16 + 3y \end{cases}$;

$48 + 9y + y = 78$; $10y = 30$; $y = 3$; $5^x = 16 + 3\cdot 3$; $x = 2$.

Ответ: $x = 2, y = 3$.

2.5.B11. а) $\begin{cases} 2^x - 4\cdot 2^y = -62 \\ 3\cdot 2^x + 4\cdot 2^y = 70 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x - 70 + 3\cdot 2^x = -62 \\ 4\cdot 2^y = 70\cdot 3\cdot 2^x \end{cases}$; $2^x - 8 + 3\cdot 2^x = 0$;

$4\cdot 2^x = 8$; $2^x = 2$; $x = 1$; $4\cdot 2^y = 70 - 3\cdot 2$; $2^y = 16$; $y = 4$. Ответ: $x = 1, y = 4$.

б) $\begin{cases} 3^x + 3\cdot 3^y = 54 \\ 4\cdot 3^x - 3\cdot 3^y = 81 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x + 4\cdot 3^x - 81 = 54 \\ 4\cdot 3^x - 81 = 3\cdot 3^y \end{cases}$; $5\cdot 3^x = 135$; $3^x = 127$; $x = 3$;

$3\cdot 3^y = 4\cdot 3^y - 81$; $3^y = 9$; $y = 2$. Ответ: $x = 3, y = 2$.

2.5.B12. а) $\begin{cases} 4^x + 3\cdot 4^y = 28 \\ x - y = 1 \end{cases}$; $4^{1+y} + 3\cdot 4^y = 28$; $4\cdot 4^y + 3\cdot 4^y = 28$; $4^y = 4$; $y = 1$;

$x = 1 + y \Rightarrow x = 2$. Ответ: $x = 2, y = 1$.

б) $\begin{cases} 3^x - 4\cdot 3^y = 69 \\ x - y = 3 \end{cases}$; $3^{3+y} - 4\cdot 3^y = 69$; $27\cdot 3^y - 4\cdot 3^y = 69$;

$3^y = 3$; $y = 1$; $x = 3 + y \Rightarrow x = 4$. Ответ: $x = 4, y = 1$.

Уровень С.

2.5.C01. а) $0{,}125\cdot 4^{3x-9} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; $2^{-3}\cdot 2^{6x-18} = 2^{\frac{5}{2}x}$; $2^{6x-18-3} = 2^{\frac{5}{2}x}$;

$6x-21=\frac{5}{2}x$; $\frac{7}{2}x=21$; $\frac{1}{2}x=3$; $x=6$.

б) $0,25\cdot 4^{5x-16}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-x}$; $2^{10x-32-2}=2^{\frac{3}{2}x}$; $10x-34=\frac{3}{2}x$; $\frac{17}{2}x=34$; $x=4$.

2.5.С02. а) $4^{3x^2+x}-28=-3\cdot 8^{x^2+\frac{1}{3}x}$; $3\cdot 2^{3x^2+x}+2^{6x^2+2x}-28=0$.

Пусть $2^{3x^2+x}=t$, тогда $t^2+3t-28=0$; $t_1=-7, t_2=4$

2^{3x^2+x} не может равняться -7

$2^{3x^2+x}=4$; $2^{3x^2+x}=2^2$; $3x^2+x-2=0$; $D=1+24=25$;

$x=\frac{-1\pm 5}{6}$; $x_1=-1$, $x_2=\frac{2}{3}$.

б) $9^{2x^2+2x}-15=-2\cdot 9^{x^2+\frac{1}{2}x}$; $9^{2x^2+x}+2\cdot 9^{x^2+\frac{1}{2}x}-15=0$.

Пусть $9^{x^2+\frac{1}{2}x}=t$, тогда $t^2+2t-15=0$; $t_1=-5, t_2=3$;

$9^{x^2+\frac{1}{2}x}$ не может равняться -5; $9^{x^2+\frac{1}{2}x}=3^{2x^2+x}=3^1$;

$2x^2+x-1=0$; $D=1+8=9$; $x_1=-1, x_2=\frac{1}{2}$;

2.5.С03. а) $5^{2x}+5^{-2x}=2$. Пусть $5^{2x}=t>0$; $t+\frac{1}{t}=2$; $t^2-2t+1=0$;

$t_1=t_2=1$; $5^{2x}=5^0$; $2x=0$; $x=0$.

б) $6^{2x}+6^{-2x}=2$; $6^{2x}=t$; $t+\frac{1}{t}=2$; $t^2-2t+1=0$; $t=1$; $x=0$.

2.5.С04. а) $8^{x-1}-6\cdot 8^{-x+2}-2=0$; $8^{x-1}-48\cdot 8^{-x+1}-2=0$; $8^{x-1}=t>0$; $t-\frac{48}{t}-2=0$;

$t^2-2t-48=0$; $t_1=8$, $t_2=-$; 8^{x-1} не может равняться -8; $8^{x-1}=8^1$; $x-1=1$; $x=2$.

б) $3^{x+5}-6\cdot 3^{-x-4}+3=0$; $3^{x+5}-18\cdot 3^{x-5}+3=0$; $3^{x+5}=t>0$; $t-\frac{18}{t}+3=0$; $t^2+3t-18=0$;

$t_1=3$, $t_2=-6$; 3^{x+5} не может равняться -6; $3^{x+5}=3^1$; $x+5=1$; $x=-4$.

2.5.С05. а) $9^x-24\cdot 3^{\frac{x-3}{2}}=3\cdot 3^{-x}$; $3^{2x}-24\cdot 3^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}-3\cdot 3^{-x}=0$;

$3^{2x}-\frac{24}{3\sqrt{3}}\cdot 3^{\frac{x}{2}}-3\cdot 3^{-x}=0$; Домножим обе части уравнения на $3^x\neq 0$;

$3^{3x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot 3^{1,5x}-3=0$; $3^{1,5x}=t$; $t^2-\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot t-3=0$; $D=\frac{64}{3}+12^{(3}=\frac{100}{3}=(\frac{10}{\sqrt{3}})^2$;

$t_1=\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}}{2}=3\sqrt{3}$, $t_2=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$, $t_2\neq 3^x$; $3^{1,5x}=3^{1,5}$; $x=1$.

б) $16^x-31\cdot 2^{\frac{3x-5}{2}}=2^{-x}$; $2^{4x}-\frac{31\cdot 2^{\frac{3x}{2}}}{4\sqrt{2}}-2^{-x}=0$;

2^{5x}- $\frac{31}{4\sqrt{2}}\cdot 2^{\frac{5x}{2}}$ -1=0; $2^{\frac{5x}{2}}=t>0$; t^2- $\frac{31}{4\sqrt{2}}t$ -1=0; D= $\frac{961+128}{32}=(\frac{33}{\sqrt{32}})^2$;

t_1= $\frac{\frac{31}{4\sqrt{2}}+\frac{33}{4\sqrt{2}}}{2}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$; $2^{\frac{5x}{2}}=2^{2\frac{1}{2}}$; x=1.

2.5.C06. а) $\sqrt{64^{5-3x}}=\sqrt[3]{16^{8+x}}$; 2^{15-9x}= $2^{\frac{4}{3}(8+x)}$; 15-9x= $\frac{4}{3}$ ·8+ $\frac{4}{3}$ x

$\frac{31}{3}$ x= $\frac{13}{3}$; x= $\frac{13}{31}$.

б) $\sqrt{27^{9-5x}}=\sqrt[3]{9^{7+x}}$; $3^{\frac{27-15x}{2}}=3^{\frac{14+2x}{3}}$; 81-45x=28+4x; 49x=53; x= $\frac{53}{49}$.

2.5.C07.

а) $\frac{1}{4^x+3}=\frac{4^x}{4^x+24}$; $\frac{4^x+24-4^x(4^x+3)}{(4^x+3)(4^x+24)}=0$;
$4^{2x}+2\cdot4^x-24=0$; $4^x=t>0$; $t^2+2t-24=0$; $t_1=4$, $t_2=-6$;
4^x не может равняться –6; $4^x=4$, x=1.

б) $\frac{1}{3^x+4}=\frac{3^x}{3^x+18}$; $3^x+18=3^{2x}+4\cdot3^x$; $3^{2x}+3\cdot3^x-18=0$; $3^x=t>0$;
$t_1=3$, $t_2=-6$; 3^x не может равняться –6; $3^x=3$, x=1.

2.5.C08.

а) $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x+5^{-x}=\frac{2}{25}$; $\frac{1}{5}\cdot5^{-\frac{x}{2}}+5^{-x}-\frac{2}{25}=0$;

$25\cdot5^{-x}+5\cdot5^{-\frac{x}{2}}$ -2=0; $5^{-\frac{x}{2}}=t>0$; $25t^2+5t-2=0$; $t^2+\frac{t}{5}-\frac{2}{25}$ =0;

t_1= $\frac{1}{5}$, t_2=- $\frac{2}{5}$; $5^{-\frac{x}{2}}$ не может равняться - $\frac{2}{5}$; $5^{-\frac{x}{2}}=5^{-1}$; $\frac{x}{2}=1$; x=2.

б) $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^x+6^{-x}=\frac{1}{4}$; $6^{-x}+\frac{4}{3}\cdot6^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{4}$ =0; $6^{-\frac{x}{2}}=t>0$; $t^2+\frac{4}{3}t-\frac{1}{4}=0$;

D= $\frac{16}{9}+1=\frac{25}{9}$; t_1= $\frac{-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}{2}=\frac{1}{6}$; t_2=- $\frac{3}{2}$; 6^{-x} не может равняться - $\frac{3}{2}$;

$6^{-\frac{x}{2}}=6^{-1}$; $\frac{x}{2}=1$; x=2.

2.5.C09. $\begin{cases}4^x\cdot5^y=20\\16^x\cdot5^{y-1}=16\end{cases}$; $\begin{cases}4^x\cdot5^y=20\\4^{2x}\cdot5^{y-1}=16\end{cases}$; $\begin{cases}4^x=\frac{20}{5^y}\\\frac{20^2}{5^{2y}}\cdot5^{y-1}=16\end{cases}$; $\frac{400}{5}\cdot5^{-y}=16$;

5^{-y}= $\frac{16}{80}=\frac{1}{5}$; $5^{-y}=5^{-1}$; y=1; 4^x= $\frac{20}{5}=4$; x=1. Ответ: x=1, y=1.

б) $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 10 \\ 25^x \cdot 2^{y-1} = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^y = \dfrac{10}{5^x} \\ \dfrac{5^{2x} \cdot 10}{5^x \cdot 2} = 25 \end{cases}$; $5^x=5$; $x=1$; $2^y=\dfrac{10}{5}$; $y=1$. Ответ: $x=1$, $y=1$.

2.5.C10. а) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 12 \\ x + y = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{64}{2^y} - 2^y = 12 \\ x = 6 - y \end{cases}$;

$2^{2y}+12\cdot 2^y-64=0$; $2^y=t$; $t^2+12t-64=0$; $t_1=4$, $t_2=-16$;
2^y не может равняться -16; $2^y=4$; $y=2$; $x=6-2=4$. Ответ: $x=4, y=2$.

б) $\begin{cases} 3^x - 3^y = -78 \\ x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{3^5}{3^y} - 3^y = -78 \\ x = 5 - y \end{cases}$; $3^{2y}-78\cdot 3^y-243=0$; $3^y=t>0$; $t^2-78\cdot t-243=0$; $t_1=-3$, $t_2=81$; $3^y=81$; $y=4$; $x=5-4=1$. Ответ: $x=1$, $y=4$.

2.5.C11. а) $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^{y+2} = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^x = 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$; $2^{-x}=3^x$; $x=0$; $y=-2$.

Ответ: $x = 0$, $y = -2$.

б) $\begin{cases} 3^{x+3} \cdot 2^{y-3} = 3 \\ x - y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{x+3} \cdot 2^{x+2} = 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$;

$3^{x+2}=2^{-x-2}$; $x+2=0$; $x=-2$; $y=3$. Ответ: $x = -2$, $y = 3$.

2.5.C12. а) $3^{2x+1}=27+53\cdot 3^x+3^{2x}$; $3^{2x}(3-1)-53\cdot 3^x-27=0$;
$2\cdot 3^{2x}-53\cdot 3^x-27=0$; $3^x=t>0$; $2t^2-53t-27=0$; $D=2809+8\cdot 27=(55)^2$;
$t=\dfrac{53 \pm 55}{4}$; $t_1=\dfrac{53+55}{4}=27$, $t_2=-\dfrac{1}{2} \neq 3^x$; $3^x=27$; $x=3$.

б) $5^{2x+1}=25+74\cdot 5^x+2\cdot 5^{2x}$; $3\cdot 5^{2x}-74\cdot 5^x-25=0$; $5^x=t>0$;
$D=5476+300=5776=(76)^2$; $t_1=\dfrac{74-76}{6}=-\dfrac{1}{3} \neq 5^x$; $t_2=25$; $5^x=25$; $x=2$.

Уровень D.

2.5.D01 а) $121\cdot 13^{x^2-9}-13\cdot 11^{x^2-8}=169\cdot 11^{x^2-9}-11\cdot 13^{x^2-8}$;
$121\cdot 13^{x^2-9}-143\cdot 11^{x^2-9}=169\cdot 11^{x^2-9}-143\cdot 13^{x^2-9}$;
$11(11\cdot 13^{x^2-9}-13\cdot 11^{x^2-9})=13(13\cdot 11^{x^2-9}-11\cdot 13^{x^2-9})$;
$11\cdot 13^{x^2-9}-13\cdot 11^{x^2-9}=0$; $13^{x^2-10}=11^{x^2-10}$; $x^2-10=0$; $x=\pm\sqrt{10}$.

б) $169\cdot 8^{x^2-6}-8\cdot 13^{x^2-5}=64\cdot 13^{x^2-6}-13\cdot 8^{x^2-5}$;
$13(13\cdot 8^{x^2-6}-8\cdot 13^{x^2-6})=8(8\cdot 13^{x^2-6}-13\cdot 8^{x^2-6})$;
$13\cdot 8^{x^2-6}-8\cdot 13^{x^2-6}=0$; $8^{x^2-7}-13^{x^2-7}=0$; $x^2-7=0$; $x=\pm\sqrt{7}$.

2.5.D02. а) $8^{1+x^2}-8\cdot 8^{1-x^2}=56$; $64\cdot 8^{-1+x^2}-8\cdot 8^{1-x^2}=56$;
$8^{-x^2+1}=t>0$; $\dfrac{64}{t}-3t=56$; $t^2+7t-8=0$; $t_1=1$, $t_2=-8 \neq 8^{-x^2+1}$;
$8^{-x^2+1}=8^0$; $x^2-1=0$; $x=\pm 1$.

б) 5^{1+x^2} -5· 5^{1-x^2} =20; 25· 5^{-1+x^2} -5· 5^{1-x^2} =20; Пусть 5^{1-x^2} =t>0.

$\frac{25}{t}-5t=20$; t^2+4t-5=0; t_1=1, t_2=-5 $\neq 5^{1-x^2}$; 5^{1-x^2} =5^0; x^2=1; x=$\pm$ 1.

2.5.D03. а) $25^{2\sqrt{x+3}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x+3}}+5=0$; $5^{4\sqrt{x+3}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x+3}}+5=0$;

$5^{2\sqrt{x+3}}$ =t>0; t^2-6t+5=0; t_1=5, t_2=1; $5^{2\sqrt{x+3}}$ =5^1; $2\sqrt{x+3}$ =1;

x+3=$\frac{1}{4}$; x_1=-2$\frac{3}{4}$; $5^{2\sqrt{x+3}}$ =5^0; x+3=0; x_2=-3. Ответ: $x_1=-2\frac{3}{4}$, $x_2=-3$.

б) $9^{\sqrt{x-2}}$ -4· $3^{\sqrt{x-2}}$ +3=0; $3^{\sqrt{x-2}}$ =t>0; t^2-4t+3=0; t_1=3, t_2=1; $3^{\sqrt{x-2}}$ =3^1; $\sqrt{x-2}$ =1;

x_1=3; $3^{\sqrt{x-2}}$ =3^0; x-2=0;x_2=2. Ответ: x_1 = 3, x_2 = 2.

2.4.D04. а) $\begin{cases} x^{4y-1}=8 \\ x^{y+3}=16 \end{cases}$; $\begin{cases} x^{\frac{4y-1}{3}}=2 \\ x^{\frac{y+3}{4}}=2 \end{cases}$; $x^{\frac{4y-1}{3}}=x^{\frac{y+3}{4}}$; $\frac{4y-1}{3}=\frac{y+3}{4}$;

16y-4=3y+9; 13y=13; y=1; x^{4-1}=8; x=2. Ответ: x = 2, y = 1.

б) $\begin{cases} x^{3y-11}=16 \\ x^{y-3}=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x^{\frac{3}{2}y-\frac{11}{2}}=4 \\ x^{y-3}=4 \end{cases}$; $x^{\frac{3}{2}y-\frac{11}{2}}=x^{y-3}$; $\frac{3}{2}y-\frac{11}{2}=y-3$;

3y-2y=-6+11; y=5; x^2=4; x=2. Ответ: x = 2, y = 5.

2.5.D05. а) $\begin{cases} 9^{x-2}-26\cdot 3^{x+2-0,5y}=3^{-x+2} \\ y-x=9 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{2x-4}-26\cdot 3^{x+2-4,5-0,5x}=3^{-x+2} \\ y=9+x \end{cases}$;

$3^{2x-4}-26\cdot 3^{0,5x-2,5}-3^{-x+2}=0 \qquad |\cdot 3^{-2+x}$;

3^{2x-4}-$\frac{26}{3\sqrt{3}}$ ·$3^{1,5x-3}$-1=0; $3^{1,5x-3}$=t>0; t^2- $\frac{26}{3\sqrt{3}}$ ·t-1=0;

D=$\frac{676+4\cdot 27}{27}=\frac{784}{27}=\left(\frac{28}{3\sqrt{3}}\right)^2$; t_1=$\frac{\frac{26}{3\sqrt{3}}+\frac{28}{3\sqrt{3}}}{2}=\frac{54}{2\cdot 3\sqrt{3}}$; $0>t_2\neq 31^{,5x-3}$;

$3^{1,5x-3}$=$\frac{27}{3\sqrt{3}}$; $3^{1,5x-3}$=$3^{1,5}$; 1,5x-3=1,5; x=3; y=12. Ответ: x = 3, y = 12.

б) $\begin{cases} 16^{x-1}+63\cdot 4^{x+1-0,5y}=4^{-x+1} \\ y-x=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 4^{2x-2}+63\cdot 4^{0,5x-2}=4^{-x+1} \\ y=6+x \end{cases}$;

4^{3x-3}+63·$4^{1,5x-3}$-1=0; 4^{3x}+63·$4^{1,5x}$-64=0; $4^{1,5x}$=t>0; t^2+63t-64=0;
t_1=1, t_2=-64 $\neq 4^{1,5x}$; $4^{1,5x}$=4^0; x=0; y=6. Ответ: x = 0, y = 6.

2.5.D06. а) $25^{-\frac{3}{x}}+35^{-\frac{3}{x}}=49^{-\frac{3}{x}}$. Разделим на $49^{-\frac{3}{x}}$;

$\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{3}{x}}+\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{x}}-1=0$; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{x}}=t>0$; t^2+t-1=0; D=1+4=5;

t_1=$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 0>t_2 $\neq \left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{x}}$; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $-\frac{3}{x}=\log_{\frac{5}{7}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; x=$-\frac{3}{\log_{\frac{5}{7}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

б) $49^{\frac{3}{x}}-42^{\frac{3}{x}}=3\cdot 36^{\frac{3}{x}}$. Разделим на $36^{\frac{3}{x}}$;

$\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{6}{x}}-\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{3}{x}}-3=0$; $\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{3}{x}}=t>0$; t^2-t-3=0; D=1+12;

t_1=$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, 0>$t_2\neq\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{3}{x}}$; $\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{3}{x}}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{3}{x}=\log_{\frac{7}{6}}\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $x=3\log\frac{1+\sqrt{13}}{2}^{\left(\frac{7}{6}\right)}$.

2.5.D07. а) $2^{4(x+3)^2}=\frac{3}{2}-2\cdot 4^{(x+4)(x+2)}$;

$2^{4(x+3)^2}+2\cdot 2^{2(x+4)(x+2)}=\frac{3}{2}$; $2^{4(x+3)^2}+\frac{1}{2}\cdot 2^{2(x+3)^2}-\frac{3}{2}=0$;

$2^{2(x+3)^2}=t>0$; t^2+$\frac{1}{2}t$ - $\frac{3}{2}$=0; t_1=1, t=-$\frac{3}{2}\neq 2^{2(x+3)^2}$; $2^{2(x+3)^2}=2^0$;

$2(x+3)^2$=0; x=–3.

б) $3^{4(x+2)^2}=\frac{4}{3}-3\cdot 9^{(x+3)(x+1)}$; $3^{4(x+2)^2}+\frac{1}{3}\cdot 3^{2(x+2)^2}-\frac{4}{3}=0$;

$3^{2(x+2)^2}=t>0$; t^2+$\frac{1}{3}t-\frac{4}{3}=0$; t_1=1, t_2=$-\frac{4}{3}\neq 3^{2(x+2)^2}$;

$2(x+2)^2$=0; x+2=0; x=-2.

2.5.D08.

а) $\left(\frac{27}{8}\right)^x\left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}=\frac{\lg 27}{\lg 9}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2x-2}=\log_9 27=1{,}5$;

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}=\frac{3}{2}$; x-2=1; x=3.

б) $\left(\frac{9}{4}\right)^x\left(\frac{8}{27}\right)^{x+1}=\frac{\lg 64}{\lg 16}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3x-3}=\frac{3}{2}$; -x-3=1; x=-4.

2.5.D09. а) 4^x-13$\cdot 3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{2x-1}$; 2^{2x}+$\frac{7}{2}\cdot 2^{2x}$=$\sqrt{3}$ (3^x+13$\cdot\frac{3^x}{3}$);

$\frac{9}{2}\cdot 2^{2x}$=$\sqrt{3}\cdot\frac{16}{3}\cdot 3^x$; $\frac{4^x}{2\cdot 16}=\frac{3^x}{9\sqrt{3}}$; $4^{x-2\frac{1}{2}}=3^{x-2\frac{1}{2}}$; x-2$\frac{1}{2}$=0; x=2$\frac{1}{2}$.

б) 9^x-2$\cdot 7^{x-\frac{1}{2}}=7^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^{2x-1}$; 3^{2x}+$\frac{4}{3}$ 3^{2x}=$\sqrt{7}$ (7^x+$\frac{2}{7}\cdot 7^x$);

$\frac{1}{3\cdot 9}3^{2x}=\frac{1}{\sqrt{7}\cdot 7}\cdot 7^x$; $9^{x-\frac{3}{2}}=7^{x-\frac{3}{2}}$; x-$\frac{3}{2}$=0; x=$\frac{3}{2}$.

2.5.D10. а) $\begin{cases}2^{2x}-3^y=-17\\ 2^x-3^{\frac{y}{2}}=-1\end{cases}$; $\begin{cases}2^{2x}-2^{2x}-2\cdot 2^x-1=-17\\ 3^{\frac{y}{2}}=2^x+1\end{cases}$;

$2\cdot 2^x$=16; x=3; $3^{\frac{y}{2}}=8+1$; $\frac{y}{2}=2$; y=4. Ответ: x = 3, y = 4.

б) $\begin{cases} 3^{2x}-5^y=-16 \\ 3^x-5^{\frac{y}{2}}=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{2x}-3^{2x}-4\cdot 3^x-4=-16 \\ 5^{\frac{y}{2}}=2+3^x \end{cases}$; $3^x=3$; x=1;

$5^{\frac{y}{2}}=2+3$; $\frac{y}{2}=1$; y=2. Ответ: x = 1, y = 2.

2.5.D11. а) $9^{\sin^2 x}+72=3(\frac{1}{3})^{\cos^2 x-3}$; $3^{2\sin^2 x}-3^{4-\cos^2 x}+72=0$;

$3^{2\sin^2 x}-9\cdot 3^{2\sin^2 x}+72=0$; $8\cdot 3^{2\sin^2 x}=72$; $3^{2\sin^2 x}=3^2$; $\sin^2 x=1$;

$\left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin x=-1 \end{array}\right.$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

б) $4^{\sin^2 x}+12=4(\frac{1}{2})^{\cos^2 x-2}$; $2^{2\sin^2 x}-2^{4-\cos^2 x}+12=0$;

$2^{2\sin^2 x}-8\cdot 2^{\sin^2 x}+12=0$; $2^{\sin^2 x}=t>0$; $t^2-8t+12=0$; $t_1=6$, $t_2=2$;

$2^{\sin^2 x}=6$; $\sin^2 x=\log_2 6$ – не имеет решений, т.к. $\log_2 6>1$;

$2^{\sin^2 x}=2$; $\sin^2 x=1$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

2.5.D12. а) $\frac{7^x-2\cdot 7^{-x}}{7^x+2\cdot 7^{-x}}=\frac{5}{9}$; $9(7^x-2\cdot 7^{-x})=5(7^x+2\cdot 7^{-x})$;

$4\cdot 7^x=(10+18)\cdot 7^{-x}$; $7^x=7^{-x+1}$; $7^{2x-1}=1$; $2x-1=0$; $x=\frac{1}{2}$.

б) $\frac{5^x-2\cdot 5^{-x}}{5^x+2\cdot 5^{-x}}=\frac{3}{7}$; $7(5^x-2\cdot 5^{-x})=3(5^x+2\cdot 5^{-x})$; $4\cdot 5^x=20\cdot 5^{-x}$; $5^{2x-1}=1$; $x=\frac{1}{2}$.

§6. Логарифмические уравнения

Уровень А.

2.6.A01 а) $\log_5(x-3)=2$; $(x-3)=5^2$; x-3=25; x=28. Ответ: x=28.
б) $\log_3(x+1)=4$; $x+1=3^4$; x+1=81; x=80. Ответ: x=80.
2.6.A02 а) $\log_4(3x-4)=\log_4(x+1)$; 3x-4=x+1; 2x=5; x=2,5. Ответ: x=2,5.
б) $\log_2(5x+4)=\log_2(x+5)$; 5x+4=x+5; 4x=1; $x=\frac{1}{4}$. Ответ: $x=\frac{1}{4}$.
2.6.A03 а) $\log_2(x^2-2x+8)=4$; $x^2-2x+8=16$; $x^2-2x-8=0$; $x_1=-2$, $x_2=4$.
Ответ: $x_1=-2$, $x_2=4$.
б) $\log_4(x^2+2x+49)=3$; $x^2+2x+49=4^3$; $x^2+2x-15=0$; $x_1=3$, $x_2=-5$.
Ответ: $x_1=3$, $x_2=-5$.

2.6.A04. а) $\begin{cases} \log_3(x+y)=4 \\ x-y=85 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=81 \\ x-y=85 \end{cases}$.

Вычтем (2) из (1): 2y=-4, y=-2; x=81-y $\Rightarrow$ x=83. Ответ: x=83, y=-2.

б) $\begin{cases} \log_2(x+y)=6 \\ x-y=60 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=2^6 \\ x-y=60 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=64 \\ x-y=60 \end{cases}$.

Вычтем второе уравнение системы из первого 2y=4 $\Rightarrow$ y=2;
x=64-y $\Rightarrow$ $x=64-2=62$. Ответ: x=62,y=2.

2.6.A05. а) $\begin{cases}\log_6(3x-y)=2\\ \log_{18}(6x+y)=1\end{cases}$; $\begin{cases}3x-y=36\\ 6x+y=18\end{cases}$.

Сложим уравнения системы. Получим: 9x=54; x=6; y=18-6x;
y=-18. Ответ: x=6,y=-18.

б) $\begin{cases}\log_7(2x-y)=2\\ \log_{14}(7x+y)=1\end{cases}$; $\begin{cases}2x-y=49\\ 7x+y=14\end{cases}$;

Сложим уравнения системы: 9x=63; x=7; y=14-7x; y=14-7·7;
y=-35. Ответ: x=7,y=-35.

2.6.A06. а) $\log_2(5x-73)-2=\log_2 3$; $\log_2(5x-73)-\log_2 4=\log_2 3$; $\log_2\frac{5x-73}{4}=\log_2 3$;

$\frac{5x-73}{4}=3$; 5x-73=12; x=17. Ответ: x=17.

б) $\log_5(9x-124)-1=\log_5 4$; $\log_5(9x-124)-\log_5 5=\log_5 4$; $\log_5\frac{9x-124}{5}=\log_5 4$;

9x-124=20; 9x=144; x=16. Ответ: x=16.

Уровень B.

2.6.B01. а) $\log_{7x}2+\log_{7x}4+\log_{7x}5=\log_{7x}(x+33)$; $\log_{7x}40-\log_{7x}(x+33)=0$;

$\log_{7x}\frac{40}{x+33}=0$; $\frac{40}{x+33}=1\Rightarrow$ x+33=40; x=7. Ответ: x=7.

б) $\log_{4x}2+\log_{4x}4+\log_{4x}6=\log_{4x}(x+44)$; $\log_{4x}48=\log_{4x}(x+44)$;
x+44=48; x=4. Ответ: x=4.

2.6.B02.

а) $\begin{cases}\log_2 x-3y=13\\ 3\log_2 x+y=-1\end{cases}$; $\begin{cases}\log_2 x=13+3y\\ 3(13+3y)+y=-1\end{cases}$;

39+9y+y=-1; 10y=-40; y=-4; $\log_2 x=13-12$; $\log_2 x=1$; x=2. Ответ: x=2,y=-4.

б) $\begin{cases}\log_6 x-2y=3\\ 2\log_6 x+y=1\end{cases}$; $\begin{cases}\log_6 x=3+2y\\ 2(3+2y)+y=1\end{cases}$;

6+4y+y=1; 5y=-5; y=-1; $\log_6 x=3-2$; $\log_6 x=1$; x=6. Ответ: x=6,y=-1.

2.5.B03. а) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=5\\ x-3y=-20\end{cases}$; $\begin{cases}\log_2 x\cdot y=5\\ x-3y=-20\end{cases}$; $\begin{cases}x\cdot y=32\\ x=-20+3y\end{cases}$;

(3y-20)y=32; $3y^2-20y-32=0$; $D=400+4\cdot3\cdot32=28^2$; $y=\frac{20\pm28}{6}$; $y_1=8$,

$y_2=-\frac{4}{3}$ -не удовлетворяет области определения; $x\cdot y=32\Rightarrow x=4$.

Ответ: x=4,y=8.

б) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=3\\ x-y=-6\end{cases}$; $\begin{cases}\log_3 x\cdot y=3\\ x-y=-6\end{cases}$; $\begin{cases}x\cdot y=27\\ x-y=-6\end{cases}$;

$(y-6)y=27\Rightarrow y^2-6y-27=0$; $D=36+4\cdot27=12^2$; $y=\frac{6\pm12}{2}$; $y_1=9$,

$y_2=-3$ – не удовлетворяет области определения; $x\cdot y=27\Rightarrow x=3$.
Ответ: x=3,y=9.

2.6.B04. а) $\begin{cases} 5\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_2 y = -11 \\ 4\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 y = -13 \end{cases}$; $\begin{cases} 5\log_{\frac{1}{2}} x + 3(-13 - 4\log_{\frac{1}{2}} x) = -11 \\ \log_2 y = -13 - 4\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$;

$5\log_{\frac{1}{2}} x - 39 - 12\log_{\frac{1}{2}} x = -11$; $-7\log_{\frac{1}{2}} x = 28$; $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$;

x=$(\frac{1}{2})^{-4}$=$\Rightarrow$ x=16; $\log_2$y=-13+4·4; $\log_2$y=3 $\Rightarrow$ y=8. Ответ: x=16,y=8.

б) $\begin{cases} 3\log_{\frac{1}{2}} x - \log_5 y = -13 \\ 2\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_5 y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\log_{\frac{1}{2}} x + 13 = \log_5 y \\ 2\log_{\frac{1}{2}} x + 3(3\log_{\frac{1}{2}} x + 13) = -5 \end{cases}$;

$2\log_{\frac{1}{2}} x + 9\log_{\frac{1}{2}} x + 39 = -5$; $11\log_{\frac{1}{2}} x = -44$; $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$, x=$(\frac{1}{2})^{-4}$;

x=2^4=16; $\log_5$y=3(-4)+13; $\log_5$y=1 $\Rightarrow$ y=5. Ответ: x=16,y=5.

2.6.B05. а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(8x - 3y) = -1 \\ \log_2(2x + 3y) = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$;

Сложим уравнения системы: 10x=9; x=$\frac{9}{10}$; 3y=4-2x; 3y=4-$\frac{18}{10}$

$3y = \frac{22}{10}$, $y = \frac{11}{15}$. Ответ: x=0,9, $y = \frac{11}{15}$.

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(9x + 2y) = -3 \\ \log_3(3x + 2y) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 9x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$; Вычтем уравнения системы 6x=5; x=$\frac{5}{6}$;

2y=3-3x; 2y=3-$\frac{15}{6}$; 2y=0,5; y=0,25. Ответ: x=$\frac{5}{6}$,y=$\frac{1}{4}$.

2.6.B06. а) $\log_{|5x-3|} 32 = 5$; $|5x-3|^5=2^5$; |5x-3|=2;

$\left[\begin{array}{l} 5x - 3 = 2 \\ 5x - 3 = -2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 5x = 5 \Rightarrow x = 1 \\ 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \end{array}\right.$. Ответ: $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=1$.

б) $\log_{|2x+13|}27=3$; $|2x+13|^3=3^3$; |2x+13|=3;

$\left[\begin{array}{l} 2x + 13 = 3 \\ 2x + 13 = -3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x = -10 \Rightarrow x = -5 \\ 2x = -16 \Rightarrow x = -8 \end{array}\right.$. Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = -8$.

2.6.B07. а) $\log_6(x^2-3x+32)=2$; $x^2-3x+32=36$; $x^2-3x-4=0$; $x_1=4$, $x_2=1$.
Ответ: $x_1=4$, $x_2=-1$.
б) $\log_3(x^2+7x+37)=3$; $x^2+7x+37=27$; $x^2+7x+10=0$; $x_1=-5$, $x_2=-2$.
Ответ: $x_1=-5$, $x_2=-2$.

2.6.B08. а) $\log_{\frac{1}{3}}(3^x + 2x - 3) = -x$; $3^x+2x-3=3^x$; x=1,5.

Ответ: x=1,5.

б) $\log_{\frac{1}{7}}(7^{3x}-5x-7)=-3x$; $7^{3x}-5x-7=7^{3x}$; $-5x=7$; $x=-\frac{7}{5}$. Ответ: $x=-\frac{7}{5}$.

2.6.B09. а) $\log_3(x^2+5x+5)=\log_3(x^2-x+5)$; $x^2+5x+5=x^2-x+5$; $6x=0$; $x=0$. Отв: $x=0$.
б) $\log_7(x^2-3x+3)=\log_7(x^2+x+3)$; $x^2-3x+3=x^2+x+3$; $-4x=0$; $x=0$. Ответ: $x=0$.

2.6.B10. а) $2^{\log_2(3x^2)}=-x+24$; $3x^2+x-24=0$; $D=1+4\cdot3\cdot24=17^2$;
$x=\frac{-1\pm17}{6}$; $x_1=-3$, $x_2=2\frac{2}{3}$. Ответ: $x_1=-3$, $x_2=2\frac{2}{3}$.

б) $5^{\log_5(2x^2)}=13x-21$; $2x^2-13x+21=0$; $D=169-4\cdot2\cdot21=1$;
$x=\frac{13\pm1}{4}$; $x_1=3$, $x_2=3{,}5$. Ответ: $x_1=3$, $x_2=3{,}5$.

2.6.B11. а) $\log_{\frac{1}{3}}|2-5x|=-3$; $|2-5x|=27$; $\left[\begin{array}{l}2-5x=27\\2-5x=-27\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}5x=-25\Rightarrow x=-5\\5x=29\Rightarrow x=\frac{29}{5}\end{array}\right.$.

Ответ: $x_1=-5$, $x_2=\frac{29}{5}$.

б) $\log_{\frac{1}{2}}|19-5x|=-2$; $|19-5x|=4$; $\left[\begin{array}{l}19-5x=4\\19-5x=-4\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}-5x=-15; x=3\\-5x=-23; x=\frac{23}{5}\end{array}\right.$.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=\frac{23}{5}$.

2.6.B12. а) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+22)=\log_{\frac{1}{5}}(6x-5)$; $x^2-6x+22=6x-5$;

$x^2-12x+27=0$; $D=144-4\cdot27=36$; $x=\frac{12\pm6}{2}$; $x_1=3$, $x_2=9$. Ответ: $x_1=3, x_2=9$.

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-9x+52)=\log_{\frac{1}{3}}(5x+4)$; $x^2-9x+52=5x+4$;

$x^2-14x+48=0$; $D=14^2-4\cdot48=4$; $x=\frac{14\pm2}{2}$; $x_1=6$, $x_2=8$.

Ответ: $x_1=6, x_2=8$.

Уровень С

2.6.C1. а) $\begin{cases}\log_2(x+1)=64\cdot2^y\\2^{-y}+\log_2(x+1)=16\end{cases}$; $\begin{cases}\log_2(x+1)=2^{6+y}\\2^{-y}+\log_2(x+1)=16\end{cases}$; $\begin{cases}\log_2(x+1)=2^{6+y}\\2^{-y}+64\cdot2^y=16\end{cases}$; Умножим второе уравнение системы на 2^{-y};
$2^{-2y}-16\cdot2^{-y}+64=0$; $(2^{-y}-8)^2=0$; $2^{-y}=8$; $-y=3$; $y=-3$; $\log_2(x+1)=2^3$; $x+1=2^8$;
$x+1=256$; $x=255$. Ответ: $x=255$, $y=-3$.

б) $\begin{cases}\log_3(x-2)=25\cdot5^y\\5^{-y}+\log_3(x-2)=10\end{cases}$; $\begin{cases}\log_3(x-2)=25\cdot5^y\\5^{-y}+25\cdot5^y=10\end{cases}$;
$5^{-2y}-10\cdot5^{-y}+25=0$; $(5^{-y}-5)^2=0$; $-y=1$; $y=-1$;
$\log_3(x-2)=5$; $x-2=3^5$; $x=243+2=245$. Ответ: $x=245$, $y=-1$.

2.6.C02. а) $\log_{2,1}\sqrt{16-5x}=\log_{2,1}(2x-5)$;
$\sqrt{16-5x}=2x-5$; $16-5x=4x^2-20x+25$; $4x^2-15x+9=0$;

D=225-16·9=9^2; x=$\frac{15\pm9}{8}$; x_1=3, x_2=$\frac{3}{4}$. Но $\begin{cases}16-5x\ge0\\2x-5\ge0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le3\frac{1}{5}\\x\ge2\frac{1}{2}\end{cases}$.

Значит, x_2 не подходит. Ответ: x=3.

б) $\log_{1,4}\sqrt{-18+11x}$ =$\log_{1,4}$(2x-9);

$\sqrt{-18+11x}$ =2x-9; 11x-18=4x^2-36x+81; 4x^2-47x+99=0;

D=2209-16·99=25^2; x_1=$\frac{47-25}{8}=\frac{11}{4}$, x_2=9; 11x-18 ≥ 0; x ≥ $\frac{18}{11}$; 2x-9 ≥ 0;

x ≥ $4\frac{1}{2}$. Значит, x_1 не подходит.

Ответ: x=9.

2.6.С03. а) 3$\log_8^2$(3x+79)-14$\log_8$(3x+79)+16=0; $\log_8$(3x+79)=t; 3t^2-14t+16=0;

D=196-12·16=4; t_1=$\frac{14-2}{6}=2$, t_2=$\frac{8}{3}$;

$\log_8$(3x+79)=2; 3x+79=64; x=-5;

$\log_8$(3x+79)=$\frac{8}{3}$; 3x+79=$8^{\frac{8}{3}}=2^8$, x=$\frac{256-79}{3}$, x = 59. Ответ: x = –5, x = 59.

б) 3$\log_8^2$(5x+89)-16·$\log_8$(5x+89)+20=0; $\log_8$(5x+89)=t; 3t^2-16t+20=0;

D=256-240=16; t_1=$\frac{16-4}{6}=2$, t_2=$\frac{10}{3}$;

$\log_8$(5x+89)=2; 5x+89=64; 5x=-25; x=-5;

$\log_8$(5x+89)=$\frac{10}{3}$; 5x=$8^{\frac{10}{3}}$ -89; x=$\frac{2^{10}-89}{5}$, x = 187. Ответ: x = –5, x = 187.

2.6.С04. а) lg(x+3)=-lg(2x+5); lg[(x+3)(2x+5)]=0; (x+3)(2x+5)=1;

2x^2+11x+14=0; D=121 – 4·2·14 = 9; $x=\frac{-11\pm3}{4}$, x_1=–2, x_2=$-\frac{7}{2}$;

$\begin{cases}x+3>0\\2x+5>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>-3\\x>-\frac{5}{2}\end{cases}$, так что x_2 не подходит. Ответ: x = –2.

б) lg(x+8)=-lg(3x+22); (x+8)(3x+22)=1; 3x^2+46x+175=0;

D=2116–2100=16; $x_{1,2}$=$\frac{-46\pm4}{6}$; x_1 = –7, x_2 = $-\frac{25}{3}$; x+8>0; x>-8;

3x+22>0; x>-$\frac{22}{3}$. Значит, x_2 не подходит. Ответ: x=–7.

2.6.С05.

а) 2$\log_2$x+$\log_8$x-$\log_{16}$x=$\frac{25}{3}$; 2$\log_2$x+$\frac{1}{3}$ $\log_2$x-$\frac{1}{4}$ $\log_2$x=$\frac{25}{3}$;

$\frac{24+1}{12}$ $\log_2$x=$\frac{25}{3}$; $\log_2$x=4; x=16.

б) 2$\log_3$x+$\log_9$x+$\log_{27}$x=$\frac{17}{2}$; 2$\log_3$x+$\frac{1}{2}$ $\log_3$x+$\frac{1}{3}$ $\log_3$x=$\frac{17}{2}$;

$\frac{12+5}{6}\log_3 x=\frac{17}{2}$; $\log_3 x=3$; $x=27$.

2.6.C06.

а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(1+3x)=6-7^{\log_7 4}$; $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(1+3x)=6-4$; $1+3x=\frac{1}{6}$; $x=-\frac{5}{18}$.

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3+2x)=8-5^{\log_5 4}$; $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3+2x)=8-4=4$; $(3+2x)=\frac{1}{4}$; $x=-\frac{11}{8}$.

2.6.C07. а) $(x+3)^{\log_{x+3}(x+2)^2}=9$; $\begin{cases} x+3\neq -1 \\ x+3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq -2 \\ x>-3 \end{cases}$;

$(x+2)^2=9$; $x+2=\pm 3$; $x=1$, $x=-5$ – не подходит. Ответ: $x=1$.

б) $(x+2)^{\log_{x+2}\times(x+1)^2}=16$; $\begin{cases} x+2\neq 1 \\ x+2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq -1 \\ x>-2 \end{cases}$;

$(x+1)^2=16$, $x+1=\pm 4$, $x_1=3$, $x_2=-5$ — не подходит. Ответ: $x=3$.

2.6.C08.

а) $\begin{cases} \log_5 x+\log_2 y^4=13 \\ \log_5 x^4+\log_{\frac{1}{2}} y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_5 x+4\log_2 y=13 \\ 4\log_5 x-\log_2 y=1 \end{cases}$;

$17\log_5 x=17$; $\log_5 x=1$; $x=5$; $4-\log_2 y=1$; $\log_2 y=3$; $y=8$. Ответ: $x=5$, $y=8$.

б) $\begin{cases} \log_2 x+\log_6 y^3=7 \\ \log_2 x^3+\log_{\frac{1}{6}} y=11 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 x+3\log_6 y=7 \\ 3\log_2 x-\log_6 y=11 \end{cases}$; $10\log_2 x=40$; $\log_2 x=4$; $x=16$;

$12-\log_6 y=11$; $\log_6 y=1$; $y=6$. Ответ: $x=16$, $y=6$.

2.6.C09.

а) $\ln(x+\frac{19}{4})=\ln\frac{5}{4x}$; $\left[\begin{array}{l} x+\frac{19}{4}>0 \\ \frac{5}{4x}>0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x>-\frac{19}{4} \\ x>0 \end{array}\right.$;

$x+\frac{19}{4}=\frac{5}{4x}$; $4x^2+19x-5=0$; $D=361+80=21^2$;

$x_1=\frac{-19+21}{8}=\frac{1}{4}$ $x_2=\frac{-19-21}{8}=-5$ – не подходит. Ответ: $x=\frac{1}{4}$.

б) $\ln(x-\frac{14}{3})=\ln\frac{5}{3x}$; $\left[\begin{array}{l} x-\frac{14}{3}>0 \\ \frac{5}{3x}>0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x>\frac{14}{3} \\ x>0 \end{array}\right.$; $x>\frac{14}{3}$;

$x-\frac{14}{3}=\frac{5}{3x}$; $3x^2-14x-5=0$; $D=196+60=16^2$;

$x_1=\frac{14+16}{6}=5$, $x_2=\frac{14-16}{6}=-\frac{1}{3}$ - не подходит. Ответ: $x=5$.

2.6.C10. а) $\log_7(x+9)+\log_7(5x+17)=2$; $\log_7(x+9)(5x+17)=\log_7 49$.

Область определения: $\left[\begin{array}{l} x+9>0 \\ 5x+17>0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x>-9 \\ x>-\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$; x>-3 $\dfrac{2}{5}$;

(x+9)(5x+17)=49; $5x^2+62x+104=0$; D=3844-2080=1764=42^2;

$x_1=\dfrac{-62+42}{10}=-2$; $x_2=\dfrac{-62-42}{10}=-10,4$ - не подходит.

Ответ: x=-2.

б) $\log_3(x+4)+\log_3(5x+8)=2$.

Область определения: $\left[\begin{array}{l} x+4>0 \\ 5x+8>0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x>-4 \\ x>-1\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$; x>-1 $\dfrac{3}{5}$;

$\log_3(x+4)(5x+8)=\log_3 9$; $5x^2+28x+32-9=0$; $5x^2+28x+23=0$;

D=784-460=324=18^2; $x_1=\dfrac{-28-18}{10}=-4,6$ – не подходит, $x_2=\dfrac{-28+18}{10}=-1$.

Ответ: x=-1.

2.6.C11. а) $\begin{cases} \log_{\sqrt[3]{3}} x+\log_{\sqrt[3]{3}} y=3 \\ \log_2(x+y)=2 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}\right.$; x+y=4; x=4-y; $\log_{\sqrt[3]{3}}(4-y)y=\log_{\sqrt[3]{3}} 3$;

$4y-y^2=3$; $y^2-4y+3=0$; $\begin{cases} y_1=1 \\ x_1=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} y_2=3 \\ x_2=1 \end{cases}$.

Ответ: $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=3$.

б) $\begin{cases} \log_{\sqrt[4]{2}} x+\log_{\sqrt[4]{2}} y=4 \\ \log_3(x+y)=1 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}\right.$; x+y=3; y=3-x; $\log_{\sqrt[4]{2}} x(3-x)=\log_{\sqrt[4]{2}} 2$;

$x^2-3x+2=0$; $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$. Ответ: $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=1$.

2.6.C12. а) $\log_{3x+17}(3x^2+2)=\log_{3x+17}110$.

Область определения: $\begin{cases} 3x+17>0 \\ 3x+17\neq 1 \\ 3x^2+2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-\dfrac{17}{3} \\ x\neq-\dfrac{16}{3} \end{cases}$;

$\log_{3x+17}(3x^2+2)=\log_{3x+17}110$; $3x^2+2=110$; $3x^2-108=0$; $x^2-36=0$; $x=\pm 6$;

x=-6 не попадает в область определения. Ответ: x=6.

б) $\log_{3x+8}(2x^2+3)=\log_{3x+8}35$

D: $\begin{cases} 3x+8>0 \\ 3x+8\neq 1 \\ 2x^2+3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-\dfrac{8}{3} \\ x\neq-\dfrac{7}{3} \end{cases}$;

$2x^2+3=35$; $2x^2-32=0$; $x^2-16=0$; $x=\pm 4$; x=-4 не попадает в D. Ответ: x=4.

Уровень D

2.6.D01. а) $\log_8\log_9\log_{7x+6}((7x+6)^9+x^2-x-56)=0$; $\log_9\log_{7x+6}((7x+6)^9+x^2-x-56)=1$;

$\log_{7x+6}((7x+6)^9+x^2-x-56)=9$; $(7x+6)^9=(7x+6)^9+x^2-x-56$;

x^2-x-56=0; D=1+4·56=225; x=$\frac{1\pm 15}{2}$; x_1=8,

x_2=-7 – не принадлежит области определения.

Ответ: x=8.

б) $\log_6\log_7\log_{3x+14}((3x+14)^7+x^2-7x-30=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_7\log_{3x+14}((3x+14)^7+x^2-7x-30)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{3x+14}((3x+14)^7+x^2-7x-30)=7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x-30=0 \\ 1\neq 3x+14>0 \end{cases} \begin{cases} x=10,\ x=-3 \\ 1\neq 3x+14>0 \end{cases}$

Ответ: –3; 10.

2.6.D02. а) $\log_{2003}(2x^3+x^2+4x-34)=\log_{2003}(2x^3-x+2)$;

$2x^3+x^2+4x-34=2x^3-x+2$; $x^2+5x-36=0$; D=25+4·36=13^2; x=$\frac{-5\pm 13}{2}$; x_1=$\frac{8}{2}=4$,

x_2=-9 – не принадлежит области определения.

Ответ: x=4.

б) $\log_{2002}(2x^3+x^2-x-48)=\log_{2002}(2x^3+3x-3)$; $2x^3+x^2-x-48=2x^3+3x-3$;

x^2-4x-45=0; D=16+4·45=14^2; x=$\frac{4\pm 14}{2}$; x_1=9,

x_2=-5 – не принадлежит области определения. Ответ: x=9.

2.6.D03. а) $\log_{(x+3)^2}(x^3-9x^2-10x)=\log_{x+3}\sqrt{x^3-10x^2-x+22}$;

$\log_{(x+3)^2}(x^3-9x^2-10x)=2\log_{(x+3)^2}\sqrt{x^3-10x^2-x+22}$;

$x^3-9x^2-10x=x^3-10x^2-x+22$; x^2-9x-22=0; D=81+4·22=13^2; x=$\frac{9\pm 13}{2}$; x_1=11, x_2=-2 – не принадлежит области определения. Ответ: x=11.

б) $\log_{(x+6)^2}(x^3+3x^2-4x)=\log_{x+6}\sqrt{x^3+2x^2-7x+10}$;

$\log_{(x+6)^2}(x^3+3x^2-4x)=2\log_{(x+6)^2}\sqrt{x^3+2x^2-7x+10}$;

$x^3+3x^2-4x=x^3+2x^2-7x+10$; x^2+3x-10=0; D=9+4·10=49;

x=$\frac{-3\pm 7}{2}$; x_1=-5 – не принадлежит области определения. x_2=2.

Ответ: x=2.

2.6.D04. а) $\begin{cases} \lg\frac{y-2}{x-3}=0 \\ \log_6(x^2+y^2+23)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{y-2}{x-3}=1 \\ x^2+y^2+23=36 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=x-3+2 \\ x^2+(x-1)^2+23=36 \end{cases}$; $x^2+(x-1)^2=13$; $x^2+x^2-2x+1=13$; $2x^2-2x-12=0$;

x^2-x-6=0; D=1+4·6=25; x=$\frac{1\pm 5}{2}$; x_1=3 – не принадлежит области определения, т.к. x-3 $\neq$ 0, x_2 = –2; y=x-1 $\Rightarrow$ y=-3. Ответ: x=-2,y=-3.

б) $\begin{cases} \lg\dfrac{y+1}{x-5}=0 \\ \log_4(x^2+y^2+38)=3 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x-5}=1 \\ x^2+y^2+38=64 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x-6 \\ x^2+(x-6)^2=26 \end{cases}$;

$x^2+x^2-12x+36=26$; $2x^2-12x+10=0$; $x^2-6x+5=0$; $D=36-4\cdot5=16$;

$x=\dfrac{6\pm4}{2}$; $x_1=5$ – не принадлежит области определения, т.к.

$x-5\neq0$; $x_2=1$; $y=x-6 \Rightarrow y=-5$. Ответ: $x=1$, $y=-5$.

2.6.D05. а) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4 \\ 2^x\cdot3^y=486 \end{cases}$; $\begin{cases} y-x=4 \\ 2^x\cdot3^{4+x}=486 \end{cases}$;

$2^x\cdot3^4\cdot3^x=486$; $81\cdot2^x\cdot3^x=486$; $6^x=6 \Rightarrow x=1$; $y-x=4 \Rightarrow y=5$.
Ответ: $x=1$, $y=5$.

б) $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(y-x)=2 \\ 3^x\cdot4^y=768 \end{cases}$; $\begin{cases} y-x=3 \\ 3^x\cdot4^{(3+x)}=768 \end{cases}$;

$3^x\cdot4^3\cdot4^x=768$; $12^x=12 \Rightarrow x=1$; $y=3+x \Rightarrow y=4$.
Ответ: $x=1$, $y=4$.

2.6.D06. а) $\log_3(2x+89)+\log_3(x+34)=3+\log_3 20$;
$\log_3(2x+89)(x+34)=\log_3 27+\log_3 20$; $\log_3(2x^2+68x+89x+3026)=\log_3 540$;

$2x^2+157x+2486=0$; $D=(157)^2-4\cdot2\cdot2486=(69)^2$; $x=\dfrac{-157\pm69}{4}$;

$x_1=-22$, $x_2=-56{,}5$ — не принадлежит области определения.
Ответ: $x=-22$.

б) $\log_5(2x+81)+\log_5(x+38)=2+\log_5 21$;
$\log_5(2x+81)(x+38)=\log_5 25+\log_5 21$; $\log_5(2x^2+76x+81x+3078)=\log_5 525$;

$2x^2+157x+2553=0$; $D=(157)^2-2\cdot4\cdot2553=(65)^2$; $x=\dfrac{-157\pm65}{4}$;

$x_1=-55{,}5$ — не принадлежит области определения, $x_2=-23$. Ответ: $x=-23$.

2.6.D07. а) $\log_3(5x+1)+\log_{5x+1}3=\dfrac{17}{4}$; $\log_3(5x+1)+\dfrac{\log_3 3}{\log_3(5x+1)}=\dfrac{17}{4}$;

$\log_3{}^2(5x+1)-\dfrac{17}{4}\log_3(5x+1)+1=0$.

Пусть $\log_3(5x+1)=t$, тогда уравнение примет вид: $t^2-\dfrac{17}{4}t+1=0$;

$D=\left(\dfrac{17}{4}\right)^2-4=\dfrac{289}{16}-4=3{,}75^2$; $t=\dfrac{4{,}25\pm3{,}75}{2}$; $t_1=0{,}25$; $t_2=4$;

$\log_3(5x+1)=\dfrac{1}{4}$; $5x+1=3^{\frac{1}{4}}$; $5x=\sqrt[4]{3}-1$; $x=\dfrac{\sqrt[4]{3}-1}{5}$; $\log_3(5x+1)=4$; $5x+1=81$;

$5x=80$; $x=16$; $5x+1>0$; $5x>-1$; $x>-\dfrac{1}{5}$. Ответ: $x_1=\dfrac{\sqrt[4]{3}-1}{5}$, $x_2=16$.

б) $\log_4(3x+1)+\log_{3x+1}4=\dfrac{10}{3}$; $\log_4(3x+1)+\dfrac{\log_4 4}{\log_4(3x+1)}=\dfrac{10}{3}$;

$\log_4^2(3x+1)-\frac{10}{3}\log_4(3x+1)+1=0$. Пусть $\log_4(3x+1)=t$, тогда уравнение примет вид: $t^2-\frac{10}{3}t+1=0$; $D=(\frac{10}{3})^2-4\cdot1=\frac{100}{9}-4=\frac{64}{9}=(\frac{8}{3})^2$; $t=\frac{\frac{10}{3}\pm\frac{8}{3}}{2}$; $t_1=3$, $t_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. $\log_4(3x+1)=3$; $3x=63$; $x=21$. $\log_4(3x+1)=\frac{1}{3}$; $3x+1=\sqrt[3]{4}$; $3x=\sqrt[3]{4}-1$; $x=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}$. Ответ: $x=21$, $x=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}$.

2.6.D08. а) $\log_{\sqrt{7}}(3^x-1)+\log_{\sqrt{7}}(3^x-2)=\log_{\sqrt{7}}(3^x+23)$;

$\log_{\sqrt{7}}(3^x-1)(3^x-2)=\log_{\sqrt{7}}(3^x+23)$; $3^{2x}-2\cdot3^x-3^x+2=3^x+23$;

$3^{2x}-4\cdot3^x-21=0$. Пусть $3^x=t$, тогда уравнение примет вид: $t^2-4t-21=0$;

$D=16+4\cdot21=10^2$; $t=\frac{4\pm10}{2}$; $t_1=7$,

$t_2=-3$ – не лежит в области определения. Ответ: $x=\log_3 7$.

б) $\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)+\log_{\sqrt{3}}(2^x-3)=\log_{\sqrt{3}}(2^x+69)$;

$\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)(2^x-3)=\log_{\sqrt{3}}(2^x+69)$; $2^{2x}-3\cdot2^x-2^x+3=2^x+69$;

$2^{2x}-5\cdot2^x-66=0$. Пусть $2^x=t$, тогда уравнение примет вид: $t^2-5t-66=0$;

$D=25+4\cdot66=289$; $t=\frac{5\pm17}{2}$; $t_1=-6$ — не подходит,

$t_2=11$, $2^x=11$, $x=\log_2 11$. Ответ: $x=\log_2 11$.

2.6.D09. а) $\frac{2}{5}\log_{\sqrt{x}}3-\frac{2}{3}=\log_3 2\cdot\log_{32}x+\log_x 3$;

$\frac{4}{5}\log_x 3-\frac{2}{3}-\log_x 3=\log_3 2\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 32}$; $\frac{4}{5}\log_x 3-\frac{2}{3}-\log_x 3=\frac{1}{5\log_x 3}$;

$-\frac{1}{5}\log_x{}^2 3-\frac{2}{3}\log_x 3-\frac{1}{5}=0$; $3\log_x{}^2 3+10\log_x 3+3=0$; $D=100-36=64$;

$\left[\begin{array}{l}\log_x 3=\frac{1}{3}\\ \log_x 3=3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=27\\ x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$;

б) $\frac{2}{3}\log_{\sqrt{x}}5+\frac{8}{9}=\log_5 2\cdot\log_8 x+\log_x 5$; $\frac{4}{3}\log_x 5+\frac{8}{9}-\frac{\log_5 2\cdot\log_5 x}{\log_5 8}-\log_x 5=0$;

$\frac{1}{3}\log_x 5+\frac{8}{9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_x 5}=0 \qquad |\cdot\log_x 5$; $\frac{1}{3}\log_x{}^2 5+\frac{8}{9}\log_x 5-\frac{1}{3}=0$;

$3\log_x{}^2 5+8\log_x 5-3=0$; $D=64+36=100$; $\left[\begin{array}{l}\log_x 5=\frac{1}{3}\\ \log_x 5=-3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=125\\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\end{array}\right.$.

2.6.D10. а) $\log_8(x+6)^2+\log_8(x+4)^2=\frac{2}{\log_3 8}$;

$\log_8(x+6)^2+\log_8(x+4)^2=2\log_8 3$; $\log_8(x+6)^2+\log_8(x+4)^2=\log_8 9$;
$(x+6)^2\cdot(x+4)^2=9$; $((x+6)(x+4))^2=3^2$; $x^2+4x+6x+24=-3$ или $x^2+10x+24=3$;
$x^2+10x+27=0$; $D=100-4\cdot27<0$; корней нет;

$x^2+10x+21=0$; $D=100-4\cdot21=16$; $x=\frac{-10\pm4}{2}$; $x_1=-7$, $x_2=-3$.

Ответ: $x_1=-7$, $x_2=-3$.

б) $\log_7(x+4)^2+\log_7(x+3)^2=\frac{2}{\log_2 7}$; $\log_7(x+4)^2+\log_7(x+3)^2=2\log_7 2$;

$((x+4)(x+3))^2=2^2$; $(x+4)(x+3)=2$ или $(x+4)(x+3)=-2$; $x^2+3x+4x+12-2=0$;

$x^2+7x+10=0$; $D=49-40=9$; $x=\frac{-7\pm3}{2}$; $x_1=-5$, $x_2=-2$; $x^2+3x+4x+12+2=0$;

$x^2+7x+14=0$; $D=49-4\cdot14<0$; решений нет.
Ответ: $x=-2$, $x=-5$.

2.6.D11. а) $\log_{\frac{2}{3}}(\ln x^3-2)+\log_{\frac{2}{3}}(\ln x^5-4)=0$;

$\log_{\frac{2}{3}}((\ln x^3-2)(\ln x^5-4))=0$; $(\ln x^3-2)(\ln x^5-4)=1$; $\ln x^3=3\ln x$;

$\ln x^5=5\ln x$; $(3\ln x-2)(5\ln x-4)=1$; $15\ln^2x-12\ln x-10\ln x+8-1=0$;

$15\ln^2x-22\ln x+7=0$; $D=22^2-4\cdot15\cdot7=8^2$; $\ln x=\frac{22\pm8}{30}$; $\ln x=1\Rightarrow x_1=e$;

$\ln x=\frac{7}{15}\Rightarrow x_2=e^{\frac{7}{15}}$, но $\begin{cases}\ln x^3-2>0\\ \ln x^5-4>0\end{cases}$, $\begin{cases}\ln x>\frac{2}{3}\\ \ln x>\frac{4}{5}\end{cases}$, так что $x_2=e^{\frac{7}{15}}$ — не подходит. Ответ: $x=e$.

б) $\log_{\frac{3}{4}}(\ln x^3-5)+\log_{\frac{3}{4}}(\ln x^5-9)=0$; $\log_{\frac{3}{4}}((3\ln x-5)(5\ln x-9))=0$,

$\begin{cases}\ln x^3-5>0\\ \ln x^5-9>0\end{cases}$, $\begin{cases}\ln x>\frac{5}{3}\\ \ln x>\frac{9}{5}\end{cases}$, $\ln x>\frac{9}{5}$; $(3\ln x-5)(5\ln x-9)=1$;

$15\ln^2x-27\ln x-25\ln x+45=1$; $15\ln^2x-52\ln x+44=0$;
$D=52^2-4\cdot15\cdot44=2704-2640=8^2$;

$\ln x=\frac{52\pm8}{30}$; $\ln x=2\Rightarrow x_1=e^2$; $\ln x=\frac{22}{15}$ — не подходит.

Ответ: $x=e^2$.

2.6.D12. а) $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_x y+2\log_y x=2\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_x y+2\frac{\log_x x}{\log_x y}=2\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4\end{cases}$;

$\begin{cases}\frac{1}{2}\log_x^2 y+2\log_x x-2\log_x y=0\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_x^2 y-2\log_x y+2=0\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{x}=4\end{cases}$;

$\begin{cases}(\log_x y-2)^2=0\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4\end{cases}$; $\begin{cases}\log_x y-2=0\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4\end{cases}$; $\begin{cases}y=x^2\\ 5\sqrt{x}-\sqrt{x^2}=4\end{cases}$;

-x+5 $\sqrt{x}$ =4; x-5 $\sqrt{x}$ +4=0. Пусть $\sqrt{x}$ =t, тогда уравнение примет вид:

t^2-5t+4=0; D=25-4·4=9; t=$\frac{5\pm3}{2}$; t_1=4, x=16, y=256;

t_2=1, x=1, y=1 — не подходит. Ответ: x=16, y=256.

б) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\frac{5}{2}\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\end{cases}$; x > 0, y > 0, x, y ≠ 1 $\begin{cases}\log_x y+\frac{1}{\log_x y}=\frac{5}{2}\\ 3\sqrt{x}=2+\sqrt{y}\end{cases}$;

$\begin{cases}\log_x^2 y-\frac{5}{2}\log_x y+1=0\\ 9x=4+y+2\sqrt{y}\end{cases}$; $\log_x y$ = t; $t^2-\frac{5}{2}t+1=0$; t_1 = 0,5, t_2 = 2;

$\left[\begin{array}{l}\log_x y=0,5\\ \log_x y=2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{x}\\ y=x^2\end{array}\right.$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{x}\\ y=x^2\end{array}\right.\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ 3y-\sqrt{y}=2\end{cases}\\ \begin{cases}y=x^2\\ 3\sqrt{x}-x=2\end{cases}\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ 3y-\sqrt{y}-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=x^2\\ x-3\sqrt{x}+2=0\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ \sqrt{y}=1\end{cases}\\ \begin{cases}y=x^2\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$; $\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}y=16\\ x=4\end{cases}\end{array}$. Ответ: (4, 16).

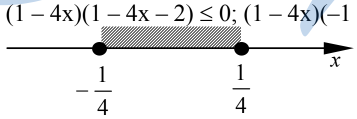
Глава 3. Неравенства и системы неравенств

§ 1. Целые алгебраические неравенства

Уровень А.

3.1.A01. а) $(1\text{-}4x)^2 \le 2(1\text{-}4x)$;

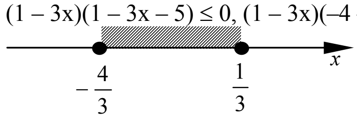
(1 – 4x)(1 – 4x – 2) ≤ 0; (1 – 4x)(–1 – 4x) ≤ 0; (1 – 4x)(1 + 4x) ≥ 0.



Ответ: $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}$.

б) $(1\text{-}3x)^2 \le 5(1\text{-}3x)$;

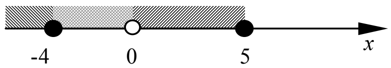
(1 – 3x)(1 – 3x – 5) ≤ 0, (1 – 3x)(–4 – 3x) ≤ 0; (1 – 3x)(4 + 3x) ≥ 0;



Ответ: $-\frac{4}{3}\le x\le\frac{1}{3}$.

3.1.A02. а) $\begin{cases} x^2-x-20\le 0 \\ x-4<-4-x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-x-20\le 0 \\ 2x<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-x-20\le 0 \\ x<0 \end{cases}$;

x^2-x-20≤0; x^2-x-20=0; D=811 x=$\frac{1\pm 9}{2}$; x_1=5, x_2=-4; $\begin{cases} -4\le x\le 5 \\ x<0 \end{cases}$.



Ответ: $[-4;0)$.

б) $\begin{cases} x^2+3x-10\le 0 \\ x+1<1-x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+3x-10\le 0 \\ 2x<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+3x-10\le 0 \\ x<0 \end{cases}$; $\begin{cases} -5\le x\le 2 \\ x<0 \end{cases}$;

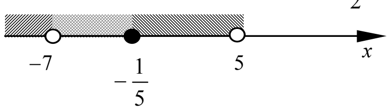
x^2+3x-10=0; D=9+4·10=49; x=$\frac{-3\pm 7}{2}$; x_1=-5, x_2=2.

Ответ: $[-5;0)$.

3.1.A03.

$\begin{cases} 35-2x-x^2>0 \\ 5x+1\le -1-5x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2x-35<0 \\ 10x\le -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2x-35<0 \\ x\le -\frac{1}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} -7<x<5 \\ x\le -\frac{1}{5} \end{cases}$;

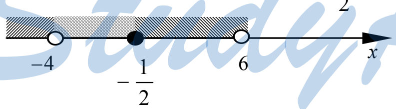
x^2+2x-35=0; D=4+4·35=144; x=$\frac{-2\pm 12}{2}$; x_1=-7, x_2=5.



Ответ: $\left(-7;-\frac{1}{5}\right]$.

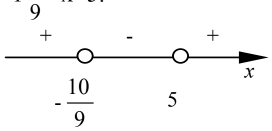
б) $\begin{cases} 24+2x-x^2>0 \\ 2x+1\le -1-2x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-2x-24<0 \\ 4x\le -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-2x-24<0 \\ x\le -\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} -4<x<6 \\ x\le -\frac{1}{2} \end{cases}$;

x^2-2x-24=0; D=4+4·24=100; x=$\frac{2\pm 10}{2}$; x_1=6, x_2=-4.



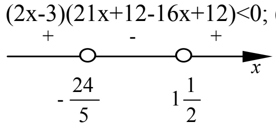
Ответ: $\left(-4;-\frac{1}{2}\right]$.

3.1.A04. а) 3(x-5)(5x+4)<2(x-5)(3x+1);
3(x-5)(5x+4)-2(x-5)(3x+1)<0; (x-5)(15x+12-6x-2)<0; (x-5)(9x+10)<0;
$-1\frac{1}{9}$<x<5.



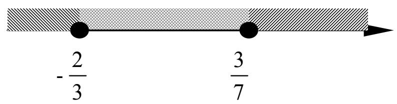
Ответ: $\left(-1\frac{1}{9};5\right)$.

б) 3(2x-3)(7x+4)<4(2x-3)(4x-3); 3(2x-3)(7x+4)-4(2x-3)(4x-3)<0;
(2x-3)(21x+12-16x+12)<0; (2x-3)(5x+24)<0.



Ответ: $\left(-4\frac{4}{5};1\frac{1}{2}\right)$.

3.1.A05. а) $\begin{cases} 7x+2\ge 4x \\ \frac{x}{2}-\frac{2-5x}{4}\le\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} 3x\ge -2 \\ 2x-2+5x\le 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x\ge -\frac{2}{3} \\ x\le\frac{3}{7} \end{cases}$.



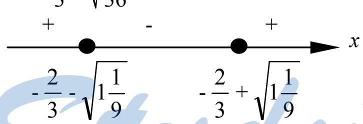
Ответ: $\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{7}\right]$.

б) $\begin{cases} 6x+3\ge -2x \\ \frac{x}{2}-\frac{5-3x}{4}\le\frac{1}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} 8x\ge -3 \\ 6x-3(5-3x)\le 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x\ge -\frac{3}{8} \\ 6x-15+9x\le 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x\ge -\frac{3}{8} \\ 15x\le 16 \end{cases}$; $\begin{cases} x\ge -\frac{3}{8} \\ x\le\frac{16}{15} \end{cases}$. Ответ: $\left[-\frac{3}{8};\frac{16}{15}\right]$.

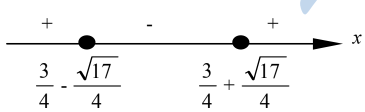
3.1.A06. а) $3x^2+4x-2\ge 0$; D=16+4·2·3=40; $x=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{6}$; $x_1=-\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{40}{36}}$,

$x_2=-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{40}{36}}$.



Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}-\sqrt{1\frac{1}{9}}\right]\cup\left[-\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{1}{9}};+\infty\right)$.

б) $2x^2-3x-1\ge 0$; D=9+4·1·2=17; $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$; $x_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$, $x_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$.



Ответ: $\left(-\infty;\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

3.1.B01. а) $x(x+9)^2\le 3x^2$; $x(x+9)^2-3x^2\le 0$; $x((x+9)^2-3x)\le 0$;
1 случай: x<0 и $(x+9)^2-3x>0$; $x^2+18x+81-3x>0$; $x^2+15x+81>0$;
D=225-4·81<0.
Значит, $(x+9)^2-3x>0$ и 2-й случай, когда $(x+9)^2-3x<0$, x>0 не рассматривается. Наибольшее целое решение x = 0. Ответ: x = 0.

б) $x(x+7)^2 \le 5x^2$; $x(x+7)^2-5x^2 \le 0$; $x((x+7)^2-5x) \le 0$; $x(x^2+14x+49-5x) \le 0$;
$x(x^2+9x+49) \le 0$; $x^2+9x+49=0$; $D=81-4\cdot49<0$, значит,
$x^2+9x+49>0 \Rightarrow x \le 0$, наибольшее целое решение x = 0. Ответ: x = 0.

3.1.В02. а) $(3x-11)^2(x+2)>3(3x-11)^2 \quad \Big| : (3x-11)^2>0$;
$x+2>3$; $x>1$.

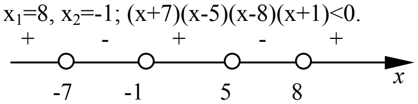
При $x=\frac{11}{3}$ неравенство не выполняется. Наименьшее целое решение x = 2.

Ответ: x = 2.

б) $(4x-17)^2(x+1)>4(4x-17)^2 \quad \Big| : (4x-17)^2>0$;

$x+1>4$;$x>3$. При $x=\frac{17}{4}$ неравенство не выполняется. Наименьшее целое решение x = 4. Ответ: x = 4.

3.1.В03. а) $(x^2+2x-35)(x^2-7x-8)<0$; $x^2+2x-35=0$;
$D=4+4\cdot35>0$; $x_1=-7$, $x_2=5$; $x^2-7x-8=0$; $D=49+4\cdot8>0$;
$x_1=8$, $x_2=-1$; $(x+7)(x-5)(x-8)(x+1)<0$.

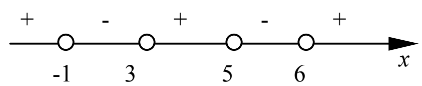


Ответ: $(-7;-1) \cup (5;8)$.

б) $(x^2-4x-5)(x^2-9x+18)<0$; $x^2-4x-5=0$; $D=16+4\cdot5=36$;

$x=\frac{4\pm6}{2}$; $x_1=5$, $x_2=-1$; $x^2-9x+18=0$; $D=81-4\cdot18=9$;

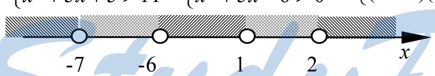
$x=\frac{9\pm3}{2}$; $x_1=6$, $x_2=3$; $(x-5)(x+1)(x-6)(x-3)<0$.



Ответ: $(-1;3) \cup (5;6)$.

3.1.В04. а) $11<x^2+5x+5<19$;

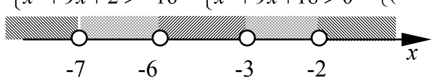
$\begin{cases} x^2+5x+5<19 \\ x^2+5x+5>11 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+5x-14<0 \\ x^2+5x-6>0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-2)(x+7)<0 \\ (x+6)(x-1)>0 \end{cases}$.



Ответ: $(-7;-6) \cup (1;2)$.

б) $-16<x^2+9x+2<-12$;

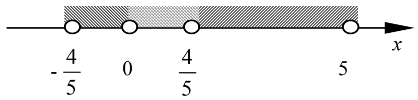
$\begin{cases} x^2+9x+2<-12 \\ x^2+9x+2>-16 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+9x+14<0 \\ x^2+9x+18>0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+2)(x+7)<0 \\ (x+3)(x+6)>0 \end{cases}$.



Ответ: $(-7;-6) \cup (-3;-2)$.

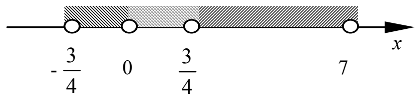
3.1.В05. а) $\begin{cases} 5x>x^2 \\ 25x^2<16 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-5x<0 \\ 25x^2<16 \end{cases}$;

$\begin{cases} x(x-5)<0 \\ x^2<\frac{16}{25} \end{cases}$; $\begin{cases} 0<x<5 \\ -\frac{4}{5}<x<\frac{4}{5} \end{cases}$.



Ответ: $\left(0;\frac{4}{5}\right)$.

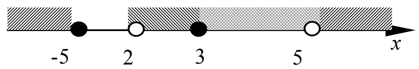
б) $\begin{cases}7x > x^2\\ 16x^2 < 9\end{cases}$; $\begin{cases}x^2 - 7x < 0\\ x^2 < \frac{9}{16}\end{cases}$; $\begin{cases}x(x-7) < 0\\ -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}0 < x < 7\\ -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\end{cases}$.



Ответ: $(0; \frac{3}{4})$.

2.6.B06. а) $\begin{cases}(1+x)^2 \ge 16\\ (2x-7)^2 < 9\end{cases}$; $\begin{cases}(1+x)^2 - 4^2 \ge 0\\ (2x-7)^2 - 9 < 0\end{cases}$;

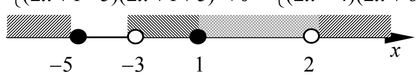
$\begin{cases}(1+x+4)(1+x-4) \ge 0\\ (2x-7+3)(2x-7-3) < 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x+5)(x-3) \ge 0\\ (2x-4)(2x-10) < 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x+5)(x-3) \ge 0\\ (x-2)(x-5) < 0\end{cases}$.



Ответ: $[3;5)$.

б) $\begin{cases}(2+x)^2 \ge 9\\ (2x+1)^2 < 25\end{cases}$; $\begin{cases}(2+x)^2 - 3^2 \ge 0\\ (2x+1)^2 - 5^2 < 0\end{cases}$;

$\begin{cases}(2+x-3)(2+x+3) \ge 0\\ (2x+1-5)(2x+1+5) < 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)(x+5) \ge 0\\ (2x-4)(2x+6) < 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)(x+5) \ge 0\\ (x-2)(x+3) < 0\end{cases}$.



Ответ: [1; 2).

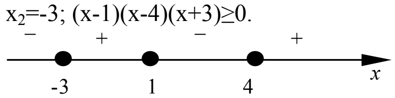
3.1.B07. а) |5x+1|>1-4x; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+1 \ge 0\\ 5x+1 > 1-4x\end{cases}\\ \begin{cases}5x+1 < 0\\ -5x-1 > 1-4x\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge -\frac{1}{5}\\ x > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < -\frac{1}{5}\\ x < -2\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x > 0\\ x < -2\end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

б) |6x+7|>7-2x; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6x+7 \ge 0\\ 6x+7 > 7-2x\end{cases}\\ \begin{cases}6x+7 < 0\\ -6x-7 > 7-2x\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge -\frac{7}{6}\\ x > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < -\frac{7}{6}\\ x < -\frac{7}{2}\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x > 0\\ x < -\frac{7}{2}\end{array}\right.$.

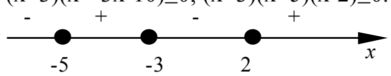
Ответ: $(-\infty; -\frac{7}{2}) \cup (0; +\infty)$.

3.1.B08. а) $x(x-1)^2 \ge 12(x-1)$; $x(x-1)^2-12(x-1) \ge 0$; $(x-1)(x(x-1)-12) \ge 0$;
$(x-1)(x^2-x-12) \ge 0$; $x^2-x-12=0$; $D=1+4\cdot 12=49$; $x=\frac{1\pm 7}{2}$; $x_1=4$,
$x_2=-3$; $(x-1)(x-4)(x+3) \ge 0$.



Ответ: $[-3;1]\cup[4;+\infty)$.

б) $x(x+3)^2 \ge 10(x+3)$; $x(x+3)^2-10(x+3) \ge 0$; $(x+3)(x(x+3)-10) \ge 0$;
$(x+3)(x^2+3x-10) \ge 0$; $(x+3)(x+5)(x-2) \ge 0$.



Ответ: $[-5;-3]\cup[2;+\infty)$.

3.1.B09. а) $(5x^2+\frac{1}{3}x-2)^3 \le (x^2+\frac{1}{3}x+4)^3$; $5x^2+\frac{1}{3}x-2 \le x^2+\frac{1}{3}x+4$; $4x^2 \le 6$; $x^2 \le \frac{6}{4}$;

$-\frac{\sqrt{6}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

б) $\left(4x^2+\frac{1}{6}x-2\right)^3 \le \left(3x^2+\frac{1}{6}x+4\right)^3$;

$4x^2+\frac{1}{6}x-2 \le 3x^2+\frac{1}{6}x+4$; $x^2 \le 6$;

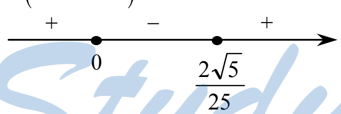
$-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}$. Ответ: $[-\sqrt{6};\ \sqrt{6}]$.

3.1.B10. а) $\left(x\sqrt{5}-2\right)\left(4x\sqrt{5}+2\right)+\left(x\sqrt{5}+2\right)^2 \le 0$;

$4x^2\cdot 5+2x\sqrt{5}-8x\sqrt{5}-4+5x^2+2\cdot 2\cdot x\sqrt{5}+4 \le 0$;

$20x^2-6x\sqrt{5}+5x^2+4x\sqrt{5} \le 0$; $25x^2-2x\sqrt{5} \le 0$;

$x\left(25x-2\sqrt{5}\right) \le 0$.



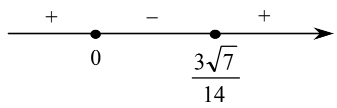
Ответ: $\left[0;\ \frac{2\sqrt{5}}{25}\right]$.

б) $\left(x\sqrt{7}-3\right)\left(7x\sqrt{7}+3\right)+\left(x\sqrt{7}+3\right)^2 \le 0$;

$7x^2\cdot 7+3x\sqrt{7}-21x\sqrt{7}-9+x^2\cdot 7+6x\sqrt{7}+9 \le 0$;

$56x^2-12x\sqrt{7} \le 0$;

$14x^2-3x\sqrt{7} \le 0$; $x\left(14x-3\sqrt{7}\right) \le 0$.

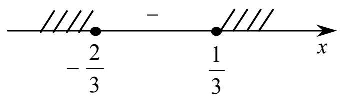


Ответ: $\left[0;\ \frac{3\sqrt{7}}{14}\right]$.

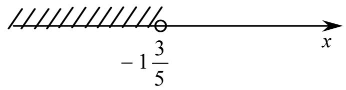
3.1.В11. а) $\begin{cases} x^2+2(x-3)^2 \ge -13x+20 \\ 2x^2 > 5x^2(x+2) \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2(x^2-6x+9) \ge -13x+20 \\ 5x^2(x+2)-2x^2 < 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+2x^2-12x+18+13x-20 \ge 0 \\ x^2(5(x+2)-2) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2+x-2 \ge 0 \\ x^2(5x+10-2) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2+x-2 \ge 0 \\ x^2(5x+8) < 0 \end{cases}$;

$3x^2 + x - 2 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$; $x = \frac{-1 \pm 3}{6}$; $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$;



$5x + 8 = 0$; $5x = -8$; $x = -\frac{8}{5}$; $x = -1\frac{3}{5}$.



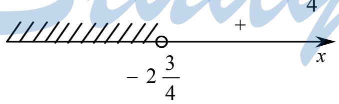
Ответ: $\left(-\infty; -1\frac{3}{5}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2+2(x-1)^2 \ge -2x+7 \\ x^2 > 4x^2(x+3) \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2(x^2-2x+1)+2x-7 \ge 0 \\ 4x^2(x+3)-x^2 < 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3x^2-2x-5 \ge 0 \\ x^2(4x+12-1) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2-2x-5 \ge 0 \\ x^2(4x+11) < 0 \end{cases}$;

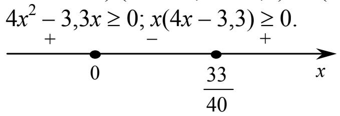
$3x^2 - 2x - 5 = 0$; $D = 4 - 3 \cdot 5 \cdot 4 = 64$; $x = \frac{2 \pm 8}{6}$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1\frac{2}{3}$;

$4x + 11 < 0$; $4x + 11 = 0$; $x = -\frac{11}{4} \Rightarrow x = -2\frac{3}{4}$.



Ответ: $\left(-\infty; -2\frac{3}{4}\right)$.

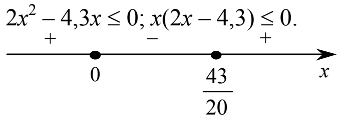
3.1.В12. а) $(5x^2 + 0{,}7x - 2{,}7)^7 \ge (x^2 + 4x - 2{,}7)^7$; $5x^2 + 0{,}7x - 2{,}7 \ge x^2 + 4x - 2{,}7$;
$4x^2 - 3{,}3x \ge 0$; $x(4x - 3{,}3) \ge 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{33}{40}; +\infty\right)$.

б) $(3x^2 + 0{,}7x - 2{,}8)^5 \le (x^2 + 5x - 2{,}8)^5$; $3x^2 + 0{,}7x - 2{,}8 \le x^2\ 5x - 2{,}8$;

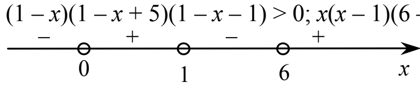
$2x^2 - 4{,}3x \le 0$; $x(2x - 4{,}3) \le 0$.



Ответ: $\left[0;\ \frac{43}{20}\right]$.

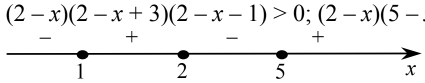
Уровень С.

3.1.C01. а) $5(1 - x) - 4(1 - x)^2 < (1 - x)^3$; $(1 - x)((1 - x)^2 + 4(1 - x) - 5) > 0$;
$(1 - x)(1 - x + 5)(1 - x - 1) > 0$; $x(x - 1)(6 - x) > 0$; $x(x - 1)(x - 6) < 0$;



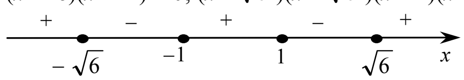
$x \in (-\infty; 0) \cup (1; 6)$

б) $3(2 - x) - 2(2 - x)^2 < (2 - x)^3$; $(2 - x)((2 - x)^2 + 2(2 - x) - 3) > 0$;
$(2 - x)(2 - x + 3)(2 - x - 1) > 0$; $(2 - x)(5 - x)(1 - x) > 0$; $(x - 2)(x - 5)(x - 1) < 0$.



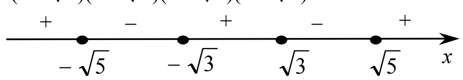
$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 5)$.

3.1.C02. а) $(x^2 + 2)^2 \le 11x^2 - 2$; $x^4 - 7x^2 + 6 \le 0$;
$(x^2 - 6)(x^2 - 1) \le 0$; $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x - 1)(x + 1) \le 0$.



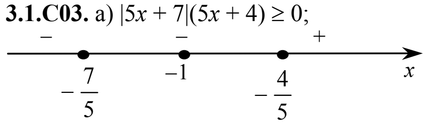
$x \in [-\sqrt{6}; -1] \cup [1;\ \sqrt{6}]$.

б) $(x^2 - 2)^2 \le 4x^2 - 11$; $x^4 - 8x^2 + 15 \le 0$; $(x^2 - 5)(x^2 - 3) \le 0$;
$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$.



$x \in [-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5}]$.

3.1.C03. а) $|5x + 7|(5x + 4) \ge 0$;



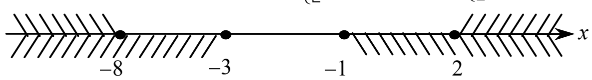
$x \in \left\{-\frac{7}{5}\right\} \cup \left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

б) $|3x + 7|(3x - 4) \ge 0$; $x \in \left\{-\frac{7}{3}\right\} \cup \left[\frac{4}{3};\ +\infty\right)$.

3.1.C04. а) $|4x - 5| \ge (4x - 5)^2$, $|4x - 5| - (4x - 5)^2 \ge 0$; $0 \le |4x - 5| \le 1$;
$-1 \le 4x - 5 \le 1$; $1 \le x \le \frac{3}{2}$. Ответ: $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.

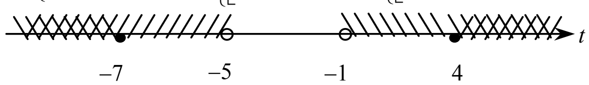
б) $|3x - 1| \ge (3x - 1)^2$; $(3x - 1)^2 - |3x - 1| \le 0$, $0 \le |3x - 1| \le 1$;
$-1 \le 3x - 1 \le 1$; $0 \le x \le \frac{2}{3}$. Ответ: $\left[0; \frac{2}{3}\right]$.

3.1.C05. а) $\begin{cases} -\dfrac{t^2-16}{18}-\dfrac{t}{3}\le 0 \\ |t+2|>1 \end{cases}$; $\begin{cases} t^2+6t-16\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t>-1 \\ t<-3 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} -8\le t\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} t>-1 \\ t<-3 \end{array}\right. \end{cases}$;



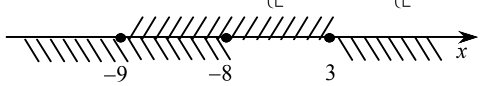
наименьшее целое решение — 8.

б) $\begin{cases} -\dfrac{t^2-28}{9}-\dfrac{t}{3}\le 0 \\ |t+3|>2 \end{cases}$; $\begin{cases} t^2+3t-28\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t>-1 \\ t<-5 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} (t+7)(t-4)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t>-1 \\ t<-5 \end{array}\right. \end{cases}$;



$\left[\begin{array}{l} t\le -7 \\ t\ge 4 \end{array}\right.$. Наименьшего целого решения не существует.

3.1.C06. а) $\begin{cases} |3+x|\le 6 \\ |2x+5|\ge 11 \end{cases}$; $\begin{cases} -9\le x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} 2x\ge 6 \\ 2x\le -16 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} -9\le x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le -8 \end{array}\right. \end{cases}$;



$x \in [-9; -8] \cup \{3\}$.

б) $\begin{cases} |1+x|\le 12 \\ |2x-9|\ge 13 \end{cases}$; $\begin{cases} -13\le x\le 11 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 11 \\ x\le -2 \end{array}\right. \end{cases}$; $x \in [-13; -2] \cup \{11\}$.

3.1.C07. а) $(x^2-8x+48)^2-(x^2-8x-50)^2<0$;
$98(2x^2-16x-2)<0$; $x^2-8x-1<0$; $D=64+4=68$;

$x=\dfrac{8\pm 2\sqrt{17}}{2}=4\pm\sqrt{17}$; $4-\sqrt{17}<x<4+\sqrt{17}$.

б) $(x^2-6x+52)^2-(x^2-6x-50)^2<0$; $102\cdot(2x^2-12x+2)<0$;
$x^2-6x+1<0$; $D=36-4=32$;

$x=\dfrac{6\pm 4\sqrt{2}}{2}=3\pm 2\sqrt{2}$; $3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$.

3.1.C08. а) $(x^2-2x+32)^4>(x^2-2x-50)^4$;
$(x^2-2x+32)^2-(x^2-2x-50)^2>0$; $82(2x^2-4x-18)>0$; $x^2-2x-9>0$;

$\left[\begin{array}{l} x>1-\sqrt{10} \\ x<1+\sqrt{10} \end{array}\right.$; $x \in (-\infty;\ 1-\sqrt{10}) \cup (1+\sqrt{10};\ +\infty)$.

б) $(x^2-10x+30)^4>(x^2-10x-56)^4$; $(x^2-10x+30)^2-(x^2-10x-56)^2>0$;
$86(2x^2-20x-26)>0$; $x^2-10x-13>0$; $D=100+52=4\cdot 38$;

$x=\dfrac{10\pm 2\sqrt{38}}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x>5+\sqrt{38} \\ x<5-\sqrt{38} \end{array}\right.$; $x \in (-\infty;\ 5-\sqrt{38}) \cup (5+\sqrt{38};\ +\infty)$.

3.1.C09. а) $(0,3x^2 + 0,5x - 5)^2 > (0,3x^2 + 0,5x + 5)^2$;

$-10(0,6x^2 + x) > 0$; $x^2 + \frac{10}{6}x < 0$; $-1\frac{2}{3} < x < 0$;

б) $(0,1x^2 + 0,3x - 5)^2 > (0,1x^2 + 0,3x + 5)^2$;

$-10(0,2x^2 + 0,6x) > 0$;

$x^2 + 3x < 0$;

$-3 < x < 0$.

3.1.C10.

а) $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x - 7\right)^4 < \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x + 7\right)^4$;

$\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x - 7\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x + 7\right)^2 < 0$; $-14\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x\right) < 0$; $x^2 + \frac{9}{5}x > 0$;

$\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -1\frac{4}{5} \end{array}\right.$; $x \in \left(-\infty; -1\frac{4}{5}\right) \cup (0; +\infty)$.

б) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 4\right)^4 < \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 4\right)^4$; $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 4\right)^2 < 0$;

$-8\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) < 0$; $x^2 + \frac{4}{3}x > 0$; $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -1\frac{1}{3} \end{array}\right.$; $x \in \left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

3.1.C11. а) $\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{19}{3}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{16}{3}\right)^2 < 0$; $\frac{35}{3}\left(2x^2 - \frac{10}{3}x - 1\right) < 0$;

$6x^2 - 10x + 3 < 0$; $\frac{D}{4} = 7$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{6}$; $\frac{5 - \sqrt{7}}{6} < x < \frac{5 + \sqrt{7}}{6}$.

б) $\left(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{22}{5}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{17}{5}\right)^2 < 0$.

$\frac{39}{5}\left(2x^2 - \frac{16}{5}x - 1\right) < 0$; $10x^2 - 16x + 5 < 0$; $D = 256 - 200 = 56$;

$x = \frac{16 \pm \sqrt{56}}{20} = \frac{8 \pm \sqrt{14}}{10}$; $\frac{8 - \sqrt{14}}{10} < x < \frac{8 + \sqrt{14}}{10}$.

3.1.C12. а) $\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{18}{5}\right)^4 > \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{13}{5}\right)^4$;

$\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{18}{5}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{13}{5}\right)^2 > 0$; $\frac{31}{5}\left(2x^2 - x + 1\right) > 0$;

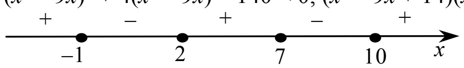
$D = 1 - 8 < 0$; $x \in (-\infty; +\infty)$.

б) $\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{18}{5}\right)^4 > \left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{13}{5}\right)^4$; $\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{18}{5}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{13}{5}\right)^2 > 0$;

$\frac{31}{5}\left(2x^2 - \frac{2x}{3} + 1\right) > 0$; $D = \frac{4}{9} - 8 < 0$; $x \in (-\infty; +\infty)$.

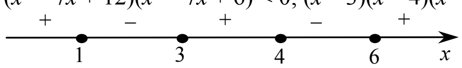
Уровень D.

3.1.D01. а) $(x^2 - 9x)^2 + 4x^2 - 36x - 140 < 0$;
$(x^2 - 9x)^2 + 4(x^2 - 9x) - 140 < 0$; $(x^2 - 9x + 14)(x^2 - 9x - 10) < 0$;



$x \in (-1; 2) \cup (7; 10)$.

б) $(x^2 - 7x)^2 + 18x^2 - 126x + 72 < 0$; $(x^2 - 7x)^2 + 18(x^2 - 7x) + 72 < 0$;
$(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 7x + 6) < 0$; $(x - 3)(x - 4)(x - 6)(x - 1) < 0$; $x \in (1; 3) \cup (4; 6)$.



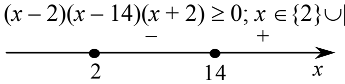
3.1.D02.

а) $6(4x + 3)(x^2 - x + 9) < 9(4x + 3)^2 + (x^2 - x + 9)^2$;
$(3(4x + 3) - (x^2 - x + 9))^2 > 0$; $-x^2 + 13x \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq 13$.
Значит, неравенство выполнено при всех x кроме $x = 0$ и $x = 13$;
$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 13) \cup (13; +\infty)$.

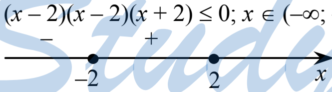
б) $6(4x + 1)(x^2 + 9x + 3) < 9(4x + 1)^2 + (x^2 + 9x + 3)^2$;
$[3(4x + 1) - (x^2 + 9x + 3)]^2 > 0$; $-x^2 + 3x \neq 0$; $x \neq 0$, $x \neq 3$.
Значит, неравенство выполняется для всех $x \neq 0$; 3.
$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

3.1.D03.

а) $|x - 2|(x^2 - 6x - 16) \geq 6x^2 - 24$;
$|x - 2|(x^2 - 6x - 16) - 6(x - 2)(x + 2) \geq 0$;
I. $x \geq 2$;
$(x - 2)(x^2 - 6x - 16 - 6x - 12) \geq 0$; $(x - 2)(x^2 - 12x - 28) \geq 0$;
$(x - 2)(x - 14)(x + 2) \geq 0$; $x \in \{2\} \cup [14; +\infty)$.

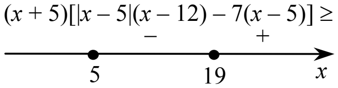


II. $x \leq 2$;
$(x - 2)(x^2 - 6x - 16 + 6(x + 2) \leq 0$; $(x - 2)(x^2 - 4) \leq 0$;
$(x - 2)(x - 2)(x + 2) \leq 0$; $x \in (-\infty; -2] \cup \{2\}$.

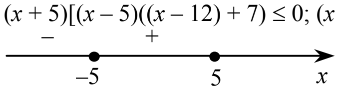


Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{2\} \cup [14; +\infty)$.

б) $|x - 5|(x^2 - 7x - 60) \geq 7x^2 - 175$; $|x - 5|(x^2 - 7x - 60) - 7(x - 5)(x + 5) \geq 0$;
$(x + 5)[|x - 5|(x - 12) - 7(x - 5)] \geq 0$; I. $x \geq 5$; $(x + 5)(x - 5)(x - 19) \geq 0$; $x \geq 19$;



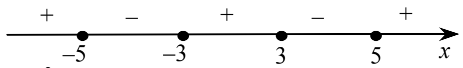
II. $x \leq 5$;
$(x + 5)[(x - 5)((x - 12) + 7) \leq 0$; $(x + 5)(x - 5)(x - 5) \leq 0$; $x \leq -5$.



Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup \{5\} \cup [19; +\infty)$.

3.1.D04. а) $\begin{cases} x^2\,|\,x^2-25\,|\le 9(x^2-25) \\ x(x-6)\ge (x-6) \end{cases}$;

I. $x^2-25\ge 0$; $\left[\begin{array}{l} x\ge 5 \\ x\le -5 \end{array}\right.$; $\begin{cases} (x^2-25)(x^2-9)\le 0 \\ (x-1)(x-6)\ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=-5$;



II. $x^2-25\le 0$; $-5\le x\le 5$;

$\begin{cases} (x^2-25)(9+x^2)\ge 0 \\ (x-6)(x-1)\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-25\ge 0 \\ (x-6)(x-1)\ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=-5$. Ответ: $x=-5$.

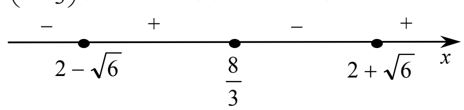
б) $\begin{cases} x^2\,|\,x^2+49\,|\le 16(x^2-49) \\ x(x-9)\ge x-9 \end{cases}$;

I. $x^2-49\ge 0$; $\begin{cases} (x-7)(x+7)(x-4)(x+4)\le 0 \\ (x-9)(x-1)\ge 0 \end{cases}$; $x=-7$;

II. $x^2-49\le 0$; $-7\le x\le 7$; $\begin{cases} (x^2-49)(x^2+16)\ge 0 \\ (x-9)(x-1)\ge 0 \end{cases}$; $x=-7$. Ответ: $x=-7$.

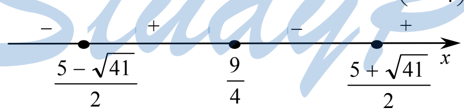
3.1.D05. а) $(3x-8)(x^2-4x-2)\ge |3x-8|\cdot|x^2-4x-2|$,
данное неравенство возможно только при
$(3x-8)(x^2-4x-2)\ge 0$;

$\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x-\left(2-\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{6}\right)\right)\ge 0$.



$x\in\left[2-\sqrt{6};\frac{8}{3}\right]\cup[2+\sqrt{6};+\infty]$.

б) $(4x-9)(x^2-5x-4)\ge |4x-9|\cdot|x^2-5x-4|$; данное неравенство выполняется только при $(4x-9)(x^2-5x-4)\ge 0$; $\left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)\ge 0$;



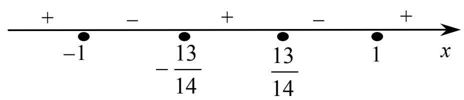
$x\in\left[\frac{5-\sqrt{41}}{2};\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{41}}{2};+\infty\right)$.

$0\cdot(4x-9)(x^2-5x-4)\ge 0$; решение — сама область $x\ge\frac{5+\sqrt{41}}{2}$

Ответ: $x\in\left[\frac{5-\sqrt{41}}{2};\ 2\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{4}}{2};\ +\infty\right)$.

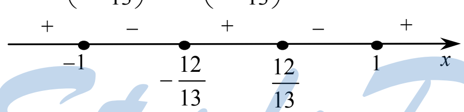
3.1.D06. а) $(x^2+1{,}5x+0{,}7)^2+(x^2+4{,}2x+0{,}862)^2\le$

$\le (x^2 + 2{,}5x + 0{,}76)^2 + (x^2 + 3{,}2x + 0{,}802)^2$;
$(2x^2 + 4x + 1{,}46)(-x - 0{,}06) \le (2x^2 + 7{,}4x + 1{,}664)(-x - 0{,}06)$;
$(x + 0{,}06)(3{,}4x + 0{,}204) \le 0$; $(x + 0{,}06)(x + 0{,}06) \le 0$; $x = -0{,}06$.
б) $(x^2 + 1{,}7x + 0{,}9)^2 + (x^2 + 3{,}8x + 0{,}585)^2 \le$
$\le (x^2 + 2{,}7x + 0{,}75)^2 + (x^2 + 2{,}8x + 0{,}735)^2$;
$(2x^2 + 4{,}4x + 1{,}65)(-x + 0{,}15) \le (2x^2 + 6{,}6x + 1{,}32)(-x + 0{,}15)$;
$(x - 0{,}15)(2{,}2(x - 0{,}15)) \le 0$; $x = 0{,}15$.
3.1.D07. а) $f(x) = -14x^2 + 13$.
У точки с координатами $(x, f(x))$,
расстояние до OX $\rho_x = |f(x)|$,
до OY $\rho_y = |x|$.
Условие перепишем в виде: $\rho_x \le \rho_y$;
$|-14x^2 + 13| \le |x|$; выполняется при $(-14x^2 + 13)^2 \le x^2$;
$(-14x^2 + 13)^2 - x^2 \le 0$;
$(-14x^2 + 13 - x)(-14x^2 + 13 + x) \le 0$;
$(x + 1)\left(x - \frac{13}{14}\right)(x - 1)\left(x + \frac{13}{14}\right) \le 0$;



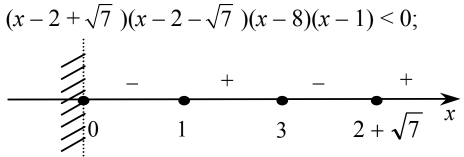
$x \in \left[-1; -\frac{13}{14}\right] \cup \left[\frac{13}{14}; 1\right]$.

б) $\rho_x = |-13x^2 + 12|$; $\rho_y = |x|$;
$|-13x^2 + 12| \le |x|$, выполняется при $(-13x^2 + 12)^2 \le x^2$;
$(-13x^2 + 12)^2 - x^2 \le 0$; $(-13x^2 + 12 - x)(-13x^2 + 12 + x) \le 0$;
$(-13x^2 + x - 12)(13x^2 - x - 12) \le 0$;
$(x+1)\left(x - \frac{12}{13}\right)(x-1)\left(x + \frac{12}{13}\right) \le 0$;



$x \in \left[-1; -\frac{12}{13}\right] \cup \left[\frac{12}{13}; 1\right]$.

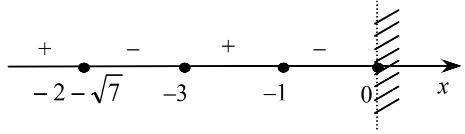
3.1.D08.
а) $f(x) = x^4 - 8|x|^3 + 16x^2 < 9$;
I. $x \ge 0$;
$x^4 - 8x^3 + 16x^2 < 9$; $x^2(x - 4)^2 - 9 < 0$; $(x^2 - 4x - 3)(x^2 - 4x + 3) < 0$;
$(x - 2 + \sqrt{7})(x - 2 - \sqrt{7})(x - 8)(x - 1) < 0$;



$x \in [0; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{7})$;

II. $x \le 0$;
$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 9 < 0$; $x^2(x + 4)^2 - 9 < 0$; $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 4x + 3) < 0$;

$(x + 2 - \sqrt{7}\,)(7 + 2 + \sqrt{7}\,)(x + 1)(x + 3) < 0;$



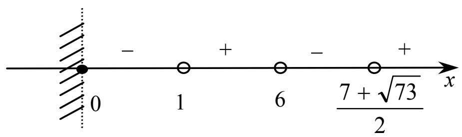
$x \in (-2 - \sqrt{7}\,; -3) \cup (-1; 0]$. Ответ: $x \in (-2 - \sqrt{7}\,; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{7}\,)$.

б) $f(x) = x^4 - 14|x|^3 + 49x^2 > 36;$

I. $x \ge 0;$

$x^2(x - 7)^2 - 36 > 0;\ (x^2 - 7x - 6)(x^2 - 7x + 6) > 0;$

$(x - 1)(x - 6)\left(x - \dfrac{7+\sqrt{73}}{2}\right)\left(x - \dfrac{7-\sqrt{73}}{2}\right) > 0;$

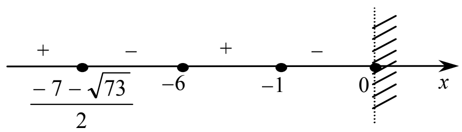


$x \in (1; 6) \cup \left(\dfrac{7+\sqrt{73}}{2};\ +\infty\right);$

II. $x \le 0;$

$x^2(x + 7)^2 - 36 > 0;\ (x^2 + 7x - 6)(x^2 + 7x + 6) > 0;$

$\left(x + \dfrac{7-\sqrt{73}}{2}\right)\left(x + \dfrac{7+\sqrt{73}}{2}\right)(x + 6)(x + 1) > 0;$



$x \in \left(-\infty;\ \dfrac{-7-\sqrt{73}}{2}\right) \cup (-6;\ 1)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{7-\sqrt{73}}{2}\right) \cup (-6;\ 1) \cup (1;\ 6) \cup \left(\dfrac{7+\sqrt{73}}{2};\ +\infty\right)$.

3.1.D09. а) $f(x) > 0$ при всех x, кроме $x = 3$;

$f(|x + 3| - 17) > 0;\ f(3) = 0;\ |x + 3| - 17 = 3;\ |x + 3| = 20;$

$\left[\begin{array}{l} x+3=20 \\ x+3=-20 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x=17 \\ x=-23 \end{array}\right.$.

Поэтому $f(|x + 3| - 17) > 0$ для всех x, кроме $x = 17$ и $x = -23$, значит,
$x \in (-\infty; -23) \cup (-23; 17) \cup (17; +\infty)$.

б) $f(x) < 0$, при всех x, кроме $x = 5$;

$f(|x - 1| + 18) < 0;\ f(5) = 0;\ |x - 1| + 18 = 5;\ |x - 1| = -13;$

нет решений. Значит $f(|x - 1| + 18) > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

3.1.D10. а) $f(x) > 0$ при всех x, кроме $x = 7$;

$f(7) = 0;\ (x - 6)f(x) \le 0;\ x - 6 \le 0;\ x \le 6$.

В точке $x = 7$ неравенство также выполняется. Ответ: $x \in (-\infty; 6] \cup \{7\}$.

б) $f(x) > 0$ при всех x, кроме $x = 9$;
$(x + 7)f(x) \geq 0$; $f(9) = 0$; $x + 7 \leq 0$; $x \leq -7$.
В точке $x = 9$ неравенство выполнено. Ответ: $x \in (-\infty; -7] \cup \{9\}$.
3.1.D11.
а) $f(x)$ — периодическая; $T = 9$;
$f(x) \geq 18$; $f(x) = 9x - x^2$; $x \in [0; 9]$; $9x - x^2 \geq 18$; $x^2 - 9x + 18 \leq 0$;
$(x - 6)(x - 3) \leq 0$; $x \in [3; 6]$ на отрезке $[0; 9]$.
Значит, на всей прямой решение запишется так: $x \in [3 + 9k; 6 + 9k]$, $k \in Z$.
б) $f(x)$ — периодическая; $T = 11$;
$f(x) \leq 18$; $f(x) = 11x - x^2$; $x \in [0; 11]$; $11x - x^2 \leq 18$; $x^2 - 11x + 18 \leq 0$;
$2 \leq x \leq 9$ на $[0; 11]$. Значит, для всей прямой $x \in [2 + 11k; 9 + 11k]$, $k \in Z$.
3.1.D12. а) $f(|x - 1| - 1) < f(|5x + 2|)$; $|x - 1| - 1 > |5x + 2|$;
I. $x - 1 \geq 0$; $x \geq 1$; $x - 2 > |5x + 2|$;
$x - 2 > 5x + 2$; $x < -1$, противоречит тому, что $x \geq 1$.
II. $x - 1 \leq 0$; $x \leq 1$; $1 - x - 1 > |5x + 2|$; $-x > |5x + 2|$;
1) $5x + 2 \geq 0$; $x \geq -\frac{2}{5}$; $-x > 5x + 2$; $x < -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Значит, $x \in \left[-\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right)$.
2) $5x + 2 \leq 0$; $x \leq -\frac{2}{5}$; $-x > -5x - 2$; $x > -\frac{1}{2}$. Значит, $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}\right]$.
Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$.
б) $f(|x - 4| - 4) > f(|3x + 5|)$.
Поскольку f монотонно убывает, то если $f(m) > f(n)$, то $m < n \Rightarrow$
$|x - 4| - 4 < |3x + 5|$;
I. $x - 4 \geq 0$; $x \geq 4$; $x - 4 - 4 < |3x + 5|$;
1) $3x > -5$; $x > -\frac{5}{3}$; $x - 8 < 3x + 5$; $x > \frac{13}{2}$. Значит, $x \geq 4$;
2) $3x < -5$; $x < -\frac{5}{3}$, невозможен в I.
II. $x \leq 4$; $4 - x - 4 < |3x + 5|$;
1) $3x \geq -5$; $x \geq -1\frac{2}{3}$; $-x < 3x + 5$; $x > -\frac{5}{4}$; $x \in \left(-\frac{5}{4}; 4\right]$;
2) $3x \leq -5$; $x \leq -\frac{5}{3}$; $-x < -3x - 5$; $x < -\frac{5}{2}$.
Значит, $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$ Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; -\infty\right)$.

§ 2. Рациональные неравенства

3.2.A01. а) $x^{-5}(7 - 3x) \leq 0$; $x \neq 0$; $x(7 - 3x) \leq 0$; $x(3x - 7) \geq 0$;
$\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \geq \frac{7}{3} \end{array}\right.$. Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$.
б) $x^{-3}(4 - 5x) \leq 0$; $x(4 - 5x) \leq 0$; $x \neq 0$; $x(5x - 4) \geq 0$;

$\left[\begin{aligned} &x<0 \\ &x \geq \frac{4}{5} \end{aligned}\right.$. Ответ: $x \in (-\infty;\, 0) \cup \left[\frac{4}{5};+\infty\right)$.

3.2.A02. а) $f(x)=\left(x^2-4x+3\right)^{-\frac{1}{3}}$

$f(x)$ определена при $x^2-4x+3>0$ т.е. $(x-1)(x-3)>$, тогда $x \in (-\infty,\, 1)\cup(3,\, +\infty)$;

б) $f(x)=\left(x^2-5x+6\right)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)$ определена при $x^2-5x+6\geq 0$ т.е. $(x-2)(x-3)\geq 0$, тогда $x \in (-\infty,\, 2]\cup[3,\, +\infty)$.

3.2.A03. а) $\begin{cases} \frac{6}{x} \geq 13 \\ \frac{x}{6}-\frac{3-2x}{3}+\frac{13}{18} \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{6}{x} \geq 13 \\ 3x-18+12x+13 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \begin{cases} x \leq -\frac{6}{13} \\ x>0 \end{cases} \\ 15x \geq 5 \end{cases}$;

$\begin{cases} 0<x \leq \frac{6}{13} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{6}{13}$.

б) $\begin{cases} \frac{5}{x} \geq 1 \\ \frac{x}{9}-\frac{5-x}{3}+\frac{71}{45} \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 5 \\ x>0 \\ 5x-75+15x+71 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 5 \\ x>0 \\ x \geq \frac{1}{5} \end{cases}$; $x \in \left[\frac{1}{5};\ 5\right]$.

3.2.A04. а) $\frac{5x-13}{2x-5}>0$; $\left[\begin{aligned} &x>2\frac{3}{5} \\ &x<2\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$; $x \in \left(-\infty;\ 2\frac{1}{2}\right) \cup \left(2\frac{3}{5};+\infty\right)$.

б) $\frac{3x-17}{x+3}<0$; $-3<x<5\frac{2}{3}$.

3.2.A05. а) $\begin{cases} x^2-3x-18<0 \\ x(1-x)^{-1}<0 \end{cases}$; $\begin{cases} -3<x<6 \\ 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;\, 1)$.

б) $\begin{cases} x^2-x-72<0 \\ x(3-x)^{-1}<0 \end{cases}$; $\begin{cases} -8<x<9 \\ \frac{x}{x-3}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} -8<x<9 \\ \left[\begin{aligned} &x>3 \\ &x<0 \end{aligned}\right. \end{cases}$. Ответ: $x \in (-8;\, 0) \cup (3;\, 9)$.

3.2.A06. а) $4>\frac{1}{p}$; $\frac{4p-1}{p}>0$; $p \in (-\infty;\, 0) \cup \left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

б) $-2>\frac{1}{p}$. Неравенство будет выполнено при $p<0$, т.к. при $p>0$: $\frac{1}{p}>0$.

Домножим обе части неравенства на $p<0$:

$-2p<1$; $p>-\frac{1}{2}$, значит, $p \in \left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$.

Уровень B.

3.2.B01. а) $\frac{4}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}>12$, $x \neq 1$;

$12(1-x)^2 - 4(1-x) - 1 < 0$; $12t^2 - 4t - 1 = 0$; $D = 16 + 48 = 64$;

$t_1=\frac{4-8}{24}=-\frac{1}{6}$; $t_2=\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{6}<1-x<\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{6}<-x<-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<x<1\frac{1}{6}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right)\cup\left(1;\ 1\frac{1}{6}\right)$.

б) $\frac{3}{3-x}+\frac{1}{(3-x)^2}>18$; $x \neq 3$; $18(3-x)^2 - 3(3-x) - 1 < 0$;

$18t^2 - 3t - 1 = 0$; $D = 9 + 72 = 81$; $t=\frac{3\pm 9}{2\cdot 18}$; $t_1=-\frac{1}{6}$; $t_2=\frac{1}{3}$;

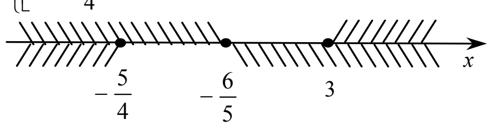
$-3\frac{1}{6}<-x<-2\frac{2}{3}$; $2\frac{2}{3}<x<3\frac{1}{6}$. Ответ: $x\in\left(2\frac{2}{3};\ 3\right)\cup\left(3;\ 3\frac{1}{6}\right)$.

3.2.B02. а) $-3<\frac{1}{4x+5}<\frac{1}{17}$; $\begin{cases} -3<\frac{1}{4x+5} \\ \frac{1}{4x+5}<\frac{1}{17} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{12x+15+1}{4x+5}>0 \\ \frac{4x+5-17}{4x+5}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3x+4}{4x+5}>0 \\ \frac{x-3}{4x+5}>0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>-\frac{5}{4} \\ x<-\frac{4}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-\frac{5}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (3; +\infty).$$

б) $-4<\frac{1}{5x+6}<\frac{1}{21}$; $\begin{cases} \frac{1}{5x+6}<\frac{1}{21} \\ \frac{1}{5x+6}>-4 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{21-5x-6}{5x+6}<0 \\ \frac{1+20x+24}{5x+6}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{5x-15}{5x+6}>0 \\ \frac{20x+25}{5x+6}>0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-\frac{6}{5} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>-\frac{6}{5} \\ x<-\frac{5}{4} \end{array}\right. \end{cases}.$$



Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (3; +\infty)$.

3.2.В03. а) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} \geq 40;\ \frac{1}{x}=t;\ t^2+3t-40 \geq 0;\ (t+8)(t-5) \geq 0;\ \left[\begin{array}{l} t \geq 5 \\ t \leq -8 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{ll} \frac{1}{x} \geq 5 \Rightarrow & 0 < x \leq \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x} \leq -8 \Rightarrow & -\frac{1}{8} \leq x < 0 \end{array}\right.$. Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{8};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{5}\right]$.

б) $\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2} \geq 21;\ x \neq 0;\ \frac{1}{x}=t;\ t^2+4t-21 \geq 0;\ (t+7)(t-3) \geq 0;$

$\left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ t \leq -7 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} \geq 3 \\ \frac{1}{x} \leq -7 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{7} \leq x < 0 \end{array}\right.$. Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{7};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{3}\right]$.

3.2.В04. а) $f(x)=\frac{2x-1}{3x-5} \neq 4;\ x \neq \frac{5}{3};\ \frac{2x-1-12x+20}{3x-5} \neq 0;$

$\frac{10x-19}{3x-5} \neq 0;\ x \neq \frac{19}{10};\ g(x)=\frac{1}{(x-1)^2} \neq 4;\ x \neq 1;$

$4(x-1)^2-1 \neq 0;\ (2x-2+1)(2x-2-1) \neq 0;\ x \neq \frac{1}{2};\ x \neq \frac{3}{2}$.

Ответ: все x кроме $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{19}{10}$.

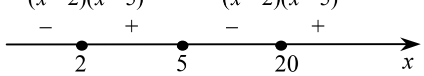
б) $\frac{5x-3}{4x+3} \neq 9;\ \left[\begin{array}{l} 5x-3 \neq 36x+27 \\ x \neq -\frac{3}{4} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x \neq -\frac{30}{31} \\ x \neq -\frac{3}{4} \end{array}\right.;\ \frac{1}{(x-3)^2} \neq 9;$

$9(x-3)^2 \neq 1;\ \left[\begin{array}{l} 3(x-3) \neq 1 \\ 3(x-3) \neq -1 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{8}{3} \\ x \neq \frac{10}{3} \end{array}\right.;\ x \neq 3.$

Ответ: все x кроме $-\frac{30}{31};\ -\frac{3}{4};\ \frac{8}{3};\ 3;\ \frac{10}{3}$.

3.2.В05. а) $6(x-2)^{-1} \leq \frac{5}{x-5};\ \frac{6}{x-2} \leq \frac{5}{x-5};$

$\frac{6x-30-5x+10}{(x-2)(x-5)} \leq 0;\ \frac{(x-20)}{(x-2)(x-5)} \leq 0;$



$x \in (-\infty; 2) \cup (5; 20]$;

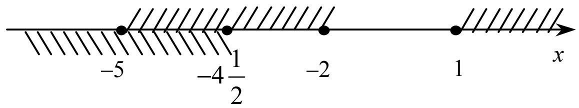
$S_N = 1 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 =$
$=196.$

б) $4(x-1)^{-1} \le \frac{3}{x-4}$; $\frac{4}{x-1} \le \frac{3}{x-4}$; $\frac{4x-16-3x+3}{(x-1)(x-4)} \le 0$;

$\frac{x-13}{(x-1)(x-4)} \le 0$; $x \in (-\infty;\ 1) \cup (4;\ 13]$; $S = 5 + \ldots + 12 + 13 = \frac{5+13}{2} \cdot 9 = 81$.

3.2.B06. а) $\begin{cases} \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-1} \ge 0 \\ \frac{1}{(x+5)^2} \ge \frac{2}{x+5} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{2x+4}{(x-1)(x+5)} \ge 0 \\ \frac{1}{(x+5)}\left(\frac{1}{x+5} - 2\right) \ge 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -5 < x \le -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x+5} \le 0 \\ \frac{1}{x+5} \ge 2 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -5 < x \le -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ \frac{2x+9}{x+5} \le 0 \end{array}\right. \end{cases}$.



Ответ: $x \in \left(-5;\ -4\frac{1}{2}\right]$.

б) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} \ge 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} \ge 5\frac{1}{x+1} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x-1}{(x+1)(x-3)} \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x+1} \ge 5 \\ \frac{1}{x+1} \le 0 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -1 < x \le 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x+1 \le \frac{1}{5} \\ x+1 < 0 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -1 < x < 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 < x \le -\frac{4}{5} \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases}$.

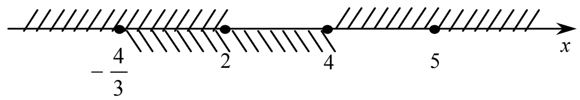
$x \in \left(-1;\ -\frac{4}{5}\right]$.

3.2.B07.

а) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2x+5} \ge 1 \\ \frac{1}{(x-6)^2} \ge 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3x-1-2x-5}{2x+5} \ge 0 \\ (x-6)^2 \le 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x-6}{2x+5} \ge 0 \\ \begin{cases} -1 < x-6 < 1 \\ x-6 \ne 0 \end{cases} \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 6 \\ x < -\frac{5}{2} \end{array}\right. \\ \begin{cases} 5 < x < 7 \\ x \ne 6 \end{cases} \end{cases}$;

$x \in (6;\ 7]$, целое значение $x = 7$.

б) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3x+4} < 1 \\ \dfrac{1}{(x-3)^2} < 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{4x-1-3x-4}{3x+4} < 0 \\ (x-3)^2 > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{4}{3} < x < 5 \\ \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < 2 \end{array}\right. \end{cases}$;



$x \in \left(-\dfrac{4}{3};\ 2\right) \cup (4; 5)$, целые значения -1, 0, 1.

3.2.В08.

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{7+x} \geq \dfrac{1}{6} \\ (7+x)^2 < 36 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{7+x-6}{7+x} \leq 0 \\ -6 < 7+x < 6 \end{cases}$; $\begin{cases} -7 < x \leq -1 \\ -13 < x < -1 \end{cases}$; $x \in (-7; -1)$.

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{4+x} \leq \dfrac{1}{7} \\ (4+x)^2 \geq 49 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{4+x-7}{4+x} > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4+x \geq 7 \\ 4+x \leq -7 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x < -4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -11 \end{array}\right. \end{cases}$;

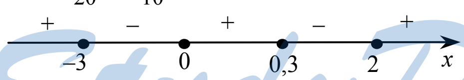
$x \in (-\infty; -11] \cup [3; +\infty)$.

3.2.В09.

а) $\dfrac{3x-2}{x+3} > 1 - \dfrac{2}{5x}$; $\dfrac{5x^2+15x-15x^2+10x-2x-6}{x(x+3)} < 0$;

$\dfrac{10x^2-23x+6}{x(x+3)} > 0$; $10x^2 - 23x + 6 = 0$; $D = 529 - 240 = 17^2$;

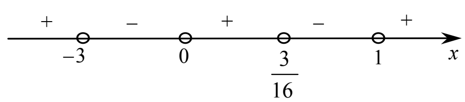
$x_1 = \dfrac{23-17}{20} = \dfrac{3}{10}$; $x_2 = 2$;



$x \in (-\infty; -3) \cup (0; 0{,}3) \cup (2; +\infty)$.

б) $\dfrac{5x-2}{x+3} < 1 - \dfrac{1}{4x}$; $\dfrac{20x^2-8x-x-3-4x^2-12x}{x(x+3)} < 0$; $\dfrac{16x^2-19x+3}{x(x+3)} < 0$;

$16x^2 - 19x - 3 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{19 \pm 13}{32}$; $x_2 = \dfrac{3}{16}$; $x_1 = 1$; $\dfrac{\left(x - \dfrac{3}{16}\right)(x-1)}{x(x+3)} < 0$;



$x \in (-3;\ 0) \cup \left(\dfrac{3}{16};\ 1\right)$.

3.2.В10.

а) $\frac{4}{4-x}+(4-x)^{-2}\le 5$; $\frac{1}{4-x}=t$; $t^2+4t-5\le 0$; $-5\le t\le 1$;

$\begin{cases}\frac{1}{4-x}\ge -5\\ \frac{1}{4-x}\le 1\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{21-5x}{4-x}\ge 0\\ \frac{x-3}{4-x}\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{5x-21}{x-4}\ge 0\\ \frac{x-3}{x-4}\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge \frac{21}{5}\\ x<4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>4\\ x\le 3\end{array}\right.\end{cases}$; $x\in(-\infty;\,3]\cup\left[\frac{21}{5};+\infty\right)$.

б) $\frac{3}{3-x}+(3-x)^{-2}<10$; $\frac{1}{3-x}=t$; $t^2+3t-10<0$; $-5<t<2$;

$\begin{cases}\frac{1}{3-x}<2\\ \frac{1}{3-x}+5>0\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{2x-5}{3-x}<0\\ \frac{-5x+15+1}{3-x}>0\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{2x-5}{x-3}>0\\ \frac{5x-16}{x-3}>0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<\frac{5}{2}\\ x>3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>\frac{16}{5}\\ x<3\end{array}\right.\end{cases}$;

$x\in\left(-\infty;\,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{16}{5};+\infty\right)$.

3.2.В11. а) $\begin{cases}\frac{x-2}{3x-4}>0\\ \frac{(x-7)^2}{(x+\sqrt{11})^4}>0\end{cases}$;

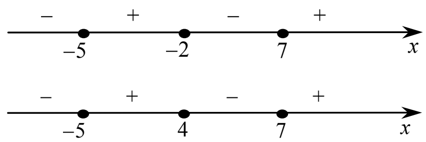
$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<\frac{4}{3}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ne 7\\ x\ne -\sqrt{11}\end{array}\right.\end{cases}$; $x\in\left(-\infty;\,-\sqrt{11}\right)\cup\left(-\sqrt{11};\,\frac{4}{3}\right)\cup(2;\,7)\cup(7;\,+\infty)$.

б) $\begin{cases}\frac{x-4}{4x+3}>0\\ \frac{(x-5)^2}{(x+2\sqrt{3})^4}>0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>4\\ x<-\frac{3}{4}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ne 5\\ x\ne -2\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}$;

$x\in\left(-\infty;\,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-2\sqrt{3};\,-\frac{3}{4}\right)\cup(4;\,5)\cup(5;\,+\infty)$.

3.2.В12. а) $\begin{cases}x-4\le\frac{27}{x+2}\\ x+2\le\frac{27}{x-4}\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x^2-2x-8-27}{x+2}\le 0\\ \frac{x^2-2x-8-27}{x-4}\le 0\end{cases}$;

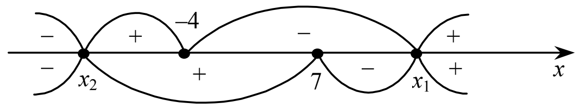
$$\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-35}{x+2}\le 0\\ \dfrac{x^2-2x-35}{x-4}\le 0\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{(x-7)(x+5)}{x+2}\le 0\\ \dfrac{(x-7)(x+5)}{x-4}\le 0\end{cases};$$



$x \in (-\infty; -5] \cup (4; 7]$.

б) $\begin{cases}x-7<\dfrac{2}{x+4}\\ x+4>\dfrac{2}{x-7}\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{x^2-3x-30}{x+4}<0\\ \dfrac{x^2-3x-30}{x-7}>0\end{cases};$

$x^2 - 3x - 30 = 0$; $D = 9 + 120 = 129$; $x_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{129}}{2}$;

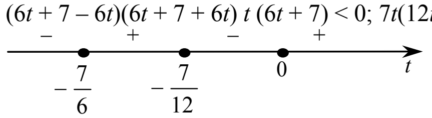


$x \in (-4; 7)$.

Уровень С.

3.2.С01. а) $\dfrac{6t+7}{t}<\dfrac{36t}{6t+7}$; $\dfrac{(6t+7)^2-36t^2}{t(6t+7)}<0$;

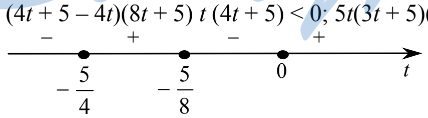
$(6t + 7 - 6t)(6t + 7 + 6t)\, t\, (6t + 7) < 0$; $7t(12t + 7)(6t + 7) < 0$;



$t\in\left(-\infty; -\dfrac{7}{6}\right)\cup\left(-\dfrac{7}{12};\ 0\right)$.

б) $\dfrac{4t+5}{t}<\dfrac{16t}{4t+5}$; $\dfrac{(4t+5)^2-16t^2}{t(4t+5)}<0$;

$(4t + 5 - 4t)(8t + 5)\, t\, (4t + 5) < 0$; $5t(3t + 5)(4t + 5) < 0$;



$t\in\left(-\infty;\ -\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{8};\ 0\right)$.

3.2.С02. а) $f(x)=\left(\dfrac{x^2-2x}{x+4}\right)^{-1}=\left(\dfrac{x+4}{x^2-2x}\right)$; $g(x)=\left(\dfrac{x+4}{x^2-2x}\right)^{-1}=\dfrac{x^2-2x}{x+4}$;

$\left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -4 \\ x \neq 2; \end{array}\right.$; $\dfrac{x^2-2x}{x+4} \neq \dfrac{x+4}{x^2-2x}$; $\dfrac{x^2-2x}{x+4} = t$; $t \neq \dfrac{1}{t}$; $\dfrac{t^2-1}{t} \neq 0$; $t \neq 0$; $t^2 \neq \pm 1$;

$\dfrac{x^2-2x}{x+4} \neq -1$; $x^2 - 2x + x + 4 \neq 0$; $x^2 - x + 4 \neq 0$; $x^2 - x + 4 > 0$;

$\dfrac{x^2-2x}{x+4} \neq 1$; $x^2 - 2x - x - 4 \neq 0$; $x^2 - 3x - 4 \neq 0$; $x \neq 4$; $x \neq -1$.

Ответ: при всех значениях x, кроме –4, –1, 2, 4.

б) $f(x) = \left(\dfrac{x^2-5x}{x+7}\right)^{-1}$; $g(x) = \left(\dfrac{x+7}{x^2-5x}\right)^{-1}$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -7 \\ x \neq 5 \end{array}\right.$; $\dfrac{x^2-5x}{x+7} \neq \pm 1$;

$x^2 - 5x \neq x + 7$; $x^2 - 6x - 7 \neq 0$; $x \neq 7$; $x \neq -1$; $x^2 - 5x \neq -x - 7$; $x^2 - 4x + 7 > 0$.

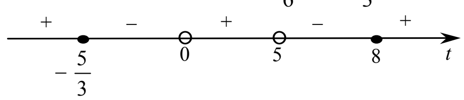
Ответ: при всех значениях x, кроме –7, –1, 0, 5, 7.

3.2.C03.

а) $\dfrac{12}{t-5} - \dfrac{8}{t} \leq 3$; $\dfrac{12t - 8t + 40 - 3t^2 + 15t}{t(t-5)} \leq 0$;

$\dfrac{3t^2 - 19t - 40}{t(t-5)} \geq 0$; $t(t-5)(t+\dfrac{5}{3})(t-8) \geq 0$; $t \neq 0$, $t \neq 5$; $3t^2 - 19t - 40 = 0$;

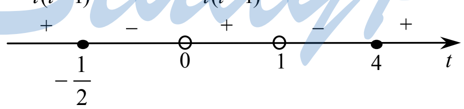
$D = 361 + 480 = 29^2$; $t_1 = \dfrac{19-29}{6} = -\dfrac{5}{3}$; $t_2 = 8$;



$t \in (-\infty; -\dfrac{5}{3}] \cup (0; 5) \cup [8; +\infty)$.

б) $\dfrac{9}{t-1} - \dfrac{4}{t} \leq 2$; $\dfrac{9t - 4t + 4 - 2t^2 + 2t}{t(t-1)} \leq 0$;

$\dfrac{2t^2 - 7t - 4}{t(t-1)} \geq 0$; $\dfrac{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)(t-4)}{t(t-1)} \geq 0$;



$t \in (-\infty; -\dfrac{1}{2}] \cup (0; 1) \cup [4; +\infty)$.

3.2.C04. а) $\begin{cases}(1+x)^{-1}\le\frac{1}{2}\\(1+x)^{2}\le 4\end{cases}$; $x\ne -1$; $\begin{cases}\frac{1}{1+x}\le\frac{1}{2}\\(1+x)^{2}\le 4\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x+1-2}{1+x}\ge 0\\-2\le x+1\le 2\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x-1}{x+1}\ge 0\\-3\le x\le 1\end{cases}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x<-1\end{array}\right.\\-3\le x\le 1\end{cases}$; $x\in[-3;-1)\cup\{1\}$.

б) $\begin{cases}(6+x)^{-1}\le\frac{1}{6}\\(6+x)^{2}\le 36\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1}{6+x}\le\frac{1}{6}\\-6\le x+6\le 6\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x+6-6}{x+6}\ge 0\\-12\le x\le 0\end{cases}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x<-6\end{array}\right.\\-12\le x\le 0\end{cases}$; $x\in[-12;-6)\cup\{0\}$.

3.2.C05. а) $\begin{cases}\frac{x^2+3x-28}{x+7}<-5\\|x+7|<1\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x^2+3x-28+5x+35}{x+7}<0\\-1<x+7<1\end{cases}$;

$\begin{cases}\frac{x^2+8x+7}{x+7}<0\\-8<x<-6\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{(x+3)(x+1)}{x+7}<0\\-8<x+7<-6\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x\ne -7\end{array}\right.\\-8<x<-6\end{cases}$; $x\in(-8;-7)\cup(-7;-6)$.

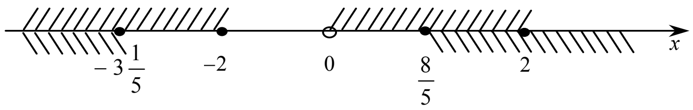
б) $\begin{cases}\frac{x^2-11x+38}{x-7}<6\\|x-5|<5\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{(x-6)(x-5)}{x-5}<6\\-5<x-5<5\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<12\\x\ne 5\end{array}\right.\\0<x<10\end{cases}$; $x\in(0;5)\cup(5;10)$.

3.2.C06.

а) $\begin{cases}\frac{5x}{x^2+4}<\frac{4}{x}\\\frac{1}{|3x+2|}<\frac{1}{11}\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{5x^2-4(x^2+4)}{x(x^2+4)}<0\\\left[\begin{array}{l}|3x+2|>11\\x\ne-\frac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{(x-4)(x+4)}{x(x^2+4)}<0\\\left[\begin{array}{l}3x+2>11\\3x+2<-11\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0<x\le 4\\x\le -4\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-\frac{13}{3}\end{array}\right.\end{cases}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-4\frac{1}{3})\cup(3;4]$.

б) $\begin{cases}\frac{3x}{x^2+2}\le\frac{2}{x}\\\frac{1}{|5x+4|}<\frac{1}{12}\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{3x^2-2x^2-4}{x(x^2+2)}\le 0\\|5x+4|>12\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x^2-4}{x(x^2+2)}\le 0\\\left[\begin{array}{l}5x>8\\5x<-16\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0<x\le 2\\x\le -2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>\frac{8}{5}\\x<-3\frac{1}{5}\end{array}\right.\end{cases}$.

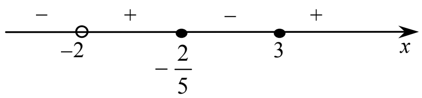


Ответ: $x \in \left(-\infty; -3\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{8}{5};\ 2\right]$.

3.2.C07. а) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x^2+4}\right)^{-1} > \frac{13}{5}$; $\frac{x^2+4}{x+2} > \frac{1}{\frac{5}{13}}$; $\frac{5x^2+20-13x-26}{x+2} > 0$;

$\frac{5x^2-13x-6}{x+2} > 0$; $5x^2 + 20 - 13x - 6 = 0$; $D = 169 + 120 = 289$;

$x_1 = \frac{13-17}{10} = -\frac{2}{5}$; $x_2 = 3$; $\frac{\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-3)}{x+2} > 0$;



$x \in (-2; -\frac{2}{5}) \cup (3; +\infty)$.

б) $f(x) = \left(\frac{x+3}{x^2-8}\right)^{-1} < \frac{8}{7}$; $x^2 - 8 \neq 0$; $x \neq \pm 2\sqrt{2}$; $\frac{x^2-8}{x+3} < \frac{8}{7}$;

$\frac{7x^2-56-8x-24}{x+3} < 0$; $\frac{7x^2-8x-80}{x+3} < 0$;

$7x^2 - 8x - 80 = 0$;

$D = 64 + 28 \cdot 80 = 2304 = 48^2$;

$x_1 = \frac{8-48}{14} = -\frac{20}{7}$; $x_2 = \frac{8+48}{14} = 4$;

$x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{20}{7}; -2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$.

3.2.C08. а) $f(x) = \left(\frac{2x+5}{x+5}\right)^{-1} > 1$; $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$;

$\frac{x+5}{2x+5} > 1$; $\frac{x+5-2x-5}{2x+5} > 0$;

$\frac{x}{2x+5} < 0$; $-\frac{5}{2} < x < 0$. Ответ: $x \in \left(-\frac{5}{2};\ 0\right)$.

б) $f(x) = \left(\frac{3x-5}{2x-1}\right)^{-1} < 1$; $2x - 1 \neq 0$; $x \neq \frac{1}{2}$;

$\frac{2x-1}{3x-5} < 1$; $\frac{2x-1-3x+5}{3x-5} < 0$; $\frac{x-4}{3x-5} > 0$; $\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < \frac{5}{3} \end{array}\right.$, значит,

$x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{3}\right) \cup (4;\ +\infty)$.

3.2С09. а) $\frac{14-|x|}{4|x|-1} > 0$;

I. $x \geq 0$; $\frac{14-x}{4x-1} > 0$; $\frac{1}{4} < x < 14$;

II. $x \leq 0$; $\frac{14+x}{-4x-1} > 0$; $\frac{14+x}{4x+1} < 0$; $-14 < x < -\frac{1}{4}$.

Ответ: $x \in \left(-14;\ -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ 14\right)$.

б) $f(x) = \frac{3|x|-19}{|x|-4} < 0$;

I. $x \geq 0$; $\frac{3x-19}{x-4} < 0$; $4 < x < \frac{19}{3}$;

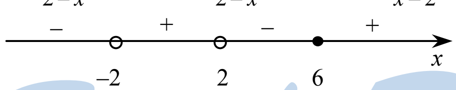
II. $x \leq 0$; $\frac{-3x-19}{-x-4} < 0$; $\frac{3x+19}{x+4} < 0$; $x \in \left(-\frac{19}{3}; -4\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{19}{3}; -4\right)$.

3.2.С10. а) $(x-2+16(2-x)^{-1})^{-5} \leq 0$;

$\frac{1}{\left(x-2+\frac{16}{2-x}\right)^5} < 0$; $\left(x-2+\frac{16}{2-x}\right) < 0$; $\frac{x^2-4x+4-16}{2-x} > 0$;

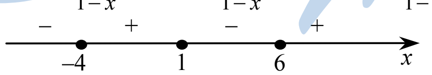
$\frac{x^2-4x-12}{2-x} > 0$; $\frac{(x-6)(x+2)}{2-x} > 0$; $\frac{(x-6)(x+2)}{x-2} < 0$;



$x \in (-\infty; -2) \cup (2; 6)$.

б) $(x-1+25(1-x)^{-1})^{-1} \geq 0$; $x-1+25\,(1-x)^{-1} > 0$;

$x-1+\frac{25}{1-x} > 0$; $\frac{x^2-2x+1-25}{1-x} < 0$; $\frac{x^2-2x-24}{1-x} < 0$; $\frac{(x-6)(x+4)}{x-1} > 0$.



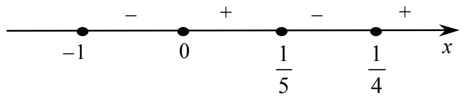
Ответ: $x \in (-4; 1) \cup (6; +\infty)$.

3.2.С11. а) $f(x) = \frac{5x-1}{|x+1|} < g(x) = 1 - \frac{1}{5x}$; $\frac{5x-1}{|x+1|} < 1 - \frac{1}{5x}$; D: $\left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{array}\right.$;

I. $x+1 > 0$; $x > -1$;

$\frac{5x-1}{x+1} - 1 + \frac{1}{5x} < 0$; $\frac{-5x^2-5x+25x^2-5x+x+1}{5x(x+1)} < 0$; $\frac{20x^2-9x+1}{5x(x+1)} < 0$;

$20x^2 - 9x + 1 = 0$; $D = 81 - 80 = 1$; $x = \frac{9 \pm 1}{40}$; $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{5}$;



$x \in (-1;\ 0) \cup \left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right)$;

II. $x < -1$;

$1 + \frac{5x-1}{x+1} - \frac{1}{5x} > 0$; $\frac{5x^2+5x+25x^2-5x-x-1}{x(x+1)} > 0$; $\frac{30x^2-x-1}{x(x+1)} > 0$;

$30x^2 - x - 1 = 0$; $D = 1 + 120 = 121$; $x = \frac{1 \pm 11}{60}$; $x_1 = -\frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{1}{5}$; $x \in (-\infty;\ -1)$

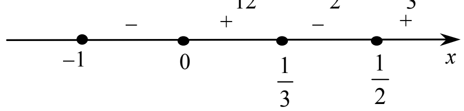
Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup \left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right)$.

б) $\frac{3x-1}{|x+1|} > 1 - \frac{1}{3x}$;

I. $x + 1 > 0$; $x > -1$;

$1 - \frac{1}{3x} - \frac{3x-1}{x+1} < 0$; $\frac{3x^2+3x-x-1-9x^2+3x}{x(x+1)} < 0$; $\frac{6x^2-5x+1}{x(x+1)} > 0$;

$D = 25 - 24 = 1$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$;



$x \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

II. $x < -1$;

$\frac{1-3x}{x+1} > 1 - \frac{1}{3x}$; $\frac{3x^2+3x-3x+9x^2-x-1}{3x(x+1)} < 0$; $\frac{12x^2-x-1}{x(x+1)} < 0$;

$12x^2 - x - 1 = 0$; $D = 1 + 48 = 49$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{24}$; $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Нет решений в случае II.

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

3.2.С12. а) $x - 4 + 16(4 - x)^{-1} \neq 0$; $x \neq 4$; $x - 4 + \frac{16}{4-x} \neq 0$; $\frac{-16-x^2+8x+16}{4-x} \neq 0$;

$\frac{x(x-8)}{4-x} \neq 0$; $x \neq 0$; 8. Ответ: при всех x, кроме 0, 4, 8.

б) $(x–1+9(1–x)–1)–3$ определено

при $x–1+9(1–x)–1\neq0$

$x - 1 + 9(1-x)^{-1} = x - 1 \cdot \frac{9}{x-1} = \frac{x^2-2x+1-9}{x-1} = \frac{x^2-2x-8}{x-1} = \frac{(x-4)(x+2)}{x-1}$

Тогда это выражение определено при $x\neq 4, -2, 1$ т.е. $x \in (-\infty, -2)\cup(-2, 1)\cup(1, +\infty)$.

Уровень D.

3.2.D01. а) $\frac{1}{|x+6|} \le |6x+1|^{-1}$; $\left[\begin{array}{l} x\neq -6 \\ x\neq -\frac{1}{6}\end{array}\right.$; $\frac{1}{|x+6|}\le\frac{1}{|6x+1|}$;

$|6x + 1| \le |x + 6|$; $-|x + 6| \le 6x + 1 \le |x + 6|$;

I. $x \ge -6$; $-x - 6 \le 6x + 1 \le x + 6$;

$\begin{cases} 6x+x\ge -7 \\ 5x\le 5\end{cases}$; $\begin{cases} x\ge -1 \\ x\le 1\end{cases}$ $-1 \le x \le 1$, но $x\neq -\frac{1}{6}$, значит, $x\in\left[-1;-\frac{1}{6}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};\ 1\right]$;

II. $x \le -6$; $6+ x \le 6x + 1 \le -x - 6$; $\begin{cases} 6x-x\ge 5 \\ 7x\le -7\end{cases}$; $\begin{cases} x\ge 1 \\ x\le -1\end{cases}$ — нет решений.

Ответ: $x\in\left[-1;-\frac{1}{6}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};\ 1\right]$.

б) $\frac{1}{|x+5|}\le\frac{1}{|5x+1|}$; $\left[\begin{array}{l} x\neq -5 \\ x\neq -\frac{1}{5}\end{array}\right.$; $|5x + 1| \le |x + 6|$; $-|x + 5| \le 5x + 1 \le |x + 5|$;

I. $x \ge -5$;

$\begin{cases} 5x+1\le x+5 \\ 5x+1\ge -x-5\end{cases}$; $\begin{cases} x\le 1 \\ x\ge -1\end{cases}$ $-1 \le x \le 1$, но $x\neq -\frac{1}{5}$, значит, $x\in\left[-1;-\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};\ 1\right]$;

II. $x \le -5$;

$\begin{cases} 5x+1\le -x-5 \\ 5x+1\ge x+5\end{cases}$; $\begin{cases} x\le -1 \\ x\ge 1\end{cases}$ — нет решений. Ответ: $x\in\left[-1;-\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};\ 1\right]$.

3.2.D02.

а) $(x^2+2x)^2\le 512|x^2+2x|{-1}$, ОДЗ $x\neq 0$, $x\neq -2$

1) $x^2+2x>0$ т.е. $x \in (-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$

$(x^2+2x)^3\le 512$

$x^2+2x\le 8$

$x^2+2x-8\le 0$

$(x+4)(x-2)\le 0$ т.е. $x \in [-4, 2]$. Тогда $x \in [-4, -2)\cup(0, 2]$;

2) $x^2+2x<0$ т.е. $x \in (-2, 0)$

$(x^2+2x)3\ge 512$, $x^2+2x\ge 8$, $x^2+2x-8\ge 0$

$(x+4)(x-2)\ge 0$, т.е. $x \in (-\infty, -4]\cup[2, +\infty)$. Тогда $x\in\varnothing$.

Итак, получаем, что $x \in [-4, -2)\cup(0, 2]$;

б) $(x^2+3x)^2\le 64|x^2+3x|^{-1}$, ОДЗ $x\neq 0$, $x\neq -3$

1) $x^2+3x>0$, т.е. $x \in (-\infty, 3)\cup(0, +\infty)$

$(x^2+3x)^3\le 64$, $x^2+3x\le 4$, $x^2+3x-4\le 0$

$(x+4)(x-1)\le 0$ т.е. $x \in [-4, 1]$. Тогда $x \in [-4, -3)\cup(0, 1]$;

2) $x^2+3x<0$, т.е. $x \in (-3, 0)$

$(x^2+3x)^2\le -64(x^2+3x)^{-1}$, $(x^2+3x)^3\ge 64$

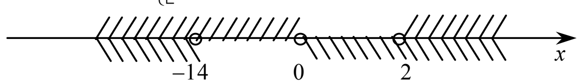
$x^2+3x\ge 4$, $(x+4)(x-1)\ge 0$ т.е.

$x \in (-\infty, -4]\cup[1, +\infty)$, тогда $x \in \varnothing$.
Итак, получаем, что $x \in [-4, -3)\cup(0, 1]$

3.2.D03. а) $(|x + 6| - 3|x + 2| + 14)^{-5} \geq 0$; $|x + 6| - 3|x + 2| + 14 > 0$;
I. $x \geq -2$; $x + 6 - 3x - 6 + 14 > 0$; $2x < 14$; $x < 7$; $-2 \leq x < 7$;
II. $-6 \leq x \leq -2$; $x + 6 + 3x + 6 + 14 > 0$; $4x > -26$; $x > -6\frac{1}{2}$, значит, $x \in [-6; -2]$;
III. $-x - 6 + 3x + 6 + 14 > 0$
$2x > -14$; $x > -7$, значит, $x \in (-7; -6]$. Ответ: $x\in(-7, 7)$.
б) $(|x + 4| - 3|x + 3| + 9)^{-3} \geq 0$; $|x + 4| - 3|x + 3| + 9 > 0$;
I. $x \geq -3$; $x + 4 - 3x - 9 + 9 > 0$; $2x < 4$; $x < 2$. Значит, $-3 \leq x < 2$;
II. $-4 \leq x \leq -3$; $x + 4 + 3x + 9 + 9 > 0$; $4x > -22$; $x > -5{,}5$. Значит, $-4 \leq x \leq -3$;
III. $x \leq -4$; $-x - 4 + 3x + 9 + 9 > 0$; $2x > -14$; $x > -7$. Значит, $x \in (-7; -4]$.
Ответ: $(-7; 2)$.

3.2.D04. а) $(|x^2 + 6x| - 8|x|)^{-3} \geq 0$; $|x^2 + 6x| - 8|x| > 0$; $8|x| < |x^2 + 6x|$;
$-|x^2 + 6x| < 8x < |x^2 + 6x|$; $x^2 + 6x \geq 0$; $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -6 \end{array}\right.$; $-x^2 - 6x < 8x < x^2 + 6x$;

$$\begin{cases} x^2 + 14x > 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases};\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -14 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$



Значит, $\left[\begin{array}{l} x < -14 \\ x > 2 \end{array}\right.$; $x^2 + 6x \leq 0$; $-6 \leq x \leq 0$; $x^2 + 6x < 8x < -x^2 - 6x$;

$\begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ x^2 + 14x < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x < 2 \\ -14 < x < 0 \end{cases}$; нет решений. Ответ: $x \in (-\infty; -14) \cup (2; +\infty)$.
б) $(|x^2 - 4x| - 9|x|)^{-3} \geq 0$; $|x^2 - 4x| > 9|x|$; $-|x^2 - 4x| < 9x < |x^2 - 4x|$;
I. $x^2 - 4x \geq 0$; $\left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$; $-x^2 + 4x < 9x < x^2 - 4x$;

$$\begin{cases} x^2 + 5x > 0 \\ x^2 - 13x > 0 \end{cases};\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 13 \\ x < 0 \end{array}\right. \end{cases}.\ \text{Значит, } \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ x > 13 \end{array}\right.;$$

II. $x^2 - 4x \leq 0$; $0 \leq x \leq 4$; $x^2 - 4x < 9x < 4x - x^2$;
$\begin{cases} x^2 - 13x < 0 \\ x^2 + 5x < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x < 13 \\ -5 < x < 0 \end{cases}$; нет решений.
Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (13; +\infty)$.

3.2.D05. а) $\begin{cases}\dfrac{3}{|x+1|}\ge 1\\ x^2-3|x+1|+2x\le -1\end{cases}$; $\begin{cases}|x+1|\le 3\\ x^2-3|x+1|+2x\le -1\\ x\ne -1\end{cases}$;

I. $x>-1$;

$\begin{cases}x\le 2\\ x^2-x-2\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 2\\ -1\le x\le 2\end{cases}$; значит, x ∈ (–1; 2].

II. $x<-1$;

$\begin{cases}x\ge -4\\ x^2+3x+3+2x+1\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -4\\ x^2+5x+4\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -4\\ -4\le x\le -1\end{cases}$; значит, x ∈ [–4; –1).

Ответ: $x\in[-4;-1)\cup(-1;2]$.

б) $\begin{cases}\dfrac{7}{|x-5|}\ge 1\\ x^2-5|x-5|-10x\le -25\end{cases}$; $\begin{cases}|x-5|\le 7\\ x^2-5|x-5|-10x+25\le 0\end{cases}$;

I. $x-5>0$; $x>5$;

$\begin{cases}x\le 12\\ x^2-15x+50\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 12\\ 5\le x\le 10\end{cases}$. Значит $5<x\le 10$.

II. $x-5<0$; $x<5$;

$\begin{cases}x\ge -2\\ x^2-5x\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -2\\ 0\le x\le 5\end{cases}$; значит, $x\in[0;5)$. Ответ: $x\in[0;5)\cup(5;10]$.

3.2.D06. а) $\begin{cases}x^{-2}\ge(3x-2)^{-2}\\ (-x-1)(7+x)^{-2}\ge(-x-1)^{-2}(7+x)\end{cases}$; $x\ne 0$; $x\ne\dfrac{2}{3}$; $x\ne -7$; $x\ne 1$;

$\begin{cases}x^2\le(3x-2)^2\\ (-x-1)^3\ge(7+x)^3\end{cases}$; $\begin{cases}-|3x-2|<x<|3x-2|\\ -x-1\ge 7+x\end{cases}$; $\begin{cases}3x-2<x<2-3x\\ x\le -4\end{cases}$; $\begin{cases}x<1\\ x\le -4\\ x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-7)\cup(-7;-4]$.

б) $\begin{cases}x^{-2}\ge(4x-3)^{-2}\\ (-x+2)(4+x)^{-2}\ge(-x+2)^{-2}(4+x)\end{cases}$;

$\begin{cases}x\ne -4\\ x\ne 2\end{cases}$; $\begin{cases}x^2\le(4x-3)^2\\ (-x+2)^3\ge(4+x)^3\end{cases}$; $\begin{cases}|x|\le|4x-3|\\ 2x\le -2\end{cases}$; $\begin{cases}-x\le 3-4x\\ x\le -1\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 1\\ x\le -1\end{cases}$.

Значит, $x\in(-\infty;-4)\cup(-4;-1]$.

3.2.D07. а) $\dfrac{|2x-9|-|9x-2|}{|8x-3|-|3x-8|}\le 0$

Точки перемен знаков подмодульных выражений

$x=\frac{9}{2}, x=\frac{2}{9}, x=\frac{3}{8}, x=\frac{8}{3}$

На каждом из промежутков знакопостоянства модулей решим неравенство:

I. $x\in\left(-\infty,\frac{2}{9}\right)$

$\frac{9-2x-2+9x}{3-8x-8+3x}\le 0;\ \frac{7(x+1)}{-5(x+1)}\le 0$, т.е. $x\neq-1$.

Тогда на этом промежутке $x\in(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{2}{9}\right)$;

II. $x\in\left[\frac{2}{9},\frac{3}{8}\right]$; $\frac{9-2x-9x+2}{3-8x+3x-8}\le 0;\ \frac{-11(x-1)}{-5(x+1)}\le 0$, т.е. $x\in(-1, 1]$

тогда на этом промежутке $x\in\left[\frac{2}{9},\frac{3}{8}\right]$;

III. $x\in\left(\frac{3}{8},\frac{8}{3}\right)$; $\frac{9-2x-9x+2}{8x-3+3x-8}\le 0;\ \frac{-11(x-1)}{11(x-1)}\le 0$, т.е. $x\neq 1$

тогда на этом промежутке $x\in\left(\frac{3}{8},1\right)\cup\left(1,\frac{8}{3}\right)$;

IV. $x\in\left[\frac{8}{3},\frac{9}{2}\right]$; $\frac{9-2x-9x+2}{8x-3-3x+8}\le 0;\ \frac{-11(x-1)}{5(x+1)}\le 0,\ x\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

тогда на этом промежутке $x\in\left[\frac{8}{3},\frac{9}{2}\right]$;

V. $x\in\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$; $\frac{2x-9-9x+2}{8x-3-3x+8}\le 0;\ \frac{-7(x+1)}{5(x+1)}\le 0$, т.е. $x\neq-1$

тогда на этом промежутке получим что $x\in\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$.

Итак, комбинируя I, II, III, IV, V получим: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1, 1)\cup(1,+\infty)$;

б) $\frac{|4x-5|-|5x-4|}{|6x-7|-|7x-6|}\ge 0$. Точки знаков подмодульных выражений

$x=\frac{4}{5}, x=\frac{5}{4}, x=\frac{6}{7}, x=\frac{7}{6}$

На каждом промежутке знакопостоянтсва модулей решим неравенство.

I. $x\in\left(-\infty,\frac{4}{5}\right)$; $\frac{5-4x+5x-4}{7-6x+7x-6}\ge 0,\ \frac{x+1}{x+1}\ge 0$, т.е. $x\neq-1$

тогда на этом промежутке $x\in(-\infty,-1)\cup\left(1,\frac{4}{5}\right)$;

II. $x\in\left[\frac{4}{5},\frac{6}{7}\right]$; $\frac{5-4x-5x+4}{7-6x+7x-6}\ge 0,\ \frac{-9(x-1)}{x+1}\ge 0$, $x\in(-1, 1]$

тогда на этом промежутке $x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{7}\right]$;

III. $x \in \left(\frac{6}{7}, \frac{7}{6}\right)$; $\frac{5-4x-5x+4}{7-6x-7x+6} \geq 0$, $\frac{-9(x-1)}{-13(x-1)} \geq 0$, $x \neq 1$

тогда на этом промежутке $x \in \left(\frac{6}{7}, 1\right) \cup \left(1, \frac{7}{6}\right)$;

IV. $x \in \left[\frac{7}{6}, \frac{5}{4}\right]$; $\frac{5-4x-5x+4}{6x-7-7x+6} \geq 0$, $\frac{-9(x-1)}{-(x+1)} \geq 0$, $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

тогда на этом промежутке $x \in \left[\frac{7}{6}, \frac{5}{4}\right]$;

V. $x \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$; $\frac{4x-5-5x+4}{6x-7-7x+6} \geq 0$, $\frac{-(x+1)}{-(x+1)} \geq 0$, $x \neq -1$

тогда на этом промежутке $x \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

В итоге получаем, $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

3.2.D08. а) $\frac{|7x-22|-|5x-14|}{(x-3)(x-4)} \geq 0$; $x \neq 3$; $x \neq 4$;

I. $x \geq \frac{22}{7}$; $x \geq \frac{14}{5} \Rightarrow x \geq \frac{22}{7}$;

$\frac{7x-22-5x+14}{(x-3)(x-4)} \geq 0$; $\frac{x-4}{(x-3)(x-4)} \geq 0$; $x > 3 \Rightarrow x > \frac{22}{7}$;

II. $x \geq \frac{22}{7}$; $x \leq \frac{14}{5}$ — несовместны;

III. $x \leq \frac{22}{7}$; $x \geq \frac{14}{5}$; $\frac{14}{5} \leq x \leq \frac{22}{7}$; $\frac{22-7x-5x+14}{(x-3)(x-4)} \geq 0$; $\frac{36-12x}{(x-3)(x-4)} \geq 0$;

$\frac{3-x}{(x-3)(x-4)} \geq 0$; $x-4<0$; $x<4 \Rightarrow \frac{14}{5} \leq x \leq \frac{22}{7}$; $x \in \left[\frac{14}{5}; \frac{22}{7}\right]$;

IV. $x \leq \frac{22}{7}$; $x \leq \frac{14}{5}$; $x \leq \frac{14}{5}$; $\frac{22-7x+5x-14}{(x-3)(x-4)} \geq 0$;

$\frac{8-2x}{(x-3)(x-4)} \geq 0$; $\frac{x-4}{(x-3)(x-4)} \leq 0$; $x<3$. Значит, $x \leq \frac{14}{5}$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

б) $\frac{|7x-36|-|5x-24|}{(x-5)(x-6)} \geq 0$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 5 \\ x \neq 6 \end{array}\right.$;

I. $x \leq \frac{36}{7}$; $x \leq \frac{24}{5}$; $\frac{3x-7x+5x-24}{(x-5)(x-6)} \geq 0$; $\frac{12-2x}{(x-5)(x-6)} \geq 0$;

$\frac{x-6}{(x-6)(x-5)} \leq 0$; $x<5$. Значит, $x \leq \frac{24}{5}$.

II. $x \le \frac{36}{7}$; $x \ge \frac{24}{5}$; $\frac{24}{5} \le x \le \frac{36}{7}$; $\frac{60-12x}{(x-5)(x-6)} \ge 0$; $\frac{12(x-5)}{(x-5)(x-6)} \le 0$;

III. $x \ge \frac{36}{7}$; $x \le \frac{24}{5}$ — несовместны;

IV. $x \ge \frac{36}{7}$; $\frac{7x-36-5x+24}{(x-5)(x-6)} \ge 0$; $\frac{x-6}{(x-5)(x-6)} \ge 0$; $x \ge \frac{36}{7}$.

Ответ: $x \in (-\infty; 5) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$.

3.2.D09. а) $\frac{5x-3}{|x+3|} > 1 - \frac{3}{5|x|}$;

I. $x < -3$; $-\frac{5x-3}{x+3} > 1 + \frac{3}{5x}$; $\frac{5x^2+15x+3x+9+25x^2-15x}{5x(x+3)} < 0$;

$\frac{30x^2+3x+9}{x(x+3)} < 0$; $30x^2 + 3x + 9 > 0$; $-3 < x < 0$ — не подходит к I.

II. $-3 < x < 0$; $\frac{5x-3}{x+3} > 1 + \frac{3}{5x}$; $\frac{5x^2+15x+3x+9-25x^2+15x}{x(x+3)} < 0$;

$\frac{20x^2-33x-9}{x(x+3)} > 0$; $20x^2 - 33x - 9 = 0$; $D = 1089 + 720 = 1809$;

$x_{1,2} = \frac{33 \pm 3\sqrt{201}}{40}$; значит, $x \in \left(\frac{33-3\sqrt{201}}{40};\ 0\right)$.

III. $x > 0$; $\frac{5x-3}{x+3} > 1 - \frac{3}{5x}$; $\frac{25x^2-15x-5x^2-15x+3x+9}{x(x+3)} > 0$; $\frac{20x^2-27x+9}{x(x+3)} > 0$;

$20x^2 - 27x + 9 = 0$; $D = 729 - 720 = 9$; $x_{1,2} = \frac{27 \pm 3}{40}$;

значит, $x \in \left(0;\ \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. Ответ: $x \in \left(\frac{33-3\sqrt{201}}{40};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

б) $\frac{2x-3}{|x+5|} > 1 - \frac{3}{2|x|}$;

I. $x < -5$; $-\frac{2x-3}{x+5} > 1 + \frac{3}{2x}$; $\frac{2x^2+10x+3x+15+4x^2-6x}{2x(x+5)} < 0$; $\frac{6x^2+7x+15}{2x(x+5)} < 0$;

$6x^2 + 7x + 15 = 0$; $D = 49 - 360 = -311 < 0$; значит, нет решений.

II. $-5 < x < 0$; $\frac{2x-3}{x+5} > 1 + \frac{3}{2x}$; $\frac{2x^2+10x+3x+15-4x^2+6x}{2x(x+5)} < 0$;

$\frac{2x^2-19x-15}{2x(x+5)} > 0$; $2x^2 - 19x - 15 = 0$; $D = 361 + 120 = 481$; $x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{481}}{4}$;

значит, $x \in \left(\frac{19-\sqrt{481}}{4};\ 0\right)$.

III. $x > 0$; $\frac{2x-3}{x+5} > 1 - \frac{3}{2x}$; $\frac{2x^2+10x-3x+15-4x^2+6x}{2x(x+5)} < 0$;

$\frac{2x^2-13x+15}{2x(x+5)} > 0$; $2x^2 - 13x + 15 = 0$; $D = 169 - 120 = 49$;

$x_{1,2} = \frac{13 \pm 7}{4}$; $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Значит, $x \in \left(0;\ \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{19-\sqrt{481}}{4};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

3.2.D10. а) $\begin{cases} \frac{|x+2|}{3} - \frac{x-21}{5} \le 5|x| \\ (x^2-5x+4)^{-3} \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5|x+2| - 3x + 63 - 75|x| \le 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$.

Решим второе неравенство системы: $x^2 - 5x + 4 > 0$; $x^2 - 5x + 4 = 0$;

$D = 25 - 16 = 9$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$; $x_1 = 4$, $x_2 = 1$; значит, $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Решим первое неравенство системы:

I. $x \le -2$; $-5x - 10 - 3x + 63 + 75x \le 0$; $67x \le -53$; $x \le -\frac{53}{67}$;

значит, $x \in (-\infty; -2]$.

II. $-2 \le x \le 0$; $5x + 10 - 3x + 63 + 75x \le 0$; $77x \le -73$; $x \le -\frac{73}{77}$,

значит, $x \in \left[-2; -\frac{73}{77}\right]$.

III. $x \ge 0$; $5x + 10 - 3x + 63 - 75x \le 0$; $73x \ge 73$; $x \ge 1$.

В итоге получаем, что $x \in \left(-\infty; -\frac{73}{77}\right] \cup (4; +\infty)$.

б) $\begin{cases} \frac{|x+4|}{5} - \frac{x-9}{2} \le 5|x| \\ (x^2-6x+5)^{-1} \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2|x+4| - 5x + 45 - 50|x| \le 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$.

Решим второе неравенство системы: $x^2 - 6x + 5 > 0$; $x^2 - 6x + 5 = 0$;

$D = 36 - 20 = 16$; $x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 1$; значит, $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

Решим первое неравенство системы:

I. $x \le -4$; $-2x - 8 - 5x + 45 + 50x \le 0$; $43x \le -37$; $x \le -\frac{37}{43}$; значит, $x \in (-\infty; -4]$.

II. $-4 \le x \le 0$; $2x + 8 - 5x + 45 + 50x \le 0$; $47x \le -53$; $x \le -\frac{53}{47}$,

значит, $x \in \left[-4; -\frac{53}{47}\right]$.

III. $x \ge 0$; $2x + 8 - 5x + 45 - 50x \le 0$; $53x \ge 53$; $x \ge 1$.

В итоге получаем, что $x \in \left(-\infty; -\frac{53}{47}\right] \cup (5; +\infty)$.

3.2.D11. а) $\begin{cases} \frac{|x+1|}{2} - \frac{x-4}{3} \le 2x \\ (x^2-3x+2)^{-1} \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3|x+1| - 14x + 8 \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$.

Решим второе неравенство системы: $x^2 - 3x + 2 > 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$D = 9 - 8 = 1$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; значит, $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Решим первое неравенство системы:

I. $x \le -1$; $-3x - 3 - 14x + 8 \le 0$; $17x \ge 5$; $x \ge \frac{5}{17}$, нет решений.

II. $x \ge -1$; $3x + 3 - 14x + 8 \le 0$; $11x \ge 11$; $x \ge 1$,

В итоге получаем, что $x \in (2; +\infty)$.

б) $\begin{cases} \frac{|x+4|}{5} - \frac{x-9}{2} \le 5x \\ (x^2-5x-12)^{-1} \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2|x+4| - 55x + 45 \le 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$;

Решим второе неравенство системы: $x^2 - x - 12 < 0$; $x^2 - x - 12 = 0$;

$D = 1 + 48 = 49$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2}$; $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; значит, $x \in (-3; 4)$.

Решим первое неравенство системы:

I. $x \le -4$; $-2x - 8 - 55x + 45 \le 0$; $57x \ge 37$; $x \ge \frac{37}{57}$, нет решений.

II. $x \ge -4$; $2x + 8 - 55x + 45 \le 0$; $53x \ge 53$; $x \ge 1$.

В итоге получаем, что $x \in [1; 4)$.

3.2.D12. а) $2 - \frac{3x-2}{|x+4|} < 0$; $\begin{cases} 2|x+4| - 3x + 2 < 0 \\ x \ne -4 \end{cases}$;

I. $x < -4$; $-2x - 8 - 3x + 2 < 0$; $5x > -6$; $x > -\frac{6}{5}$, нет решений.

II. $x > -4$; $2x + 8 - 3x + 2 < 0$; $x > 10$.

Ответ: $x \in (10; +\infty)$.

б) $6 + \frac{2x-1}{|x+7|} > 0$; $\begin{cases} 6|x+7| + 2x - 1 > 0 \\ x \ne -7 \end{cases}$.

I. $x < -7$; $-6x - 42 + 2x - 1 > 0$; $4x < -43$; $x < -\frac{43}{4}$.

II. $x > -7$; $6x + 42 + 2x - 1 > 0$; $8x > -41$; $x > -\frac{41}{8}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{43}{4}\right) \cup \left(-\frac{41}{8}; +\infty\right)$.

§ 3. Иррациональные неравенства

Уровень А.

3.3.А01. а) $\sqrt[3]{2x+5}<3$; $2x+5<27$; $2x<22$; $x<11$. Ответ: $x\in(-\infty;\ 11)$.

б) $\sqrt[3]{7x-2}<2$; $7x-2<8$; $7x<10$; $x<1\frac{3}{7}$. Ответ: $x\in\left(-\infty;\ 1\frac{3}{7}\right)$.

3.3.А02. а) $\sqrt{7x+12}>2$; $7x+12>4$; $7x>-8$; $x>-\frac{8}{7}$; $x>-1\frac{1}{7}$.

Ответ: $x>-1\frac{1}{7}$.

б) $\sqrt{9x+4}>3$; $9x+4>9$; $9x>5$; $x>\frac{5}{9}$. Ответ: $x>\frac{5}{9}$.

3.3.А03. а) $\sqrt[3]{x+2}\ge-5$; $x+2\ge-125$; $x\ge-127$. Ответ: $x\ge-127$.

б) $\sqrt[3]{x+5}\ge-4$; $x+5\ge-64$; $x\ge-69$. Ответ: $x\ge-69$.

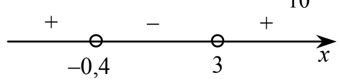
3.3.А04 а) $\sqrt[3]{8x^2+43x+7}<-2$; $8x^2+43x+7<-8$; $8x^2+43x+15<0$;

$D=43^2-4\cdot8\cdot15=57^2$; $x=\frac{-43\pm37}{16}$; $x_1=-0{,}375$; $x_2=-5$.

Ответ: $x\in(-5;\ -0{,}375)$.

б) $\sqrt[3]{5x^2-33-13x}<-3$; $5x^2-33-13x<-27$; $5x^2-13x-6<0$;

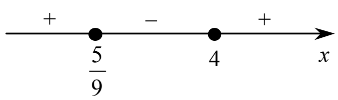
$D=169+4\cdot5\cdot6=17^2$; $x=\frac{13\pm17}{10}$; $x_1=3$; $x_2=-0{,}4$.



Ответ: $(-0{,}4;\ 3)$.

3.3.А05. а) $\sqrt[3]{41x-28-9x^2}\le-2$; $41x-28-9x^2\le-8$;

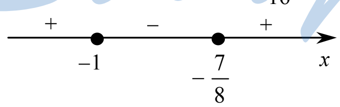
$9x^2-41x+20\ge0$; $D=41^2-4\cdot9\cdot20=31^2$; $x=\frac{41\pm31}{18}$; $x_1=4$; $x_2=\frac{5}{9}$.



Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{9}\right]\cup[4;+\infty)$.

б) $\sqrt[3]{-15x-34-8x^2}\le-3$; $-15x-34-8x^2\le-27$; $8x^2-15x-7\le0$;

$D=225-4\cdot8\cdot7=1$; $x=\frac{-15\pm1}{16}$; $x_1=-1$; $x_2=-\frac{7}{8}$.



Ответ: $x\in(-\infty;\ -1]\cup\left[-\frac{7}{8};+\infty\right)$.

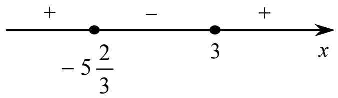
3.3.А06. а) $\sqrt{79-7x}\ge9$; $79-7x\ge81$; $-7x\ge2$; $x\le-\frac{2}{7}$. Ответ: $x\le-\frac{2}{7}$.

б) $\sqrt{62-3x}\ge8$; $62-3x\ge64$; $-3x\ge2$; $x\le-\frac{2}{3}$. Ответ: $x\le-\frac{2}{3}$.

Уровень B.

3.3.B01. а) $\sqrt{3x^2+8x-47} \ge 2$; $3x^2 + 8x - 47 \ge 4$; $3x^2 + 8x - 51 \ge 0$;

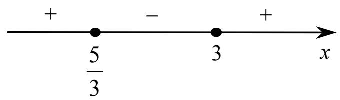
$D = 64 + 3\cdot4\cdot51 = 26^2$; $x = \frac{-8\pm26}{6}$; $x_1 = -\frac{34}{6} = -\frac{17}{3} = -5\frac{2}{3}$; $x_2 = 3$.



Ответ: $\left(-\infty;\ -5\frac{2}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$.

б) $\sqrt{3x^2-14x+51} \ge 6$; $3x^2 - 14x + 51 \ge 36$; $3x^2 - 14x + 15 \ge 0$;

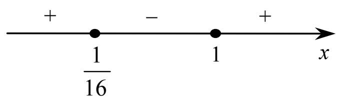
$D = 196 - 4\cdot3\cdot15 = 4^2$; $x = \frac{14\pm4}{6}$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{5}{3}$.



Ответ: $x \in \left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right] \cup [3;+\infty)$.

3.3.B02. а) $5\sqrt{x} - 4x \ge 1$; $-4x + 5\sqrt{x} - 1 \ge 0$; $4x - 5\sqrt{x} + 1 \le 0$;

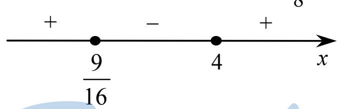
$D = 25\cdot4\cdot4 = 9$; $\sqrt{x} = \frac{5\pm3}{8}$; $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$; $\sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$.



Ответ: $\left[\frac{1}{16};\ 1\right]$.

б) $11\sqrt{x} - 4x \ge 6$; $-4x + 11\sqrt{x} - 6 \ge 0$; $4x - 11\sqrt{x} + 6 \le 0$;

$D = 121 - 4\cdot4\cdot6 = 5^2$; $\sqrt{x} = \frac{11\pm5}{8}$; $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$; $\sqrt{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{16}$.



Ответ: $\left[\frac{9}{16};\ 4\right]$.

3.3.B03. а) $\sqrt{4x+5} > \sqrt{5x+4}$;

D: $\begin{cases} 4x+5 \ge 0 \\ 5x+4 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x \ge -5 \\ 5x \ge -4 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -\frac{5}{4} \\ x \ge -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow x \ge -\frac{4}{5}$;

$4x + 5 > 5x + 4$; $-x > -1$; $x < 1$. Ответ: $\left[-\frac{4}{5};\ 1\right)$.

б) $\sqrt{5x+4} > \sqrt{9x+2}$;

D: $\begin{cases} 5x+4 \ge 0 \\ 9x+2 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x \ge -4 \\ 9x \ge -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -\dfrac{4}{5} \\ x \ge -\dfrac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow x \ge -\dfrac{2}{9}$;

$5x + 4 > 9x + 2$; $-4x > -2$; $4x < 2$; $x < \dfrac{1}{2}$. Ответ: $\left[-\dfrac{2}{9};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

3.3.B04. а) $\sqrt{x+7} \ge \sqrt{-1-x}$;

D: $\begin{cases} x+7 \ge 0 \\ -1-x \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -7 \\ -x \ge 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -7 \\ x \le -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-7;\ -1]$;

$x + 7 \ge -1 - x$; $2x \ge -8$; $x \ge -4$. Ответ: $[-4; -1]$.

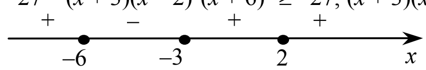
б) $\sqrt{x+6} \ge \sqrt{15-x}$;

D: $\begin{cases} x+6 \ge 0 \\ 15-x \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -6 \\ -x \ge -15 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -6 \\ x \le 15 \end{cases} \Rightarrow x \in [-6;\ 15]$;

$x + 6 \ge 15 - x$; $2x - 9 \ge 0$; $2x \ge 9$; $x \ge 4\dfrac{1}{2}$. Ответ: $x \in [4{,}5;\ 15]$.

3.3.B05. а) $\sqrt[3]{-27-(x+3)(x-2)^2(x+6)^3} \ge -3$;

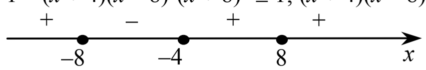
$-27 - (x + 3)(x - 2)^2(x + 6)^3 \ge -27$; $(x + 3)(x - 2)^2(x + 6)^3 \le 0$;



Ответ: $[-6; -3] \cup \{2\}$.

б) $\sqrt[3]{1-(x+4)(x-8)^2(x+8)^3} \ge 1$;

$1 - (x + 4)(x - 8)^2(x + 8)^3 \ge 1$; $(x + 4)(x - 8)^2(x + 8)^3 \le 0$;

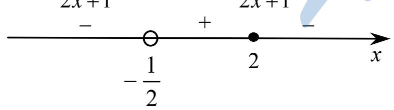


Ответ: $[-8; -4] \cup \{8\}$.

3.3.B06. а) $\sqrt[3]{\dfrac{-3x-34}{-2x-1}} \ge 2$; $-2x - 1 \ne 0$; $-2x \ne 1$; $x \ne -\dfrac{1}{2}$;

$\dfrac{-3x-34}{-2x-1} \ge 8$; $\dfrac{3x+34}{2x+1} - 8 \ge 0$; $\dfrac{3x+34-8(2x+1)}{2x+1} \ge 0$;

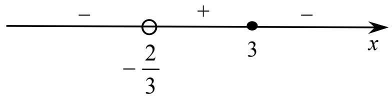
$\dfrac{3x+34-16x-8}{2x+1} \ge 0$; $\dfrac{-13x+26}{2x+1} \ge 0$; $-13x + 26 = 0$; $-13x = -26$; $x = 2$.



Ответ: $x \in \left(-\dfrac{1}{2};\ 2\right]$.

б) $\sqrt[3]{\dfrac{3x-20}{-3x-2}} \ge 1$; $-3x - 2 \ne 0$; $-3x \ne 2$; $x \ne -\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{3x-20}{-3x-2} \ge 1$;

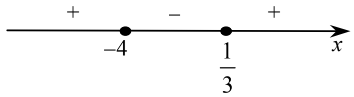
$\dfrac{3x-20}{-3x-2} - 1 \ge 0$; $\dfrac{3x-20+3x+2}{-3x-2} \ge 0$; $6x - 18 = 0$; $6x = 18$; $x = 3$.



Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\ 3\right]$.

3.3.В07. а) $\sqrt[4]{5-11x-3x^2} \ge 1$; $5 - 11x - 3x^2 - 1 \ge 0$; $-3x^2 - 11x + 4 \ge 0$;

$3x^2 + 11x - 4 \le 0$; $D = 121 + 3\cdot4\cdot4 = 13^2$; $x = \frac{-11\pm13}{6}$; $x_1 = -4$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

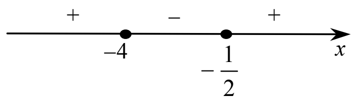


Ответ: $\left[-4;\ \frac{1}{3}\right]$.

б) $\sqrt[4]{12-9x-2x^2} \ge 2$;

$12 - 9x - 2x^2 \ge 16$; $-2x^2 - 9x - 4 \ge 0$;

$2x^2 + 9x + 4 \le 0$; $D = 81 - 4\cdot2\cdot4 = 7^2$; $x = \frac{-9\pm7}{4}$; $x_1 = -4$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.



Ответ: $\left[-4;\ -\frac{1}{2}\right]$.

3.3.В08. а) $\sqrt{4x^4-9x-9} \ge 2x^2$; $4x^4 - 9x - 9 \ge 4x^4$; $-9x \ge 9$; $x \le -1$.

Ответ: $x \le -1$.

б) $\sqrt{9x^4-8x-6} \ge 3x^2$; $9x^4 - 8x - 6 \ge 9x^4$; $-8x \ge 6$; $x \le \frac{-6}{8}$; $x \le -\frac{3}{4}$.

Ответ: $x \le -\frac{3}{4}$.

3.3.В09. а) $\sqrt{3x^4+52x^2-135} \ge 2x^2+3$; $3x^4 + 52x^2 - 135 \ge 4x^4 + 6\cdot2x^2 + 9$;

$-x^4 + 40x^2 - 144 \ge 0$; $x^4 - 40x^2 + 144 \le 0$; $\frac{D}{4} = 400 - 144 = 16^2$, $x^2 = 36$ и $x^2 = 4$;

$4 \le x^2 \le 36$, $x \in [-6; -2] \cup [2; 6]$. Ответ: $[-6; -2] \cup [2; 6]$.

б) $\sqrt{8x^4+53x^2-84} \ge 3x^2+4$; $8x^4 + 53x^2 - 84 \ge 9x^4 + 24x^2 + 16$;

$-x^4 + 53x^2 - 24x^2 - 84 - 16 \ge 0$; $-x^4 + 29x^2 - 100 \ge 0$; $x^4 - 29x^2 + 100 \le 0$;

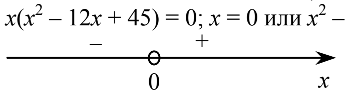
$D = 841 - 400 = 441$; $x^2 = 4$ и $x^2 = 25$; $4 \le x^2 \le 25$, $x \in [-5; -2] \cup [2; 5]$.

Ответ: $x \in [-5; -2] \cup [2; 5]$.

3.3.В10. а) $\sqrt[3]{-64+3x} < x-4$; $-64 + 3x < x^3 - 3\cdot x^2\cdot4\ \ 3\cdot x\cdot4^2 - 4^3$;

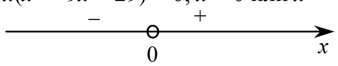
$264 + 3x < x^3 - 12x^2 + 48x - 64$; $-x^3 + 12x^2 - 48x + 3x < 0$; $x^3 - 12x^2 + 45x > 0$;

$x(x^2 - 12x + 45) = 0$; $x = 0$ или $x^2 - 12x + 45 = 0$; $D = 144 - 4\cdot45 < 0$.



Ответ: $(0; +\infty)$.

б) $\sqrt[3]{27-2x} < x+3$; $27 - 2x < x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3$;
$27 - 2x < x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; $-x^3 - 9x^2 - 29x < 0$; $x^3 + 9x^2 + 29x > 0$;
$x(x^2 + 9x + 29) > 0$; $x = 0$ или $x^2 + 9x + 29 = 0$; $D = 81 - 4 \cdot 29 < 0$.



Ответ: $(0; +\infty)$.

3.3.B11. а) $4\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} \geq 10$. Пусть $\sqrt[4]{x} = t$. $-3t + 4t^2 - 10 \geq 0$; $4t^2 - 3t - 10 \geq 0$;
$4t^2 - 3t - 10 \geq 0$; $4t^2 - 3t - 10 = 0$; $D = 9 + 4 \cdot 10 \cdot 4 = 13^2$; $t = \dfrac{3 \pm 13}{8}$; $t_1 = 2$;

$t_2 = -\dfrac{10}{8}$ — нет решений; $x = 2^4 = 16$. Ответ: $[16; +\infty)$.

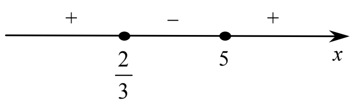
б) $\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[6]{x} \geq 21$; $t^2 + 4t - 21 \geq 0$; $t = 16 + 4 \cdot 21 = 10^2$; $t = \dfrac{-4 \pm 10}{2}$;

$t_1 = -7$ — нет решений; $t_2 = 3$; $\sqrt[6]{x} = t \Rightarrow \sqrt[6]{x} = 3 \Rightarrow x = 3^6 = 729$.
Ответ: $[729; +\infty)$.

3.3.B12. а) $\sqrt{3x^2 - 17x + 14} \leq 2$;

ОДЗ: $3x^2 - 17x + 14 \geq 0$; $x \in (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{14}{3}; +\infty\right)$; $3x^2 - 17x + 14 \leq 4$;

$3x^2 - 17x + 10 \leq 0$; $D = 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 13^2$; $x = \dfrac{17 \pm 13}{6}$; $x_1 = 5$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

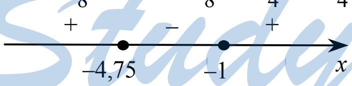


Ответ: $\left[\dfrac{2}{3}; 1\right] \cup \left[\dfrac{14}{3}; 5\right]$.

б) $\sqrt{4x^2 + 23x + 28} \leq 3$; ОДЗ: $4x^2 + 23x + 28 \geq 0$; $x \in (-\infty; -4] \cup \left[-\dfrac{7}{4}; +\infty\right)$;

$4x^2 + 23x + 28 \leq 9$; $4x^2 + 23x + 19 \leq 0$; $D = 23^2 - 4 \cdot 4 \cdot 19 = 15^2$;

$x = \dfrac{-23 \pm 15}{8}$; $x_1 = -\dfrac{38}{8} = -\dfrac{19}{4} = -4\dfrac{3}{4}$; $x_2 = -1$.

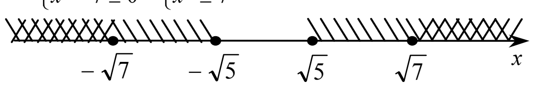


Ответ: $[-4{,}75; -4] \cup \left[-\dfrac{7}{4}; -1\right]$.

Уровень С.

3.3.C01 а) $\sqrt{x^2 - 5} < x^2 - 7$;

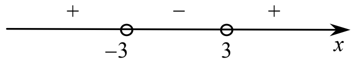
D: $\begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ x^2 - 7 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 \geq 5 \\ x^2 \geq 7 \end{cases}$;



$x \in (-\infty; -\sqrt{7}\,] \cup [\,\sqrt{7}; +\infty)$; $x^2 - 5 < x^4 - 14x^2 + 49$; $-x^4 + 15x^2 - 54 < 0$;

$x^4 - 15x^2 + 54 > 0$; $D = 225 - 4\cdot 54 = 3^2$; $x^2 = \frac{15 \pm 3}{2}$; $x_1^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$;

$x_2^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ — не принадлежат области значений.

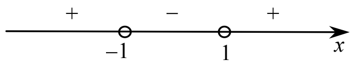


$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

б) $\sqrt{x^2+15} < x^2 + 3$; $x^2 + 15 > 0$; $x^2 + 3 > 0$; $x^2 + 15 < x^4 + 2\cdot 3\cdot x^2 + 9$;

$x^2 + 15 < x^4 + 6x^2 + 9$; $-x^4 - 5x^2 + 6 < 0$; $x^4 + 5x^2 - 6 > 0$; $D = 25 + 5\cdot 6 = 49$;

$x^2 = \frac{-5 \pm 7}{2}$; $x_1^2 = -6$ — не имеет решений; $x_2^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

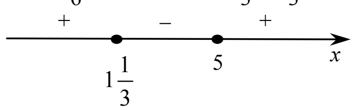


Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

3.3.C02 а) $\sqrt{3x^2 - 18x - 3} \geq \sqrt{3x^2 - 19x + 20}$;

$D = 3x^2 - 19x + 20 \geq 0$;

$x = \frac{19 \pm 11}{6}$; $x_1 = 5$; $x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

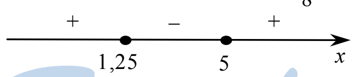


Значит, $x \in \left(-\infty;\ 1\frac{1}{3}\right] \cup [5; +\infty)$. $3x^2 - 18x - 3 \geq 3x^2 - 19x + 20$; $x \geq 23$.

Ответ: $x \geq 23$.

б) $\sqrt{4x^2 - 21x - 4} \geq \sqrt{4x^2 - 25x + 25}$; D: $4x^2 - 25x + 25 \geq 0$;

$D = 25^2 - 4\cdot 4\cdot 25 = 15^2$; $x = \frac{25 \pm 15}{8}$; $x_1 = 5$; $x_2 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.



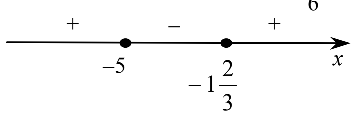
Значит, $x \in (-\infty; 1{,}25] \cup [5; +\infty)$. $4x^2 - 21x - 4 \geq 4x^2 - 25x + 25$;

$4x \geq 29$; $x \geq \frac{29}{4}$; $x \geq 7\frac{1}{4}$. Ответ: $x \geq 7\frac{1}{4}$.

3.3.C03. а) $\sqrt{6x^2 - 14x - 24} \geq |3x + 1|$; $6x^2 - 14x - 24 \geq (3x + 1)^2$;

$6x^2 - 14x - 24 \geq 9x^2 + 6x + 1$; $-3x^2 - 20x - 25 \geq 0$; $3x^2 + 20x + 25 \leq 0$;

$D = 20^2 - 4\cdot 3\cdot 25 = 10^2$; $x = \frac{-20 \pm 10}{6}$; $x_1 = -5$; $x_2 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$.

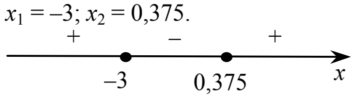


Ответ: $\left[-5; -1\frac{2}{3}\right]$.

б) $\sqrt{-7x^2 - 29x + 25} \geq |x - 4|$; $-7x^2 - 29x + 25 \geq x^2 - 8x + 16$;

$-8x^2 - 21 + 9 \geq 0$; $8x^2 + 21x - 9 \leq 0$; $D = 21^2 + 4{\cdot}8{\cdot}9 = 27^2$; $x = \dfrac{-21 \pm 27}{16}$;

$x_1 = -3$; $x_2 = 0{,}375$.



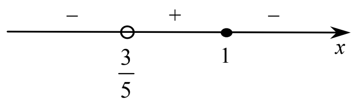
Ответ: $[-3;\ 0{,}375]$.

3.3.С04.

а) $\sqrt{\dfrac{-3x+35}{5x-3}} \geq 4$; $\dfrac{-3x+35}{5x-3} \geq 16$; $\dfrac{-3x+35}{5x-3} - 16 \geq 0$;

$\dfrac{-3x+35-16(5x-3)}{5x-3} \geq 0$; $\dfrac{-3x+35-80x+48}{5x-3} \geq 0$; $\dfrac{-83x+83}{5x-3} \geq 0$;

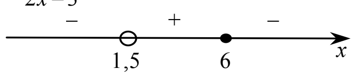
$5x - 3 \neq 0$; $5x \neq 3$; $x \neq \dfrac{3}{5}$; $-83x + 83 = 0$; $x = 1$.



Ответ: $\left(\dfrac{3}{5};\ 1\right]$.

б) $\sqrt{\dfrac{-4x+33}{2x-3}} \geq 1$; $\dfrac{-4x+33}{2x-3} \geq 1$; $\dfrac{-4x+33}{2x-3} - 1 \geq 0$; $\dfrac{-4x+33-2x+3}{2x-3} \geq 0$;

$\dfrac{-6x+36}{2x-3} \geq 0$; $2x - 3 \neq 0$; $2x \neq 3$; $x \neq 1{,}5$; $-x + 6 = 0$; $x = 6$.



Ответ: $(1{,}5;\ 6]$.

3.3.С05. а) $\sqrt{\dfrac{2x+77}{2x+5}} \leq 3$; ОДЗ: $\dfrac{2x+77}{2x+5} \geq 0$; $x \in \left(-\infty; -\dfrac{77}{2}\right] \cup \left(-\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$;

$\dfrac{2x+77}{2x+5} - 9 \leq 0$; $\dfrac{2x+77-9(2x+5)}{2x+5} \leq 0$; $\dfrac{2x+77-18x-45}{2x+5} \leq 0$;

$\dfrac{-16x+32}{2x+5} \leq 0$; $2x + 5 \neq 0$; $2x \neq -5$; $x \neq -\dfrac{5}{2}$; $-16x + 32 = 0$; $x = 2$;

$x \in \left(-\infty; -2\dfrac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$. Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{77}{2}\right] \cup (2;\ +\infty)$.

б) $\sqrt{\dfrac{4x+91}{4x+3}} \leq 3$; ОДЗ: $\dfrac{4x+91}{4x+3} \geq 0$; $x \in \left(-\infty; -\dfrac{91}{4}\right] \cup \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$;

$\dfrac{4x+91}{4x+3} - 9 \leq 0$; $\dfrac{4x+91-9(4x+3)}{4x+3} \leq 0$; $\dfrac{4x+91-36x-27}{4x+3} \leq 0$;

$\dfrac{-32x+64}{4x+3} \leq 0$; $4x+3 \neq 0$; $4x \neq -3$; $x \neq -\dfrac{3}{4}$; $-32x + 64 = 0$; $x = 2$

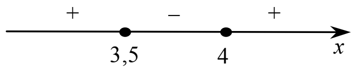
$x \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right) \cup [2; +\infty)$. Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{91}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.

3.3.С06.

а) $\sqrt{2x^2-15x+28} \le x-2$;

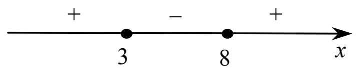
D: $\begin{cases} 2x^2-15x+28 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 3,5] \cup [4;\ +\infty) \\ x \ge 2 \end{cases}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x \in [2;\ 3,5] \end{array}\right.$;

$D = 15^2 - 4{\cdot}2{\cdot}28 = 1$; $x = \frac{15 \pm 1}{4}$; $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{14}{4} = 3\frac{2}{4} = 3,5$;



$2x^2 - 15x + 28 \le x^2 - 4x + 4$; $x^2 - 11x + 24 \le 0$; $D = 121 - 4{\cdot}24 = 5^2$;

$x = \frac{11 \pm 5}{2}$; $x_1 = 8$; $x_2 = 3$.



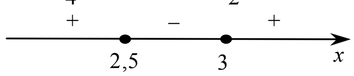
Ответ: [3; 3,5] ∪ [4; 8].

б) $\sqrt{2x^2-11x+15} \le x-1$;

D: $\begin{cases} 2x^2-11x+15 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 2,5] \cup [3;\ +\infty) \\ x \ge 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \in [1;\ 2,5] \end{array}\right.$;

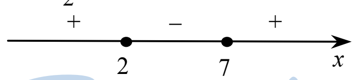
$2x^2 - 11x + 15 = 0$; $D = 121 - 4{\cdot}2{\cdot}15 = 1$;

$x = \frac{11 \pm 1}{4}$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{5}{2} = 2,5$.



$2x^2 - 11x + 15 \le x^2 - 2x + 1$; $x^2 - 9x + 14 \le 0$; $D = 81 - 4{\cdot}14 = 25$;

$x = \frac{9 \pm 5}{2}$; $x_1 = 7$; $x_2 = 2$.



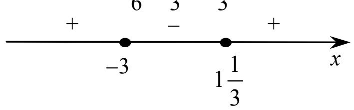
Ответ: [2; 2,5] ∪ [3; 7].

3.3.С07. а) $\sqrt{-3x^2-5x+12} \ge x+3$;

D: $\begin{cases} -3x^2-5x+12 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -3 \le x \le 1\frac{1}{3} \\ x \ge -3 \end{cases}$ $\Rightarrow -3 \le x \le 1\frac{1}{3}$;

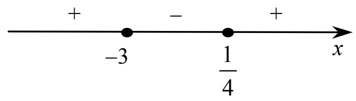
$3x^2 + 5x - 12 \le 0$; $D = 25 + 4{\cdot}3{\cdot}12 = 13^2$; $x = \frac{-5 \pm 13}{6}$;

$x_1 = -3$; $x_2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.



$-3x^2 - 5x + 12 \ge x^2 + 6x + 9$; $-4x^2 - 11x + 3 \ge 0$; $4x^2 + 11x - 3 \ge 0$;

$D = 121 + 4\cdot 4\cdot 3 = 13^2$; $x = \frac{-11 \pm 13}{8}$; $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{1}{4}$.

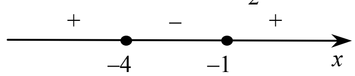


Ответ: $x \in \left[-3;\ \frac{1}{4}\right]$.

б) $\sqrt{-x^2 - 5x - 4} \geq x + 4$;

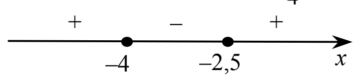
D: $\begin{cases} -x^2 - 5x - 4 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq -4 \end{cases}$ $\Rightarrow -4 \leq x \leq 1$; $x^2 + 5x + 4 \leq 0$;

$D = 25 - 4\cdot 4 = 1^2$; $x = \frac{-5 \pm 3}{2}$; $x_1 = -$; $x_2 = -1$;



$-x^2 - 5x - 4 \geq x^2 + 8x + 16$; $-2x^2 - 13x - 20 \geq 0$; $2x^2 + 13x + 20 \leq 0$;

$D = 169 - 4\cdot 2\cdot 20 = 9$; $x = \frac{-13 \pm 3}{4}$; $x_1 = -4$; $x_2 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$.



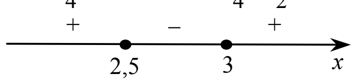
Ответ: $x \in [-4; -2{,}5]$.

3.3.C08.

а) $(x^2 - 8x + 12)\sqrt{-2x^2 + 11x - 15} \leq 0$;

D: $-2x^2 + 11x - 15 \geq 0$; $2x^2 - 11x + 15 \leq 0$; $D = 121 - 4\cdot 2\cdot 15 = 1$;

$x = \frac{11 \pm 1}{4}$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$;



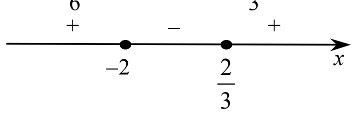
$x \in [2{,}5; 3]$; $x^2 - 8x + 12 \leq 0$; $D = 64 - 4\cdot 12 = 4^2$; $x = \frac{8 \pm 4}{2}$; $x_1 = 6$; $x_2 = 2$.

Ответ: $x \in [2{,}5; 3]$.

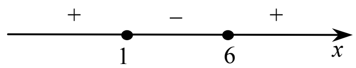
б) $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \leq 0$;

D: $-3x^2 - 4x + 4 \geq 0$; $3x^2 + 4x - 4 \leq 0$; $D = 16 + 4\cdot 3\cdot 4 = 8^2$;

$x = \frac{-4 \pm 8}{6}$; $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{2}{3}$;



$x \in \left[-2;\ \frac{2}{3}\right]$; $x^2 - 7x + 6 \leq 0$; $D = 49 - 4\cdot 6 = 25$; $x = \frac{7 \pm 5}{2}$; $x_1 = 6$; $x_2 = 1$.



$x \in [1; 6]$. Ответ: решений нет.

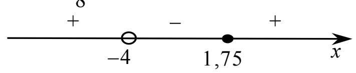
3.3.С09.

а) $\frac{x+3}{x+4}\sqrt{28-9x-4x^2} \ge 0$;

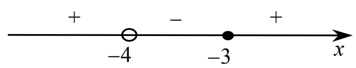
D: $\begin{cases} 28-9x-4x^2 \ge 0 \\ x+4 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in [-4;\ 1,75] \\ x \ne -4 \end{cases} \Rightarrow (-4;\ 1,75]$;

$-4x^2 - 9x + 28 \ge 0$; $4x^2 + 9x - 28 \le 0$; $4x^2 + 9x - 28 = 0$; $D = 81 + 4\cdot4\cdot28 = 23^2$;

$x = \frac{-9 \pm 23}{8}$; $x_1 = -4$; $x_2 = 1,75$;



$\frac{x+3}{x+4} \ge 0$;



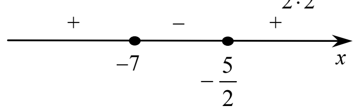
$(x + 3)(x + 4) \ge 0$; $x \in (-\infty; -4) \cup [-3; +\infty)$. Ответ: $[-3; 1,75]$.

б) $\frac{x+4}{x+7}\sqrt{-35-19x-2x^2} \ge 0$;

D: $\begin{cases} -35-19x-2x^2 \ge 0 \\ x+7 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -14 \le x \le -5 \\ x \ne -7 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-7; -\frac{5}{2}\right]$;

$-2x^2 - 19x - 35 \ge 0$; $2x^2 + 19x + 35 \le 0$; $2x^2 + 19x + 35 = 0$;

$D = 19^2 - 4\cdot2\cdot35 = 9^2$; $x = \frac{-19 \pm 9}{2\cdot2}$; $x_1 = -7$; $x_2 = -\frac{5}{2}$;

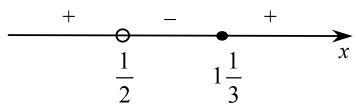


$\frac{x+4}{x+7} \ge 0$;

$(x + 4)(x + 7) \ge 0$; $x \in (-\infty; -7) \cup [-4; +\infty)$. Ответ: $\left[-4; -\frac{5}{2}\right]$.

3.3.С10. а) $\frac{4-3x}{2x-1} + 11\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}} > 24$; $\begin{cases} \frac{3x-4}{2x-1} \ge 0 \\ 2x-1 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (3x-4)(2x-1) \ge 0 \\ 2x \ne 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right] \cup \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right) \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$;



Пусть $\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}}=t$, тогда $-\frac{3x-4}{2x-1}=-t^2$;

$-t^2+11t-24>0$; $t^2-11t+24<0$; $t^2-11t+24=0$; $D=121-4\cdot 24=5^2$;

$t=\frac{11\pm 5}{2}$; $t_1=8$; $t_2=3$; $\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}}=8$;

1) $\frac{3x-4}{2x-1}-64=0$; $\frac{3x-4-64(2x-1)}{2x-1}=0$;

$3x-4-128x+64=0$; $-125x=-60$; $x=0{,}48$;

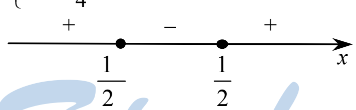
2) $\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}}=3$; $\frac{3x-4}{2x-1}-9=0$; $\frac{3x-4-9(2x-1)}{2x-1}=0$;

$3x-4-18x+9=0$; $-15x=-5$; $x=\frac{1}{3}$. Значит, $x\in\left(\frac{1}{3};\ 0{,}48\right)$.

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{3};\ 0{,}48\right)$.

б) $\frac{1-2x}{4x+1}+5\sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}}>6$; D: $\begin{cases}\frac{2x-1}{4x+1}\ge 0\\ 4x+1\ne 0\end{cases}$;

$\begin{cases}x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\\ x\ne -\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.



Пусть $\sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}}=t$, тогда $-\frac{2x-1}{4x+1}=-t^2$;

$-t^2+5t-6>0$; $t^2-5t+6<0$; $D=25-4\cdot 6=1$; $t=\frac{5\pm 1}{2}$; $t_1=3$; $t_2=2$.

При $t=3$; $\sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}}=3$; $\frac{2x-1}{4x+1}=9$; $\frac{2x-1}{4x+1}-9=0$; $\frac{2x-1-9(4x+1)}{4x+1}=0$;

$2x-1-36x-9=0$; $-34x=10$; $x=-\frac{10}{34}=-\frac{5}{17}$;

При $t=2$; $\sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}}=2$; $\frac{2x-1}{4x+1}=4$; $\frac{2x-1}{4x+1}-4=0$; $\frac{2x-1-4(4x+1)}{4x+1}=0$;

$2x-1-16x-4=0$; $-14x=5$; $x=-\frac{5}{14}$; $x\in\left(-\frac{5}{14};\ -\frac{5}{17}\right)$.

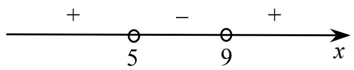
Ответ: $x \in \left(-\frac{5}{14}; -\frac{5}{17}\right)$.

3.3.С11. а) $2\sqrt{3x-11} < x-1$;

D: $3x\text{-}11 \geq 0$; $3x \geq 11$; $x \geq \frac{11}{3}$; $x \geq 3\frac{2}{3}$; $4(3x - 11) < x^2 - 2x + 1$;

$12x - 44 < x^2 - 2x + 1$; $x^2 + 14x - 45 < 0$; $x^2 - 14x + 45 > 0$;

$D = 196 - 4 \cdot 45 = 16$; $x = \frac{14 \pm 4}{2}$; $x_1 = 9$; $x_2 = 5$.



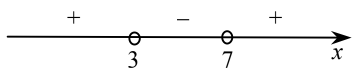
Ответ: $\left[3\frac{3}{2}; 5\right) \cup (9; +\infty)$.

б) $2\sqrt{6x+7} < x+7$;

D: $6x + 7 \geq 0$; $6x \geq -7$; $x \geq -\frac{7}{6}$; $x \geq -1\frac{1}{6}$; $4(6x + 7) < x^2 + 14x + 49$;

$24x + 28 - x^2 - 14x - 49 < 0$; $10x - x^2 - 21 < 0$; $x^2 - 10x + 21 > 0$;

$x^2 - 10x + 21 = 0$; $D = 100 - 4 \cdot 21 = 4^2$; $x = \frac{10 \pm 4}{2}$; $x_1 = 7$; $x_2 = 3$.

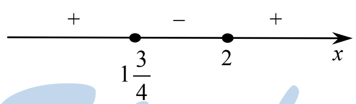


Ответ: $x \in [-1\frac{1}{6}; 3) \cup (7; +\infty)$.

3.3.С12.

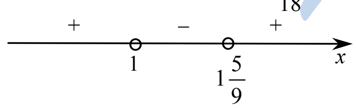
а) $\sqrt{4x^2 - 15x + 14} < \sqrt{8x - 5x^2}$;

D: $4x^2 - 15x + 14 \geq 0$; $D = 225 - 4 \cdot 4 \cdot 14 = 1$; $x = \frac{15 \pm 1}{8}$; $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{7}{4}$;



$x \in \left(-\infty; 1\frac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$; $4x^2 - 15x + 14 < 8x - 5x^2$; $9x^2 - 23x + 14 < 0$;

$D = 23^2 - 4 \cdot 9 \cdot 14 = 5^2$; $x = \frac{23 \pm 5}{18}$; $x_1 = \frac{28}{18} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$; $x_2 = 1$;

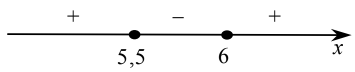


$x \in \left(1; 1\frac{5}{9}\right)$. Ответ: $\left(1; 1\frac{5}{9}\right)$.

б) $\sqrt{2x^2 - 23x + 66} < \sqrt{24x - 5x^2}$;

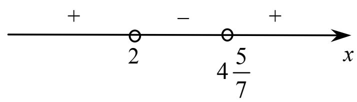
D: $2x^2 - 23x + 66 \cdot 0$; $2x^2 - 23x + 66 = 0$; $D = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot 66 = 1$;

$x = \frac{23 \pm 1}{4}$; $x_1 = 6$; $x_2 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5{,}5$;



$x \in (-\infty; 5{,}5] \cup [6; +\infty)$; $2x^2 - 23x + 66 < 24x - 5x^2$; $7x^2 - 47x + 66 < 0$;

$D = 47^2 - 4\cdot 7\cdot 66 = 19^2$; $x = \dfrac{47 \pm 19}{14}$; $x_1 = \dfrac{66}{14} = \dfrac{33}{7} = 4\dfrac{5}{7}$; $x_2 = 2$;



$x \in \left(2;\ 4\dfrac{5}{7}\right)$. Ответ: $\left(2;\ 4\dfrac{5}{7}\right)$.

Уровень D.

3.3.D01.

а) $\sqrt{5x+205} - 2\sqrt{x+32} > 3$;

ОДЗ: $\begin{cases} 5x+205 \ge 0 \\ x+32 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -41 \\ x \ge -32 \end{cases} \Rightarrow x \in [-32; +\infty)$;

$\sqrt{5}\sqrt{x+41} - 2\sqrt{x+32} > 3$; $\sqrt{5}\sqrt{x+41} > 3 + 2\sqrt{x+32}$;

$5(x + 41) > 9 + 4x + 128 + 12\sqrt{x+32}$; $x + (205 - 137) > 12\sqrt{x+32}$;

$x + 68 > 12\sqrt{x+32}$; $\begin{cases} x^2 + 136x + 4624 > 144x + 4608 \\ x + 68 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 8x + 16 > 0 \\ x + 68 > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x-4)^2 > 0 \\ x > -68 \end{cases} \Rightarrow x \in (-68; 4) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $x \in [-32; 4) \cup (4; +\infty)$.

б) $\sqrt{5x+115} - 2\sqrt{x+19} > 2$;

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x \ge -19 \\ x \ge -23 \end{array}\right.$ $x \ge -19$; $\sqrt{5}\sqrt{x+23} - 2\sqrt{x+19} > 2$;

$5(x + 23) > 4 + 4(x + 19) + 8\sqrt{x+19}$; $x + 115 - 80 > 8\sqrt{x+19}$; $x + 35 > 8\sqrt{x+19}$;

$\begin{cases} x^2 + 70x + 1225 > 64(x+19) \\ x + 35 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 70x + 1225 - 64x - 1216 > 0 \\ x > -35 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x > -35 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+3)^2 > 0 \\ x > -35 \end{cases}$; $x \in (-35; -3) \cup (-3; +\infty)$. Ответ: $x \in [-19; -3) \cup (-3; +\infty)$.

3.3.D02.

а) $\left(\sqrt{x+1} - x + 1\right)\left(\sqrt{x+6} - x\right) \le 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+1}\le x-1\\ \sqrt{x+6}\ge x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+1}\ge x-1\\ \sqrt{x+6}\le x\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\le x^2-2x+1\\ x>1\\ x+6\ge x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x\le 0\\ x>0\\ x^2-x-6\ge 0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 0\end{array}\right.\\ x>1-2\\ \le x\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\le 3\\ x>0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.;\quad x=3.$$

б) $\left(\sqrt{x+4}-x+2\right)\left(\sqrt{x+20}-x\right)\le 0$; $x\ge -4$; $x\ge -20$; $x\ge -4$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+4}\ge x-2\\ \sqrt{x+20}\le x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+4}\le x-2\\ \sqrt{x+20}\ge x\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+4\ge x^2-4x+4\\ x>0\\ x+20\le x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-5x\ge 0\\ x>2\\ x^2-x-20\le 0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le x\le 5\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 5\\ x\le -4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 5\\ x\le 0\end{array}\right.\\ x>2\\ -4\le x\le 5\end{cases}\end{array}\right.;\quad x=5.$$

3.3.D03.

а) $\dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{4x+25}-5}\le 0$; D: $\begin{cases}x>-1\\ 4x\ne 0\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+1}\ge x+1\\ \sqrt{4x+25}<5\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+1}\le x+1\\ \sqrt{4x+25}>5\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+1)(x+1-1)\le 0\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)x\ge 0\\ x>0\end{cases}\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x\le 0\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\ x\le -1\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ x>0\end{array}\right.;\quad x\in[-1;\,0)\cup(0;\,+\infty).$$

б) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-2x-1}{\sqrt{3x+4}-2}\le 0$; $\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x\ge -\dfrac{4}{3}\end{cases}$; $x\ge -\dfrac{1}{2}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\ge 4x^2+4x+1\\ 3x+4<4\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x\ge 0\\ x>0\end{cases}\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\frac{1}{2}\le x\le 0\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\ x\le -\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\le x<0\\ x>0\end{array}\right. ;\ x\in\left[-\frac{1}{2};\,0\right)\cup(0;\,+\infty).$$

3.3.D04.

а) $f(x)=\sqrt[3]{5x+23}-\sqrt{6-x}\le -1$; $x\le 6$;

$f(x)$ монотонно убывает и $f(-3)=-1\Rightarrow x\le -3$.

б) $f(x)=\sqrt[3]{4x+13}-\sqrt{22-x}\le -4$; $x\le 22$;

$f(x)$ монотонно убывает и $f(-3)=-4\Rightarrow x\le -3$.

3.3.D05.

а) $\sqrt{x+14-6\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+30-10\sqrt{x+5}}\le 4$;

$\sqrt{x+5-6\sqrt{x+5}+9}+\sqrt{x+5-10\sqrt{x+5}+25}\le 4$; $\left|\sqrt{x+5}-3\right|+\left|\sqrt{x+5}-5\right|\le 4$;

I. $\sqrt{x+5}\le 3$; $x+5\le 9$; $x\le 4$; $3-\sqrt{x+5}+5-\sqrt{x+5}\le 4$;

$2\sqrt{x+5}\ge 4$; $x+5\ge 4$; $x\ge -1$; $-1\le x\le 4$;

II. $3\le\sqrt{x+5}\le 5$; $9\le x+5\le 25$; $4\le x\le 20$;

$-3+\sqrt{x+5}+5-\sqrt{x+5}\le 4$; $4\le x\le 20$;

III. $\sqrt{x+5}\ge 5$; $x\ge 20$; $2\sqrt{x+5}\le 12$; $\sqrt{x+5}\le 6$; $x\le 31$.

Ответ: $x\in[-1;\,31]$.

б) $\sqrt{x+26-10\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+50-14\sqrt{x+1}}\le 6$;

$\left|\sqrt{x+1}-5\right|+\left|\sqrt{x+1}-7\right|\le 6$; $x\ge -1$;

I. $\sqrt{x+1}\le 5$; $x\le 24$; $5-\sqrt{x+1}+7-\sqrt{x+1}\le 6$; $2\sqrt{x+1}\ge 6$;

$\sqrt{x+1}\ge 3$; $x+1\ge 9$; $x\ge 8$; $8\le x\le 24$;

II. $5\le\sqrt{x+1}\le 7$; $25\ge x+1\le 49$; $24\le x\le 48$;

$\sqrt{x+1}-5+7-\sqrt{x+1}\le 6$; $24\le x\le 48$;

III. $x+1\ge 49$; $x\ge 48$;

$2\sqrt{x+1}\le 18$; $\sqrt{x+1}\le 9$; $x+1\le 81$; $x\le 80$; $48\le x\le 80$.

Ответ: $x\in[8;\,80]$.

3.3.D06. а) $\sqrt{\frac{x+4}{3x+4}}+\sqrt{\frac{3x+4}{5x-3}}\ge 2\sqrt[4]{\frac{x+4}{5x-3}}$;

$$\left(\sqrt{\frac{x+4}{3x+4}}-\sqrt{\frac{3x+4}{5x-3}}\right)^2\ge 0;\quad \begin{cases}x\in(-\infty;-4]\cup\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)\\ x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right)\end{cases}\Rightarrow\ x\in(-\infty;-4]\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right).$$

б) $\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-1}}+\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-5}}\ge 2\sqrt[4]{\dfrac{3x+4}{3x-5}}$;

$$\begin{cases} x\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \\ x\in\left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right]\cup\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right) \end{cases} \Rightarrow\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right]\cup\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right).$$

3.3.D07. а) $(3x + 4)\sqrt{1-3x} \le 3x + 4$;

$(3x + 4)(\sqrt{1-3x} - 1) \le 0$; ОДЗ: $1 - 3x \ge 0$; $x\le\dfrac{1}{3}$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+4\le 0 \\ \sqrt{1-3x}\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge-\dfrac{4}{3} \\ 1-3x\le 1 \end{cases} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le-\dfrac{4}{3} \\ x\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge-\dfrac{4}{3} \\ x\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x\le-\dfrac{4}{3} \\ x\ge 0 \end{array}\right.. \text{ Ответ: } x\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right]\cup\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right].$$

б) $(2x - 3)\sqrt{5-2x} \le 2x - 3$;

D: $5 - 2x \ge 0$; $x\le\dfrac{5}{2}$; $(2x - 3)(\sqrt{5-2x} - 1) \le 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{5-2x}\le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{5-2x}\ge 1 \end{cases} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2} \\ 2x\ge 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le\dfrac{3}{2} \\ x\le 2 \end{cases} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le\dfrac{3}{2} \end{array}\right.. \text{ Ответ: } x\in\left(-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right]\cup\left[2;\ \dfrac{5}{2}\right].$$

3.3.D08. а) $(2x + 3)\sqrt{4x^2+x-3} < -3(2x + 3)$;

$(2x + 3)(\sqrt{4x^2+x-3} + 3) < 0$;

$$\begin{cases} 4x^2+x-3\ge 0 \\ 2x+3<0 \end{cases};\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge\dfrac{3}{4} \\ x\le-1 \end{array}\right. \\ x<-\dfrac{3}{2} \end{cases};\ x<-\dfrac{3}{2}. \text{ Ответ: } x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right).$$

б) $(2x + 5)\sqrt{x^2-5x+6} < -2(2x + 5)$;

$(2x + 5)(\sqrt{x^2-5x+6} + 2) < 0$;

$$\begin{cases} 2x+5<0 \\ x^2-5x+6\ge 0 \end{cases};\ \begin{cases} x<-\dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le 2 \end{array}\right. \end{cases};x<-\dfrac{5}{2}. \text{ Ответ: } x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right).$$

3.3.D09.

а) $\sqrt{3x-19}-\sqrt{x-4}\ge\sqrt{2x-17}$;

ОДЗ: $\begin{cases}3x-19\ge 0\\ x-4\ge 0\\ 2x-17\ge 0\end{cases}\Rightarrow\ x\ge\dfrac{17}{2}$.

$\sqrt{3x-19}\ge\sqrt{x-4}+\sqrt{2x-17}$; $3x-19\ge x-4+2x-17+2\sqrt{x-4}\sqrt{2x-17}$;

$2\ge 2\sqrt{x-4}\sqrt{2x-17}$; $1\ge(x-4)(2x-17)$; $2x^2-25x+67\le 0$;

$D=625-8\cdot 67=89$; $x=\dfrac{25\pm\sqrt{89}}{4}$; $\dfrac{25-\sqrt{89}}{4}<x<\dfrac{25+\sqrt{89}}{4}$;

Ответ: $x\in\left[\dfrac{17}{2};\ \dfrac{25+\sqrt{89}}{4}\right)$.

б) $\sqrt{5x-18}-\sqrt{x-1}\ge\sqrt{4x-19}$; ОДЗ: $\begin{cases}x-1\ge 0\\ 5x-18\ge 0\\ 4x-19\ge 0\end{cases}$; $x\ge\dfrac{19}{4}$.

$\sqrt{5x-18}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{4x-19}$; $5x-18\ge 5x-20+2\sqrt{x-1}\sqrt{4x-19}$;

$1\ge(x-1)(4x-19)$; $4x^2-23x+18\le 0$; $D=529-16\cdot 18=241$;

$\dfrac{23-\sqrt{241}}{8}<x<\dfrac{23+\sqrt{241}}{8}$.

Ответ: $x\in\left[\dfrac{19}{4};\ \dfrac{23+\sqrt{241}}{8}\right)$.

3.3.D10.

а) $\sqrt{x^2+5x-14}+\sqrt{x^2-8x+7}\ge\sqrt{2x^2-7-3x}$;

$2x^2-3x-7+2\sqrt{x^2+5x-14}\sqrt{x^2-8x+7}\ge 2x^2-7-3x$;

$\sqrt{x^2+5x-14}\sqrt{x^2-8x+7}\ge 0$;

D: $\begin{cases}x^2+5x-14\ge 0\\ x^2-8x+7\ge 0\\ 2x^2-7-3x\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -7\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 7\\ x\le 1\end{array}\right.\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}x\ge 7\\ x\le -7\end{array}\right.$.

Ответ: $x\in(-\infty;-7]\cup[7;+\infty)$.

б) $\sqrt{x^2+8x+7}+\sqrt{x^2-4x-12}\ge\sqrt{2x^2+4x-5}$;

$2x^2+4x-5+2\sqrt{x^2+3x+7}\sqrt{x^2-4x-12}\ge 2x^2+4x-5$;

$2\sqrt{x^2+8x+7}\sqrt{x^2-4x-12}\ge 0$;

D: $\begin{cases}x^2+8x+7\ge 0\\ x^2-4x-12\ge 0\end{cases}$;

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\le -7\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 6\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases};\ \left[\begin{array}{l}x\ge 6\\ x\le -7\end{array}\right.$$. Ответ: $x \in (-\infty; -7] \cup [6; +\infty)$.

3.3.D11. а) $-2+\sqrt{7+9x}\ge \frac{x+13}{4x-3}$; ОДЗ: $\begin{cases}7+9x\ge 0\\ 4x-3\ne 0\end{cases}$; $x\in\left[-\frac{7}{9};\ \frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

$\sqrt{7+9x}\ge \frac{x+13+8x-6}{4x-3}$; $\sqrt{7+9x}\ge \frac{9x+7}{4x-3}$; $7+9x\ge \frac{(7+9x)^2}{(4x-3)^2}$;

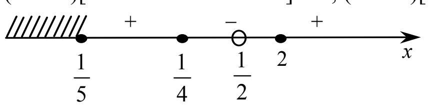
$\frac{7+9x}{(4x-3)^2}((4x-3)^2-7-9x)\ge 0$; $\frac{7+9x}{(4x-3)^2}(16x^2+9-24x-7-9x)\ge 0$;

$(7 + 9x)(16x^2 - 33x + 2) \ge 0$; Ответ: $x\in\left[-\frac{7}{9};\ \frac{1}{16}\right]\cup[2;+\infty)$.

б) $-2+\sqrt{-1+5x}\ge \frac{x+1}{2x-1}$; $\left[\begin{array}{l}x\ge \frac{1}{5}\\ x\ne \frac{1}{2}\end{array}\right.$; $\sqrt{5x-1}\ge \frac{x+1+4x-2}{2x-1}$;

$5x-1\ge \frac{(5x-1)^2}{(2x-1)^2}$; $(5x - 1)[(2x - 1)^2 - (5x - 1)] \ge 0$;

$(5x - 1)[4x^2 - 4x + 1 - 5x + 1] \ge 0$; $(5x - 1)[4x^2 - 9x + 2] \ge 0$;

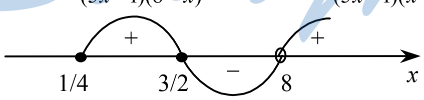


$x\in\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right]\cup[2; +\infty)$. Ответ: $x\in\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right]\cup[2;+\infty)$.

3.3.D12.

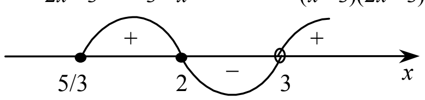
а) $\frac{\sqrt{4x-1}}{5x-1}\le\frac{\sqrt{4x-1}}{8-x}$; О.Д.З. $x\ge\frac{1}{4}$;

$\sqrt{4x-1}\frac{8-x-5x+1}{(5x-1)(8-x)}\le 0$; $\sqrt{4x-1}\frac{2x-3}{(5x-1)(x-8)}\le 0$;



$x\in\left\{\frac{1}{4}\right\}\cup\left[\frac{3}{2};\ 8\right)$.

б) $\frac{\sqrt{3x-5}}{2x-3}\le\frac{\sqrt{3x-5}}{3-x}$; $\sqrt{3x-5}\frac{x-3+2x-3}{(x-3)(2x-3)}\le 0$; $\sqrt{3x-5}\frac{x-2}{(x-3)(2x-3)}\le 0$;



$x\in\left\{\frac{5}{3}\right\}\cup[2;3)$.

§ 4. Тригонометрические неравенства

Уровень А.

3.4. А01. а) $\sin\frac{6x}{7} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{6x}{7} \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{21\pi}{24} + \frac{7\pi n}{3}; -\frac{7\pi}{24} + \frac{7\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$;

б) $\sin\frac{7x}{9} < \frac{1}{2}$;

$\frac{7x}{9} \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + \frac{18\pi n}{7}; \frac{3\pi}{14} + \frac{18\pi n}{7}\right)$, $n \in Z$.

3.4. А02. а) $\sin\frac{5x}{4} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{5x}{4} \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{4\pi}{15} + \frac{8\pi n}{5}; \frac{8\pi}{15} + \frac{8\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$.

б) $\sin\frac{6x}{5} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{6x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[-\frac{5\pi}{18} + \frac{5\pi n}{3}; \frac{20\pi}{18} + \frac{5\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$.

3.4. А03. а) $\cos\frac{7x}{5} \leq -\frac{1}{2}$;

$\frac{7x}{5} \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{10\pi}{21} + \frac{10\pi n}{7}; \frac{20\pi}{21} + \frac{10\pi n}{7}\right]$, $n \in Z$.

б) $\cos\frac{5x}{4} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{5x}{4} \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{8\pi n}{5}; \frac{14\pi}{15} + \frac{8\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$.

3.4. А04. а) $\cos\frac{2x}{9} > \frac{1}{2}$;

$\frac{2x}{9} \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 9\pi n; \frac{3\pi}{2} + 9\pi n\right)$, $n \in Z$.

б) $\cos\frac{7x}{5} > -\frac{1}{2}$;

$\frac{7x}{5} \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{10\pi}{21} + \frac{10\pi n}{7}; \frac{10\pi}{21} + \frac{10\pi n}{7}\right)$, $n \in Z$.

3.4. А05. а) $\operatorname{tg}\frac{8x}{5} < 1$;

$\frac{8x}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{5\pi}{16} + \frac{5\pi n}{8}; \frac{5\pi}{32} + \frac{5\pi n}{8}\right)$, $n \in Z$.

б) $\operatorname{tg}\frac{6x}{5} < -1$;

$\frac{6x}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{5\pi n}{6}; -\frac{5\pi}{24}+\frac{5\pi n}{6}\right)$, $n \in Z$.

3.4. А06. а) $\operatorname{ctg}\frac{7x}{3} \geq -1$;

$\frac{7x}{3} \in \left(\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(\frac{3\pi n}{7}; \frac{9\pi}{28}+\frac{3\pi n}{7}\right)$, $n \in Z$.

б) $\operatorname{ctg}\frac{7x}{4} \geq 1$;

$\frac{7x}{4} \in \left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(\frac{4\pi n}{7}; \frac{\pi}{7}+\frac{4\pi n}{7}\right)$, $n \in Z$.

Уровень В.

3.4. В01. а) $\cos\left(2x-\frac{7\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$2x-\frac{7\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{13\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

б) $\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$2x-\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{13\pi}{12}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

3.4 В02. а) $\operatorname{tg}\left(6x+\frac{3\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$6x+\frac{3\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}; \frac{7\pi}{72}+\frac{\pi n}{6}\right]$, $n \in Z$.

б) $\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$5x+\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; -\frac{5\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$.

3.4. В03. а) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) > 1$;

$2x+\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

б) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{7\pi}{3}\right) > -1$;

$3x-\frac{7\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(\frac{25}{36}\pi+\frac{\pi n}{3}; \frac{17\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$.

3.4. В04. а) $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$2x+\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

б) $\operatorname{ctg}\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)<1$;

$8x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$; $x\in\left(\frac{7\pi}{96}+\frac{\pi n}{8};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{8}\right)$, $n\in Z$.

3.4. В05. а) $\operatorname{ctg}\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 1$;

$4x-\frac{\pi}{4}\in\left(\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right]$, $n\in Z$.

б) $\operatorname{ctg}\left(7x+\frac{3\pi}{4}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$7x+\frac{3\pi}{4}\in\left(\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left(-\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi n}{7};-\frac{5\pi}{84}+\frac{\pi n}{7}\right]$, $n\in Z$.

3.4.В06. а) $\sin\left(5x-\frac{7\pi}{6}\right)\cos\left(5x-\frac{7\pi}{6}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\sin\left(10x-\frac{7\pi}{3}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$10x-\frac{7\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[\frac{8\pi}{30}+\frac{\pi n}{5};\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$.

б) $\sin\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(6x-\frac{5\pi}{3}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$6x-\frac{5\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[\frac{23\pi}{72}+\frac{\pi n}{3};\frac{29\pi}{72}+\frac{\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$.

3.4.В07. а) $\cos^2\left(5x-\frac{7\pi}{4}\right)\leq\sin^2\left(5x-\frac{7\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(10x-\frac{7\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$10x-\frac{7\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[\frac{13\pi}{30}+\frac{\pi n}{5};\frac{14\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$.

б) $\cos^2\left(3x+\frac{7\pi}{3}\right)\leq\sin^2\left(3x+\frac{7\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(6x+\frac{14\pi}{3}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$6x+\frac{14\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[-\frac{53\pi}{72}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{35\pi}{72}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$.

3.4.В08. а) $10\sin^2\frac{5x}{9}+13\sin\frac{5x}{9}-9\geq 0$; $D=169+360=23^2$; $\sin\left(x\cdot\frac{5}{9}\right)\geq\frac{1}{2}$;

$\frac{5}{9}x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[\frac{3\pi}{10}+\frac{18\pi n}{5};\frac{3\pi}{2}+\frac{18\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$.

б) $2\sin^2\frac{5x}{2}+5\sin\frac{5x}{2}-3\geq 0$; $D=25+24=49$; $\sin\frac{5x}{2}\geq\frac{1}{2}$;

$\frac{5x}{2}\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[\frac{\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5};\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$.

3.4.В09. а) $5\cos\frac{7x}{2}+9\cos\frac{7x}{4}-2\leq 0$; $10\cos^2\frac{7x}{4}+9\cos\frac{7x}{4}-7\leq 0$;

$D = 81 + 280 = 361$; $\cos\frac{7x}{4} \le \frac{1}{2}$; $\frac{7x}{4} \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[\frac{4\pi}{21} + \frac{8\pi n}{7}; \frac{20\pi}{21} + \frac{8\pi n}{7}\right]$, $n \in Z$.

б) $2\cos\frac{8x}{3} + 8\cos\frac{4x}{3} - 5 \le 0$; $\cos^2\frac{4x}{3} + 8\cos\frac{4x}{3} - 5 \le 0$; $\frac{D}{4} = 16 + 20 = 36$;

$\cos\frac{4x}{3} \le \frac{1}{2}$; $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}; \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$.

3.4.В10. а) $\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$3x + \frac{3\pi}{4} \in \left[-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$.

б) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$4x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[-\frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$.

3.4.В11. а) $\sin\left(5x - \frac{4\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$5x - \frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{8\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$.

б) $\sin\left(9x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$9x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{\pi}{108} + \frac{2\pi n}{9}; \frac{5\pi}{108} + \frac{2\pi n}{9}\right)$, $n \in Z$.

3.4.В12. а) $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2x - \frac{7\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(\frac{17\pi}{24} + \pi n; \frac{35\pi}{24} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

б) $\cos\left(4x + \frac{5\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$4x + \frac{5\pi}{4} \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left(-\frac{5\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

Уровень С.

3.4.С01 а) $7\sin\left(3x + \frac{4\pi}{9}\right) < 6$;

$\left(3x + \frac{4\pi}{9}\right) \in \left(-\pi - \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n;\ \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$3x \in \left(-\frac{13\pi}{27} - \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n; -\frac{4\pi}{9} + \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{13\pi}{27} - \frac{1}{3}\arcsin\frac{6}{7} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{4\pi}{27} + \frac{1}{3}\arcsin\frac{6}{7} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$.

б) $\sin\left(2x + \frac{7\pi}{8}\right) < -\frac{6}{7}$; $\left(2x + \frac{7\pi}{8}\right) \in \left(-\pi - \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n;\ \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{15\pi}{16} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{6}{7} + \pi n; -\frac{7\pi}{16} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{6}{7} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

3.4.С02. а) $\cos\left(6x + \frac{5\pi}{3}\right) < -\frac{5}{9}$;

$\left(6x + \frac{5\pi}{3}\right) \in \left(-\pi + \arccos\frac{5}{9} + 2\pi n;\ \pi - \arccos\frac{5}{9} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{4\pi}{9} + \frac{1}{6}\arcsin\frac{5}{9} + \frac{\pi n}{3}; -\frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\arcsin\frac{5}{9} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$.

б) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{2}{7}$; $\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\pi + \arccos\frac{2}{7} + 2\pi n;\ \pi - \arccos\frac{2}{7} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{7\pi}{24} + \frac{1}{4}\arccos\frac{2}{7} + \frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{24} - \frac{1}{4}\arccos\frac{2}{7} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

3.4.С03. а) $\mathrm{tg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{5}{9}$; $5x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\mathrm{arctg}\frac{5}{9} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left[\frac{\pi}{20} - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{5}{9} + \frac{\pi n}{5}; \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in Z$.

б) $\mathrm{tg}\left(5x + \frac{7\pi}{4}\right) \geq \frac{2}{5}$;

$5x + \frac{7\pi}{4} \in \left[\mathrm{arctg}\frac{2}{5} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left[-\frac{7\pi}{20} + \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{2}{5} + \frac{\pi n}{5}; -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in Z$.

3.4.С04. а) $\mathrm{ctg}\left(2x - \frac{7\pi}{9}\right) \leq \frac{4}{7}$;

$2x - \frac{7\pi}{9} \in \left[\mathrm{arcctg}\frac{4}{7} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{7\pi}{18} + \frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\frac{4}{7} + \frac{\pi n}{2}; \frac{8\pi}{9} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

б) $\mathrm{ctg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{3}{8}$;

$6x - \frac{\pi}{3} \in \left[\pi - \mathrm{arcctg}\frac{3}{8} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$; $x \in \left[\frac{2\pi}{9} - \frac{1}{6}\mathrm{arcctg}\frac{3}{8} + \frac{\pi n}{6}; \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{6}\right)$, $n \in Z$.

3.4.С05. а) $\sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right) \geq \cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$; $\cos 5x - \sin 5x \geq 0$; $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$;

$5x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[-\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$.

б) $\sin\left(4x-\frac{7\pi}{4}\right)\ge\cos\left(4x-\frac{7\pi}{4}\right)$; $\sin\left(4x-\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$;

$4x\in[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$; $x\in\left[\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$.

3.4.С06. а) $\sin\left(3x+\frac{7\pi}{3}\right)<\cos\left(3x+\frac{7\pi}{3}\right)$; $\sin\left(3x+\frac{7\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)<0$;

$3x+\frac{25\pi}{12}\in\left(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $n\in Z$; $x\in\left(-\frac{37\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{25\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$.

б) $\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)<\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$; $\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)<0$;

$4x-\frac{11\pi}{12}\in\left(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $n\in Z$; $x\in\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2};\frac{11\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$.

3.4.С07. а) $\cos\left(5x-\frac{4\pi}{3}\right)<\sin\left(5x-\frac{4\pi}{3}\right)-1$; $\sin\left(5x-\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$5x-\frac{19\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; $x\in\left(\frac{11\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5};\frac{7\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}\right)$, $n\in Z$.

б) $\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)<\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)-1$; $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2x+\frac{7\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

3.4.С08. а) $5\cos\ 2\left(2x-\frac{5\pi}{7}\right)+2\sin\left(2x-\frac{5\pi}{7}\right)+3\le 0$;

$5\sin^2\left(2x-\frac{5\pi}{7}\right)-\sin\left(2x-\frac{5\pi}{7}\right)-4\ge 0$; $D = 1 + 80 = 81$;

$\sin\left(2x-\frac{5\pi}{7}\right)\in\left[-1;-\frac{4}{5}\right]\cup\{1\}$;

$2x-\frac{5x}{7}\in\left[-\pi+\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n;\ -\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n\in Z$;

$x\in\left[-\frac{\pi}{7}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}+\pi n;\frac{5\pi}{14}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}+\pi n\right]\cup\left\{\frac{17\pi}{28}+\pi n\right\}$, $n\in Z$.

б) $3\cos 2\left(4x+\frac{4\pi}{7}\right)+4\sin\left(4x+\frac{4\pi}{7}\right)-1\le 0$;

$3\sin^2\left(4x+\frac{4\pi}{7}\right)-2\sin\left(4x+\frac{4\pi}{7}\right)-1\ge 0$; $\frac{D}{4} = 1 + 3 = 4$;

$\sin\left(4x+\frac{4\pi}{7}\right)\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\{1\}$;

$4x+\frac{4\pi}{7}\in\left[-\pi+\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\ -\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n\in Z$;

$x \in \left[-\frac{11\pi}{28}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{7}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{56}+\frac{\pi n}{2}\right\}$, $n \in Z$.

3.4.C09. а) $5\cos^2\left(4x-\frac{3\pi}{7}\right)-2\cos\left(4x-\frac{3\pi}{7}\right)-3 \geq 0$;

$\cos\left(4x-\frac{3\pi}{7}\right) \in \{1\} \cup \left[-1; -\frac{3}{5}\right]$; $\cos\left(4x-\frac{3\pi}{7}\right)=1$; $4x-\frac{3\pi}{7}=2\pi n$; $x=\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi n}{2}$;

$\cos\left(4x-\frac{3\pi}{7}\right) \leq -\frac{3}{5}$; $4x-\frac{3\pi}{7} \in \left[\pi-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n;\ \pi+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n\right]$;

$x \in \left[\frac{5\pi}{14}-\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{14}+\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{5\pi}{14}-\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{14}+\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}\right] \cup \left\{\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi n}{2}\right\}$, $n \in Z$.

б) $9\cos^2\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)-8\cos\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)-1 \geq 0$; $\cos\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right) \in \left(-\infty; -\frac{1}{9}\right] \cup [1; +\infty)$;

т.к. $|\cos\alpha| \leq 1 \Rightarrow \cos\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)=1$; $2x+\frac{5\pi}{4}=2\pi n$, $n \in Z$; $x=-\frac{5\pi}{8}+\pi n$, $n \in Z$;

$\cos\left(2x-\frac{5\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{9}$; $2x+\frac{5\pi}{4} \in \left[\pi-\arccos\frac{1}{9}+2\pi n;\ \pi+\arccos\frac{1}{9}+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}+\pi n;\ -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

Итого: $x \in \left[-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}+\pi n;\ -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}+\pi n\right] \cup \left\{\pi n-\frac{5\pi}{8}\right\}$, $n \in Z$.

3.4.C10. а) $\sqrt{\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; ОДЗ: $\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right) \geq 0$;

$\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right) \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $2x+\frac{3\pi}{4} \in \left[2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[-\frac{3\pi}{8}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right] \cup \left[\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

б) $\sqrt{\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)} \leq \sqrt{\frac{3}{4}}$; ОДЗ: $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right) \geq 0$; $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right) \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

$2x+\frac{5\pi}{12} \in \left[2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[-\frac{5\pi}{24}+\pi n;\ -\frac{\pi}{24}+\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{8}+\pi n;\ \frac{7\pi}{24}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

3.4.C11. а) $\sqrt{\sin\left(4x+\frac{5\pi}{3}\right)} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$; ОДЗ: $\sin\left(4x+\frac{5\pi}{3}\right) \geq 0$;

$\sin\left(4x+\frac{5\pi}{3}\right)\in\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $4x+\frac{5\pi}{3}\in\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

$x\in\left[-\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$.

б) $\sqrt{\sin\left(5x-\frac{2\pi}{3}\right)}<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; ОДЗ: $\sin\left(5x\frac{2\pi}{3}\right)\geq 0$; $\sin\left(5x-\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$5x-\frac{2\pi}{3}\in\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

$x\in\left[\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5};\ \frac{11\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{17\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$.

3.4.C12. а) $\cos\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)\geq\sin\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(7x-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{1}{2}$;

$7x-\frac{7\pi}{12}\in\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{7};\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}\right]$, $n\in Z$.

б) $\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)\geq\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$4x+\frac{5\pi}{12}\in\left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; $x\in\left[-\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi n}{2};-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$.

Уровень D.

3.4.D01. а) $25\sin^2\left(9x+\frac{2\pi}{3}\right)-10\sin\left(9x+\frac{2\pi}{3}\right)-3\geq 0$; $\frac{D}{4}=25+75=100$;

$\sin\left(9x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-1;-\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{3}{5};\ 1\right]$;

$9x+\frac{2\pi}{3}\in\left[-\pi+\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n;\ -\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

$x\in\left[-\frac{5\pi}{27}+\frac{1}{9}\arcsin\frac{1}{5}+\frac{2\pi n}{9};-\frac{2\pi}{27}-\frac{1}{9}\arcsin\frac{1}{5}+\frac{2\pi n}{9}\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{2\pi}{27}+\frac{1}{9}\arcsin\frac{3}{5}+\frac{2\pi n}{9};\frac{\pi}{27}-\frac{1}{9}\arcsin\frac{3}{5}+\frac{2\pi n}{9}\right]$, $n\in Z$.

б) $49\sin^2\left(3x-\frac{4\pi}{9}\right)+7\sin\left(x-\frac{4\pi}{9}\right)-6\geq 0$; $D=1225$;

$\sin\left(3x-\frac{4\pi}{9}\right)\in\left[-1;-\frac{3}{7}\right]\cup\left[\frac{2}{7};\ 1\right]$;

$3x-\frac{4\pi}{9}\in\left[-\pi-\arcsin\frac{3}{7}+2\pi n;\ -\arcsin\frac{3}{7}+2\pi n\right]\cup$

$\cup \left[\arcsin\frac{2}{7}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{2}{7}+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[-\frac{5\pi}{27}+\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{7}+\frac{2\pi n}{3};\frac{4\pi}{27}-\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{7}+\frac{2\pi n}{3}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{4\pi}{27}+\frac{1}{3}\arcsin\frac{2}{7}+\frac{2\pi n}{3};\frac{13\pi}{27}-\frac{1}{3}\arcsin\frac{2}{7}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$.

3.4.D02. а) $35\cos^2\left(3x+\frac{5\pi}{4}\right)-11\cos\left(3x+\frac{5\pi}{4}\right)-6\le 0$; $D = 121 + 840 = 31^2$;

$\cos\left(3x+\frac{5\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{2}{7};\frac{3}{5}\right]$; $3x+\frac{5\pi}{4}\in\left[-\pi-\arccos\frac{2}{7}+2\pi n;\ -\arccos\frac{3}{5}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\arccos\frac{3}{5}+2\pi n;\ \pi-\arccos\frac{2}{7}+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x\in\left[-\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{5}+\frac{2\pi n}{3}\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{5}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{5}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$.

б) $15\cos^2\left(8x+\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(8x+\frac{\pi}{7}\right)-4\le 0$; $\frac{D}{4} = 4 + 60 = 64$;

$\cos\left(8x+\frac{\pi}{7}\right)\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{5}\right]$; $8x+\frac{\pi}{7}\in\left[-\pi+\arccos\frac{2}{3}+2\pi n;\ -\arccos\frac{2}{5}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\arccos\frac{2}{5}+2\pi n;\ \pi-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x\in\left[-\frac{\pi}{7}+\frac{1}{8}\arccos\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{4};-\frac{\pi}{56}-\frac{1}{8}\arccos\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{4}\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{\pi}{56}+\frac{1}{8}\arccos\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{4};\frac{3\pi}{28}-\frac{1}{8}\arccos\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{4}\right]$, $n \in Z$.

3.4.D03. а) $18\text{tg}^2\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)+27\text{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)-5<0$; $D = 729 + 369 = 33^2$;

$\text{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{5}{3};\ \frac{1}{6}\right)$; $2x+\frac{5\pi}{3}\in\left[-\text{arctg}\frac{5}{3}+2\pi n;\ \text{arctg}\frac{1}{6}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\pi-\text{arctg}\frac{5}{3}+2\pi n;\ \pi+\text{arctg}\frac{1}{6}+2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x\in\left[-\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{5}{3}+\pi n;-\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{1}{6}+\pi n\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}arctg\frac{5}{3}+\pi n;-\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}arctg\frac{1}{6}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

б) $24\text{tg}^2\left(2x-\frac{5\pi}{8}\right)+26\text{tg}\left(2x-\frac{5\pi}{8}\right)-5<0$; $\frac{D}{4} = 169 + 120 = 289$;

$\mathrm{tg}\left(2x-\frac{5\pi}{8}\right)\in\left(-\frac{5}{4};\ \frac{1}{6}\right)$; $2x-\frac{5\pi}{8}\in\left[-\mathrm{arctg}\frac{5}{4}+2\pi n;\ \mathrm{arctg}\frac{1}{6}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\pi-\mathrm{arctg}\frac{5}{4}+2\pi n;\ \pi+\mathrm{arctg}\frac{1}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

$x\in\left[\frac{5\pi}{16}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{5}{4}+\pi n;\frac{5\pi}{16}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{6}+\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\frac{13\pi}{16}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{5}{4}+\pi n;\frac{13\pi}{16}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z.$

3.4.D04. а) $35\mathrm{ctg}^2\left(4x-\frac{3\pi}{4}\right)+6\mathrm{ctg}\left(4x-\frac{3\pi}{4}\right)-9>0$; $\frac{D}{4}=9+315=324$;

$\mathrm{ctg}\left(4x-\frac{3\pi}{4}\right)\in\left(-\infty;\ -\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{7};+\infty\right)$;

$4x-\frac{3\pi}{4}\in\left(2\pi n;\ \mathrm{arcctg}\frac{3}{7}+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\mathrm{arcctg}\frac{3}{5}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\pi+2\pi n;\pi+\mathrm{arcctg}\frac{3}{7}+2\pi n\right)\cup\left(2\pi-\mathrm{arcctg}\frac{3}{5}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

$x\in\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{4}\mathrm{arcctg}\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{16}-\frac{1}{4}\mathrm{arcctg}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2};\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi n}{2};\frac{7\pi}{16}+\frac{1}{4}\mathrm{arcctg}\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{16}-\frac{1}{4}\mathrm{arcctg}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{4};\frac{11\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z.$

б) $49\mathrm{ctg}^2\left(9x-\frac{2\pi}{5}\right)+7\mathrm{ctg}\left(9x-\frac{2\pi}{5}\right)-12>0$; $D=49+48\cdot 49=49^2$;

$\mathrm{ctg}\left(9x-\frac{2\pi}{5}\right)\in\left(-\infty;\ -\frac{4}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{7};+\infty\right)$;

$9x-\frac{2\pi}{5}\in\left(\pi n;\ \mathrm{arcctg}\frac{3}{7}+\pi n\right)\cup\left(\pi-\mathrm{arcctg}\frac{4}{7}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in Z$;

$x\in\left(\frac{2\pi}{45}+\frac{\pi n}{9};\frac{2\pi}{45}+\frac{1}{9}\mathrm{arcctg}\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{9}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{45}-\frac{1}{9}\mathrm{arcctg}\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{9};\frac{7\pi}{45}+\frac{\pi n}{9}\right)$, $n\in Z.$

3.4.D05. а) $\left|7\sin\left(6x+\frac{7\pi}{9}\right)+1\right|<4$; $-\frac{5}{7}<\sin\left(6x+\frac{7\pi}{9}\right)<\frac{3}{7}$;

$6x+\frac{7\pi}{9}\in\left(-\pi-\arcsin\frac{3}{7}+2\pi n;-\pi+\arcsin\frac{5}{7}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(-\arcsin\frac{5}{7}+2\pi n;\arcsin\frac{3}{7}+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

$x\in\left(-\frac{8\pi}{27}-\frac{1}{6}\arcsin\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{3};-\frac{8\pi}{27}+\frac{1}{6}\arcsin\frac{5}{7}+\frac{\pi n}{3}\right)\cup$

$\cup\left(-\frac{7\pi}{54}-\frac{1}{6}\arcsin\frac{5}{7}+\frac{\pi n}{3};-\frac{7\pi}{54}+\frac{1}{6}\arcsin\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z.$

б) $\left|9\sin\left(7x-\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right|<\frac{9}{2}$; $-\frac{4}{9}<\sin\left(7x-\frac{3\pi}{4}\right)<\frac{5}{9}$;

$$7x-\frac{3\pi}{4}\in\left(-\pi-\arcsin\frac{5}{9}+2\pi n;-\pi+\arcsin\frac{4}{9}+2\pi n\right)\cup$$

$$\cup\left(-\arcsin\frac{4}{9}+2\pi n;\arcsin\frac{5}{9}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{28}-\frac{1}{7}\arcsin\frac{5}{9}+\frac{2\pi n}{7};-\frac{\pi}{28}+\frac{1}{7}\arcsin\frac{4}{9}+\frac{2\pi n}{7}\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{3\pi}{28}-\frac{1}{7}\arcsin\frac{4}{9}+\frac{2\pi n}{7};\frac{3\pi}{28}+\frac{1}{7}\arcsin\frac{5}{9}+\frac{2\pi n}{7}\right),\ n\in Z.$$

3.4.D06. а) $\left|7\cos\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right|>\frac{5}{2}$; $\left[\begin{array}{l}\cos\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{3}{7}\\ \cos\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)<-\frac{2}{7}\end{array}\right.$;

$$4x+\frac{5\pi}{6}\in\left(-\arccos\frac{3}{7}+2\pi n;\arccos\frac{3}{7}+2\pi n\right)\cup$$

$$\cup\left(\pi-\arccos\frac{2}{7}+2\pi n;\pi+\arccos\frac{2}{7}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(-\frac{5\pi}{24}-\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{2};-\frac{5\pi}{24}+\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{7}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{24}+\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{7}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$$

б) $\left|5\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)+1\right|>2$; $\left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)>\frac{1}{5}\\ \cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)<-\frac{3}{5}\end{array}\right.$;

$$2x-\frac{4\pi}{3}\in\left(-\arccos\frac{1}{5}+2\pi n;\arccos\frac{1}{5}+2\pi n\right)\cup$$

$$\cup\left(\pi-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n;\pi+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi n\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi n;\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi n\right),\ n\in Z.$$

3.4.D07. а) $\left|5\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{7}{2}$; $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{9}\right)\geq\frac{4}{5}\\ \operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{9}\right)\leq-\frac{3}{5}\end{array}\right.$;

$$2x+\frac{\pi}{9}\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n\right]\cup\left[\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(-\frac{11\pi}{36}+\frac{\pi n}{2};-\frac{\pi}{18}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{18}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+\frac{\pi n}{2};\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$$

б) $\left|3\operatorname{tg}\left(3x-\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{3}{2}\right|\geq\frac{5}{2}$; $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(3x-\frac{4\pi}{3}\right)\geq\frac{4}{3}\\ \operatorname{tg}\left(3x-\frac{4\pi}{3}\right)\leq-\frac{1}{3}\end{array}\right.$;

$$3x-\frac{4\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n\right]\cup\left[\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi n}{3};\frac{4\pi}{9}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{3}\right]\cup\left[\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi n}{3};\frac{11\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$$

3.4.D08. а) $\left|7\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{7\pi}{5}\right)-4\right|\leq 2$; $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{7\pi}{5}\right)\in\left[\frac{2}{7};\ \frac{6}{7}\right]$;

$$2x+\frac{7\pi}{5}\in\left[\operatorname{arcctg}\frac{6}{7}+\pi n;\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}+\pi n\right],\ n\in Z;$$

$$x\in\left[-\frac{7\pi}{10}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{6}{7}+\frac{\pi n}{2};-\frac{7\pi}{10}+\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{7}+\pi n\right)\right],\ n\in Z.$$

б) $\left|6\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{7\pi}{8}\right)+2\right|\leq 3$; $\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{7\pi}{8}\right)\in\left[-\frac{5}{6};\ \frac{1}{6}\right]$;

$$3x-\frac{7\pi}{8}\in\left[\operatorname{arcctg}\frac{1}{6}+\pi n;\pi-\operatorname{arcctg}\frac{5}{6}+\pi n\right],\ n\in Z;$$

$$x\in\left[\frac{7\pi}{24}+\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}\frac{1}{6}+\frac{\pi n}{3};\frac{15\pi}{24}-\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}\frac{5}{6}+\frac{\pi n}{3}\right],\ n\in Z.$$

3.4.D09.

а) $\begin{cases}5\sin\left(7x+\frac{5\pi}{8}\right)<2\\ 4\sin\left(7x+\frac{5\pi}{8}\right)\geq 1\end{cases}$; $\sin\left(7x+\frac{5\pi}{8}\right)\in\left(\frac{1}{4};\ \frac{2}{5}\right]$;

$$7x+\frac{5\pi}{8}\in\left[\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n;\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n\right)\cup$$

$$\cup\left(\pi-\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n;\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z;$$

$$x\in\left[-\frac{5\pi}{56}+\frac{1}{7}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{2\pi n}{7};-\frac{5\pi}{56}+\frac{1}{7}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{2\pi n}{7}\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{3\pi}{56}-\frac{1}{7}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{2\pi n}{7};\frac{3\pi}{56}-\frac{1}{7}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{2\pi n}{7}\right],\ n\in Z.$$

б) $\begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{9} \\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\ge -\frac{5}{6} \end{cases}$; $3x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n;\arcsin\frac{1}{9}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\pi-\arcsin\frac{1}{9}+2\pi n;\pi+\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

$x\in\left[-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\arcsin\frac{5}{6}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{3\pi}{12}-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{9}+\frac{2\pi n}{3};\frac{13\pi}{12}+\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n\right)\right]$, $n\in Z$.

3.4.D10. а) $\begin{cases} 9\cos\left(7x+\frac{3\pi}{7}\right)\le 4 \\ 5\cos\left(7x+\frac{3\pi}{7}\right)+4>0 \end{cases}$; $\cos\left(7x+\frac{3\pi}{7}\right)\in\left(-\frac{4}{5};\frac{4}{9}\right]$;

$7x+\frac{3\pi}{7}\in\left(-\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi n;-\arccos\frac{4}{9}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\arccos\frac{4}{9}+2\pi n;\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

$x\in\left[-\frac{10\pi}{49}+\frac{1}{7}\arccos\frac{4}{5}+\frac{2\pi n}{7};-\frac{3\pi}{49}-\frac{1}{7}\arccos\frac{4}{9}+\frac{2\pi n}{7}\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{3\pi}{49}+\frac{1}{7}\arccos\frac{4}{9}+\frac{2\pi n}{7};\frac{4\pi}{49}-\frac{1}{7}\arccos\frac{4}{5}+\frac{2\pi n}{7}\right)$, $n\in Z$.

б) $\begin{cases} \cos\left(2x+\frac{4\pi}{7}\right)\le\frac{5}{9} \\ \cos\left(2x+\frac{4\pi}{7}\right)>-\frac{1}{4} \end{cases}$;

$2x+\frac{4\pi}{7}\in\left(-\pi+\arccos\frac{1}{4}+2\pi n;-\arccos\frac{5}{9}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\arccos\frac{5}{9}+2\pi n;\pi-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

$x\in\left(-\frac{11\pi}{14}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n;-\frac{2\pi}{7}-\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{9}+\pi n\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{9}+\pi n;\frac{3\pi}{14}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

3.4.D11. а) $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(3x-\frac{7\pi}{4}\right)<\frac{2}{7} \\ \operatorname{tg}\left(3x-\frac{7\pi}{4}\right)>-\frac{1}{4} \end{cases}$; $3x-\frac{7\pi}{4}\in\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n;\operatorname{arctg}\frac{2}{7}+\pi n\right)$, $n\in Z$;

$x \in \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{3}; \frac{7\pi}{12} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{7} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$.

б) $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(5x - \frac{7\pi}{5}\right) < \frac{3}{7} \\ \operatorname{tg}\left(5x - \frac{7\pi}{5}\right) > -\frac{1}{3} \end{cases}$; $5x - \frac{7\pi}{5} \in \left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{3}{7} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(\frac{7\pi}{25} - \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{5}; \frac{7\pi}{25} + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + \frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in Z$.

3.4.D12. а) $\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(7x + \frac{4\pi}{9}\right) \le \frac{5}{3} \\ \operatorname{ctg}\left(7x + \frac{4\pi}{9}\right) \ge \frac{1}{6} \end{cases}$; $7x + \frac{4\pi}{9} \in \left[\operatorname{arcctg}\frac{5}{3} + \pi n; \operatorname{arcctg}\frac{1}{6} + \pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[-\frac{4\pi}{63} + \frac{1}{7}\operatorname{arcctg}\frac{5}{3} + \frac{\pi n}{7}; -\frac{4\pi}{63} + \frac{1}{7}\operatorname{arcctg}\frac{1}{6} + \frac{\pi n}{7}\right]$, $n \in Z$.

б) $\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) \le \frac{4}{3} \\ \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) \ge \frac{4}{5} \end{cases}$; $5x + \frac{2\pi}{5} \in \left[\operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + \pi n; \operatorname{arcctg}\frac{4}{5} + \pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in \left[-\frac{2\pi}{25} + \frac{1}{5}\operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + \frac{\pi n}{5}; -\frac{2\pi}{25} + \frac{1}{5}\operatorname{arcctg}\frac{4}{5} + \frac{\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$.

§ 5. Показательные неравенства

Уровень А.

3.5.A01. а) $2005^{2x-17} \le 2005^{x-5}$; $2x - 17 \le x - 5$; $x \le 12$. Ответ: $(-\infty; 12]$.

б) $2003^{4x+39} \le 2003^{x+6}$; $4x + 39 \le x + 6$; $3x \le -33$; $x \le -11$. Ответ: $(-\infty; -11]$.

3.3.A02. а) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} > 6$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$; $2x < -1$; $x < -\frac{1}{2}$. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

б) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x} > 3$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$. Ответ: $\left(\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

3.5.A03. а) $8{,}67^{7x+3} < 1$; $7x + 3 < 0$; $x < -\frac{3}{7}$. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right)$.

б) $8{,}62^{7x+1} > 1$; $7x + 1 > 0$; $x > -\frac{1}{7}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{7}; +\infty\right)$.

3.5.A04. а) $4^{5x+3} \ge 16$; $5x + 3 \ge 2$; $x \ge -\frac{1}{5}$. Ответ: $\left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

б) $3^{3x-8} \le 9$; $3x - 8 \le 2$; $x \le \frac{10}{3}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{10}{3}\right]$.

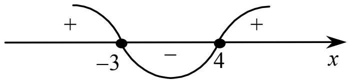
3.5.A05. а) $5^{x+1} - 5^{x} < 20$; $5 - 1 < 20 \cdot 5^{-x}$; $5^{-x} > \frac{1}{5}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} > \frac{1}{5}$; $x < 1$. От: $(-\infty; 1)$.

б) $3^{x+2} - 3^x < 24$; $9 - 1 < \frac{24}{3^x}$; $3^{-x} > \frac{1}{3}$; $x < 1$. Ответ: $(-\infty; 1)$.

3.5.А06. а) $\begin{cases} 2^{3x-1} \le 16 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$; $2^{3x-1} \le 16$; $2^{3x-1} \le 2^4$; $3x - 1 \le 4$; $x \le \frac{5}{3}$;

$x^2 - x - 12 = 0$; $D = 1 + 48 = 49$; $x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$; $x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$;

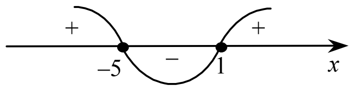
$(x - 4)(x + 3) < 0$;



$-3 < x < 4$. Ответ: $\left(-3; \frac{5}{3}\right]$.

б) $\begin{cases} 3^{4x+1} \le 9 \\ x^2 + 4x - 5 < 0 \end{cases}$; $3^{4x+1} \le 9$; $4x + 1 \le 2$; $x \le \frac{1}{4}$; $x^2 + 4x - 5 = 0$;

$x_1 = 1$; $x_2 = -5$; $(x - 1)(x + 5) < 0$;

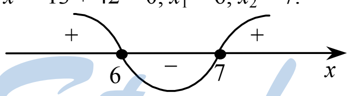


$-5 < x < 1$. Ответ: $\left(-5; \frac{1}{4}\right]$.

Уровень B.

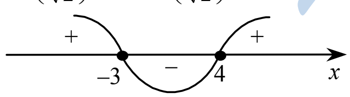
3.5.B01. а) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{x^2-13x+39} \ge \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-3}$; $x^2 - 13x + 39 \le -3$; $x^2 - 13x + 42 \le 0$;

$x^2 - 13 + 42 = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = 7$.



Ответ: $[6; 7]$.

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-x-16} \ge \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$; $x^2 - x - 16 \le -4$; $x^2 - x - 12 \le 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 4$.



Ответ: $[-3; 4]$.

3.5.B02. а) $\left(\sqrt{8}\right)^{4x} \le 2$; $2^{\frac{3}{2}\cdot 4x} \le 2$; $6x \le 1$; $x \le \frac{1}{6}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$.

б) $\left(\sqrt{5}\right)^{2x} \ge \sqrt[5]{5}$; $x \ge \frac{1}{5}$. Ответ: $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

3.5.B03. а) $2^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5x-3}<2$; $2^x\cdot 2^{-2(5x-3)}<2$; $2^{-9x+6}<2$; $-9x+6<1$; $x>\frac{5}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{9};+\infty\right)$.

б) $3^x\left(\frac{1}{81}\right)^{2x+3}<9$; $3^x\cdot 3^{-4(2x+3)}<3^2$; $x-8x-12<2$; $x>-2$; Ответ: $(-2;+\infty)$.

3.5.B04. а) $\begin{cases}3^{x^2}<9^{18}\\4x+3\le 24\end{cases}$; $4x+3\le 24$; $x\le\frac{21}{4}$; $3^{x^2}<9^{18}$; $x^2<36$; $-6<x<6$.

Ответ: $\left(-6;\ \frac{21}{4}\right]$.

б) $\begin{cases}4^{x^2}<64^{12}\\4x-1\ge -14\end{cases}$; $4x-1\ge -14$; $x\ge -\frac{13}{4}$; $4^{x^2}<64^{12}$; $x^2<36$; $-6<x<6$.

Ответ: $\left[-\frac{13}{4};\ 6\right)$.

3.5.B05. а) $\dfrac{\left(5\sqrt{5}\right)^x-\frac{1}{5}}{x-4}>0$;

1) $\begin{cases}\left(5\sqrt{5}\right)^x-\frac{1}{5}>0\\x-4>0\end{cases}$; $x-4>0$; $x>4$; $\left(5\sqrt{5}\right)^x-\frac{1}{5}>0$; $5^{\frac{3}{2}x}>5^{-1}$;

$\frac{3x}{2}>-1$; $x>-\frac{2}{3}$;

2) $\begin{cases}\left(5\sqrt{5}\right)^x-\frac{1}{5}<0\\x-4<0\end{cases}$; $x-4<0$; $x<4$; $\left(5\sqrt{5}\right)^x-\frac{1}{5}<0$; $x<-\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(4;+\infty)$.

б) $\dfrac{\left(6\sqrt{6}\right)^x-36}{x-5}<0$;

1) $\begin{cases}\left(6\sqrt{6}\right)^x-36<0\\x-5>0\end{cases}$; $x>5$; $6^{\frac{3}{2}x}<6^2$; $\frac{3}{2}x<2$; $x<\frac{4}{3}$;

2) $\begin{cases}\left(6\sqrt{6}\right)^x-36>0\\x-5<0\end{cases}$; $x<5$; $6^{\frac{3}{2}x}>6^2$; $x>\frac{4}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{4}{3};\ 5\right)$.

3.5.B06. а) $2^{\frac{1}{x}} \geq 4$; $\frac{1}{x} \geq 2$; $\frac{1-2x}{x} \geq 0$;

1) $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} 1-2x \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 0 \end{cases}$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

б) $5^{\frac{5}{x}} \geq 25$; $\frac{5}{x} \geq 2$; $\frac{5-2x}{x} \geq 0$;

1) $\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x > 0 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} 5-2x \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x < 0 \end{cases}$. Ответ: $\left(0; \frac{5}{2}\right]$.

3.5.B07. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{7-2x} \geq \frac{1}{4}$; $7 - 2x \leq 2$; $x \geq \frac{5}{2}$. Ответ: $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3-5x} \leq \frac{1}{16}$; $3 - 5x \geq 2$; $5x \leq 1$; $x \leq \frac{1}{5}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$.

3.5.B08 а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x-3}{5-x}} < 64$; $\frac{x-3}{5-x} > -3$; $\frac{x-3+15-3x}{5-x} > 0$;

1) $\begin{cases} -2x+12 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 5 \\ x < 6 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} -2x+12 < 0 \\ 5-x < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 5 \\ x < 6 \end{cases}$.

Ответ: $(-\infty; 5) \cup (6; +\infty)$.

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{3-x}} > 27$; $\frac{x-1}{3-x} < -3$; $\frac{x-1+9-3x}{3-x} < 0$; $\frac{-2x+8}{3-x} < 0$;

1) $\begin{cases} -2x+8 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 3 \\ x > 4 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} -2x+8 > 0 \\ 3-x < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases}$.

Ответ: $(3; 4)$.

3.5.B09. а) $64 \geq \frac{1}{4^{7x-9}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{7x-9} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; $7x - 9 \geq -3$; $x \geq \frac{6}{7}$. Ответ: $\left[\frac{6}{7}; +\infty\right)$.

б) $36 \leq \frac{1}{6^{8x-3}}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{8x-3} \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $8x - 3 \leq -2$; $x \leq \frac{1}{8}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right]$.

3.5.B10. а) $2^{3x-2} + 2^{3x-1} \geq 6$; $1 + 2 \geq \frac{6}{2^{3x-2}}$;

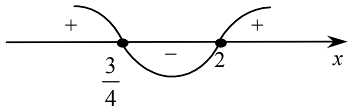
$2^{-(3x-2)} \leq \frac{1}{2}$; $-3x + 2 \leq -1$; $x \geq 1$. Ответ: $[1; +\infty)$.

б) $4^{3x-2} + 4^{3x-1} \leq 80$; $1 + 4 \leq \frac{6}{2^{3x-2}}$; $4^{-(3x-2)} \geq \frac{1}{16}$; $-3x + 2 \geq -2$;

$x \le \frac{4}{3}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

3.5.B11. а) $2^{4x^2-11x} > \frac{1}{64}$; $2^{4x^2-11x} > 2^{-6}$; $4x^2 - 11x > -6$; $4x^2 - 11x + 6 > 0$;

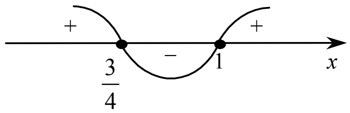
$4x^2 - 11x + 6 = 0$; $D = 121 - 4\cdot4\cdot6 = 25$; $x_1 = \frac{11-5}{8} = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{11+5}{8} = 2$.



Ответ: $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (2; +\infty)$.

б) $3^{4x^2-7x} < \frac{1}{27}$; $3^{4x^2-7x} < 3^{-3}$; $4x^2 - 7x < -3$; $4x^2 - 7x + 3 < 0$;

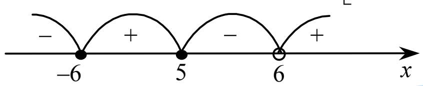
$4x^2 - 7x + 3 = 0$; $D = 49 - 4\cdot4\cdot3 = 1$; $x_1 = \frac{7+1}{8} = 1$, $x_2 = \frac{7-1}{8} = \frac{3}{4}$.



Ответ: $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

3.5.B12. а) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x^2-24}{x-6}} \le 6$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x^2-24}{x-6}} \le \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$; $\frac{x^2-24}{x-6} \ge -1$;

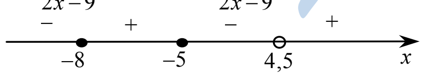
$\frac{x^2+x-30}{x-6} \ge 0$; $\frac{(x+6)(x-5)}{x-6} \ge 0$; $\left[\begin{array}{l} -6 \le x \le 5 \\ x \ge 6 \\ x \ne 6 \end{array}\right.$. Значит, $\left[\begin{array}{l} -6 \le x \le 5 \\ x > 6 \end{array}\right.$.



Ответ: $[-6; 5] \cup (6; +\infty)$.

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x^2+11x+49}{2x-9}} \ge 5$; $\frac{x^2+11x+49}{2x-9} \le -1$; $\frac{x^2+2x-9+11x+49}{2x-9} \le 0$;

$\frac{x^2+13x+40}{2x-9} \le 0$; $\frac{(x+5)(x+8)}{2x-9} \le 0$.



Ответ: $(-\infty; -8] \cup [-5; 4,5)$.

Уровень С.

3.5.C01

а) $\begin{cases} 3^{x+3} - 2\cdot3^x \ge \frac{25}{9} \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 25\cdot3^x \ge \frac{25}{9} \\ (x+3)(x-1) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -2 \\ -3 < x < 1 \end{cases}$; $-2 \le x < 1$. Ответ: $[-2; 1)$.

б) $\begin{cases} 4^{x+2}-5\cdot 4^x \geq \dfrac{11}{64} \\ x^2+2x-8<0 \end{cases}$; $\begin{cases} 11\cdot 4^x \geq \dfrac{11}{64} \\ (x+4)(x-2)<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq -3 \\ -4<x<2 \end{cases}$; $-3 \leq x < 2$. Ответ: $[-3;\ 2)$.

3.5.C02. а) $4^{x+1}+4^{x+1}+2^{2x-1}>68$; $8\frac{1}{2}\ 4^x>17\cdot 4$; $4^x>4^{\frac{3}{2}}$; $x>\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

б) $9^{x-1}+9^{x-1}-3^{2x-3}>45$; $2\cdot 3^{2x-2}-\dfrac{1}{3}\cdot 3^{2x-2}>5\cdot 3^2$; $5\cdot 3^{2x-2}>5\cdot 3^3$;

$2x-2>3$; $x>\dfrac{5}{2}$. Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

3.5.C03. а) $4^{x+1}+4^{x+1}+2^{2x+1}<40$; $2\cdot 2^{2x+2}+2^{2x+1}<5\cdot 2^3$;
$2^{2x+1}(4+1)<5\cdot 2^3$; $2x+1<3$; $x<1$. Ответ: $(-\infty;\ 1)$.
б) $9^{x-1}+9^{x-1}-3^{2x-3}<45$; $2\cdot 3^{2x-2}-3^{2x-3}<5\cdot 3^2$; $3^{2x-2}(6-1)<5\cdot 3^3$;

$2x-2<3$; $x<\dfrac{5}{2}$. Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

3.5.C04. а) $\dfrac{1}{2^x+1} \geq \dfrac{1}{2-2^x}$; $x \neq 1$; $\dfrac{2-2^x-2^x-1}{(2^x+1)(2-2^x)} \geq 0$; $\dfrac{2^{x+1}-1}{(2^x+1)(2-2^x)} \leq 0$;

$\dfrac{2^x-\frac{1}{2}}{(2^x+1)(2^x-2)} \geq 0$; $2^x \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup (2;\ +\infty)$; $x \in (-\infty;\ -1] \cup (1;\ +\infty)$.

б) $\dfrac{1}{2^x+1} \leq \dfrac{15}{16-2^x}$; $x \neq 4$; $\dfrac{16-2^x-15\cdot 2^x-15}{(2^x+1)(16-2^x)} \leq 0$; $\dfrac{1-16\cdot 2^x}{(2^x+1)(16-2^x)} \leq 0$;

$\dfrac{2^x-\frac{1}{16}}{(2^x+1)(2^x-16)} \leq 0$; $2^x \in \left[\dfrac{1}{16};\ 16\right)$; $x \in [-4;\ 4)$.

3.5.C05 а) $\begin{cases} \dfrac{6x+5}{x-6}<0 \\ 4^x-34\cdot 2^x+64>0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{5}{6}<x<6 \\ (2^x-32)(2^x-2)>0 \end{cases}$;

$\begin{cases} -\dfrac{5}{6}<x<6 \\ (x-5)(x-1)>0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{5}{6}<x<6 \\ \left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<1 \end{array}\right. \end{cases}$. Ответ: $\left(-\dfrac{5}{6};\ 1\right) \cup (5;\ 6)$.

б) $\begin{cases} \dfrac{5x-1}{x-6}<0 \\ 4^x-9\cdot 2^x+8<0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<x<6 \\ (4^x-8)(4^x-1)<0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<x<6 \\ (x-\frac{3}{2})\cdot x<0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{5}{6}<x<6 \\ 0<x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$;

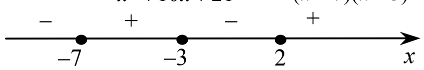
$\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{3}{2}$. Ответ: $\left(\dfrac{1}{5};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

3.5.С06. а) $3^{4x-2} - 82 \cdot 3^{2x-1} + 81 \geq 0$; $(3^{2x-1} - 81)(3^{2x-1} - 1) \geq 0$;
$(2x - 1 - 4)(2x - 1) \geq 0$; $(2x - 5)(2x - 1) \geq 0$;

$\left[\begin{array}{l} x \geq 2\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{array}\right.$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[2\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

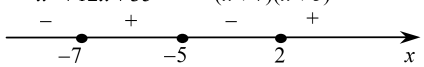
б) $6^{2x-4} - 37 \cdot 6^{x-2} + 36 \leq 0$; $(6^{x-2} - 36)(6^{x-2} - 1) \leq 0$; $(x - 2 - 2)(x - 2) \leq 0$;
$2 \leq x \leq 4$. Ответ: $[2; 4]$.

3.5.С07 а) $\frac{16^x - 256}{x^2 + 10x + 21} \geq 0$; $\frac{(x-2)}{(x+7)(x+3)} \geq 0$;



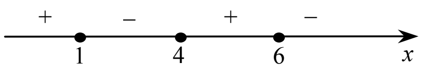
$x \in (-7; -3) \cup [2; +\infty)$.

б) $\frac{13^x - 169}{x^2 + 12x + 35} \leq 0$; $\frac{(x-2)}{(x+7)(x+5)} \leq 0$;



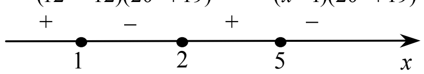
$x \in (-\infty; -7) \cup (-5; 2]$.

3.5.С08. а) $\frac{(256 - 4^x)(2^x - 64)}{(3^x - 3)(10^x + 7)} \geq 0$; $\frac{(4-x)(x-6)}{(x-1)(10^x + 7)} \geq 0$;



$x \in (-\infty; 1) \cup [4; 6]$.

б) $\frac{(36 - 6^x)(3^x - 243)}{(12^x - 12)(20^x + 19)} \leq 0$; $\frac{(2-x)(x-5)}{(x-1)(20^x + 19)} \leq 0$;



$x \in (1; 2] \cup [5; +\infty)$.

3.5.С09. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > 64^{\frac{x-1}{x+2}}$; $4^{\frac{x+1}{2-x}} > 4^{\frac{3x-3}{x+2}}$; $\frac{x+1}{2-x} > \frac{3x-3}{x+2}$;

$\frac{x^2 + 3x + 2 + 3x^2 - 9x + 6}{(x+2)(2-x)} > 0$; $\frac{4x^2 - 6x + 8}{(x+2)(2-x)} > 0$;

$4x^2 - 6x + 8 = 0$; $D = 36 - 128 < 0$; $(x + 2)(x - 2) < 0$; $-2 < x < 2$;
Ответ: $x \in (-2; 2)$.

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x-4}} < 9^{\frac{x-4}{x+4}}$; $3^{\frac{1-x}{x-4}} < 3^{\frac{2x-8}{x+4}}$; $\frac{1-x}{x-4} < \frac{2x-8}{x+4}$;

$\frac{2x^2 - 16x + 32 + x^2 + 3x - 4}{(x-4)(x+4)} > 0$; $\frac{3x^2 - 13x + 28}{(x-4)(x+4)} > 0$;

$3x^2 - 13x + 28 = 0$; $D = 169 - 28 \cdot 12 < 0$; $\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

3.5.C10. а) $2^x + \frac{16}{2^x} > 17$; $2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 16 > 0$; $(2^x - 16)(2^x - 1) > 0$;

$(x-4)x > 0$; $\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < 0 \end{array}\right.$. Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

б) $5^x + \frac{25}{5^x} < 26$; $5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 < 0$; $(5^x - 25)(5^x - 1) < 0$; $x(x-2) < 0$;

$0 < x < 2$. Ответ: $(0; 2)$.

3.5.C11. а) $4^{x-\frac{5}{2}} - 5 \cdot 2^{x-5} + \frac{1}{8} \geq 0$; $2^{2x-5} - \frac{5}{4\sqrt{2}} 2^{x-2,5} + \frac{1}{8} \geq 0$;

$D = \frac{25}{32} - \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$; $2^{x-2,5} = \dfrac{\frac{5}{4\sqrt{2}} \pm \frac{3}{4\sqrt{2}}}{2} = 2^{x-2,5} = 2^{-2,5}$ и $2^{x-2,5} = 2^{-0,5}$;

$(2^{x-2,5} - 2^{-0,5})(2^{x-2,5} - 2^{-2,5}) \geq 0$; $(x - 2,5 + 0,5)(x - 2,5 + 2,5) \geq 0$; $x(x-2) \geq 0$;

$\left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$. Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

б) $4^{x-\frac{3}{2}} - 3 \cdot 2^{x-3} + \frac{1}{4} \leq 0$; $2^{2x-3} - \frac{3}{2\sqrt{2}} 2^{x-1,5} + \frac{1}{4} \leq 0$; $D = \frac{9}{8} - \frac{8}{8} = \frac{1}{8}$;

$2^{x-1,5} = \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{2} = 2^{x-1,5} = 2^{-1,5}$ или $2^{x-1,5} = 2^{-0,5}$;

$(2^{x-1,5} - 2^{-1,5})(2^{x-1,5} - 2^{-0,5}) \leq 0$;

$\begin{cases} x - 1,5 \geq -1,5 \\ x - 1,5 \leq -0,5 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$; $0 \leq x \leq 1$. Ответ: $[0; 1]$.

3.5.C12 а) $16^x - 14 \cdot 4^x - 32 \leq 0$; $(4^x)^2 - 14 \cdot 4^x - 32 \leq 0$;
$4^x \in [-2; 16]$; $4^x \leq 16$; $4^x \leq 4^2$; $x \leq 2$. Ответ: $(-\infty; 2]$.
б) $9^x + 2 \cdot 3^x - 15 \geq 0$; $(3^x + 5)(3^x - 3) \geq 0$; $x \geq 1$. Ответ: $[1; +\infty)$.

Уровень D

3.5.D01.

а) $\begin{cases} 16^{0,5x^2-3} > \frac{1}{16} \\ 16^x - 6 \cdot 4^x + 8 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 0,5x^2 - 3 > -1 \\ (4^x - 2)(4^x - 4) \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 > 4 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

б) $\begin{cases} 25^{0,5x^2-2} > 5^{-3} \\ 9^x - 11\cdot 3^x + 18 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 4 > -3 \\ 3^{2x} - 11\cdot 3^x + 18 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 > 1 \\ \left(3^x - 9\right)\left(3^x - 2\right) \le 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ 2 \le 3^x \le 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \in [\log_3 2;\ 2] \end{cases}$. Ответ: $[\log_3 2; -1) \cup (1; 2]$.

3.5 DO2.

а) $-4\cdot 3^x + 3^{x+1} - 3^{x+2} < 10^{x-1} - 10^x$; $3^x(-4+3-9) < 10^x(0,1-1)$;

$\left(\frac{3}{10}\right)^x > \frac{9}{100}$; $\left(\frac{3}{10}\right)^x > \left(\frac{3}{10}\right)^2$, x < 2. Ответ: $(-\infty; 2)$.

б) $-3\cdot 2^{x+3} + 2^{x+4} - 2^{x+5} > 5^{x+2} - 5^{x+3}$; $2^{x+3}(-3+2-4) > 5^{x+3}\left(\frac{1}{5} - 1\right)$;

$5\cdot 2^{x+3} < 5^{x+3}\frac{4}{5}$, $2^{x+1} < 5^{x+1}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} > 1$; $x+1>0$; $x>-1$. Ответ: $(-1; +\infty)$.

3.5 DO3.

а) $4^x - 2^{2(x-2)} - 8^{\frac{2}{3}(x-3)} < 472$; $2^{2x}\left(1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{64}\right) < 472$;

$2^{2x}\frac{59}{64} < 472$; $2^{2x} < 8\cdot 64$; $2x < 3+6$; $x < 4\frac{1}{2}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$.

б) $9^x + 3^{2(x-1)} + 27^{\frac{2}{3}(x-2)} > 819$; $3^{2x} + 3^{2x-2} + 3^{2x-4} > 819$; $3^{2x}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81}\right) > 819$;

$3^{2x}\frac{91}{81} > 819$; $3^{2x} > 9\cdot 81$; $2x > 2+4$, $x>3$. Ответ: $(3; +\infty)$.

3.5 DO4.

а) $6^{2\sqrt{x}} + 6 > 6^{\sqrt{x}+1} + 6^{\sqrt{x}}$; $6^{2\sqrt{x}} - 6^{\sqrt{x}}\cdot 7 + 6 > 0$; $\left(6^{\sqrt{x}} - 6\right)\left(6^{\sqrt{x}} - 1\right) > 0$;

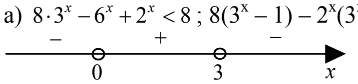
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} > 1 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} < 1 \\ \sqrt{x} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$; x > 1. Ответ: $(1; +\infty)$.

б) $2^{2\sqrt{x}} + 8 < 2^{\sqrt{x}+3} + 2^{\sqrt{x}}$; $2^{2\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}} + 8 < 0$; $\left(2^{2\sqrt{x}} - 8\right)\left(2^{\sqrt{x}} - 1\right) < 0$;

$1 < 2^{\sqrt{x}} < 8$; $0 < \sqrt{x} < 3$; $0<x<9$. Ответ: $(0; 9)$.

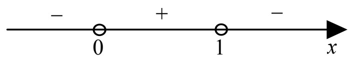
3.5. DO5.

а) $8\cdot 3^x - 6^x + 2^x < 8$; $8(3^x - 1) - 2^x(3^x - 1) < 0$; $(3^x - 1)(8 - 2^x) < 0$;



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

б) $3\cdot 2^x - 6^x + 3^x > 3$; $3(2^x - 1) - 3^x(2^x - 1) > 0$; $(2^x - 1)(3 - 3^x) > 0$.



Ответ: (0; 1).

3.5. DO6. а) $0,25^x-2\cdot 4^{x+1}<2$; $4^{-x}-8\cdot 4^x-2<0$; $4^{-2x}-2\cdot 4^{-x}-8<0$;

$\left(4^{-x}-4\right)\left(4^{-x}+2\right)<0$; $4^{-x}<4$; $-x<1$; $x>-1$. Ответ: $(-1; +\infty)$.

б) $0,5^x-3\cdot 2^{x+3}>5$; $0,5^{2x}-5\cdot 0,5^x-24>0$; $\left(0,5^x-8\right)\left(0,5^x+3\right)>0$;

$0,5^x-8>0$; $x<-3$. Ответ: $(-\infty; -3)$.

3.5 DO7. а) $\frac{1}{5^x+6}\geq\frac{4}{5^{x+1}-1}$; $\frac{5^{x+1}-1-4\cdot 5^x-24}{(5^x+6)(5^{x+1}-1)}\geq 0$;

$\frac{5^x-25}{(5^x+6)(5^{x+1}-1)}\geq 0$; $5^x\in\left[0;\frac{1}{5}\right)\cup[25;+\infty)$; $x\in(-\infty; -1)\cup[2; +\infty)$.

б) $\frac{1}{3^x+4}\leq\frac{2}{3^{x+1}-1}$; $\frac{3\cdot 3^x-1-2\cdot 3^x-8}{(3^x+4)(3^{x+1}-1)}\leq 0$; $\frac{3^x-9}{(3^x+4)(3^{x+1}-1)}\leq 0$;

$3^x\in\left(\frac{1}{3};9\right]$; $x\in(-1; 2]$.

3.5 DO8. а) $4^{\frac{2}{x}-1}-15\cdot 2^{\frac{2}{x}-2}-4\geq 0$; $4\cdot 4^{\frac{2}{x}-2}-15\cdot 4^{\frac{1}{x}-1}-4\geq 0$;

$4t^2-15t-4\geq 0$; D=225+64=17²; $t_1=-\frac{1}{4}$, $t_2=4$; $\left(4^{\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{4}\right)\left(4^{\frac{1}{x}-1}-4\right)\geq 0$;

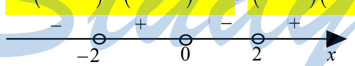
$\frac{1}{x}-1\geq 1$; $\frac{1}{x}\geq 2$; $\frac{2x-1}{x}\leq 0$; $0<x\leq\frac{1}{2}$. Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

б) $9^{\frac{3}{x}-1}-6\cdot 3^{\frac{3}{x}-2}-3\geq 0$; $3^{\frac{6}{x}-2}-6\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{3}{x}-1}-3\geq 0$; $\left(3^{\frac{3}{x}-1}-3\right)\left(3^{\frac{3}{x}-1}+1\right)\geq 0$;

$3^{\frac{3}{x}-1}\in[3;+\infty)$; $\frac{3}{x}-1\geq 1$; $\frac{3}{x}\geq 2$; $\frac{2x-3}{x}\leq 0$; $0<x\leq\frac{3}{2}$. Ответ: $\left(0;\frac{3}{2}\right]$.

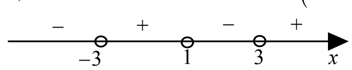
3.5 DO9. а) $x^2\cdot 3^x+4<x^2+4\cdot 3^x$; $x^2\cdot 3^x-x^2+4-4\cdot 3^x<0$;

$3^x\left(x^2-4\right)-\left(x^2-4\right)<0$; $\left(3^x-1\right)\left(x^2-4\right)<0$;



$x\in(-\infty, -2)\cup(0, 2)$.

б) $x^2\cdot 4^x+36>4x^2+9\cdot 4^x$; $4^x\left(x^2-9\right)-\left(4\left(x^2-9\right)\right)>0$; $(4^x-4)(x-3)(x+3)>0$;



$x\in(-3, 1)\cup(3, +\infty)$.

3.5. D10. а) $16^{\sqrt{x^2-2}}+4>65\cdot 4^{\sqrt{x^2-2}-1}$; $4^{2\sqrt{x^2-2}}-\frac{65}{4}\cdot 4^{\sqrt{x^2-2}}+4>0$;

$t^2-\frac{65}{4}t+4=0$; $D=\frac{4225}{16}-16=\frac{3969}{16}=\left(\frac{63}{4}\right)^2$; $\left(4^{\sqrt{x^2-2}}-\frac{1}{4}\right)\left(4^{\sqrt{x^2-2}}-16\right)>0$;

$\sqrt{x^2-2}>2$; $x^2-2>4$; $x^2>6$; $t_{1,2}=\dfrac{\frac{65}{4}\pm\frac{63}{4}}{2}$, $t_1=\dfrac{1}{4}$, $t_2=16$.

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};+\infty)$.

б) $9^{\sqrt{x^2-1}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-1}-1}$; $3^{2\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{28}{3}\cdot 3^{\sqrt{x^2-1}}+3<0$; $3^{\sqrt{x^2-1}}=t$;

$t^2-\dfrac{28}{3}t+3<0$; $D=\dfrac{784}{9}-12=\dfrac{676}{9}=\left(\dfrac{26}{3}\right)^2$. $t_{1,2}=\dfrac{\frac{28}{3}\pm\frac{26}{3}}{2}$, $t_1=\dfrac{1}{3}$, $t_2=9$;

$\left(3^{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{1}{3}\right)\left(3^{\sqrt{x^2-1}}-9\right)<0$; $\sqrt{x^2-1}<2$; $0\le x^2-1<4$; $1\le x^2<5$.

Ответ: $(-\sqrt{5};-1]\cup[1;\ \sqrt{5})$.

3.5. D11.

а) $\left|3^{9x^2-2}-6\right|\ge 3$; $3^{9x^2-2}-6\ge 3$ или $3^{9x^2-2}-6\le -3$;

$3^{9x^2-2}\ge 9$ или $3^{9x^2-2}\le 3$; $9x^2-2\ge 2$ или $9x^2-2\le 1$; $x^2\ge\dfrac{4}{9}$ или $x^2\le\dfrac{1}{3}$;

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[-\sqrt{\dfrac{1}{3}};\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

б) $\left|2^{4x^2-5}-9\right|\le 7$; $-7\le 2^{4x^2-5}-9\le 7$; $2\le 2^{4x^2-5}\le 16$;

$1\le 4x^2-5\le 4$, $\dfrac{6}{4}\le x^2\le\dfrac{9}{4}$, $x\in\left[-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

3.5. D12.

а) $\left(x^2-x+1\right)^{\frac{x-11}{x-4}}\le\left(x^2-x+1\right)^3$;

I. $x^2-x+1\le 1$: $\quad\dfrac{x-11}{x-4}\ge 3$; $\dfrac{3x-12-x+11}{x-4}\le 0$;

$0<x\le 1$; $\quad\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-4}\le 0$; $\dfrac{1}{2}\le x<4$; Значит, $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$;

II. $x^2-x+1\ge 1$; $\quad\dfrac{x-11}{x-4}\le 3$; $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-4}\ge 0$; $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x>4\\ x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$; Значит, $\left[\begin{array}{l}x>4\\ x\le 0\end{array}\right.$.

Ответ: $x\in[-\infty,\ 0]\cup\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]\cup(4,+\infty]$.

б) $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x-10}{x-3}}\ge\left(x^2+x+1\right)^3$;

I. $x^2+x+1\le 1$; $\quad\dfrac{x-10}{x-3}\le 3$; $\quad\dfrac{3x-9-x+10}{x-3}\ge 0$;

-1≤x≤0. $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-3}\geq 0$. $\left[\begin{array}{l} x>3 \\ x\leq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Значит, -1≤x≤$-\frac{1}{2}$.

II. $x^2 + x + 1 \geq 1$: $\dfrac{x-10}{x-3}\geq 3$; $\dfrac{3x-9+10-x}{x-3}\leq 0$;

$\left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x\leq -1 \end{array}\right.$; $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-3}\leq 0$; $-\frac{1}{2}\leq x<3$. Значит, 0≤x<3. Ответ: $x\in\left[-1,\ -\frac{1}{2}\right]\cup[0,\ 3)$

§ 6. Логарифмические неравенства

Уровень А.

3.6. А01.

а) $\log_3(x+28)\geq 3$; $x+28\geq 3^3$; $x\geq -1$. Ответ: $[-1; +\infty)$.

б) $\log_6(x+34)\geq 2$; $x+34\geq 36$; $x\geq 2$. Ответ: $x\geq 2$.

3.6. А02 а) $\log_{\frac{1}{5}}(x+23)\leq -2$; $x+23\geq\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $x+23\geq 25$; $x\geq 2$. Ответ: $x\geq 2$.

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x+24)\leq -4$; $x+24>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; $x+24\geq 16$; $x\geq -8$.

3.6. А03.

а) $\log_{\frac{1}{2}}(1-3x)\geq -2$; ОДЗ: $1-3x>0$; $x<\frac{1}{3}$; $(1-3x)\leq 4$; $-3x\leq 3$; $x\geq -1$.

Ответ: $\left[-1;\ \frac{1}{3}\right)$.

б) $\log_{\frac{1}{7}}(14-x)\geq -1$; ОДЗ: $14-x>0$; $x < 14$; $14-x\leq 7$; $-x\leq -7$; $x\geq 7$. Ответ: $[7; 14)$.

3.6. А04.

а) $\log_6\left(x^2+x-14\right)\geq 1$; $x^2+x-14\geq 6$; $x^2+x-20\geq 0$; $x^2+x-20=0$;

$D=1+4\cdot 20=81$; $x=\frac{-1\pm 9}{2}$; $x_1=-5$; $x_2=4$; $x\in(-\infty;\ -5]\cup[4;\ +\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;\ -5]\cup[4;\ +\infty)$.

б) $\log_5(x^2-3x-5)\geq 1$; $x^2-3x-5\geq 5$; $x^2-3x-10\geq 0$; $D=9+4\cdot 10=49$; $x=\frac{3\pm 7}{2}$;

$x_1=5$, $x_2=-2$; $x\in(-\infty; -2]\cup[5; +\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty; -2]\cup[5; +\infty)$..

3.6. А05.

а) $\log_{\frac{1}{140}}(2x+19)\geq\log_{\frac{1}{140}}(4x+3)$; ОДЗ: $\begin{cases} 2x+19>0 \\ 4x+3>0 \end{cases}$; $x>-\frac{3}{4}$;

$2x+19\leq 4x+3$; $-2x\leq -16$; $-2x\leq -16$; $x\geq 8$. Ответ: $[8; +\infty)$.

б) $\log_{133}(3x-4) \geq \log_{133}(2x+15)$;

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-4>0 \\ 2x+15>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x>4 \\ 2x>-15 \end{cases}$; $\begin{cases} x>\frac{4}{3} \\ x>-\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{4}{3}$;

$3x-4 \geq 2x+15$; $x \geq 19$. Ответ:[19; +∞).

3.6. А06. а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(3x+28) \leq 4 \\ 4x-1<3x-2 \end{cases}$; ОДЗ: $3x+28>0$; $x>-9\frac{1}{3}$;

$\begin{cases} 3x+28 \geq \frac{1}{16} \\ x<-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \geq \frac{1}{16}-28 \\ x<-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \geq -27\frac{15}{16} \\ x<-1 \end{cases}$; $\begin{matrix} x \geq -9\frac{5}{16} \\ x<-1 \end{matrix}$.

Ответ: $x \in \left[-9\frac{5}{16};-1\right)$.

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(3x+11) \geq 3 \\ 5x-4<x+4 \end{cases}$; ОДЗ: $3x+11>0$; $x>-3\frac{2}{3}$;

$\begin{cases} 3x+11 \leq \frac{1}{8} \\ 4x<8 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \leq \frac{1}{8}-11 \\ x<2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \leq \frac{1-88}{8} \\ x<2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \leq -10{,}875 \\ x<2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq -3{,}625 \\ x<2 \end{cases}$.

Ответ: $\left(-3\frac{2}{3};\ -3{,}625\right]$.

Уровень В.

3.6. В01. а) $\log_4(x^2+x+10) \leq 2$;

$x^2+x+10 \leq 16$; $x^2+x+10>0$;

$x^2+x-6 \leq 0$; $D=1-4\cdot10<0$;

$D=1+4\cdot6=25$; $x=\frac{-1\pm5}{2}$; $x_1=-3$; $x_2=2$. Ответ: [-3; 2].

б) $\log_2(x^2+4x+11) \leq 3$; $x^2+4x+11 \leq 8$; $x^2+4x+3 \leq 0$; $D=16-4\cdot3=4$;

$x=\frac{-4\pm2}{2}$; $x_1=-3$, $x_2=-1$. Ответ: [-3; -1].

3.6. В02. а) $\log_4 x+\log_4(x-12) \geq 3$; ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x-12>0 \end{cases} \Rightarrow x>12$;

$\log_4(x(x-12)) \geq 3$; $x^2-12x \geq 64$; $x^2-12x-64 \geq 0$; $D=144+4\cdot64=20^2$;

$x=\frac{12\pm20}{2}$; $x_1=-4$, $x_2=16$. Ответ: [16; +∞).

б) $\log_3 x+\log_3(x-24) \geq 4$; ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x-24>0 \end{cases}$; $x>24$; $\log_3(x(x-24)) \geq 4$; $x^2-24x-81 \geq 0$;

$D=24^2+4\cdot81=30^2$; $x=\frac{24\pm30}{2}$; $x_1=27$, $x_2=-6$. Ответ: $x \in [27; +\infty)$.

3.6. В03. а) $\begin{cases}\log_2(3x+4)\ge 1\\ 24-3x\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}3x+4\ge 2\\ -3x\ge -24\end{cases}$; $\begin{cases}3x\ge -2\\ x\le 8\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -\frac{2}{3}\\ x\le 8\end{cases}$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};\ 8\right]$.

б) $\begin{cases}\log_3(5x-1)\ge 2\\ 25-5x\ge 0\end{cases}$; ОДЗ: 5x –1 > 0; $x>\frac{1}{5}$; $\begin{cases}5x-1\ge 9\\ -5x\ge -25\end{cases}$; $\begin{cases}5x\ge 10\\ x\le 5\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge 2\\ x\le 5\end{cases}$.

Ответ: [2; 5].

3.6. В04. а) $\log_4^2 x>9$; $\left[\begin{array}{l}\log_4 x>3\\ \log_4 x<-3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x>64\\ 0<x<\frac{1}{64}\end{array}\right.$, Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{64}\right)\cup(64;\ +\infty)$.

б). $\log_3^2 x>4$; $\left[\begin{array}{l}\log_3 x>2\\ \log_3 x<-2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x>9\\ 0<x<\frac{1}{9}\end{array}\right.$. Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{9}\right)\cup(9\ \ +\infty)$.

3.6. В05. а) $\log_{\frac{1}{2}}(7x-4)\ge -1$; ОДЗ: 7x-4>0; $x>\frac{4}{7}$;

7x-4≤2; 7x≤6; $x\le\frac{6}{7}$. Ответ: $\left(\frac{4}{7};\ \frac{6}{7}\right]$.

б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+5)\ge -2$; ОДЗ: 2x + 5 > 0; x > – 2,5;

2x + 5 ≤ 16: x ≤ 5,5. Ответ: (–2,5; 5,5].

3.6. В06. а) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(4x+1)\ge -2$; ОДЗ: 4x + 1 > 0; $x>-\frac{1}{4}$;

4x+1≤2; 4x≤1; x≤$\frac{1}{4}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$.

б) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(5x+2)\ge -2$; ОДЗ: 5x + 2 > 0; $x>-\frac{2}{5}$;

5x+2≤3; 5x≤1; x≤$\frac{1}{5}$. Ответ: $\left(-\frac{2}{5};\ \frac{1}{5}\right]$.

3.6. В07. а) $\log_{\frac{1}{6}}(5x-4)\ge\log_{\sqrt{5}}5$; ОДЗ: 5x – 4 > 0; $x>\frac{4}{5}$;

$\log_{\frac{1}{6}}(5x-4)\ge 2$; $5x-4\le\frac{1}{36}$; $5x\le\frac{1}{36}+4$; $x\le\frac{29}{36}$. Ответ: $\left(\frac{4}{5};\ \frac{29}{36}\right]$

б). $\log_{\frac{1}{5}}(4x+1)\ge\log_{\sqrt{2}}2$; ОДЗ: 4x + 1 > 0; $x>-\frac{1}{4}$;

$\log_{\frac{1}{5}}(4x+1)\ge 2$; 4x+1≤$\frac{1}{25}$; $4x\le-\frac{24}{25}$; $x\le-\frac{6}{25}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{4};-\frac{6}{25}\right]$.

3.6. B08.

а) $\log_{\frac{2\pi}{5}}\left(x^2+8x-12\right)\ge\log_{\frac{2\pi}{5}}(4x+9)$; D(x) $\begin{cases}x^2+8x-12>0\\4x+9>0\end{cases}$;

$$\begin{cases}x\in\left(-\infty;\ -4-\dfrac{\sqrt{112}}{2}\right)\cup\left(-4+\dfrac{\sqrt{112}}{2};\ +\infty\right)\Rightarrow x\in\left(-4+\dfrac{\sqrt{112}}{2};\ +\infty\right)\\x>-\dfrac{9}{4}\end{cases};$$

$x^2+8x-12=0$; $D=64+4\cdot12=112$; $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{112}}{2}$; $x^2+8x-12\ge4x+9$; $x^2+4x-21\ge0$;

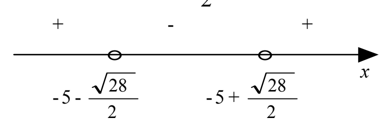
$D=16+4\cdot21=10^2$; $x=\dfrac{-4\pm10}{2}$; $x_1=-7$, $x_2=3$; $x\in(-\infty;\ -7]\cup[3;\ \infty)$. Ответ: $[3;\ \infty)$.

б) $\log_{\frac{4\pi}{11}}\left(x^2+10x+18\right)\ge\log_{\frac{4\pi}{11}}(4x+13)$;

D(x): $\begin{cases}x^2+10x+18>0\\4x+13>0\end{cases}$;

$$\begin{cases}x\in\left(-\infty;\ -5-\dfrac{\sqrt{28}}{2}\right)\cup\left(-5+\dfrac{\sqrt{28}}{2};\ +\infty\right)\Rightarrow x\in\left(-5+\dfrac{\sqrt{28}}{2};\ +\infty\right)\\x>-3,25\end{cases};$$

$x^2+10x+18=0$; $D=100-4\cdot18=28$; $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{28}}{2}$;



$x^2+10x+18\ge4x+13$; $x^2+6x+5\ge0$; $D=36-4\cdot5=16$; $x=\dfrac{-6\pm4}{2}$;

$x_1=-5$, $x_2=-1$. Ответ: $[-1;\ +\infty)$.

3.6. B09.

а) $\log_9(-x+83)>2$; ОДЗ: $-x+83>0$; $x<83$;

$-x+83>81$; $-x>-2$; $x<2$. Ответ: $(-\infty;\ 2)$.

б) $\log_2(-x+11)>3$; ОДЗ: $-x+11>0$; $x<11$;

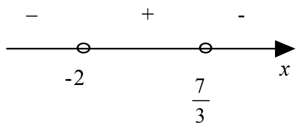
$-x+11>8$; $-x>-3$; $x<3$.

Ответ: $(-\infty;\ 3)$.

3.6. B10.

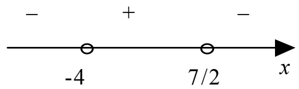
а) $\log_4\dfrac{9-2x}{x+2}<0$; $\begin{cases}\dfrac{9-2x}{x+2}>0\\x\ne-2\end{cases}$; $\begin{cases}(9-2x)(x+2)>0\\x\ne-2\end{cases}$; $x\in(-2;\ 4{,}5)$;

$\dfrac{9-2x}{x+2}<1$; $\dfrac{9-2x-x-2}{x+2}<0$; $\dfrac{7-3x}{x+2}<0$; $(7-3x)(x+2)<0$.



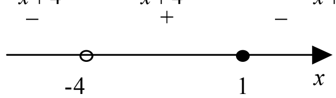
Ответ: $x \in \left(\frac{7}{3};\ \ 4{,}5\right)$.

б) $\log_6 \frac{7-2x}{x+4} \le 0$; ОДЗ: $\begin{cases} \frac{7-2x}{x+4} > 0 \\ x \ne -4 \end{cases}$; $\begin{cases} (7-2x)(x+4) > 0 \\ x \ne -4 \end{cases}$;



$x \in (-4;\ 3{,}5)$;

$\frac{7-2x}{x+4} \le 1 \Rightarrow \frac{7-2x}{x+4} - 1 \le 0$; $\frac{7-2x-x-4}{x+4} \le 0 \Rightarrow \frac{-3x+3}{x+4} \le 0$.



Ответ: [1; 3,5).

3.6. B11.

а) $\log_{19}(x^2-16x+65) \le 0$; D(x): $x^2-16x+65>0$; $D=16^2-4\cdot 65<0$;
$x^2-16x+65 \le 1$; $x^2-16x+64 \le 0$; $(x-8)^2 \le 0$ — имеет единственное решение x=8.
Ответ: x=8.

б) $\log_{\frac{1}{18}}\left(x^2+14x+50\right) \ge 0$; $x^2+14x+50>0$; $x^2+14x+50 \le 1$; $x^2+14x+49 \le 0$;
$(x+7)^2 \le 0$ — имеет единственное решение x=-7. Ответ: x=-7.

3.6. B12.

а) $\log_6(x+8) \ge \log_{8-x}(8-x)$; $\log_6(x+8) \ge 1$;
$\begin{cases} x+8>0 \\ 8-x>0 \\ 8-x \ne 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -8<x<8 \\ x \ne 7 \end{cases}$; $x+8 \ge 6$; $x \ge -2$. Ответ: $x \in [-2;\ 7) \cup (7;\ 8)$.

б) $\log_4(x+8) > \log_{3-x}(3-x)$; $\log_4(x+8) > 1$;
D(x): $\begin{cases} x+8>0 \\ 3-x>0 \\ 3-x \ne 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -8<x<3 \\ x \ne 2 \end{cases}$; $x+8>4$; $x>-4$. Ответ: $x \in (-4;\ 2) \cup (2;\ 3)$.

Уровень С.

3.6. C01. а) $1+\frac{1}{\log_{x-1}4} \le \frac{1}{\log_{x+8}4}$;

$\begin{cases} 1+\log_4(x-1)-\log_4(x+8) \le 0 \\ x-1 \ne 1 \\ x+8 \ne 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_4(4x-4) \le \log_4(x+8) \\ x \ne 2 \\ x \ne -7 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-4 \le x+8 \\ x \ne 2 \\ x \ne -7 \\ 4x-4>0 \\ x+8>0 \end{cases}$;

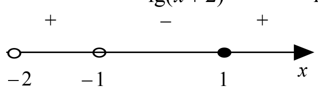
$\begin{cases} x \le 4 \\ x \ne 2 \\ x > 1 \end{cases}$. Ответ: (1; 2) ∪ (2; 4].

б) $1+\dfrac{1}{\log_{x+1}3} \le \dfrac{1}{\log_{x+23}3}$;

$\begin{cases} 1+\log_3(x+1) \le \log_3(x+23) \\ x+1 \ne 1 \\ x+23 \ne 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_3(3x+3) \le \log_3(x+23) \\ x \ne 0 \\ x \ne -22 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+3 \le x+23 \\ x \ne 0 \\ x \ne -22 \\ 3x+3 > 0 \\ x+23 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 10 \\ x \ne 0 \\ x > -1 \end{cases}$.

Ответ: (–1; 0) ∪ (0; 10].

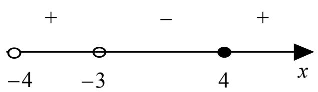
3.6. C02. а) $\dfrac{x^2+4x-5}{\lg(x+2)} \ge 0$; $\dfrac{(x-1)(x+5)}{\lg(x+2)} \ge 0$; x + 2 > 0; x > –2.



Так что x ∈ (–2; –1) ∪ [1; +∞).

б) $\dfrac{x^2+x-20}{\ln(x+4)} \le 0$; x + 4 > 0, x > –4.

$\dfrac{(x-4)(x+5)}{\ln(x+4)} \le 0$;



x ∈ (–3; 4].

3.6. C03.

а) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+4}{x-9} \ge 0$; D(x): $\dfrac{x+4}{x-9} > 0$; (x+4)(x-9)>0; x∈(–∞; –4)∪(9; +∞);

$\dfrac{x+4}{x-9} \le 1$; $\dfrac{x+4}{x-9} - 1 \le 0$; $\dfrac{x+4-x+9}{x-9} \le 0$;

$\dfrac{13}{x-9} < 0$; x-9<0; x<9. Ответ: x ∈ (–∞; –4).

б) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{x+9} \le 0$; D(x): $\dfrac{x+2}{x+9}$>0; (x+2)(x+9)>0; x∈(-∞; -9)∪(-2; +∞).

$\dfrac{x+2}{x+9} \ge 1$; $\dfrac{x+2}{x+9} - 1 \ge 0$; $\dfrac{x+2-x-9}{x+9} \ge 0$; $\dfrac{-7}{x+9} \ge 0$;

x+9<0; x<-9. Ответ: (–∞; –9).

3.6.C04. а) $\dfrac{2}{\log_2 x+1} \ge 1$. x > 0;

$\dfrac{2}{\log_2 2x} \ge 1$; $\dfrac{2-\log_2 2x}{\log_2 2x} \ge 0$;

$0 < \log_2 2x \le 2$; $1 < 2x \le 4$; $\frac{1}{2} < x \le 2$. Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2};\ 2\right]$.

б) $\frac{6}{\log_3 x+3} \le 1$. $\frac{6}{\log_3 27x} \le 1$, $x > 0$;

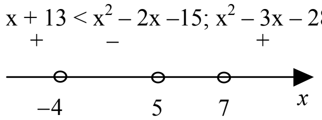
$\frac{\log_3 27x-6}{\log_3 27x} \ge 0$; $\left[\begin{array}{l}\log_3 27x < 0\\ \log_3 27x \ge 6\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}27x < 1\\ 27x \ge 27^2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x < \frac{1}{27}\\ x \ge 27\end{array}\right.$.

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{27}\right) \cup [27;+\infty)$.

3.6. С05. а) $\log_5(x+13)<\log_5(x+3)+\log_5(x-5)$.

D(x): $\begin{cases} x+13>0\\ x+3>0\\ x-5>0\end{cases} \Rightarrow x > 5$;

$x + 13 < x^2 - 2x - 15$; $x^2 - 3x - 28 > 0$; $(x - 7)(x + 4) > 0$;



Так что $x > 7$. Ответ: $x \in (7; +\infty)$.

б) $\log_4(x + 7) < \log_4(1 - x) + \mathrm{lod}_4(8 - x)$.

$\begin{cases} x+7>0\\ 1-x>0\\ 8-x>0\end{cases}$; $\begin{cases} x>-7\\ x<1\\ x<8\end{cases}$; $-7 < x < 1$;

$\log_4(x + 7) < \log_4(1 - x)(8 - x)$; $x + 7 < (1 - x)(8 - x)$;

$8 - 9x + x^2 - x - 7 > 0$; $x^2 - 10x + 1 > 0$; $D = 100 - 4 = 96 = 16 \cdot 6$;

$x = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x > 5+2\sqrt{6}\\ x < 5-2\sqrt{6}\end{array}\right.\\ -7 < x < 1\end{cases}$; $-7 < x < 5 - 2\sqrt{6}$, так как $5-2\sqrt{6} < 1$.

Ответ: $x \in (-7;\ 5 - 2\sqrt{6})$.

3.6.С06.

а) $\log_{0,2}(x - 2) - \log_{0,2}(4 - x) < \log_{0,2}\frac{1}{5}$.

$\log_{0,2}(x - 2) < \log_{0,2}\frac{1}{5} \cdot (4 - x)$; $\begin{cases} x-2>0\\ 4-x>0\end{cases}$; $\begin{cases} x>2\\ x<4\end{cases}$; $2 < x < 4$;

$x - 2 > \frac{1}{5}(4 - x)$; $5x - 10 > 4 - x$; $6x > 14$; $x > 2\frac{1}{3}$. Ответ: $x \in \left(2\frac{1}{3};\ 4\right)$.

б) $\log_{0,5}(x + 5) - \log_{0,5}(3 - x) > \log_{0,5}\frac{1}{2}$. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) > \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}(3-x)\right)$;

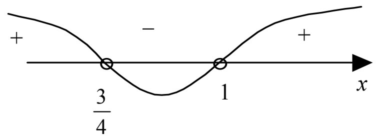
$\begin{cases} x+5>0\\ 3-x>0\end{cases}$; $\begin{cases} x>-5\\ x<3\end{cases}$; $-5 < x < 3$; $x + 5 > \frac{1}{2}(3 - x)$; $2x + 10 < 3 - x$;

$3x < -7$; $x > -2\frac{1}{3}$. Ответ: $x \in \left(-5; -2\frac{1}{3}\right)$.

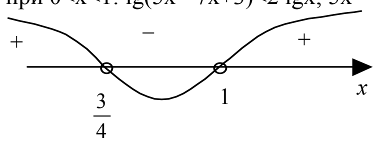
3.6.C07. а) $\frac{\lg\left(5x^2 - 7x + 3\right)}{\lg x} > 2$.

ОДЗ: $5x^2-7x+3>0$; $x>0$, $x\neq1$. $5x^2-7x+3=0$; $D=49-4\cdot5\cdot3<0$;
при $x>1$: $\lg(5x^2-7x+3)>2\lg x$; $5x^2-7x+3>x^2$; $4x^2-7x+3>0$; $D=49-48=1$;

$x_{1,2} = \frac{7\pm1}{8}$; $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{4}$.



вместе с ОДЗ: $x>1$;
при $0<x<1$: $\lg(5x^2-7x+3)<2\lg x$; $5x^2-7x+3<x^2$; $4x^2-7x+3<0$;



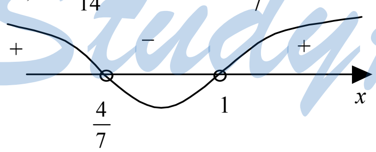
$x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

Объединим ответы. Ответ: $x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

3.6. C07. б) $\frac{\lg\left(8x^2 - 11x + 4\right)}{\lg x} < 2$. ОДЗ: $8x^2-11x+4>0$; $x>0$, $x\neq1$.

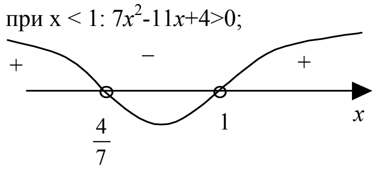
$D=121-128=-7<0 \Rightarrow$ ОДЗ: $x>0$, $x\neq1$;
при $x>1$: $\lg(8x^2-11x+4)<\lg x^2$; $7x^2-11x+4<0$; $D=121-112=9$;

$x_{1,2} = \frac{11\pm3}{14}$; $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{4}{7}$.



Нет решений (так как $x>1$);

при $x < 1$: $7x^2-11x+4>0$;



вместе с ОДЗ: $0<x<\frac{4}{7}$; Ответ: $x\in\left(0; \frac{4}{7}\right)$.

3.6. С08. а) $\log_8\left(1-\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{8}}\left(1-\frac{x}{6}\right)\le 1$.

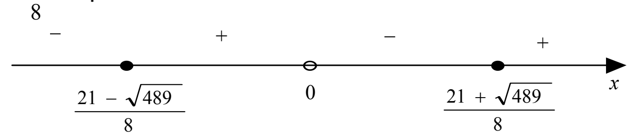
ОДЗ: $\begin{cases}1-\frac{1}{x}>0\\ 1-\frac{x}{6}>0\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1}{x}<1\\ x<6\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<0\end{array}\right.\\ x<6\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}1<x<6\\ x<0\end{array}\right.$.

$\log_8\left(1-\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{8}}\left(1-\frac{x}{6}\right)\le 1$; $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{6}}\le 8$ (т.к. 8>1);

$1-\frac{x}{6}>0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}\le 8-\frac{8x}{6}$; $\frac{4x}{3}-\frac{1}{x}-7\le 0$; $\frac{4x^2-21x-3}{3x}\le 0$;

$4x^2-21x-3\ge 0$, D = 441 + 48 = 489,

$x_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{489}}{8}$.



Учитывая ОДЗ, получаем: $\begin{cases}x\le\frac{21-\sqrt{489}}{8}\\ \frac{21+\sqrt{489}}{8}\le x<6\end{cases}$.

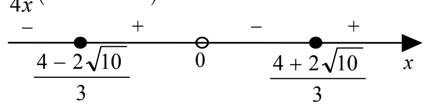
Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{21-\sqrt{489}}{8}\right]\cup\left[\frac{21+\sqrt{489}}{8};\ 6\right)$.

б) $\log_3\left(1-\frac{2}{x}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x}{4}\right)\ge 1$.

ОДЗ: $\begin{cases}1-\frac{2}{x}>0\\ 1-\frac{x}{4}>0\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{2}{x}<1\\ x<4\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>2\end{array}\right.\\ x<4\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}x<0\\ 2<x<4\end{array}\right.$;

$\log_3\left(1-\frac{2}{x}\right)-\log_3\left(1-\frac{x}{4}\right)\ge 1$; $\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{x}{4}}\ge 3$; $1-\frac{2}{x}\ge 3-\frac{3x}{4}$; $\frac{3x}{4}-\frac{2}{x}-2\ge 0$;

$\frac{1}{4x}\left(3x^2-8x-8\right)\ge 0$; $3x^2-8x-8=0$; D = 64 + 96 = 160; $x_{1,2}=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{3}$.



С учетом ОДЗ: $x \in \left[\frac{4-2\sqrt{10}}{3};\ 0\right) \cup \left[\frac{4+2\sqrt{10}}{3};\ 4\right)$.

Ответ: $x \in \left[\frac{4-2\sqrt{10}}{3};\ 0\right) \cup \left[\frac{4+2\sqrt{10}}{3};\ 4\right)$.

3.6. С09.

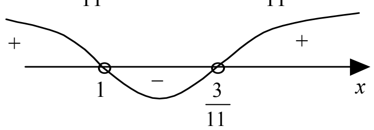
а) $\log_{x+1}(11x^2+8x-3)>2$.

$\log_{x+1}(11x^2+8x-3)> \log_{x+1}(x+1)^2$;

ОДЗ: $x+1>0$; $x+1\neq 1$; $11x^2+8x-3>0$;

$\frac{D}{4}=16+33=49$;

$x_{1,2}=\frac{-4\pm 7}{11}$; $x_1=-1$, $x_2=\frac{3}{11}$.



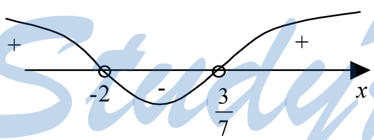
$$\begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\in(-\infty,\ -1)\cup\left(\frac{3}{11};\ +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x>\frac{3}{11}.$$

Исходя из ОДЗ: $x + 1 > 1$, так что $11x^2 + 8x - 3 > (x + 1)^2$; $10x^2 + 6x - 4 > 0$;

$5x^2 + 3x - 2 > 0$; $(5x - 2)(x + 1) > 0$; $5x - 2 > 0$; $x > \frac{2}{5}$. Ответ: $x > \frac{2}{5}$.

б) $\log_{x+2}(7x^2+11x-6)<2$. ОДЗ: $x+2>0$; $x+2\neq 1$;

$7x^2+11x-6>0$; $D=121+168=289$; $x_{1,2}=\frac{-11\pm 17}{14}$; $x_1=\frac{3}{7}$, $x_2=-2$.



$$\begin{cases} x>-2 \\ x\neq -1 \\ x\in(-\infty;\ -2)\cup\left(\frac{3}{7};\ +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{3}{7};+\infty\right).$$

Исходя из ОДЗ: $x + 2 > 1$, так что

$7x^2 + 11x - 6 < (x + 2)^2$; $6x^2 + 7x - 10 < 0$; $D = 49 + 240 = 17^2$;

$x_{1,2}=\frac{-7\pm 17}{12}$; $x_1=\frac{5}{6}$, $x_2=-2$. $x\in\left(-2;\ \frac{5}{6}\right)$. Ответ: $x\in\left(\frac{3}{7};\ \frac{5}{6}\right)$.

3.6. С10. а) $\left(\log_{\frac{1}{4}} 7 - \log_{\frac{1}{3}} 7\right)\log_3(x-15) > 0$.

$$\log_{\frac{1}{4}} 7 - \log_{\frac{1}{3}} 7 = \frac{1}{\log_7 \frac{1}{4}} - \frac{1}{\log_7 \frac{1}{3}} = \frac{\log_7 \frac{1}{3} - \log_7 \frac{1}{4}}{\log_7 \frac{1}{4}\log_7 \frac{1}{3}} = \frac{\log_7 \frac{4}{3}}{\log_7 \frac{1}{4}\log_7 \frac{1}{3}} > 0;$$

Так что $\log_3(x - 15) > 0$; $x - 15 > 1$; $x > 16$.

Ответ: $x \in (16; +\infty)$.

б) $\left(\log_{\frac{1}{8}} 6 - \log_{\frac{1}{7}} 6\right)\log_3(x+12) < 0$.

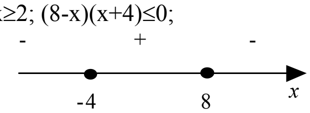
$$\log_{\frac{1}{8}} 6 - \log_{\frac{1}{7}} 6 = \frac{1}{\log_6 \frac{1}{8}} - \frac{1}{\log_6 \frac{1}{7}} = \frac{\log_6 \frac{1}{7} - \log_6 \frac{1}{8}}{\log_6 \frac{1}{7}\log_6 \frac{1}{8}} = \frac{\log_6 \frac{8}{7}}{\log_6 \frac{1}{7}\log_6 \frac{1}{8}} > 0;$$

Так что $\log_3(x + 12) < 0$; $0 < x + 12 < 1$; $-12 < x < -11$.

Ответ: $x \in (-12; -11)$.

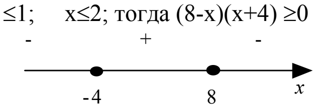
3.6. С11. а) $(8-x)(x+4)\log_3(x-1)\le 0$. ОДЗ: $x-1>0$; $x > 1$.

1) $\log_3(x-1)\ge 0$; $x-1\ge 1$; $x\ge 2$; $(8-x)(x+4)\le 0$;



получаем $x\ge 8$;

2) при $\log_3(x-1)\le 0$; $x-1\le 1$; $x\le 2$; тогда $(8-x)(x+4)\ge 0$

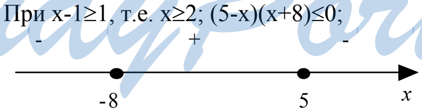


получаем $x\in[-4; 8]$, вместе с ОДЗ: $x\in(1, 2]$.

Ответ: $x\in(1, 2]\cup[8; +\infty)$

б) $(5-x)(x+8)\log_{\frac{1}{5}}(x-1)\ge 0$. $(5-x)(x+8)\log_5(x-1)\le 0$;

ОДЗ: $x-1>0$; $x>1$. При $x-1\ge 1$, т.е. $x\ge 2$; $(5-x)(x+8)\le 0$;



получаем $x\ge 5$; при $0<x-1\le 1$, т.е. $1<x\le 2$;

$(5-x)(x+8)\ge 0$; получаем $1<x\le 2$.

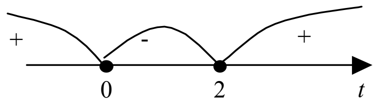
Ответ: $x\in(1; 2]\cup[5; +\infty)$.

3.6. С12. а) $\frac{3\lg x-8}{\lg x-2} > 4$.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ \lg x\ne 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 100 \end{cases}$;

$\lg x = t \ne 2$;

$\frac{3t-8-4(t-2)}{t-2}>0$; $\frac{3t-8-4t+8}{t-2}>0$; $\frac{-t}{t-2}>0$; $\frac{t}{t-2}<0$;

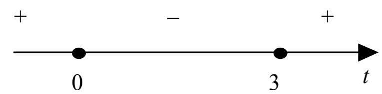


0<lgx<2; 1<x<100 (т.к. 10>1).   Ответ: $x\in(1;\ 100)$.

б) $\frac{5\lg x-6}{\lg x-3}<2$. ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 10^3 \end{cases}$.

lgx=t;

$\frac{5t-6}{t-3}-2<0$; $\frac{5t-6-2t+6}{t-3}<0$; $\frac{3t}{t-3}<0$;



0<lgx<3; 1 < x < 1000.   Ответ: x∈(1; 1000).

Уровень D.

3.6. D01. а) $\log_{x+3}6+\log_{-13-6x}6\leq 0$.

$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \\ -13-6x>0 \\ -13-6x\neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \\ x<-\frac{13}{6}\ j \\ x\neq -\frac{14}{6} \end{cases}$,

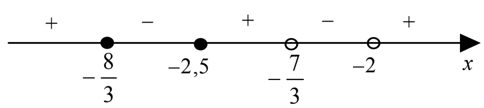
$\frac{1}{\log_6(x+3)}+\frac{1}{\log_6(-13-6x)}\leq 0$; $\frac{\log_6(-13-6x)+\log_6(x+3)}{\log_6(x+3)\cdot\log_6(-13-6x)}\leq 0$;

$\log_6(-(x+3)(13+6x))=0$; $-(x+3)(13+6x)=1$; $6x^2+31x+40=0$;

$x_{1,2}=\frac{-31\pm\sqrt{31^2-24\cdot 40}}{12}=\frac{-31\pm 1}{12}$; $\begin{cases} x_1=-\frac{32}{12}=-\frac{8}{3}\approx -2,66 \\ x_2=-\frac{30}{12}=-2,5 \end{cases}$;

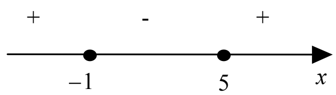
$\log_6(x+3)=0$; $x+3=1$; $x=-2$;

$\log(-13-6x)=0$; $-13-6x=1$; $x=-\frac{7}{3}$



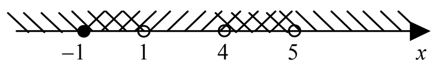
С учетом ОДЗ: Ответ: $x\in\left[-\frac{8}{3};-2,5\right]\cup\left(-\frac{7}{3};-\frac{13}{6}\right)$.

3.6. D02. а) $\log_{9-x}(x^2-5x+4)\geq 1$. При $9-x>1$, т.е. $x<8$:
$x^2-5x+4\geq 9-x$; $x^2-4x-5\geq 0$; $(x-5)(x+1)\geq 0$.



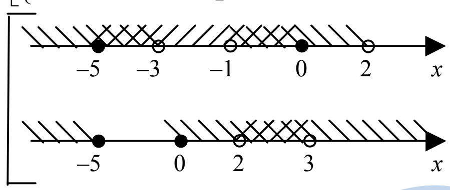
То есть $x\in(-\infty;-1]\cup[5;8)$; при $0<9-x<1$, то есть $8<x<9$:

$$\begin{cases}x^2-5x+4\leq 9-x\\ x^2-5x+4>0\end{cases};\quad \begin{cases}(x-5)(x+1)\leq 0\\ (x-1)(x-4)>0\end{cases}$$



так что решений нет (так как $8<x<9$).
Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup[5;8)$.
б) $\log_{3-x}(x^2+4x+3)\leq 1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x>1\\ x^2+4x+3\leq 3-x\\ x^2+4x+3>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<3-x<1\\ x^2+4x+3\geq 3-x\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\ x(x+5)\leq 0\\ (x+1)(x+3)>0\end{cases};\\ \begin{cases}2<x<3\\ x(x+5)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $x\in[-5;-3)\cup(-1;0]\cup(2;3)$.
3.6.D03. а) $6^{\lg\cos 6\pi}\leq\log_{x^2}(9-8x)$.

$1\leq\log_{x^2}(9-8x)$; $\log_{x^2}x^2\leq\log_{x^2}(9-8x)$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>1\\ x^2\leq 9-8x\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2<1\\ x^2\geq 9-8x\\ 9-8x>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1>0\\ (x+9)(x-1)\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2<1\\ (x+9)(x-1)\geq 0\\ x<\dfrac{9}{8}\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \text{Ответ: } [-9;-1).$$

б) $4^{\lg\cos 2\pi}\geq\log_{x^2}(8-7x)$. ОДЗ: $x\neq 0$; $x\neq 1$; $x<\dfrac{8}{7}$; $1\geq\log_{x^2}(8-7x)$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>1\\ 8-7x\le x^2\\ 8-7x>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2<1\\ 8-7x\ge x^2\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right.\\ x^2+7x-8\ge 0\\ x<\dfrac{8}{7}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ x^2+7x-8\le 0\\ x\ne 0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -8\end{array}\right.\\ x<\dfrac{8}{7}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ -8\le x\le 1\\ x\ne 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-8)\cup(1;{}^{8}\!/_{7})\\ x\in(-1;0)\cup(0;1)\end{array}\right..\qquad \text{Ответ: } x\in(-\infty;-8)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;{}^{8}\!/_{7}).$$

3.6. D04. а) $\log_2^2\left(6x-x^2+2\right)+3\log_{0,5}\left(6x-x^2+2\right)>-2$.

$\log_2^2\left(6x-x^2+2\right)-3\log_2\left(6x-x^2+2\right)+2>0$;

$\left(\log_2\left(6x-x^2+2\right)-2\right)\left(\log_2\left(6x-x^2+2\right)-1\right)>0$;

$\left[\begin{array}{l}\log_2(6x-x^2+2)<1\\ \log_2(6x-x^2+2)>2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}6x-x^2+2<2\\ 6x-x^2+2>4\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x^2-6x>0\\ x^2-6x+2<0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>6\\ x\in(3-\sqrt{7};3+\sqrt{7})\end{array}\right.$; но $6x-x^2+2>0$, то есть

$x^2-6x-2<0$, то есть $x\in(3-\sqrt{11}\,;\,3+\sqrt{11}\,)$.;

Так что $x\in(3-\sqrt{11}\,;\,0)\cup(3-\sqrt{7}\,;\,3+\sqrt{7}\,)\cup(6;\,3+\sqrt{11}\,)$.

Ответ: $x\in(3-\sqrt{11}\,;\,0)\cup(3-\sqrt{7}\,;\,3+\sqrt{7}\,)\cup(6;\,3+\sqrt{11}\,)$.

б) $\log_{0,5}^2\left(3x-x^2+4\right)-6\log_2\left(3x-x^2+4\right)<-8$.

$\log_{0,5}^2\left(3x-x^2+4\right)-6\log_2\left(3x-x^2+4\right)+8<0$;

$\log_2^2\left(3x-x^2+4\right)-6\log_2\left(3x-x^2+4\right)+8<0$;

$\left(\log_2\left(3x-x^2+4\right)+2\right)\left(\log_2\left(3x-x^2+4\right)-4\right)<0$;

$2<\log_2(3x-x^2+4)<4$; $4<3x-x^2+4<16$;

$\begin{cases}3x-x^2+4>4\\ 3x-x^2+4<16\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-3x<0\\ x^2-3x+12>0\end{cases}$;

$x^2-3x+12>0$ при всех x, так как $D=9-48<0$.

Так что $x^2-3x<0$, $x(x-3)<0$, $0<x<3$. Ответ: $x\in(0,\,3)$.

3.6. D05. а) $\log_6\log_2\dfrac{x}{x+4}<0$.

$0<\log_2\frac{x}{x+4}<1$; $1<\frac{x}{x+4}<2$;

$\begin{cases}\frac{4+x-x}{4+x}<0\\ \frac{8+2x-x}{4+x}>0\end{cases}$; $\begin{cases}4+x<0\\ \frac{8+x}{4+x}>0\end{cases}$; $\begin{cases}x<-4\\ \left[\begin{array}{l}x>-4\\ x<-8\end{array}\right.\end{cases}$; Ответ: $x\in(-\infty;-8)$.

б) $\log_{\frac{1}{6}}\log_3\frac{x}{2+x}>0$. $0<\log_3\frac{x}{x+2}<1$; $1<\frac{x}{2+x}<3$;

$\begin{cases}\frac{x}{2+x}-1>0\\ \frac{6+3x-x}{2+x}>0\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{2}{2+x}<0\\ \frac{2x+6}{2+x}>0\end{cases}$; $\begin{cases}x<-2\\ \left[\begin{array}{l}x>-2\\ x<-3\end{array}\right.\end{cases}$. Ответ: $x\in(-\infty;-3)$.

3.6.D06. а) $\log_3 x-\log_x 3\ge\frac{3}{2}$. $\begin{cases}x>0\\ x\ne1\end{cases}$;

$\log_3 x-\frac{1}{\log_3 x}\ge\frac{3}{2}$; $\log_3 x=t$; $t-\frac{1}{t}\ge\frac{3}{2}$; $\frac{t^2-\frac{3}{2}t-1}{t}\ge0$; $\frac{(t-2)\left(t+\frac{1}{5}\right)}{t}\ge0$;

$t\in\left[-\frac{1}{2};\,0\right)\cup[2;+\infty)$; $\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\le\log_3 x<0\\ \log_3 x\ge2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{3}}\le x<1\\ x\ge9\end{array}\right.$.

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\,1\right)\cup[9;+\infty)$.

б) $\log_2 x-\log_x 2\le\frac{8}{3}$. $x>0$; $x\ne1$; $\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}\le\frac{8}{3}$; $\log_2 x=t$;

$t-\frac{1}{t}\le\frac{8}{3}$; $\frac{t^2-\frac{8}{3}t-1}{t}\le0$; $\frac{(t-3)\left(t+\frac{1}{3}\right)}{t}\le0$; $t\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[0;3)$;

$\left[\begin{array}{l}\log_2 x\le-\frac{1}{3}\\ 0<\log_2 x\le3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}0<x\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ 1<x\le8\end{array}\right.$. Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup(1;8]$.

3.6.D07. а) $\log_{6x}(x^2-15x+54)>1$.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-15x+54>6x\\ x>\frac{1}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-15x+54<6x\\ 0<x<\frac{1}{6}\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-21x+54>0\\ x>\frac{1}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-21x+54<0\\ 0<x<\frac{1}{6}\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<3\\ x>18\end{array}\right.\\ x>\frac{1}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}3<x<18\\ 0<x<\frac{1}{6}\end{cases}\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{6}<x<3 \\ x>18\end{array}\right. \\ 0\end{array}\right.$. Ответ: $x \in \left(\frac{1}{6};\ 3\right) \cup (18; +\infty)$.

б) $\log_{7x}(x^2 - 10x + 16) < 1$.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-10x+16<7x \\ x>\frac{1}{7}\end{cases} \\ \begin{cases}x^2-10x+16>7x \\ 0<x<\frac{1}{7}\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-17x+16<0 \\ x>\frac{1}{7}\end{cases} \\ \begin{cases}x^2-17x+16>0 \\ 0<x<\frac{1}{7}\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<x<16 \\ x>\frac{1}{7}\end{cases} \\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>16 \\ x<1\end{array}\right. \\ 0<x<\frac{1}{7}\end{cases}\end{array}\right.$;

но $x^2 - 10x + 16 > 0$, то есть $\left[\begin{array}{l}x<2 \\ x>8\end{array}\right.$,

так что $x \in (1; 2) \cup \left(0;\ \frac{1}{7}\right) \cup (8; 16)$. Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{7}\right) \cup (1; 2) \cup (8; 16)$.

3.6.D08.

а) $||\log_3 x + 2| - 3| < 1$.

$-1 < |\log_3 x + 2| - 3 < 1$; $2 < |\log_3 x + 2| < 4$;

$\begin{cases}|\log_3 x+2|<4 \\ |\log_3 x+2|>2\end{cases}$; $\begin{cases}-4<\log_3 x+2<4 \\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x+2>2 \\ \log_3 x+2<-2\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}-6<\log_3 x<2 \\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x>0 \\ \log_3 x<-4\end{array}\right.\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}0<\log_3 x<2 \\ -6<\log_3 x<-4\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}1<x<9 \\ \frac{1}{3^6}<x<\frac{1}{3^4}\end{array}\right.$. Ответ: $x \in \left(\frac{1}{3^6};\ \frac{1}{81}\right) \cup (1; 9)$.

б) $||\log_2 x + 1| - 4| > 1$.

$\left[\begin{array}{l}|\log_2 x+1|-4>1 \\ |\log_2 x+1|-4<-1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}|\log_2 x+1|>5 \\ |\log_2 x+1|<3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\log_2 x+1>5 \\ \log_2 x+1<-5 \\ -3<\log_2 x+1<3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\log_2 x>4 \\ \log_2 x<-6 \\ -4<\log_2 x<2\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x>16 \\ 0<x<\frac{1}{2^6} \\ \frac{1}{16}<x<4\end{array}\right.$. Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{64}\right) \cup \left(\frac{1}{16};\ 4\right) \cup (16; +\infty)$.

3.6.D09. а) $\frac{4}{3+\log_4 x} + \frac{5}{\log_4(4x)}\left(\frac{2}{3+\log_4 x} - 1\right) \le 0$.

$\frac{4^{1+\log_4 x}}{3+\log_4 x} + \frac{5\cdot 2}{(1+\log_4 x)(3+\log_4 x)} - \frac{5^{\log_4 x+3}}{\log_4 x+1} \le 0$;

$\frac{4+4\log_4 x+10-5\log_4 x-15}{(1+\log_4 x)(3+\log_4 x)} \le 0$; $\frac{-\log_4 x-1}{(\log_4 x+1)(3+\log_4 x)} \le 0$;

$3 + \log_4 x > 0$; $\log_4 x > -3$; $x > \frac{1}{64}$.

ОДЗ: $\log_4 x + 1 \ne 0$; $\log_4 x \ne -1$; $x \ne \frac{1}{4}$. Ответ: $x \in \left(\frac{1}{64}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

б) $\frac{4}{6+\log_2 x} + \frac{1}{\log_2(2x)+2}\left(\frac{3}{6+\log_2 x} - 1\right) \le 0$.

$\frac{4}{6+\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 x+3}\left(\frac{3}{6+\log_2 x} - 1\right) \le 0$; $\frac{4\log_2 x+12+3-6-\log_2 x}{(6+\log_2 x)(3+\log_2 x)} \ge 0$;

$\frac{9+3\log_2 x}{(6+\log_2 x)(3+\log_2 x)} \ge 0$; $\begin{cases} 6+\log_2 x > 0 \\ 3+\log_2 x \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 x > -6 \\ \log_2 x \ne -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{1}{64} \\ x \ne 8 \end{cases}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{64}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

3.6.D10.

а) $\log_3 \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} x \le 0$. $0 < \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} x \le 1$;

$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{4}} x \ge \frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < \log_{\frac{1}{4}} x < 1 \\ x \le \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > \frac{1}{4} \\ x \le \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$; $\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right]$.

б) $\log_3 \log_4 \log_{\frac{1}{2}} x \le 0$. $0 < \log_4 \log_{\frac{1}{2}} x \le 1$;

$\begin{cases} \log_4 \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log_4 \log_{\frac{1}{2}} x \le 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \\ 0 < \log_{\frac{1}{2}} x \le 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ x \ge \frac{1}{16} \end{cases}$; $\frac{1}{16} \le x < \frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right)$.

3.6.D11.

а) $\log_{x+2}(x^2 - 4x + 1) > \log_{\frac{x-5}{x-6}} 1$.

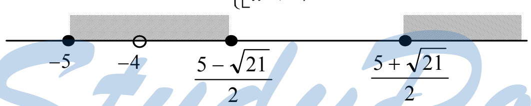
$$\begin{cases} x^2-4x+1>0\\ x+2>0\\ x\ne -1\\ \dfrac{x-5}{x-6}>0\\ \dfrac{x-5}{x-6}\ne 1\end{cases};\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{3}\\ x<2-\sqrt{3}\end{array}\right.\\ x>-2\\ x\ne -1\\ \left[\begin{array}{l}x>6\\ x<5\end{array}\right.\end{cases};\quad \log_{x+2}(x^2-4x+1)>0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+1>1\\ x+2>1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x+1<1\\ 0<x+2<1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x>0\\ x>-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x<0\\ -2<x<-1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>4\\ x<0\end{array}\right.\\ x>-1\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<4\\ -2<x<-1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ x>4\end{array}\right..$$

Ответ: $x \in (-1;\, 0) \cup (4;\, 5) \cup (6;\, +\infty)$.

б) $\log_{x+5}(x^2-5x+1) < \log_{\frac{x+7}{x+5}} 1$.

ОДЗ: $\begin{cases}x+5>0\\ x^2-5x+1>0\\ x+5\ne 1\\ \dfrac{x+7}{x+6}>0\end{cases};\quad \begin{cases}x>-5\\ x\ne -4\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\ x<\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>-5\\ x<-7\end{array}\right.\end{cases};\quad \begin{cases}x>-5\\ x\ne -4\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\ x<\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\end{cases};$



$\log_{x+5}(x^2-5x+1) < 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+5>1\\ x^2-5x+1<1\end{cases}\\ \begin{cases}0<x+5<1\\ x^2-5x+1>1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-4\\ x^2-5x<0\end{cases}\\ \begin{cases}-5<x<-4\\ x^2-5x>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-4\\ 0<x<5\end{cases}\\ \begin{cases}-5<x<-4\\ \left[\begin{array}{l}x>5\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}0<x<5\\ -5<x<-4\end{array}\right..$$

Ответ: $x \in (-5;\, -4) \cup \left(0;\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2};\ 5\right)$.

3.6.D12. а) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)-\log_{\frac{1}{3}}(36-x^2) < \sin\dfrac{9\pi}{2}$.

$\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)-\log_{\frac{1}{3}}(36-x^2)<1$; $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}(36-x^2)\right)$;

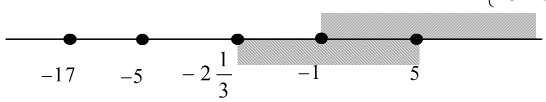
$4x - 3 > \frac{1}{3}(36 - x^2)$; $12x - 9 > 36 - x^2$; $x^2 + 12x - 45 > 0$; $D = 144 + 4 \cdot 45 = 18^2$;
$x_1 = -15$, $x_2 = 3$;

$\left[\begin{array}{l} x<-15 \\ x>3 \end{array}\right.$, но $\left[\begin{array}{l} 4x-3>0 \\ 36-x^2>0 \end{array}\right.$; $\begin{cases} x>\frac{3}{4} \\ -6<x<6 \end{cases}$. Ответ: $x \in (3; 6)$.

б) $\log_6(3x + 7) - \log_6(25 - x^2) > \sin\frac{3\pi}{2}$. $\log_6(3x + 7) - \log_6(25 - x^2) > -1$;

$\log_6(3x + 7) > \log_6\frac{25-x^2}{6}$; $3x + 7 > \frac{25-x^2}{6}$; $25 - x^2 < 18x + 42$;

$x^2 + 18x + 17 > 0$; $\left[\begin{array}{l} x>-1 \\ x<-17 \end{array}\right.$; ОДЗ: $\begin{cases} 3x+7>0 \\ 25-x^2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-2\frac{1}{3} \\ -5<x<5 \end{cases}$; $-2\frac{1}{3}<x<5$.



Ответ: $x \in (-1; 5)$.

Глава 4. Производная и первообразная

§ 1. Многочлены

Уровень А.

4.1.А01. а) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{12}+5x+\sqrt{5}$.

$f'(x)=x^3-\frac{x^2}{4}+5$; $f'(-2)=-8-\frac{4}{4}+5=-4$. Ответ: $f'(-2) = -4$.

б) $f(x)=\frac{x^4}{9}+\frac{x^3}{27}-2x-3\sqrt{5}$.

$f'(x)=\frac{4}{9}x^3+\frac{1}{9}x^2-2$; $f'(-3)=-12+1-2=-13$. Ответ: $f'(-3) = -13$.

4.1.А02. а) Требуемая площадь есть ни что иное, как
$S=\int_0^2(x^2-4x+5)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2-\left.2x^2\right|_0^2+\left.5x\right|_0^2=\frac{8}{3}-8+10=\frac{14}{3}$, очевидно, что график $y=x^2-4x+5$ лежит выше оси OX;
б) График функции $y=x^2+2x+6$ лежит выше OX.

Тогда $S=\int_{-1}^0(x^2+2x+6)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^0+\left.x^2\right|_{-1}^0+\left.6x\right|_{-1}^0=\frac{1}{3}+1+6=\frac{22}{3}$.

4.1.А03. а) $f(x) = (3x^2 - x + 1)(x + 3)$.
Найдем нули: $(3x^2 - x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$ или $3x^2 - x + 1 = 0$,
$D < 0$, корней нет.
$f'(x) = (3x^2 - x + 1) + (x + 3)(6x - 1)$; $f'(-3) = 27 + 3 + 1 = 31$. Ответ: 31.

б) f(x) = $(2x^2 - 4x + 3)(x + 2)$.

$(2x^2 - 4x + 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ 2x^2 - 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -2;$

D < 0; $f'(x) = 2x^2 - 4x + 3 + (x + 2)(4x - 4)$

$f'(-2) = 8 + 8 + 3 = 19$. Ответ: 19.

4.1.A04. а) $f(x) = \frac{5x+1}{4}$; $y = \int f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2}{2} + x\right) + C$.

Подставим точку (–3; –5): $-5 = \frac{5}{8}\cdot 9 - \frac{3}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{79}{8}$.

Ответ: $y = \frac{5}{8}x^2 + \frac{x}{4} - \frac{79}{8}$.

б) $f(x) = \frac{3x-4}{3}$. $y = \int f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x + C$.

Подставим (–1; –4): $-4 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{35}{6}$. Ответ: $y = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x - \frac{35}{6}$.

4.1.A05. а) $f(x) = \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{21}$. $f'(x) = x^8 - x^7$;

$f'(0,7) = (0,7)^8 - (0,7)^7 = (0,7)^7(0,7 - 1) = -0,3 \cdot (0,7)^7 < 0$. Ответ: $f'(0,7) < 0$.

б) $f(x) = \frac{1}{10}x^{10} - \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{19}$. $f'(x) = x^9 - x^8$;

$f'(0,9) = (0,9)^9 - (0,9)^8 = (0,9)^8(0,9 - 1) = -0,1 \cdot (0,9)^8 < 0$.

Ответ: $f'(0,9) < 0$.

4.1.A06. а) $f(x) = 0,5x^2 - 5x + 9$. $f'(x) = x - 5$;

Приравняем $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$; $f(5) = 12,5 - 25 + 9 = -3,5$.

Ответ: Искомая точка (5; –3,5).

б) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$. $f'(x) = 4x + 4$.

Приравняем $f'(x)$ нулю $\Rightarrow x = -1$.

$f(-1) = 2 - 4 + 3 = 1$. Ответ: искомая точка (–1; 1).

Уровень B.

4.1. B01. а) $f(x) = \frac{-x^8 + x^4 - 3\sqrt{7}}{4}$.

$f'(x)$=$-2x^7+x^3$; $f'(1)$=-2+1=-1 — искомый угловой коэффициент.

б) $f(x) = \frac{-x^{20} + x^5 + 2\sqrt{3}}{5}$.

$f'(x)$=$-4x^{19}+x^4$; $f'(1)$=-4+1=-3 — искомый угловой коэффициент

4.1. B02. а) $y=(x+3)^2$ и $y = -\frac{1}{2}x$.

Найдем точки пересечения $(x+3)^2 = -\frac{1}{2}x$,

$x^2 + 6x + 9 + \frac{1}{2}x = 0$, $2x^2+13x+18=0$, $x_1=-2$, $x_2 = -\frac{9}{2}$

тогда $S=-\int\limits_{-\frac{9}{2}}^{-2}(x+3)^2dx+\int\limits_{-\frac{9}{2}}^{-2}\left(-\frac{1}{2}x\right)dx=-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{-\frac{9}{2}}^{-2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{9}{2}}^{-2}-3x^2\Big|_{-\frac{9}{2}}^{-2}-9x\Big|_{-\frac{9}{2}}^{-2}=$

$=-\frac{4}{4}+\frac{81}{16}+\frac{8}{3}-\frac{243}{8}-12+\frac{243}{4}+18-\frac{81}{2}=5+\frac{81}{18}+\frac{8}{3}-\frac{243}{8}-\frac{81}{2}=5+\frac{8}{3}-\frac{81}{16}$;

б) $y=(x-2)^2$ и $y=\frac{1}{3}x$

Найдем точки пересечения

$(x-2)^2=\frac{1}{3}x$, $x^2-4x+4=\frac{1}{3}x$, $3x^2-13x+12=0$, $x_1=3$, $x_2=\frac{4}{3}$

тогда $S=\int\limits_{\frac{4}{3}}^{3}\left(\frac{1}{3}x\right)dx-\int\limits_{\frac{4}{3}}^{3}(x^2-4x+4)dx=\frac{x^2}{6}\Bigg|_{\frac{4}{3}}^{3}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{\frac{4}{3}}^{3}+2x^2\Big|_{\frac{4}{3}}^{3}-4x\Big|_{\frac{4}{3}}^{3}=$

$=\frac{3}{2}-\frac{8}{27}-3+\frac{64}{81}+18-\frac{32}{9}-12+\frac{16}{3}=3+\frac{3}{2}+8\left(\frac{8}{81}-\frac{1}{27}-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right)=$

$=3+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\left(\frac{8}{27}-\frac{1}{9}-\frac{4}{3}+2\right)=3+\frac{3}{2}+\frac{8\cdot 23}{3\cdot 27}$.

4.1. В03. а) $f(x)=x^2(2x-1)=2x^3-x^2$.

Первообразная: $y=\int f(x)=\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+C$;

подставим точку (1, 2): $2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+C\Rightarrow C=\frac{11}{6}$.

Ответ: $y=\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{11}{6}$.

б) $f(x)=x^2(2x+1)=2x^3+x^2$.

Первообразная: $y=\int f(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+C$;

подставим точку (1, 3): $3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+C\Rightarrow C=2\frac{1}{6}$.

Ответ: $y=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{6}$.

4.1. В04.

а) $f(x)=x(3x-2)^2=9x^3-12x^2+4x$.

Первообразная: $y=\int f(x)=\frac{9}{4}x^4-4x^3+2x^2+C$;

подставим точку (-2; -2): -2=36+32+8+C⇒C=-78;

Ответ: $y=\frac{9}{4}x^4-4x^3+2x^2-78$

б) $f(x)=x(4x-1)^2=16x^3-8x^2+x$.

Первообразная: $y=\int f(x)=4x^4-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+C$;

подставим точку (-2; 1): $-2 = 4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{23}{6}$.

Ответ: $y = 4x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{23}{6}$.

4.1. B05.

а) $f(x)=x-1$. Первообразная: $y = \int f(x) = \frac{x^2}{2} - x + C$;

$x=4$ — нуль функции $y \Rightarrow \frac{4^2}{2} - 4 + C = 0$, $C = -4$;

Тогда $y = \frac{x^2}{2} - x - 4 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - 8\right)$. По т. Виета, второй нуль: -2.

б) $f(x)=2x-3$. Первообразная: $y = \int f(x) = x^2 - 3x + C$;

$x=-2$ — нуль функции $y \Rightarrow (-2)^2-3(-2)+C=0$; $C=-10$.
Тогда $y=x^2-3x-10$. По теореме Виета, второй нуль: 5.
4.1. B06. а) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$.
Скорость — производная координаты по времени:
$v(t)=x'(t)=3t^2-4t+3$; $v(1)=3-4+3=2$.
Ответ: $v = 2$.
б) $x(t)=t^3+2t^2-3t$.
Скорость — производная координаты:
$v(t)=3t^2+4t-3$; $v(2)=3\cdot4+4\cdot2-3=17$.
Ответ: $v = 17$.
4.1. B07. а) $f(x)=-2x^3-12x^2-23x-8$.
Тангенс угла наклона касательной — это производная в точке касания $(x_0; y_0)$.
$f'(x)=-6x^2-24x-23$; $f'(x_0)= -6x_0^2 - 24x_0 - 23 = tg 45° = 1$;

$x_0^2 + 4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -2$; $y_0=f(x_0)=f(-2)=16-48+46-8= 6$;

(-2; 6) — точка касания.
Ответ: (–2; 6).
б) $f(x)=3x^3+18x^2+37x-2$. $f'(x)=9x^2+36x+37$;
Пусть $(x_0; y_0)$ — точка касания: $f'(x_0)= 9x_0^2 + 36x_0 + 37 = tg 45° = 1$;

$x_0^2 + 4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -2$;

$y_0=f(x_0)=f(-2)=-24+72-74-2=-28$.
(-2; -28) — точка касания.
Ответ: (–1; –28).

4.1. B08. а) $f(x) = -\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 2x + 23$.

Точка касания: $(x_0; y_0)$, $x_0=-2$; $y_0=f(x_0)=-2+2-4+23=19$;
$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ — уравнение касательной;

$f'(x) = -\frac{x^3}{2} + x + 2$; $f'(-2)=4-2+2=4$.

Тогда $y-19=4(x+2) \Rightarrow y=4x+27$ — искомое уравнение. Ответ: $y = 4x + 27$.

б) $f(x)=-\frac{x^4}{27}-\frac{x^2}{3}-2x+7$. Точка касания (x_0, y_0), x_0=-3; $y_0=f(x_0)$=-3-3+6+7=7;

$(y-y_0)=f^{/}(x_0)(x-x_0)$ — уравнение касательной;

$f^{/}(x)=-\frac{4}{27}x^3-\frac{2}{3}x-2$; $f^{/}(-3)=4+2-2=4$.

Тогда y-7=4(x+3)⇔y=4x+19 — искомое уравнение.

Ответ: y = 4x + 19.

4.1. В09. а) $f(x)=5x^2+3x-8$.

$f^{/}(x)=10x+3$;

Пусть (x_0, y_0) — точка касания, тогда по условию: $f^{/}(x_0)=10x_0+3=-17 \Rightarrow x_0=-2$.

$y_0=f(x_0)=20-6-8=6$; $y-y_0=f^{/}(x_0)(x-x_0)$ — уравнение касательной;

y-6=-17(x+2)⇔y=-17x-28 — искомое уравнение.

Ответ: y = –17x – 28.

б) $f(x)=4x^2+5x-1$.

$f^{/}(x)=8x+5$;

Пусть (x_0, y_0) — точка касания, тогда по условию: $f^{/}(x_0)=8x_0+5=21 \Rightarrow x_0=2$;

$y_0= f(x_0)=4\cdot4+10-1=25$; $y-y_0= f^{/}(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y-25=21(x-2)$;

y=21x-17 — искомое уравнение. Ответ: y = 21x – 17.

4.1. В10. а) $f(x)=x^3-6x^2+7x+4$.

$f^{/}(x)=3x^2-12x+7$;

Пусть (x_0, y_0) — точка касания, тогда: $f^{/}(x_0)=3x_0^2-12x_0+7=-5 \Leftrightarrow x_0=2$.

$y_0= f(x_0)=8-24+14+4=2$; $y-y_0= f^{/}(x_0)(x-x_0)$;

y-2=-5(x-2)⇔y=-5x+12 — искомое уравнение.

Ответ: y = –5x + 12.

б) $f(x)=x^3+3x^2+9x-9$.

$f^{/}(x)=3x^2+6x+9$;

Пусть (x_0, y_0) — точка касания, тогда: $f^{/}(x_0)=x_0^2+6x_0+9=6 \Rightarrow x_0=-1$;

$y_0= f(x_0)=-1+3-9-9=-16$; $(y-y_0)= f^{/}(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y+16=6(x+1)$.

y=6x-10 — искомое уравнение. Ответ: y = 6x – 10.

4.1. В11. а) $f(x)=x(x^6-x^3+1)$; $f^{/}(x)=(x^6-x^3+1)+x(6x^5-3x^2)=7x^6-4x^3+1$;

f(-1)=-1(1+1+1)=-3, следовательно, (-1; -3) — точка касания;

$f^{/}(-1)=7+4+1=12$. $(y-y_0)= f^{/}(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y+3=12(x+1)$;

y=12x+9 — искомое уравнение. Ответ: y = 12x + 9.

б) $f(x)=x^4(x^6+x-1)=x^{10}+x^5-x^4$.

$f^{/}(x)=10x^9+5x^4-4x^3$;

$f^{/}(-1)=-10+5+4=-1$; f(-1)=1-1-1=-1⇒(-1; -1) — точка касания;

$y-y_0= f^{/}(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y+1=-(x+1)$; y=-x-2 — искомое уравнение.

Ответ: y = –x – 2.

4.1.В12.

а) $f(x)=(x+3)^4$.

$f^{/}(x)=4(x+3)^3$; $f^{/}(-2)=4$;

f(-2)=1⇒(-2; 1) — точка касания;

y – 1 = 4(x+2)⇔y=4x+9 — искомое уравнение.

Ответ: y = 4x + 9.

б) f(x)=(x-3)^5. f$'$(x)=5(x-3)^4;
f$'$(4)=5; f(4)=1⇒(4; 1) — точка касания;
y-1=5(x-4)⇔y=5x-19 — искомое уравнение. Ответ: y = 5x – 19.

Уровень С.

4.1. С01.
а) f(x)=3x^2+10x-5;
Множество первообразных: $y=\int f(x)=x^3+5x^2-5x+C$;
Функция f(x) принимает значение 3 только в точках: 3x^2+10x-5=3;
3x^2+10x-8=0⇔x=-4, $x=\frac{2}{3}$.

Тогда (-4)^3+5·(-4)^2-5·(-4)+C=3 или $\left(\frac{2}{3}\right)^3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-5\cdot\frac{2}{3}+C=3$;

в первом случае C=-33, во втором C=$3\frac{22}{27}$.

Ответ: y=x^3+5x^2-5x-33 и x^3+5x^2-5x+$3\frac{22}{27}$.

б) f(x)=3x^2+2x-2. Первообразные $y=\int f(x)=x^3+x^2-2x+C$;

f(x)=-1⇔3x^2+2x-1=0⇔x=-1 x=+$\frac{1}{3}$. Тогда –1+1+2+C=–1⇒C=–3;

$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+C=-1\Rightarrow C=-\frac{13}{27}$. Ответ: y=x^3+x^2–2x–3 и y=x^3+x^2–2x–$\frac{13}{27}$.

4.1. С02. а) f(x)=3x^2+4x+1. Первообразные $y=\int f(x)=x^3+2x^2+x+C$;
Один из экстремумов равен 3, то есть y(x)=3, где x — точки экстремума.
Точки экстремума — нули f(x).

f(x)=0⇔3x^2+4x+1=0⇔$\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$;

То есть $\left[\begin{array}{l}y(-1)=3\\ y\left(-\frac{1}{3}\right)=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1+2-1+C=3\\ -\frac{1}{27}+\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+C=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=3\\ C=3\frac{4}{27}\end{array}\right.$;

Ответ: y=x^3+2x^2+x+3 и y=x^3+2x^2+x+$3\frac{4}{27}$.

б) f(x)=3x^2–6x+3. Первообразные $y=\int f(x)=x^3-3x^2+3x+C$;
Точки экстремумов — нули y$'$(x)=f(x); f(x)=0⇔x$_{1,2}$=1.
Тогда y(1)=-2⇔1–3+3+C=-2⇔C=-3. Ответ: y=x^3-3x^2+3x-3.

4.1. С03. а) Пусть (x$_0$, y$_0$) — точки касания. y(x)=x^2-7x+11⇒y$'$(x)=2x-7;
По условию, y$'$(x$_0$)=y(x$_0$)⇔ $x_0^2-7x_0+11=2x_0-7$;

$x_0^2-9x_0+18=0\Leftrightarrow$ D=81-72=9, $x_0=\frac{9\pm3}{2}$.

Ответ: точки x$_0$=3 или x$_0$=6.

б) $y(x)=x^2+5x-4$.
$y'(x)=2x+5$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. По условию $y(x_0)=y'(x_0)$: $x_0^2+5x_0-49=2x_0+5 \Leftrightarrow x_0^2+3x_0-54=0 \Rightarrow x_0=-9$ или $x_0=6$.
Ответ: $x_0=-9$, $x_0=6$.

4.1. С04. а) $f(x)=x^2+7x+1$.

Первообразная $y(x)=\int f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+x+C$;

Пусть x_0 — абсцисса точки касания.
$f'(x)=2x+7$: тангенс угла, образуемого касательной к $f(x)$ равен $f'(x_0)$, а к $y(x)$: $f(x_0)$.
По условию, $f'(x_0)=f(x_0)$;
$x_0^2+7x_0+1=2x_0+7 \Leftrightarrow x_0^2+5x_0-6=0$.
Отсюда, $x_0=-6$ или $x_0=1$. Ответ: -6, 1.
б) $f(x)=x^2+9x+1$.
$f'(x)=2x+9$;
Пусть x_0 — абсцисса точек касания, тангенс угла, образуемого касательной к $f(x)$, равен $f'(x_0)$, а к первообразной: $f(x_0)$. По условию:
$f(x_0)=f'(x_0) \Leftrightarrow x_0^2+9x_0+1=2x_0+9 \Leftrightarrow x_0^2+7x_0-8=0$.
Отсюда $x_0=-8$ или $x_0=1$. Ответ: -8, 1.

4.1. С05.
а) $f(x)=10x-3$.
Первообразная $y=\int f(x)=5x^2-3x+C$;
Пусть a один из нулей $y(x)$ (меньший), тогда, по условию, $a+1$ — тоже нуль.
Имеем: $\begin{cases} 5a^2-3a+c=0 \\ 5(a+1)^2-3(a+1)+c=0 \end{cases}$; вычтем первое уравнение из второго:

$$\begin{cases} 5a^2-3a+c=0 \\ 5\left((a+1)^2-a^2\right)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2-3a+c=0 \\ 5(2a+1)=3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5a^2-3a+c=0 \\ a=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{4}{5} \\ a=-\frac{1}{5} \end{cases};$$

$y=5x^2-3x-\frac{4}{5}$ — наша первообразная. График пересекает ось ординат в точке $(0, y(0))$, то есть $\left(0;-\frac{4}{5}\right)$. Ответ: $\left(0;-\frac{4}{5}\right)$.

б) $f(x)=6x+5$. Первообразная $y=\int f(x)=3x^2+5x+C$;
Пусть a один из нулей $y(x)$ (меньший), тогда, по условию, $a+3$ — тоже нуль.
Имеем: $\begin{cases} 3a^2+5a+c=0 \\ 3(a+3)^2+5a+15+c=0 \end{cases}$; вычтем первое уравнение из второго.

$\begin{cases} 3a^2+5a+c=0 \\ 3\cdot 3\cdot(2a+3)+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-3a^2-5a \\ a=-\frac{42}{18}=-\frac{7}{3} \end{cases}$; $c=-3\cdot\frac{49}{9}+\frac{35}{3}=-\frac{14}{3}$; $y=3x^2+5x-\frac{14}{3}$.

График пересекает ось ординат в точке (0, y(0)), то есть $\left(0;\ -\frac{14}{3}\right)$.

Ответ: $\left(0;\ -\frac{14}{3}\right)$.

4.1. С06. а) $f(x)=20x+2$.

Первообразная $y=\int f(x)=10x^2+2x+C$ Минимум достигается в вершине параболы: $x_{\min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{20}=-\frac{1}{10}$.

По условию, $y\left(-\frac{1}{10}\right)=-6$; $\frac{1}{10}-\frac{2}{10}+C=-6 \Rightarrow C=-5{,}9$.

Ответ: $10x^2+2x-5{,}9$.

б) $f(x)=6x-2$.

Первообразная $y(x)=\int f(x)=3x^2-2x+C$.

Минимум достигается в вершине параболы: $x_{\min}=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$.

По условию, $y\left(\frac{1}{3}\right)=-2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+C=-2 \Rightarrow C=-\frac{5}{3}$. Ответ: $y(x)=3x^2-2x-\frac{5}{3}$.

4.1. С07. а) $f(x)=x^2-10x+32$.

Первообразная $y=\int f(x)=\frac{x^3}{3}-5x^2+32x+C$.

Функция f(x) не имеет нулей, следовательно, y(x) не имеет экстремумов. Наибольшее значение y(x) на [–5; 0] достигается в 0, наименьшее в точке -5.

$y(0)=C=86 \Rightarrow y(x)=\frac{x^3}{3}-5x^2+32+86$;

$y_{\min}=y(-5)=-\frac{125}{3}-125-160+86=-\frac{722}{3}$. Ответ: $-\frac{722}{3}$.

б) $f(x)=x^2+8x+32$. Первообразная $y=\int f(x)=\frac{1}{3}x^3+4x^2+32x+C$.

f(x) не имеет нулей, значит $y_{\max}=y(0)=C=85$, т.к. функция возрастает.

$y_{\min}=y(-6)=\frac{-6^3}{3}+4\cdot 6^2-32\cdot 6+85=-35$. Ответ: –35.

4.1. С08. а) $f(x)=5x^2+20$.

$f'(x)=10x$.

Пусть x_0 — точка касания. Касательная, проходящая через начало координат, имеет вид $y=f'(x_0)x$ и в точке x_0 принимает значение $f(x_0)$. Имеем: $5x_0^2+20=10x_0x_0 \Rightarrow x_0=\pm 2$. Ответ: y=-20x, y=20x.

б) $f(x)=2x^2+32$.

$f'(x)=4x$.

Пусть x_0 — точка касания (абсцисса ее). Касательная, проходящая через начало координат имеет вид $y=f'(x_0)\cdot x$, и в т x_0 равна $f(x_0)$ Имеем:

$2x_0^2+32=4x_0^2 \Leftrightarrow x_0=\pm 4$. Ответ: $y=-16x$, $y=16x$.

4.1. C09. а) $y(x)=x^3-8x^2+8x+8$.

$y'(x)=3x^2-16x+8$.

По условию $y(x_0)=y'(x_0)$, где x_0 — искомая абсцисса:

$x_0^3-8x_0^2+8x_0+8=3x_0^2-16x_0+8$; $x_0\left(x_0^2-11x_0+24\right)=0$;

Откуда $\left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=8 \\ x_0=3 \end{array}\right.$. Ответ: 0; 8; 3.

б) $y(x)=x^3+11x^2+29x+29$.

$y'(x)=3x^2+22x+29$.

По условию $y(x_0)=y'(x_0)$, где x_0 — абсцисса точки касания. Имеем:

$x_0^3+11x_0^2+29x_0+29=3x_0^2+22x_0+29$; $x_0\left(x_0^2+8x_0+7\right)=0$;

Откуда $\left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-1 \\ x_0=-7 \end{array}\right.$. Ответ: 0; –1; –7.

4.1. C10. а) $f(x)=\dfrac{16x^3}{3}-12x^2+14x+1$.

$f'(x)=16x^2-24x+14$. Наименьшее значение $f'(x)$ достигает в точке

$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{24}{32}=\dfrac{3}{4}$ (т.к. это парабола).

$f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=9-18+14=5\cdot$

Известно, что $f'(x)$ — tg угла наклона касательной в точке x_0. tg — возрастающая функция, значит минимум угла в той же точке, где и минимум tg.

$\min\alpha=\operatorname{arc}tg(\min tg)=\operatorname{arc}tg(\min f')=\operatorname{arc}tg5$. Ответ: arctg5.

б) $f(x)=\dfrac{4x^3}{3}-12x^2+40x-7$.

$f'(x)=4x^2-24x+40$ достигает минимума в точке $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{24}{8}=3$ (т.к. это парабола).

$f'(3)=36-72+40=4$. Тогда минимальный угол — $\operatorname{arc}tg4$. Ответ: arctg4.

4.1. C11.

а) $x(t)=3t^2+4t+2$. $v(t)=x'(t)=6t+4$; $6t+4=16\Leftrightarrow t=2$.

Путь $S=x(2)-x(0)=12+8+2-2=20$. Ответ: 20.

б) $x(t)=4t^2+7t+1$. $v(t)=x'(t)=8t+7$. $8t+7=15\Leftrightarrow t=1$.

Путь $S=x(1)-x(0)=4+7+1-1=11$. Ответ: 11.

4.1. C12. а) $y=(x-1{,}5)^2+1{,}75$ $y'=2(x-1{,}5)$

Уравнение касательной в точке с абсциссой

$x=2$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=x$

тогда $S=\int\limits_0^2 (x^2-3x+4)dx-\int\limits_0^2 xdx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2-\left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^2+4x\Big|_0^2-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=$

$=\frac{8}{3}-6+8-2=\frac{8}{3}$;

б) $y=(x-2{,}5)^2+2{,}75=x^2-5x+9$

$y'=2x-5$

Уравнение касательной в точке с абсциссой

$x=3$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=x$

тогда $S=\int\limits_0^3 (x^2-5x+9)dx-\int\limits_0^3 xdx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3-\left.\frac{5x^2}{2}\right|_0^3+9x\Big|_0^3-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3=$

$=9-\frac{45}{2}+27-\frac{9}{2}=9$.

Уровень D.

4.1. D01. а) $y=(|x|-1)^3$, можно считать, что $y=\begin{cases}(x-1)^3, & x\ge 0\\ -(x+1)^3, & x\le 0\end{cases}$.

Уравнение касательной в точке с абсциссой 1,5

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}x-1$

где $y'=3(x-1)^2$.

Касательная пересекает график в точке с абсциссой 0.

Касательная пересекает ось x в точке $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ а функция (1, 0).

Тогда $S=\int\limits_1^{\frac{3}{2}}(x-1)^3dx-\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{4}x-1\right)dx+\int\limits_0^1(x-1)^3dx-\int\limits_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{4}x-1\right)dx=$

$=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}(x-1)^3dx-\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{4}x-1\right)dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\left.\frac{3}{8}x^2\right|_0^{\frac{3}{2}}+x\Big|_0^{\frac{3}{2}}=$

$=\frac{1}{64}-\frac{1}{4}-\frac{27}{32}+\frac{3}{2}=\frac{27}{64}$;

б) $y=(|x|-2)^3$, можно считать, что $y=\begin{cases}(x-2)^3, & x\ge 0\\ -(x+2)^3, & x\le 0\end{cases}$

при $x\ge 0$, $y'=3(x-2)^2$.

Уравнение касательной в точке с $x=3$

$y=1+3(x-3)=3x-7$

Касательная пересекает график в точке с абсциссой 0.

Аналогично а) получим, что

$S=\int\limits_0^3(x-2)^3dx-\int\limits_0^3(3x-4)dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{1}-\left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^3+7x\Big|_0^3=\frac{1}{4}-4-\frac{27}{2}+21=17-\frac{53}{4}=\frac{15}{4}$.

4.1. D02. а) $f(x)=(5x-7)^2$.
$f'(x)=10(5x-7)$.

Первообразная $y(x)=\int f(x)=\frac{(5x-7)^3}{15}+C$. Известно, что

$f'\left(\frac{7}{5}\right)=y\left(\frac{7}{5}\right)$, 0=C. То есть, $y(x)=\frac{(15-x)^3}{15}$.

Приравняем $f'(x)$ и $y(x)$: $\frac{(5x-7)^3}{15}=10(5x-7)\Leftrightarrow(5x-7)\left(\frac{(5x-7)^2}{15}-10\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{5}\\(5x-7)^2=150\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{5}\\x=\frac{\pm\sqrt{150}+7}{5}\end{array}\right.$. Это абсциссы всех трех точек пересечения.

Ответ: $\frac{7+\sqrt{150}}{5}$; $\frac{7-\sqrt{150}}{5}$.

б) $f'(x)=(2x-5)^2$.
$f'(x)=4(2x-5)$.

Первообразная $y=\int f(x)=\frac{(2x-5)^3}{6}+C$. Знаем, что $y\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow C=0$.

$y=\frac{(2x-5)^3}{6}$. Найдем все точки пересечения

$\frac{(2x-5)^3}{6}=4(2x-5)\Leftrightarrow(2x-5)\left(\left(\frac{2x-5}{6}\right)^2-4\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\(2x-5)^2=24\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=\frac{\pm2\sqrt{6}+5}{2}\end{array}\right.$. Это абсциссы всех трех точек пересечения.

Ответ: $\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$; $\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$.

4.1. D03. а) $f(x)=x^2+16x+67$.

Первообразная $y(x)=\int f(x)=\frac{x^3}{3}+8x^2+67x+C$.

f(x) не имеет нулей, значит y(x) — экстремумов. То есть максимум и минимум достигается на концах отрезка.

$y_{\min}=y(-8)=-\frac{584}{3}+C=-24\Rightarrow C=170\frac{2}{3}$;

$y_{\max}=y(-5)=-\frac{125}{3}+25\cdot8-67\cdot5+170\frac{2}{3}=-6$.

Ответ: –6.

б) f(x)=x^2+10x+28.

Первообразная $y(x)=\int f(x)=\frac{x^3}{3}+5x^2+28x+C$.

f(x) не имеет нулей $\Rightarrow$ максимум и минимум y(x) достигается на концах отрезка.

$y_{\min}=y(-5)=-\frac{125}{3}+125-140+C=-15\Rightarrow C=\frac{125}{3}$;

$y_{\max}=y(-2)=-\frac{8}{3}+20-56+\frac{125}{3}=3$.

Ответ: 3.

4.1. D04.

а) Условие задачи переписывается в виде y=15x.

Тогда 15x=25x^2-15x+9=f(x);

25x^2-30x+9=0$\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$ — точка, удовлетворяющая условию.

f'(x)=50x-15. Уравнение касательной в точке $x=\frac{3}{5}$:

$y-f\left(\frac{3}{5}\right)=f'\left(\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)$; $f\left(\frac{3}{5}\right)=9$ $f'\left(\frac{3}{5}\right)=15$;

Искомое уравнение y=15x. Ответ: y = 15x.

б) Условие запишем в виде $\begin{cases} y=f(x)=49x^2-14x+4 \\ y=14x \end{cases}$;

14x=49x^2-14x+4$\Leftrightarrow x=\frac{2}{7}$. f'(x)=98x-14;

уравнение касательной в точке $x=\frac{2}{7}$:

$y-f\left(\frac{2}{7}\right)=f'\left(\frac{2}{7}\right)\left(x-\frac{2}{7}\right)$; $f\left(\frac{2}{7}\right)=4$; $f'\left(\frac{2}{7}\right)=14$.

Искомое уравнение y=14x.

Ответ: y = 14x.

4.1. D05.

а) f(x)=x^2-9x+2.

По условию, треугольники равнобедренные, значит, угловой коэффициент касательной 1 или –1.

f'(x)=2x-9. Пусть f'(x)=1 $\Rightarrow$ x=5. Касательная y+18=x-5 $\Rightarrow$ y=x-23.

Площадь треугольника $\frac{23^2}{2}=\frac{529}{2}$; Пусть f'(x)=-1 $\Rightarrow$ x=4.

Касательная y+18=-x+4$\Rightarrow$y=–x–14.

Площадь треугольника $\frac{14^2}{2}=98$.

Ответ: 98 или $\frac{529}{2}$.

б) f(x)=x^2+5x-1. $f'(x)$=2x+5; Пусть $f'(x)$=1 $\Rightarrow$ x=-2.

Касательная y+7=x+2 $\Rightarrow$y=x-5. Площадь треугольника $\frac{5^2}{2}=\frac{25}{2}$.

Пусть $f'(x)$=-1 $\Rightarrow$ x=-3. Касательная y+7=-x-3$\Rightarrow$y=-x-10.

Площадь треугольника $\frac{10^2}{2}=50$. Ответ: $\frac{25}{2}$ или 50.

4.1. D06.

а) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+4x-3$.

$f'(x)$=x^2+2x+4 — тангенс угла наклона.

Минимум $f'(x)$ в точке $-\frac{b}{2a}=-1$; $f'(-1)$=3.

Уравнение касательной y-f(-1)=3(x+1)$\Rightarrow$ $y=3x+2\frac{2}{3}$; $f(-1)=-6\frac{1}{3}$.

Ответ: $y=3x-\frac{10}{3}$.

б) $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+11x+1$. $f'(x)$=x^2-6x+11 — тангенс угла наклона.

Минимум $f'(x)$ (а следовательно, и угла наклона) в точке $-\frac{b}{2a}=3$;

$f'(3)$=2. Уравнение касательной: y-f(3)=2(x-3); f(3)=16.
Ответ: y=2x+10.

4.1. D07.
а) f(x)=x^2+5x+1.

Первообразная: $y_1(x)=\int f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x+C$;

y=x+2 — касательная, угловой коэффициент 1.
Значит, f(x_0)=1, где x_0 — точка касания; $x_0^2+5x_0=0\Rightarrow$ x_0=0 или x_0=-5;
При x_0=0 $y_1(0)$=y(0) $\Leftrightarrow$ C=2.
При x_0=–5 $y_1(-5)$=y(–5) $\Leftrightarrow$ $-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}-5+C=-3$; $C=22\frac{5}{6}$.

Ответ: $\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x+2$; $\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x+22\frac{5}{6}$.
б) f(x)=x^2-5x+5.

Первообразная: $y_1(x)=\int f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+5x+C$;

y=5x-3 — касательная, угловой коэффициент 5.
Значит, f(x_0)=5, где x_0 — точка касания;
$x_0^2-5x_0=0\Leftrightarrow$ x_0=0 или x_0=5.

При x_0=0 $y_1(0)$=y(0) $\Leftrightarrow$ C=-3.

При $x_0=5$ $y_1(5)=y(5) \Leftrightarrow \frac{125}{3}-\frac{125}{2}+25+C=22$; $C=17\frac{5}{6}$

Ответ: $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+5x-3$; $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+5x+17\frac{5}{6}$.

4.1. D08. а) f(x)=-5-2x.

F(x)= $\int f(x)=-5x-x^2+C$; $-5x-x^2+C \geq 3$ может выполняться только при одном значении x если дискриминант уравнения $x^2+5x+(3-C)=0$ нулевой.

D=25-12+4C=0$\Rightarrow$C= $-\frac{13}{4}$. Ответ: F(x)=$-x^2-5x-\frac{13}{4}$.

б) f(x) = 4-x.

F(x)= $\int f(x)=4x-\frac{x^2}{2}+C$; $4x-\frac{x^2}{2}+C\geq 7$ — при одном значении x.

Дискриминант $\frac{x^2}{2}-4x+7-C$ должен быть нулевой.

$\frac{D}{4}=4-\frac{7}{2}+\frac{C}{2}=0 \Rightarrow$ C = –1. Ответ: F(x)= $4x-\frac{x^2}{2}-1$.

4.1. D09. а) $f(x)=x^3-8x+9$.

$f'(x)=3x^2-8$ Уравнение касательной в точке 2:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$; $f(2)=1$; $f'(2)=4$;

$y-1=4x-8 \Leftrightarrow y=4x-7$.

Найдем общие точки: $x^3-8x+9=4x-7$; $x^3-12x+16=0$;

$(x-2)(x^2+2x-8)=0 \Leftrightarrow x=2$; $x=-4$; $x=2$.

Точка x=-4 не является точкой касания, так как $f'(-4)\neq 4$ — угловой коэффициент. Ответ: (2; 1); (–4; –23), не являются.

б) $f(x)=x^3+5x+6$.

$f'(x)=3x^2+5$. Уравнение касательной в точке 1:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$; $f(1)=12$; $f'(1)=8$; $y=8x+4$.

Найдем общие точки: $x^3+5x+6=8x+4$

$x^3-3x+2=0$; $(x-1)(x^2+x-2)=0$; $(x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow x=1$, $x=-2$.

Точка x=-2 не является точкой касания, т.к. $f'(-2)\neq 8$.

Ответ: (1; 12) ; (–2; –12); не являются.

4.1.D10. а) $f(x)=-x^3-6x^2+3$.

$f'(x)=-3x^2-12x$ — достигает максимума при $x=-\frac{b}{2a}$=-2. $f'(-2)=12$.

Уравнение касательной: $y-f(-2)=12(x+2)$; $f(-2)=-13$;

y=12x+11 — искомое уравнение. Ответ: 12x + 11.

б) $f(x)=-x^3+3x^2-5$. $f'(x)=-3x^2+6x$ — достигает максимума при $x=-\frac{8}{29}$=1.

$f(1)=-3$ $f'(1)=3$; Уравнение касательной $y+3=3(x-1)$

y=3x-6 — искомое уравнение. Ответ: 3x – 6.

4.1. D11.

а) $f(x)=\frac{4}{3}x^2-26$.

Первообразная $F(x)=\int f(x)=\frac{4}{9}x^3-26x+C$.

По условию, у графика $F(x)$ ровно 2 точки пересечения с $y=x$.

$x=\frac{4}{9}x^3-26x+C \Leftrightarrow \frac{4}{9}x^3-27x+C=0$. Обозначим $g(x)=-\frac{4}{9}x^3+27x=C$.

Чтобы было 2 решения, необходимо, чтобы одно из них было нулем $g'(x)$;

$g'(x)=-\frac{4}{3}x^2+27$.

$-\frac{4}{3}x^2+27=0$; $x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=-\frac{9}{2}$. $C_1 = g(x_1) = 81$; $C_2 = g(x_2) = -81$.

Ответ: $\frac{4}{9}x^3-26x-81$; $\frac{4}{9}x^3-26x+81$.

б) $f(x)=\frac{3}{4}x^2-11$. Первообразная $F(x)=\int f(x)=\frac{x^3}{4}-11x+C$.

У графика $F(x)$ ровно 2 точки пересечения с $y=x$.

$x=\frac{x^3}{4}-11x+C$; обозначим $g(x)=\frac{-x^3}{4}+12x=C$. Необходимо, чтобы 1 из решений было нулем $g'(x)$;

$g'(x)=-\frac{3}{4}x^2+12$: $-\frac{3}{4}x^2+12=0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

$C_1 = g(x_1) = 32$; $C_2 = g(x_2) = -32$. Ответ: $F(x)=\frac{x^3}{4}-11x+32$; $\frac{x^3}{4}-11x-32$.

4.1. D12. а) $f(x)=(x+1)(x-4)^5$.

F(x) — первообразная. F(x) — многочлен 7-й степени. Его корень $x=4$ является корнем кратности 5 для его производной f(x). Следовательно, это корень кратности не ниже 6 для самой F(x). То есть F(x) имеет вид $F(x)=b(x-4)^6(x-a)$.

Найдем $F'(x)=b(x-4)^6+6b(x-4)^5(x-a)=(x-4)^5\cdot b\cdot(x-4+6x-6a)=$
$=(x-4)^5(7bx-b(6a+4))$.

Сравнивая с f(x), получаем, что $b=\frac{1}{7}$, $a=-\frac{11}{6}$.

a — нуль F(x), единственный, отличный от 4. Ответ: $-\frac{11}{6}$.

б) $f(x)=(x-2)(x-3)^7$. F(x) — многочлен 9-й степени. Его корень 3 имеет кратность не ниже 8, т.е. $F(x)=b(x-3)^8(x-a)$.

$F'(x)=b(x-3)^8+8b(x-3)^7(x-a)=(x-3)^7b(x-3+8x-8a)=(x-3)^7(9bx-b(8a+3))$.

Откуда, $b=\frac{1}{9}$, $a=\frac{15}{8}$ — нуль F. Других нулей нет. Ответ: $\frac{15}{8}$.

§ 2. Рациональные функции

Уровень А.

4.2. A01. а) $x=1$, $x=e$, $y=\frac{4}{3x}$

$S=\int_1^e \frac{4}{3x}dx=\frac{4}{3}\ln x\Big|_1^e=\frac{4}{3}$;

б) x=1, x=e, $y=\frac{5}{2x}$

$S=\int_1^e \frac{5}{2x}dx=\frac{5}{2}\ln x\Big|_1^e=\frac{5}{2}$.

4.2.А02.

а) $f(x)=-\frac{5}{4x}$.

$f'(x)=\frac{5}{4x^2}$.

Уравнение касательной: y-f(-4)=f′(-4)(x+4); $f'(-4)=\frac{5}{64}$.

Ответ: $y=\frac{5}{64}x+\frac{5}{8}$.

б) $f(x)=\frac{4}{5x}$.

$f'(x)=-\frac{4}{5x^2}$. Уравнение касательной: y=f′(2)(x-2)+f(2);

$f(2)=\frac{2}{5}$; $f'(2)=-\frac{1}{5}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$.

4.2. А03. а) $f(x)=\frac{2}{3x^2}$.

$f'(x)=-\frac{4}{3x^3}$.

Уравнение касательной: y=f′(2)(x-2)+f(2); $f(2)=\frac{1}{6}$; $f'(2)=-\frac{1}{6}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$.

б) $f(x)=-\frac{3}{4x^2}$.

$f'(x)=\frac{6}{4x^3}=\frac{3}{2x^3}$.

Уравнение касательной y=f′(-3)(x+3)+f(-3); $f(-3)=-\frac{1}{12}$;

$f'(-3)=-\frac{1}{18}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{18}x-\frac{1}{4}$.

4.2.А04. а) $f(x)=\frac{x^5-x^4+2x^3+2x^2-2x-1}{x^2}$.

$f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$;

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$;

$f'(-3) = 3 \cdot 9 + 6 + 2 + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} = \frac{949}{27}$. Ответ: $\frac{949}{27}$.

б) $f(x)=\frac{3x^5+x^4-4x^3-3x^2+4x-1}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{x^2\left(15x^4+4x^3-12x^2-6x+4\right)-2x\left(3x^5+x^4-4x^3-3x^2+4x-1\right)}{x^4}=$$

$$=\frac{9x^6+2x^5-4x^4-4x^2+2x}{x^4}=\frac{9x^5+2x^4-4x^3-4x+2}{x^3};$$

$f'(-1)=\frac{-9+2+4+4+2}{-1}=-3$. Ответ: –3.

4.2. А05. а) $f(x)=6x-\frac{5}{x}$.

Первообразная F(x)= $\int f(x)=3x^2-5\ln x+C$;

$F(1)=3+C=-2 \Rightarrow C=-5$. Ответ: $F(x)=3x^2-5\ln x-5$.

б) $f(x)=2x+\frac{1}{x}$. Первообразная $F(x)=\int f(x)=x^2+\ln x+C$;

$F(1)=1+C=-5 \Rightarrow C=-6$. Ответ: $F(x)=x^2+\ln x-6$.

4.2. А06. а) $f(x)=\frac{x+7x^2+6}{3x^4}=\frac{1}{3x^3}+\frac{7}{3x^2}+\frac{2}{x^4}$.

$F(x)=\int f(x)=-\frac{1}{6x^2}-\frac{7}{3x}-\frac{2}{3x^3}+C$;

$F(1)=\frac{13}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6}-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}+C=\frac{13}{6} \Rightarrow C=\frac{16}{3}$,

$F(x)=-\frac{1}{6x^2}-\frac{7}{3x}-\frac{2}{3x^3}+\frac{16}{3}$. Ответ: $F(x)=-\frac{1}{6x^2}-\frac{7}{3x}-\frac{2}{3x^3}+\frac{16}{3}$.

б) $f(x)=\frac{4x+5x^2+1}{5x^4}=\frac{4}{5x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{5x^4}$.

$F(x)=\int f(x)=-\frac{2}{5x^2}-\frac{1}{x}\ -\frac{1}{15x^3}+C$;

$F(1)=\frac{7}{15} \Rightarrow -\frac{2}{5}-1-\frac{1}{15}+C=\frac{7}{15} \Rightarrow C=\frac{29}{15}$.

Ответ: $F(x)=-\frac{2}{5x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{15x^3}+\frac{29}{15}$ **. Уровень В.**

4.2.В01. а) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

$F(x)=\int\dfrac{3}{2x+1}dx=\dfrac{3}{2}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+C$

т.к. $F(0)=7$, то $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+C=7$

т.е. $C=7-\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{2}$

Отсюда $F(x)=\dfrac{3}{2}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{2}+7=\dfrac{3}{2}\ln(2x+1)+7$

На области определения функции определена и первообразная.

б) $f(x)=\dfrac{2}{3x+1}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

$F(x)=\int\dfrac{2}{3x+1}=\dfrac{2}{3}\ln\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+C$

т.к. $F(0)=6$, то $\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{1}{3}+C=6$

Отсюда $C=6-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{1}{3}$, тогда

$F(x)=\dfrac{2}{3}\ln(3x+1)+6$, очевидно, на области определения функции первообразная тоже определена.

4.2. В02. а) $f(x)=\dfrac{7+2x}{x}=2+\dfrac{7}{x}$.

$F(x)=2x+7\ln x+C$;

$F(8)=16+21\ln 2+C=15\Rightarrow C=-1-21\ln 2$;

$F(11)=22+7\ln 11-1-7\ln 8=21+7\ln\dfrac{11}{8}$. Ответ: $21+7\ln\dfrac{11}{8}$.

б) $f(x)=\dfrac{3+8x}{x}$.

$F(x)=8x+3\ln x+C$; $F(4)=32+6\ln 2+C=7\Rightarrow C=-25-6\ln 2$;

$F(7)=56+3\ln 7-25-3\ln 4=31+3\ln\dfrac{7}{4}$. Ответ: $31+3\ln\dfrac{7}{4}$.

4.2 В03. а) $f(x)=\dfrac{7x^2+4}{x^2}$.

$F(x)=7x-\dfrac{4}{x}+C$;

$F(0{,}25)=1{,}75-16+C=17\Rightarrow C=31{,}25$. Ответ: $F(x)=7x-\dfrac{4}{x}+31{,}25$.

б) $f(x)=\frac{9x^2-2}{x^2}=9-\frac{2}{x^2}$.

$F(x)=9x+\frac{2}{x}+C$.

$F(0,5)=9\cdot 0,5+\frac{2}{0,5}+C=-5 \Rightarrow C=-13,5$. Ответ: $F(x)=9x+\frac{2}{x}-13,5$.

4.2. В04. а) $f(x)=\frac{9x^2+1}{x^2}=9+\frac{1}{x^2}$. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$.

Пусть x_0 — точка касания $\Rightarrow$ $f'(x_0)=-\frac{2}{x_0^3}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow x_0=-2$.

Уравнение: $y=\frac{1}{4}(x+2)+f(-2)$; $f(-2)=9\frac{1}{4}$.

Ответ: $y=\frac{1}{4}x+9\frac{3}{4}$.

б) $f(x)=\frac{7x^2+2}{x^2}=7+\frac{2}{x^2}$. $f'(x)=-\frac{4}{x^3}$.

x_0 — точка касания $\Rightarrow$ $f'(x_0)=-\frac{4}{x_0^3}=\frac{1}{16} \Rightarrow x_0=-4$.

Уравнение $y=\frac{1}{16}(x+4)+f(-4)$; $f(-4)=7\frac{1}{8}$. Ответ: $y=\frac{1}{16}x+7\frac{3}{8}$.

4.2. В05.

а) $f(x)=\frac{7x+12}{x}=7+\frac{12}{x}$.

$f'(x)=-\frac{12}{x^2}$.

Приравняем $f'(x_0)=-\frac{12}{x_0^2}=-3 \Rightarrow x_0=2$, или $x_0=-2$.

Уравнения: $y=-3(x-2)+f(2) \Rightarrow y=-3x+19$ и $y=-3(x+2)+f(-2) \Rightarrow y=-3x-5$.
Ответ: $y=-3x-5$.

б) $f(x)=\frac{5x-9}{x}=5-\frac{9}{x}$.

$f'(x)=\frac{9}{x^2}$.

Приравняем $f'(x_0)=\frac{9}{x_0^2}=1 \Rightarrow x_0=3$ или $x_0=-3$.

Уравнения $y=(x+3)+f(-3) \Rightarrow y=x+11$ и $y=(x-3)+f(3) \Rightarrow y=x-1$.
Ответ: $y=x+11$; $y=x-1$.

4.2. В06.

а) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}-1$.

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=1-\frac{4}{(x-2)^2}.$$

Уравнение: $y=f'\left(\frac{7}{3}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)+f\left(\frac{7}{3}\right)$; $f'\left(\frac{7}{3}\right)=-35$; $f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{46}{3}$;

$y=-35x+\frac{245}{3}+\frac{46}{3}=-35x+97$. Ответ: y=–35x+97.

б) $f(x)=\frac{x^2}{x-3}+3$.

$$f'(x)=\frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}=1-\frac{9}{(x-3)^2}.$$

Уравнение: $y=f'\left(\frac{10}{3}\right)\left(x-\frac{10}{3}\right)+f\left(\frac{10}{3}\right)$; $f'\left(\frac{10}{3}\right)=-80$;

$f\left(\frac{10}{3}\right)=36\frac{1}{3}$; $y=(-80)\left(x-\frac{10}{3}\right)+\frac{109}{3}=-80x+303$.

Ответ: y = –80x + 303.

4.2. B07. а) $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}+2$.

$$f'(x)=\frac{5x^2+5-10x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-5x^2+5}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Уравнение: $y=f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3}\right)$; $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-\frac{5}{9}+5}{\frac{100}{81}}=3{,}6$; $f\left(-\frac{1}{3}\right)=0{,}5$.

Ответ: y=3,6x+1,7.

б) $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}+3$.

$$f'(x)=\frac{4x^2+16-8x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{-4x^2+16}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Уравнение: $y=f'\left(-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)+f\left(-\frac{2}{3}\right)$; $f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0{,}72$; $f\left(-\frac{2}{3}\right)=2{,}4$.

Ответ: y=0,72x+2,88.

4.2. B08.

а) $f(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+5x$.

$f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}+5$;

f(–1)=–4–1–5=–10; f′(–1)=–4–2+5=–1. Уравнение: y=–(x+1)–10; y=–x–11.

Ответ: y = –x – 11.

б) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+4x$.

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{10}{x^3}+4$; f(1)=11; f$'$(1)=–8.

Уравнение: y=–8(x–1)+11, т.е. y=–8x+19.
Ответ: –8x + 19.

4.2.В09. а) $f(x)=\frac{2-3x}{6x^2}+5x=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{2x}+5x$. $f'(x)=-\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}+5$;

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}+1-\frac{5}{2}=-\frac{1}{6}$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{3}+7=\frac{37}{3}$.

Уравнение $y=\frac{37}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}$. Ответ: $y=\frac{37}{3}x+6$.

б) $f(x)=\frac{2x+3}{6x^2}-5x=\frac{1}{3x}+\frac{1}{2x^2}-5x$. $f'(x)=-\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{x^3}-5$;

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-1+\frac{9}{2}+\frac{5}{3}=\frac{31}{6}$; $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-3+27-5=19$;

Уравнение: $y=19\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{31}{6}$. Ответ: $y=19x+\frac{23}{2}$.

4.2.В10. а) $f(x)=\frac{4x^2-5x-1}{x}=4x-5-\frac{1}{x}$.

$f'(x)=4+\frac{1}{x^2}$; $f(-2)=-8-5+\frac{1}{2}=-12{,}5$; $f'(-2)$=4,25.

Уравнение: y=4,25(x+2)–12,5; y=4,25x–4. Ответ: y = 4,25x – 4.

б) $f(x)=\frac{2x^2-4x-3}{x}=2x-4-\frac{3}{x}$.

$f'(x)=2+\frac{3}{x^2}$; f(–3)=–10+1=–9 $f'(-3)=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$.

Уравнение: $y=2\frac{1}{3}(x+3)-9$, т.е. $y=2\frac{1}{3}x-2$. Ответ: $y=2\frac{1}{3}x-2$.

4.2.В11. а) $f(x)=\frac{2x^3+x^2+5x-1}{x}=2x^2+x+5-\frac{1}{x}$.

$f'(x)=4x+1+\frac{1}{x^2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+5-2=4$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2+1+4=7$.

Уравнение: $y=7\left(x-\frac{1}{2}\right)+4 \Leftrightarrow y=7x+\frac{1}{2}$. Ответ: y = 7x + $\frac{1}{2}$.

б) $f(x)=\frac{3x^3+2x^2-5x-3}{x}=3x^2+2x-5-\frac{3}{x}$.

$f'(x)=6x+2+\frac{3}{x^2}$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-5-9=-13$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)=2+2+27=31$.

Уравнение: $y = 31\left(x - \frac{1}{3}\right) - 13 \Leftrightarrow y = 31x - \frac{70}{3}$. Ответ: $y = 31x - \frac{70}{3}$.

4.2.B12.

а) $x=e$, $y=3x$, $y = \frac{3}{x}$

Точка пересечения $y = 3x$ и $y = \frac{3}{x}$ есть при $x=1$.

Тогда $S = \int_1^e 3xdx - \int_1^e \frac{3}{x}dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_1^e - 3\ln x\Big|_1^e = \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2} - 3 = \frac{3e^2 - 9}{2}$;

б) $x=e$, $y=2x$, $y = \frac{2}{x}$

Точка пересечения $y = 2x$ и $y = \frac{2}{x}$ имеет абсциссу 1.

Тогда $S = \int_1^e 2xdx - \int_1^e \frac{2}{x}dx = x^2\Big|_1^e - 2\ln x\Big|_1^e = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3$.

Уровень C.

4.2.C01. а) $f(x) = -\frac{12}{x^2} - 1$.

$f'(x) = \frac{24}{x^3}$. У прямой $y = \frac{1}{9}x$ угловой коэффициент $\frac{1}{9}$.

Решим $f'(x_0) = \frac{1}{9}$. $\frac{24}{x_0^3} = \frac{1}{9} \Rightarrow x_0 = 6$; $f(6) = -1\frac{1}{3}$ $f'(6) = \frac{1}{9}$;

Касательная $y = \frac{1}{9}(x-6) - 1\frac{1}{3} = \frac{1}{9}x - 2$.

Расстояние от начала координат до касательной найдем как высоту пря–моугольного треугольника, вершинами которого являются начало координат и точки пересечения касательной с осями координат. Если a, b — катеты, c — гипотенуза, то высота: $d = \frac{a \cdot b}{c}$. Точки пересечения: (0; –2) и (18; 0).

$d = \frac{2 \cdot 18}{\sqrt{2^2 + 18^2}} = \frac{18}{\sqrt{82}}$.

Ответ: $\frac{18}{\sqrt{82}}$.

б) $f(x) = \frac{8}{x^2} + 3$.

$f'(x) = -\frac{16}{x^3}$; У прямой $\frac{1}{4}x$ угловой коэффициент $\frac{1}{4}$.

Решим $f'(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{16}{x_0^3} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = -4$; $f(-4)=3,5$; $f'(-u)=-0,25$.

Касательная y=0,25(x+4)+3,5=0,25x+4,5.

Точки пересечения касательной с осями координат: $\left(0;\ \frac{9}{2}\right)$ и (–18; 0). Расстояние до начала координат: $d = \frac{\frac{9}{2}\cdot 18}{\sqrt{\frac{81}{4}+18^2}} = \frac{18}{\sqrt{17}}$. Ответ: $\frac{18}{\sqrt{17}}$.

4.2.C02.

а) $f(x) = \frac{4}{9x^2+1} - 1$.

$f'(x) = -\frac{4\cdot 18x}{\left(9x^2+1\right)^2} = -\frac{72x}{\left(9x^2+1\right)^2}$;

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$; $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{\frac{72}{3}}{4} = 6$.

Касательная $y(x) = 6\left(x+\frac{1}{3}\right)+1 = 6x+3$.

Решим $f(x) = y(x) \Leftrightarrow \frac{4}{9x^2+1} - 1 = 6x+3$;

$\frac{-\left(9x^2-3\right)}{9x^2+1} = 6x+3 \Leftrightarrow \frac{9x^2-3+54x^3+27x^2+6x+3}{9x^2+1} = 0$;

$54x^3+36x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(9x^2+6x+1)=0 \Leftrightarrow x=0;\ x = -\frac{1}{3}$;

$f(0)=3$ $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$.

Ответ: (0; 3); $\left(-\frac{1}{3};\ 1\right)$.

б) $f(x) = -\frac{6}{4x^2+1}+1$. $f'(x) = \frac{6\cdot 8x}{\left(4x^2+1\right)^2} = \frac{48x}{\left(4x^2+1\right)^2}$;

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$;

$y(x) = -6\left(x+\frac{1}{2}\right)-1 = -6x-5$ — уравнение касательной.

Решим $f(x) = y(x): 1-\frac{6}{4x^2+1} = -6x-5$;

$\frac{4x^2+1+24x^3+20x^2+6x+4-5}{4x^2+1} = 0$;

$24x^3+24x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)^2=0$.

Отсюда, x=0, $x=-\frac{1}{2}$; f(0)= –5; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$. Ответ: (0; –5), $\left(-\frac{1}{2};\ \ -2\right)$.

4.2.C03. а) $f(x)=-\frac{1}{x}+3$.

$f^{/}(x)=\frac{1}{x^2}$; $f^{/}$(1)=1 f(1)=2;

Уравнение прямой: y(x)=x–1+2=x+1. Расстояние от начала координат $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $f(x)=-\frac{4}{x}-3$.

$f^{/}(x)=\frac{4}{x^2}$; $f^{/}$(1)=4; f(1)=–7.

Уравнение прямой: y(x)=4(x–1)–7=4x–11. Расстояние от начала координат: $\frac{11}{\sqrt{17}}$.

Ответ: $\frac{11}{\sqrt{17}}$.

4.2. C04. а) $f(x)=\frac{1}{x}$.

$f^{/}(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f^{/}\left(-\frac{1}{3}\right)=-9$; $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-3$.

Уравнение прямой: $y=-9\left(x+\frac{1}{3}\right)-3=-9x-6$. Прямая пересекает оси в точках (0; –6) и $\left(-\frac{2}{3};\ \ 0\right)$. Площадь треугольника: $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{2}{3}=2$.

Ответ: 2.

б) $f(x)=-\frac{1}{x}$.

$f^{/}(x)=\frac{1}{x^2}$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=-3$; $f^{/}\left(\frac{1}{3}\right)=9$.

Уравнение прямой $y=9\left(x-\frac{1}{3}\right)+3=9x-6$. Прямая пересекает оси в точках (0; –6) и $\left(\frac{2}{3};\ \ 0\right)$. Площадь треугольника $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{2}{3}=2$. Ответ: 2.

4.2.C05. а) $f(x)=-\frac{5}{x^2}$, $5f(x)+4F(x)+17=0$, $x\in(0,+\infty)$.

Найдем первообразную, $F(x)=\int\left(-\frac{5}{x^2}\right)dx=\frac{5}{x}+C$, т.к. F(1)=0, $\frac{5}{1}+C=0$ то C=–5 т.е. $F(x)=\frac{5}{x}-5$.

Подставвим в уравнение, получим

$-\frac{25}{x^2}+\frac{20}{x}-20+17=0$, $3x^2$–$20x$+25=0, тогда x_1=5, $x_2=\frac{5}{3}$;

б) $f(x)=\frac{6}{x^2}$, $x\in(-\infty, 0)$, $6f(x)$–5F(x)–26=0

$F(x)=\int\left(-\frac{5}{x^2}\right)dx=\frac{5}{x}+C$

$F(x)=\int\frac{6}{x^2}dx=-\frac{6}{x}+C$, т.к. F(–1)=0, то

6+C=0 т.е. C=–6 и $F(x)=-\frac{6}{x}-6$

Подставвим в уравнение, получим

$\frac{36}{x^2}+\frac{30}{x}+30-26=0$, $4x^2$+$30x$+36=0

Итак, x_1=–6, $x_2=-\frac{3}{2}$.

4.2.С06. а) $f(x)=\frac{x-3}{x-2}$ $\quad g(x)=\frac{x-2}{x-3}$.

Найдем точки пересечения: $\frac{x-3}{x-2}=\frac{x-2}{x-3}\Leftrightarrow\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=x-2\\ x-3=2-x;\quad x\neq 2;\quad x\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow x=2{,}5$;

$f'(x)=\frac{x-2-(x-3)}{(x-2)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}$;

f′(2,5)=4; f(2,5)=–1.

Уравнение касательной: y=4(x–2,5)–1. Ответ: y=4x–11.

б) $f(x)=\frac{x+3}{x+5}$; $g(x)=\frac{x+5}{x+3}$. Найдем точки пересечения:

$\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+5}{x+3}=\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+3=x+5\\ x+3=-x-5\end{array}\right.\\ x\neq-3;\quad x\neq-5\end{cases}\Leftrightarrow x=-4$;

$f'(x)=\frac{x+5-(x+3)}{(x+5)^2}=\frac{2}{\left(x+5\right)^2}$ f′(–4)=2; f(–4)=–1.

Уравнение касательной y=2(x+4)–1. Ответ: y=2x+7.

4.2.С07. а) $f(x)=\frac{x^2-28}{x}$; y=–6x.

Найдем точки пересечения $\frac{x^2-28}{x}=-6x\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2=28\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm 2$.

$f'(x) = \frac{2x^2 - x^2 + 28}{x^2} = \frac{x^2 + 28}{x^2} = 1 + \frac{28}{x^2}$.

Для точки x=2: $f'(2) = 1 + 7 = 8$; $f(2)=-12$.

Уравнение касательной: y = 8(x – 2) – 12; y = 8x – 28.

Для точки x=–2: f'(–2) = 8; f(–2) = 12.

Уравнение касательной: y = 8(x + 2) + 12; y = 8x + 28.

Ответ: y = 8x – 28; y = 8x + 28.

б) $f(x) = \frac{x^2 - 48}{x} = x - \frac{48}{x}$; $y=-2x$.

Найдем точки пересечения $\frac{x^2 - 48}{x} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 48 \\ x \neq 0 \end{cases}$, x = ±4;

$f'(x) = 1 + \frac{48}{x^2}$.

Для точки x=4: $f'(4)=4$; f(4)=–8.

Уравнение касательной: y=4(x–4)–8. y=4x–24.

Для точки x=–4: f'(–4)=4; f(–4)=8.

Уравнение касательной: y=4(x+4)+8 y=4x+24. Ответ: 4x + 24; 4x – 24.

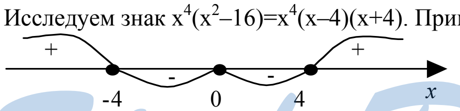
4.2.C08.

а) $f(x) = \frac{x^6 - 16x^4}{x^2 - 5x + 105}$.

Первообразная возрастает там, где ее производная — то есть f(x) положительна, убывает — там где отрицательна.

$\frac{x^6 - 16x^4}{x^2 - 5x + 105} = \frac{x^4\left(x^2 - 16\right)}{x^2 - 5x + 105}$. Знаменатель положителен, т.к. его D<0.

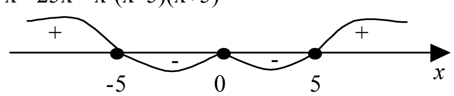
Исследуем знак $x^4(x^2-16)=x^4(x-4)(x+4)$. Применим метод интервалов:



Ответ: первообразная возрастает на (–∞; –4] и на [4; +∞), убывает на [–4; 4].

б) $f(x) = \frac{x^6 - 25x^4}{x^2 + 2x + 98}$.

Пусть F(x) — первообразная, f(x) — производная F(x). Исследуем промежутки её знакопостоянства. Знаменатель положителен, т.к. его D<0. Исследуем числитель $x^6-25x^4=x^4(x-5)(x+5)$



Ответ: F(x) возрастает на (–∞; –5] и [5; +∞), убывает на [–5; 5].

4.2.C09.

а) $f(x) = \frac{3x^2 + 7}{x} = 3x + \frac{7}{x}$.

Первообразная $F(x)=\int f(x)=\frac{3}{2}x^2+7\ln x+C$;

$F(x)=F(5)\Leftrightarrow\frac{3}{2}x^2+7\ln x+C=\frac{75}{2}+7\ln 5+C$; $\frac{3}{2}x^2=-7\ln x+\frac{75}{2}+7\ln 5$.

Очевидно, что x=5 — корень. Других нет, т.к. слева возрастающая при $x\in(0;+\infty)$ функция, а справа убывающая. Ответ: x = 5.

б) $f(x)=\frac{5x^2+4}{x}=5x+\frac{4}{x}$.

Первообразная: $F(x)=\int f(x)=\frac{5}{2}x^2+4\ln x$ при $x\in(0;+\infty)$;

$F(x)=F(2)\Leftrightarrow\frac{5}{2}x^2+4\ln x+C=\frac{20}{2}+4\ln 2+C$.

Очевидно, что x=2 — корень. Других нет, т.к. в уравнении слева стоит возрастающая при $x\in(0;+\infty)$ функция, а справа константа.
Ответ: x = 5.

4.2.С10.

а) $f(x)=-\frac{16}{x}$.

$f'(x)=\frac{16}{x^2}$; f(–2)=8; f′(–2)=4.

Уравнение касательной y=4(x+2)+8=4x+16. Эта прямая пересекает оси в точках (0; 16) и (–4; 0). Расстояние между ними: $S=\sqrt{16+256}=4\sqrt{17}$.

Ответ: $4\sqrt{17}$.

б) $f(x)=-\frac{6}{x}$.

$f'(x)=\frac{6}{x^2}$;

f(–1)=6; f′(–1)=6. Уравнение касательной y=6(x+1)+6=6x+12. Эта прямая пересекает оси в точках (0; 12) и (–2; 0). Расстояние между ними $S=\sqrt{4+144}=2\sqrt{37}$. Ответ: $2\sqrt{37}$.

4.2.С11. а) $y=-\frac{x}{2}$, $y=\frac{4}{x^2}$ – общая точка (–2; 1).

$$S=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{4}{x^2}-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{x}{2}\right)dx=\left(-\frac{4}{x}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=$$

$=4+\frac{1}{4}-(2+1)=1,25$. Ответ: 1,25;

б) $y=\frac{x}{9}$, $y=\frac{3}{x^2}$ – общая точка $\left(3;\frac{1}{3}\right)$

$$S=\int_{2}^{3}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{x}{9}\right)dx=\left(-\frac{3}{x}-\frac{x^2}{18}\right)\Bigg|_{2}^{3}=-1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$$ Ответ: $\frac{2}{9}$.

4.2.C12.

а) $f(x)=3x-\frac{4}{x}$.

$f'(x)=3+\frac{4}{x^2}$ $f'\left(-\frac{2}{3}\right)=12$; $f\left(-\frac{2}{3}\right)=-2+6=4$.

Уравнение касательной: $y=12\left(x+\frac{2}{3}\right)+4=12x+12$. Эта прямая пересекает оси в т. (0; 12) и (–1;0). Площадь искомого треугольника: $S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 1=6$.

Ответ: 6.

б) $f(x)=4x-\frac{2}{x}$. $f'(x)=4+\frac{2}{x^2}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)=12$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=2-4=-2$.

Уравнение касательной $y=12\left(x-\frac{1}{2}\right)-2=12x-8$. Эта прямая пересекает оси в т. (0; –8) и $\left(\frac{2}{3};\ \ 0\right)$. Площадь искомого треугольника: $S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Уровень D.

4.2. D01.

а) $y=\dfrac{5}{x-\dfrac{81}{x+\dfrac{81}{x}}}=\dfrac{5}{x-\dfrac{81x}{x^2+81}}=\dfrac{5\left(x^2+81\right)}{x^3}$.

Найдем $y'(x)=\frac{10x^4-15x^4-1215x^2}{x^6}=\frac{-5x^2-1215}{x^4}$.

Искомые абсциссы — те, производная $y'(x)$ в которых равна $-\frac{14}{135}$.

$\frac{-5x^2-1215}{x^4}=-\frac{14}{135}$;

$\begin{cases}\frac{14}{135}x^4-5x^2-1215=0 \\ x\neq 0\end{cases}$;

D=23^2; $x_1^2=135$; $x_2^2=-\frac{1215}{14}<0$, чего быть не может. Итак x^2=135. Значит, $x=\sqrt{135}=3\sqrt{15}$ и $x=-3\sqrt{15}$ — искомые абсциссы.

Ответ: $3\sqrt{15}$, $-3\sqrt{15}$.

б) $\dfrac{9}{x-\dfrac{64}{x+\dfrac{64}{x}}}=\dfrac{9}{x-\dfrac{64x}{x^2+64}}=\dfrac{9x^2+576}{x^3}$.

Найдем $y^/(x)=\dfrac{18x^4-17x^4-1728x^2}{x^6}=\dfrac{-9x^2-1728}{x^4}$.

Искомые абсциссы — те, производная y$^/$(x) в которых равна $-\dfrac{17}{216}$.

$\dfrac{-9x^2-1728}{x^4}=-\dfrac{17}{216}$; $\begin{cases}\dfrac{17}{216}x^4-9x^2-1728=0\\ x\neq 0\end{cases}$;

D=25^2; $x_1^2=276$; $x_2^2=-\dfrac{16\cdot 216}{34}<0$.

Итак, x^2=216, значит $x=6\sqrt{6}$ и $x=-6\sqrt{6}$ — искомые абсциссы.

Ответ: $6\sqrt{6}$; $-6\sqrt{6}$.

4.2.D02. а) $f(x)=-\dfrac{1}{6x}$.

$f^/(x)=\dfrac{1}{6x^2}$. Пусть x_0 — точка касания.

Уравнение касательной: $y=f^/(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=\dfrac{1}{6x_0^2}x-\dfrac{1}{6x_0}-\dfrac{1}{6x_0}=\dfrac{x}{6x_0^2}-\dfrac{1}{3x_0}$.

Касательная проходит через $\left(-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}\right)$, значит $\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{24x_0^2}-\dfrac{1}{3x_0}$;

$\dfrac{12x_0^2+8x_0+1}{24x_0^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}12x_0^2+8x_0+1=0\\ x_0\neq 0\end{cases}$.

Решаем $12x_0{}^2+8x+1=0$; $\dfrac{D}{4}=16-12=4$;

$x_0=\dfrac{-4\pm 2}{12}$; $x_0=-\dfrac{1}{2}$ или $x_0=-\dfrac{1}{6}$.

Уравнения касательных: $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$ и y=6x+2.

Ответ: $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$; y = 6x + 2.

б) $f(x)=\dfrac{2}{3x}$.

$f^/(x)=-\dfrac{2}{3x^2}$.

Пусть x_0 — точка касания.
Уравнение касательной: $y=f^/(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=-\frac{2x}{3x_0^2}+\frac{2}{3x_0}+\frac{2}{3x_0}=-\frac{2}{3x_0^2}x+\frac{4}{3x_0}$.

Касательная проходит через (1; 0,5); $0,5=-\frac{2}{3x_0^2}+\frac{4}{3x_0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5x_0^2-4x_0+2=0 \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$.

Решаем $1,5x_0^2-4x_0+2=0$; $\frac{D}{4}=4-3=1 \Rightarrow x_0=2$ или $x_0=\frac{2}{3}$.

Уравнения касательных: $y=-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$ и $y=-\frac{3}{2}x+2$.

Ответ: $y=-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$; $y=-\frac{3}{2}x+2$.

4.2.D03. а) $f(x)=\frac{x^2-11x+28}{x^2}=\frac{(x-4)(x-7)}{x^2}$.

При x≤4 f(x)≥0, значит F(x) возрастает.
При x∈[4; 7] f(x)≤0, значит F(x) убывает
При x∈[7; +∞) f(x)≥0, значит F(x)возрастает.
Исходя из этого, заключаем, что на отрезке [3; 7] наибольшее значение F(x) достигает в x=4.

$F(x)=\int f(x)=\int\left(1-\frac{11}{x}+\frac{28}{x^2}\right)dx=x-11\ln x-\frac{28}{x}+C$.

Известно, что F(4)=1⇒4–11ln4–7+C=1⇒C=4+11ln4.

Ответ: $F(x)=x-11\ln x-\frac{28}{x}+4+11\ln 4$.

б) $f(x)=\frac{x^2-10x+24}{x^2}=\frac{(x-4)(x-6)}{x^2}=1-\frac{10}{x}+\frac{24}{x^2}$.

При x≤4 f(x)≥0, значит F(x) возрастает.
При x∈[4; 6] f(x)≤0, значит F(x) убывает.
При x∈[6; +∞) f(x)≥0, значит F(x) возрастает.
Исходя из этого, заключаем, что на отрезке [1; 6] наибольшее значение F(x) достигает в x=4.

$F(x)=\int f(x)=x-10\ln x-\frac{24}{x}+C$.

Известно, что F(4)=–2⇒4–10ln4–6+C=–2 C=10ln4.

Ответ: $F(x)=x-10\ln x-\frac{24}{x}+10\ln 4$.

4.2.D04. а) $f(x)=\frac{5x-3}{x-1}=5+\frac{2}{x-1}$. $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$.

Пусть x_0 — точка касания.
Уравнение касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=\frac{-2x}{(x_0-1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-1)^2}+5+\frac{2}{x_0-1}$.

Эта прямая проходит через (–3; 5);

$5=\frac{6}{(x_0-1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-1)^2}+5+\frac{2}{x_0-1}$; $\frac{2x_0+6+2x_0-2}{(x_0-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}4x_0+4=0\\ x_0\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x_0=-1$.

Уравнение касательной: $y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+5-1=-\frac{x}{2}+3{,}5$.

Ответ: $y=-\frac{x}{2}+3{,}5$.

б) $f(x)=\frac{4x+1}{x+2}=4-\frac{7}{x+2}$. $f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}$; Пусть x_0 — точка касания.

Уравнение касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=\frac{7x}{(x_0+2)^2}-\frac{7x_0}{(x_0+2)^2}+4-\frac{7}{x_0+2}$.

Эта прямая проходит через (2; 4).

$4=\frac{14}{(x_0+2)^2}-\frac{7x_0}{(x_0+2)^2}+4-\frac{7}{x_0+2}$; $\frac{14-7x_0-7x_0-14}{(x_0+2)^2}=0$; $\frac{-14x_0}{(x_0+2)^2}=0 \Rightarrow x_0=0$.

Уравнение касательной: $y=\frac{7}{4}\cdot x-\frac{14}{16}+4-\frac{7}{2}$. Ответ: $y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$.

4.2.D05. а) $f(x)=\frac{4}{x^2+7}$. $f'(x)=\frac{-8x}{(x^2+7)^2}$.

Пусть x_0 — точка касания.

Уравнение касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=\frac{-8x_0(x-x_0)+4x_0^2+28}{(x_0^2+7)^2}$. Прямая проходит через (–5; 0). Значит

$\frac{-8x_0(-5-x_0)+4x_0^2+28}{(x_0^2+7)^2}=0$; $12x_0^2+40x_0+28=0$;

$12x_0^2+10x_0+7=0 \Rightarrow x_0=-1$, $x_0=-\frac{7}{3}$;

При $x_0=-1$ уравнение касательной: $y=\frac{8(x+1)+4+28}{64}=\frac{x}{8}+\frac{5}{8}$.

При $x_0=-\frac{7}{3}$ $y=\frac{\frac{56}{3}\left(x+\frac{7}{3}\right)+4\cdot\frac{49}{9}+28}{\left(\frac{49}{9}+7\right)^2}=\frac{\frac{56}{3}x+\frac{840}{9}}{\frac{12544}{81}}=\frac{27x}{224}+\frac{135}{224}$.

Ответ: $y=\frac{x}{8}+\frac{5}{8}$ и $y=\frac{27x}{224}+\frac{135}{224}$.

б) $f(x)=\frac{3}{x^2-11}$. $f'(x)=\frac{-6x}{(x^2-11)^2}$. Пусть x_0 — точка касания. Уравнение касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=\dfrac{-6x_0\left(x-x_0\right)+3x_0^2-33}{\left(x_0-11\right)^2}$.

Прямая проходит через точку. (–1; 0);

$\dfrac{-6x_0\left(-4-x_0\right)+3x_0^2-33}{\left(x_0^2-11\right)^2}=0$;

$\begin{cases}9x_0^2+24x_0-33=0\\x_0^2\neq 11\end{cases}$; $\begin{cases}3x_0^2+8x_0-11=0\\x_0^2\neq 11\end{cases}$; $x_0=1$ или $x_0=-\dfrac{11}{3}$.

При $x_0=1$: $y=\dfrac{-6\left(x-1\right)+3-33}{100}=-\dfrac{3}{50}x-\dfrac{6}{25}$.

При $x_0=-\dfrac{11}{3}$: $y=\dfrac{22\left(x+\dfrac{11}{3}\right)+\dfrac{121}{3}-33}{\left(\dfrac{121}{9}-11\right)^2}=\dfrac{22\left(x+\dfrac{11}{3}\right)+\dfrac{22}{3}}{\dfrac{22\cdot 22}{81}}=-\dfrac{81}{22}x+\dfrac{162}{11}$.

Ответ: y=0,6x–0,24 и $y=\dfrac{81}{22}x+\dfrac{162}{11}$.

4.2D06.

а) $f(x)=\dfrac{4x}{4x+\dfrac{81}{4x-\dfrac{81}{4x}}}=\dfrac{4x}{4x+\dfrac{324x}{16x^2-81}}=\dfrac{4x\left(16x^2-81\right)}{64x^3}$.

$f(x)=\dfrac{16x^2-81}{16x^2}=1-\dfrac{81}{16x^2}$. Первообразная $F(x)=x+\dfrac{81}{16x}+C$.

Подставим точку (81; 81): $81=81+\dfrac{81}{16\cdot 81}+C$; $C=-\dfrac{1}{16}$.

Ответ: $F(x)=x+\dfrac{81}{16x}-\dfrac{1}{16}$.

б) $f(x)=\dfrac{7x}{7x+\dfrac{36}{7x-\dfrac{36}{7x}}}=\dfrac{7x}{7x+\dfrac{252x}{49x^2-36}}=\dfrac{7x\left(49x^2-36\right)}{343x^3}=1-\dfrac{36}{49x^2}$.

Первообразная: $F(x)=x+\dfrac{36}{49x}+C$.

Подставим точку (36; 36): $36=36+\dfrac{36}{49\cdot 36}+C\Rightarrow C=-\dfrac{1}{49}$.

Ответ: $F(x)=x+\dfrac{36}{49x}-\dfrac{1}{49}$.

4.2.D07. а) $f(x)=\dfrac{16}{x-2}$. $f^{/}(x)=-\dfrac{16}{\left(x-2\right)^2}$.

Пусть x_0 — точка касания.
Тогда $f'(x_0)=tg135°$;

$$-\frac{16}{(x_0-2)^2}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases}(x_0-2)^2=16\\ x_0\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=6\\ x_0=-2\end{cases}.$$

При $x_0=6$, уравнение касательной $y=-(x-6)+f(6)=-(x-6)+4$; $y=-x+10$.
При $x_0=-2$, уравнение касательной $y=-(x-2)+f(-2)=-x-2-4$ $y=-x-6$.
Ответ: $y = -x + 10$; $y = -x - 6$.

б) $f(x)=-\frac{9}{x-4}$. $f'(x)=\frac{9}{(x-4)^2}$.

Пусть x_0 — точка касания. Тогда $f'(x_0)=tg45°$.

$$\frac{9}{(x_0-4)^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}(x_0-4)^2=9\\ x_0\neq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=7\\ x_0=1\end{cases};$$

При $x_0=7$ уравнение касательной $y=x-7+f(7)=x-7-3$ $y=x-10$.
При $x_0=1$ уравнение касательной $y=x-1+f(1)=x-1+3$ $y=x+2$.
Ответ: $y = x - 10$; $y = x + 2$.

4.2.D08.

а) $f(x)=\frac{5}{x}$. $f'(x)=-\frac{5}{x^2}$. Угловой коэффициент прямой $y=-4x$ равен -4.

Если x_0 — точка касания, то $f'(x_0)=-4$.

$$-\frac{5}{x_0^2}=-4 \Rightarrow x_0=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot$$

При $x_0=\frac{\sqrt{5}}{2}$ уравнение касательной: $y=-4\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=-4x+4\sqrt{5}\cdot$

Точка касания $\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\ \ 2\sqrt{5}\right)$.

При $x_0=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ уравнение касательной: $y=-4\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=-4x-4\sqrt{5}$.

Точка касания $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\ \ 2\sqrt{5}\right)$.

Расстояние между точками касания $S=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{85}$.

Ответ: $y = -4x + 4\sqrt{5}$; $y = -4x - 4\sqrt{5}$; $S=\sqrt{85}$.

б) $f(x)=-\frac{4}{x}$. $f'(x)=\frac{4}{x^2}$.

Угловой коэффициент прямой $y=5x$ равен 5.
Если x_0 — точка касания, то $f'(x_0)=5$

$$\frac{4}{x^2}=5 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

При $x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ уравнение касательной:

$y = 5\left(x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 5x - 4\sqrt{5}$. Точка касания $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \ 2\sqrt{5}\right)$.

При $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ уравнение касательной:

$y = 5\left(x + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 5x + 4\sqrt{5}$. Точка касания $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ -\ 2\sqrt{5}\right)$.

Расстояние между точками касания $S = \sqrt{\frac{16}{5} + 16 \cdot 5} = 4\sqrt{\frac{26}{5}}$.

Ответ: $y = 5x - 4\sqrt{5}$; $y = 5x + 4\sqrt{5}$; $S = 4\sqrt{\frac{26}{5}}$.

4.2.D09.

а) $f(x) = -\frac{4}{x}$. $f^{/}(x) = \frac{4}{x^2}$.

Уравнение касательной в точке (x_0; $f(x_0)$): $y=f^{/}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y = \frac{4(x - x_0)}{x_0^2} - \frac{4}{x_0} = \frac{4x - 8x_0}{x_0^2}$.

По условию уравнение $x = \frac{4x - 8x_0}{x_0^2}$ имеет корень (–1): $-1 = \frac{-4 - 8x_0}{x_0^2}$;

$\begin{cases} x_0^2 - 8x_0 - 4 = 0 \\ x_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 4 + \sqrt{20} \\ x_0 = 4 - \sqrt{20} \end{array}\right.$;

Тогда при $x_0 = 4 + \sqrt{20}$ $y = \frac{4x - 32 - 16\sqrt{5}}{36 + 16\sqrt{5}} = \frac{4x + 4}{36 + 16\sqrt{5}} - 1$.

Получим $y = \frac{x + 1}{9 + 4\sqrt{5}} - 1$.

При $x_0 = 4 - \sqrt{20}$: $y = \frac{4x - 32 + 16\sqrt{5}}{36 - 16\sqrt{5}} = \frac{4x + 4}{36 - 16\sqrt{5}} - 1$.

Получим $y = \frac{x + 1}{9 - 4\sqrt{5}} - 1$.

Ответ: Угловые коэффициенты $\frac{1}{9 + 4\sqrt{5}}$ и $\frac{1}{9 - 4\sqrt{5}}$.

б) $f(x) = \frac{2}{x}$; $f^{/}(x) = -\frac{2}{x^2}$

Уравнение касательной в точке (x_0; $f(x_0)$):
$y=f^{/}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y = \frac{-2(x - x_0)}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} = \frac{-2x + 4x_0}{x_0^2}$.

По условию, уравнение $-\frac{1}{3}x = \frac{-2x+4x_0}{x_0^2}$ имеет корень 3.

$-1 = \frac{-6+4x_0}{x_0^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+4x_0-6=0 \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$; $\frac{D}{4}=10$; $x_0=-2\pm\sqrt{10}$.

При $x_0=-2+\sqrt{10}$; $f'(x_0) = -\frac{2}{14-4\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}-7}$.

При $x_0=-2-\sqrt{10}$; $f'(x_0) = -\frac{2}{14+4\sqrt{10}} = \frac{-1}{2\sqrt{10}+7}$.

Ответ: угловые коэффициенты $\frac{1}{2\sqrt{10}-7}$ и $\frac{-1}{2\sqrt{10}+7}$.

4.2.D10.

а) $f(x)=\frac{3}{x}-3$. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$.

Пусть x_0 — точка касания.

Тогда уравнение касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $y=\frac{-3(x-x_0)}{x_0^2}+\frac{3}{x_0}-3$.

Из условия задачи следует, что угловой коэффициент касательной либо 12, либо $\frac{1}{12}$, либо –12, либо $-\frac{1}{12}$.

1 случай: $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2} = 12$ — корней нет;

2 случай: $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2} = \frac{1}{12}$ — корней нет;

3 случай: $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2} = -12 \Rightarrow x_0 = \pm 0{,}5$;

4 случай: $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2} = -\frac{1}{12} \Rightarrow x_0 = \pm 6$.

Ответ: $y=-\frac{1}{12}x-2$; $y=-\frac{1}{12}x-4$; $y = -12x + 9$; $y = -12x - 15$.

б) $f(x)=\frac{1}{x}-2$. По условию, угловой коэффициент искомых прямых либо 9, либо $\frac{1}{9}$, либо –9, либо $-\frac{1}{9}$. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания. 1 случай: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = 9$ — корней нет;

2 случай: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{9}$ — корней нет;

3 случай: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = -9 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{1}{3}$;

Уравнения касательных $y=-9\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=-9x+3+1=-9x+4$;

или $y=-9\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3}\right)=-9x-3-5=-9x-8$;

4 случай: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{9}\Rightarrow x_0=\pm 3$;

$y=-\frac{1}{9}(x-3)+f(3)=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-2=-\frac{1}{9}x-1\frac{1}{3}$;

или $y=-\frac{1}{9}(x+3)+f(-3)=-\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-2=-\frac{1}{9}x-2\frac{2}{3}$.

Ответ: y=–9x+4; y=–9x–8; $y=-\frac{1}{9}x-1\frac{1}{3}$; $y=-\frac{1}{9}x-2\frac{2}{3}$.

4.2.D11.

а) $f(x)=\frac{4}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

Уравнение касательной в т. M$\left(6;\ \frac{2}{3}\right)$;

$y=f'(6)(x-6)+\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{3}$. Эта прямая пересекает ось ординат в т. $\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$, абсцисс в т. (12; 0).

Координаты точки M равны среднему арифметическому точек пересечения прямой с осями координат, значит M — середина отрезка.
Ответ: точка M делит отрезок пополам.

б) $f(x)=\frac{3}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{x^2}$

Уравнение касательной в точке M$\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right)$

$y=f'(-2)(x+2)-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}x-3$. Эта прямая пересекает ось ординат в т. (–4; 0) ординат — (0; –3). Координаты точки M равны среднему арифметическому точек пересечения прямой с осями координат, значит M — середина отрезка. Ответ: точка M делит отрезок пополам.

4.2.D12. а) $y=(x-3)^2$, $y=\frac{4}{x}$ – две общие точки с абсциссами 1 и 4.

$S=\int_1^4\left(\frac{4}{x}-(x-3)^2\right)dx=\int_1^4\left(\frac{4}{x}-x^2+6x-9\right)dx=$

$=\left(4\ln x-\frac{x^3}{3}+3x^2-9x\right)\Big|_1^4=4\ln 4-\frac{64}{3}+48-36+\frac{1}{3}-3+9=$

=4ln4–21+12+6=8ln2–3   Ответ: 8ln2–3;

б) $y=(x-6)^2$, $y=\frac{32}{x}$ – две точки пересечения с абсциссами 2 и 8.

$$S=\int_2^8\left(\frac{32}{x}-(x-6)^2\right)dx=\left(32\ln x-\frac{(x-6)^3}{3}\right)\Bigg|_2^8=64\ln 2-\frac{8}{3}-\frac{4^3}{3}=$$

$$=64\ln 2-\frac{72}{3}=64\ln 2-24\ .$$

Ответ: 64ln2–24.

§ 3. Иррациональные функции

Уровень А.

4.3.А01. а) $f(x)=12\sqrt[5]{x}-3$.

Первообразная $F(x)=\frac{5}{6}\cdot 12\cdot x^{\frac{6}{5}}-3x+C=10x^{\frac{6}{5}}-3x+C$.

Подставим точку (3; 4): $4=10\cdot 3^{\frac{6}{5}}-9+C\Rightarrow C=13-30\sqrt[5]{3}$.

Ответ: $F(x)=10x^{\frac{6}{5}}-3x+13-30\sqrt[5]{3}$.

б) $f(x)=9\sqrt{x}+2$. Первообразная $F(x)=6x^{\frac{3}{2}}+2x+C$.

Подставим точку (6; –2) $-2=36\sqrt{6}+12+C\Rightarrow C=-14-36\sqrt{6}$.

Ответ: $F(x)=6x^{\frac{3}{2}}+2x-14-36\sqrt{6}$.

4.3.А02. а) $f(x)=3\sqrt[3]{x}-5$. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания, тогда тангенс угла — производная в этой точке.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow x_0^2=512\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{512}=\pm 16\sqrt{2}\ .$$

Ответ: $x=16\sqrt{2}$; $x=-16\sqrt{2}$.

б) $f(x)=-5\sqrt[5]{x}-3$. $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{x^4}}$.

Пусть $(x_0, f(x_0))$ — точка касания, тогда tg угла — производная в этой точке.

$$\frac{-1}{\sqrt[5]{x_0^4}}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^4=1024\ \Leftrightarrow\ x_0\pm\sqrt[4]{1024}=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}\ .$$

Ответ: $x=4\sqrt{2}$; $x=-4\sqrt{2}$.

4.3.А03. а) $f(x)=\frac{64x-225}{8\sqrt{x}+15}$.

$$f'(x)=\frac{64\left(8\sqrt{x}+15\right)-\frac{4}{\sqrt{x}}(64x-225)}{\left(8\sqrt{x}+15\right)^2}=\frac{256\sqrt{x}+\frac{900}{\sqrt{x}}+960}{\left(8\sqrt{x}+15\right)^2}\ .$$

Уравнение касательной в точке (4; f(4)): $y=f'(4)(x-4)+f(4)$;

$f^{/}(4)=\frac{256\cdot 2+450+960}{31^2}=\frac{1922}{961}=2$; $f(4)=\frac{256-225}{31}=1$;

Ответ: y=2x–7.

б) $f(x)=\frac{81x-121}{9\sqrt{x}+11}$.

$$f^{/}(x)=\frac{81\left(9\sqrt{x}+11\right)-\frac{9}{2\sqrt{x}}\left(81x-121\right)}{9\sqrt{x}+11}.$$

Уравнение касательной в точке (4; f(4)): $y=f^{/}(4)(x–4)+f(4)$;

$$f(x)=\frac{\left(9\sqrt{x}\right)^2-11^2}{9\sqrt{x}+11}=\frac{\left(9\sqrt{x}-11\right)\left(9\sqrt{x}+11\right)}{9\sqrt{x}+11}=9\sqrt{x}-11.$$

$f'(x)=\frac{9}{2\sqrt{x}}$; $f'(4)=\frac{9}{4}$; f(4) = 7. Ответ: $y=\frac{9}{4}x-2$.

4.3.A04. а) $f(x)=\sqrt{4x-15}$; $g(x)=\sqrt{5x-21}$.

Найдем точки пересечения: $\sqrt{4x-15}=\sqrt{5x-21}$;

$\begin{cases}4x-15=5x-21\\4x-15\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=6\\4x-15\ge 0\end{cases}$;

$f^{/}(x)=\frac{2}{\sqrt{4x-15}}$; $f^{/}(6)=\frac{2}{3}$; f(6)=3.

Уравнение касательной в точке (6; 3): $y=f^{/}(6)(x–6)+f(6)$.

Ответ: $y=\frac{2}{3}x-1$.

б) $f(x)=\sqrt{4x+1}$; $g(x)=\sqrt{3x+7}$.

Найдем точки пересечения: $\sqrt{4x+1}=\sqrt{3x+7}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+1=3x+7\\4x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\4x+1\ge 0\end{cases}$;

$f^{/}(x)=\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$; $f^{/}(6)=\frac{2}{5}$; f(6)=5;

Уравнение касательной в точке (6; 5). $y=f^{/}(6)(x–6)+f(6)$. Ответ: $y=\frac{2}{5}x+\frac{13}{5}$.

4.3.A05. а) $S=\int\limits_0^4 9\sqrt{x}dx=9-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=6\cdot 8=48$. Ответ: 48;

б) $S=\int\limits_0^9 4\sqrt{x}dx=4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{8}{3}\cdot 8=\frac{64}{3}$. Ответ: $\frac{64}{3}$.

4.3.A06. а) $f(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Первообразная $F(x)=x^{\frac{2}{3}}+C$.

Известно, что уравнение $2x-3=x^{\frac{2}{3}}+C$ имеет корень 1 $\Rightarrow$ C=–2.

Ответ: первообразная $F(x)=x^{\frac{2}{3}}-2$.

б) $f(x)=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}$.

Первообразная: $F(x)=2x^{\frac{2}{3}}+C$.

Уравнение $x+2=2x^{\frac{2}{3}}+C$ имеет 1 своим корнем, C=3–2=1.

Ответ: $F(x)=2x^{\frac{2}{3}}+1$.

Уровень B.

4.3.B01. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}+2$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\dfrac{x+2}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}};$$

Уравнение: y(x)=f$'$(4)(x–4) +f(4); f$'$(4)=$\dfrac{1}{8}$ f(4)=5;

$y=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{2}+5=\dfrac{1}{8}x+4\dfrac{1}{2}$. Ответ: $\dfrac{1}{8}x+4\dfrac{1}{2}$.

б) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}}-4$. $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{x-4}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{x+4}{2x\sqrt{x}}$.

Уравнение: y(x)=f$'$(1)(x–1)+f(1); $f'(1)=\dfrac{5}{2}$; $f(1)=-7$; $y=\dfrac{5}{2}x-9\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $y=\dfrac{5}{2}x-9\dfrac{1}{2}$.

4.3.B02.

а) $f(x)=2x+\sqrt{6x-11}$. $f'(x)=2+\dfrac{3}{\sqrt{6x-11}}$.

Уравнение касательной y=f$'$(2)(x–2)+f(2) f$'$(2)=5; f(2)=5.

Тогда y(x)=5x–5. Ответ: y(x)=5x–5.

б) $f(x)=6x+\sqrt{3x+31}$. $f'(x)=6+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+31}}$.

Уравнение касательной: y=f$'$(–2)(x+2)+f(–2); f$'$(–2)=6,3; f(–2)=–7.

Тогда y(x)=6,3x+12,6–7=6,3x+5,6. Ответ: 6,3x+5,6.

4.3.B03. а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-5+6x}-2x}{2x-1}$.

Найдем $f'(x)=\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{\sqrt{6x-5}}\right)(2x-1)-2\sqrt{6x-5}+4x}{(2x-1)^2}$.

$f'(1)=\dfrac{(-2+3)(2-1)-2+4}{1}=3$; $f(1)=\dfrac{1-2}{1}=-1$.

Уравнение касательной: y=f$^{/}$(1)(x–1)+f(1). Ответ: y=3x–4.

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{13-6x}-3x}{3x-5}$. $f'(x)=\dfrac{(3x-5)\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13-6x}}-3\right)-3\left(\sqrt{13-6x}-3x\right)}{(3x-5)^2}$;

$f'(2)=\dfrac{1(-3-3)-3(1-6)}{1}=9$; f(2)=–5.

Уравнение касательной: y=f$^{/}$(2)(x–2)+f(2). Ответ: y(x)=9x–23.

4.3. B04. а) $f(x)=2x^2-6x^{\frac{1}{2}}-1$. $f'(x)=4x-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$; f$^{/}$(9)=35; f(9)=143.

Уравнение касательной: y=f$^{/}$(9)(x–9)+f(9). Ответ: y(x)=35x–172.

б) $f(x)=-3x^2-2x^{\frac{1}{2}}-4$. $f'(x)=-6x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

f$^{/}$(1)=–6–1=–7; f(1)=–9

Уравнение касательной: y=f$^{/}$(1)(x–1)+f(1)

y(x) = –7(x – 1) – 9. Ответ: y(x) = –7x – 2.

4.3.B05. а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-5x^{-\frac{1}{5}}-4$. $f'(x)=x^2+x^{-\frac{6}{5}}$; f$^{/}$(1)=2; f(1)= $-8\dfrac{2}{3}$.

Уравнение касательной: y=f$^{/}$(1)(x–1)+f(1);

$y(x)=2x-10\dfrac{2}{3}$. Ответ: $y(x)=2x-10\dfrac{2}{3}$.

б) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-5x^{-\frac{1}{2}}+5$. $f'(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$; $f'(1)=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$; $f(1)=\dfrac{1}{4}$.

Уравнение касательной y=f$^{/}$(1)(x–1)+f(1)

$y(x)=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{13}{4}$. Ответ: $y(x)=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{13}{4}$.

4.3.B06. а) $f(x)=2+\dfrac{11}{\sqrt{x}}$. Первообразная: $F(x)=2x+22\sqrt{x}+C$.

Подставим точку (4; –15): –15=8+44+C⇒C= –67.

Ответ: $F(x)=2x+22\sqrt{x}-67$.

б) $f(x)=-10-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$. Первообразная $F(x)=-10x-6\sqrt{x}+C$.

Подставим точку (36; 11): –360–36+C = 11 ⇒ C= 407.

Ответ: $F(x)=-10x-6\sqrt{x}+407$.

4.3.B07. а) $f(x)=\dfrac{1}{5}x^7-7\sqrt[7]{x}+1$

$f'(x)=\dfrac{7}{5}x^6-x^{-\frac{6}{7}}$; $f'(1)=\dfrac{2}{5}$; $f(1)=-\dfrac{29}{5}$.

Уравнение касательной y=f′(1)(x–1)+f(1);

$y(x)=\frac{2}{5}x-\frac{31}{5}$. Ответ: $y(x)=\frac{2}{5}x-\frac{31}{5}$.

б) $f(x)=-\frac{1}{2}x^5-5\sqrt[5]{x}+1$. $f'(x)=-\frac{5}{2}x^4-x^{-\frac{4}{5}}$;

$f(-1)=\frac{1}{2}+5+1=6\frac{1}{2}$; $f'(-1)=-\frac{5}{2}-1=-\frac{7}{2}$.

Уравнение касательной: y=f′(–1)(x+1)+f(–1);

$y(x)=-\frac{7}{2}x+3$.

Ответ: $y(x)=-\frac{7}{2}x+3$.

4.3.В08. а) $f(x)=\frac{6x^2+24x+5}{\sqrt[3]{x}}$. $f'(x)=\frac{(12x+24)\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(6x^2+24x+5\right)}{\sqrt[3]{x^2}}$.

$f'(-1)=\frac{-12-\frac{1}{3}(6-24+5)}{1}=-12+\frac{13}{3}=-\frac{23}{3}$; f(–1)=13.

Уравнение касательной: y=f′(–1)(x+1)+f(–1);

$y=-\frac{23}{3}x-20\frac{2}{3}$; $y=-\frac{23}{3}(x+1)+13$. Ответ: $y=-\frac{23}{3}x+\frac{16}{3}$.

б) $f(x)=\frac{3x^2-21x+8}{\sqrt[3]{x}}$. $f'(x)=\frac{(6x-21)\sqrt[3]{x}-\frac{\left(3x^2-21x+8\right)}{3x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x^2}}$;

$f'(1)=\frac{-15+\frac{10}{3}}{1}=-\frac{35}{3}$;

f(1)= –10; Уравнение касательной y=f′(1)(x–1)+f(1);

$y(x)=-\frac{35}{3}x+\frac{5}{3}$.

Ответ: $y(x)=-\frac{35}{3}x+\frac{5}{3}$.

4.3.В09. а) $f(x)=2x^{0,5}-6x^{\frac{1}{3}}+5x^2\sqrt[5]{x}+\sqrt{5}$.

$f'(x)=x^{-0,5}-2x^{-\frac{2}{3}}+11x^{\frac{6}{5}}$;

f′(1) = –10; f(1) = 2 – 6 + 5 + $\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$.

Уравнение касательной: y=f′(1)(x–1)+f(1)

$y(x)=-10(x-1)+1+\sqrt{5}$. Ответ: $y(x)=-10x+11+\sqrt{5}$.

б) $f(x)=5x^{0,2}-4x^{\frac{5}{4}}+3x^5\sqrt[3]{x}+\sqrt{3}$. $f'(x)=x^{-0,8}-5x^{\frac{1}{4}}+16x^{\frac{13}{3}}$;

$f^{/}(1)=1-5+16=12$; $f(1)=5-4+3+\sqrt{8}=4+\sqrt{3}$

Уравнение касательной y=f$^{/}$(1)(x–1)+f(1);

$y(x)=12x-8+\sqrt{3}$. Ответ: $y(x)=12x-8+\sqrt{3}$.

4.3.В10. а) $f(x)=\sqrt{11-5x}$. $f^{/}(x)=\dfrac{-5}{2\sqrt{11-5x}}$; $f^{/}(2)=-\dfrac{5}{2}$; f(2)=1;

Уравнение касательной y=f$^{/}$(2)(x–2)+f(2);

$y(x)=-\dfrac{5}{2}x+6$. Ответ: $y(x)=-\dfrac{5}{2}x+6$.

б) $f(x)=\sqrt{21-4x}$. $f^{/}(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{21-4x}}$; $f^{/}(3)=-\dfrac{2}{3}$; f(3)=3.

Уравнение касательной y=f$^{/}$(3)(x–3)+f(3);

$y(x)=-\dfrac{2}{3}x+5$. Ответ: $y(x)=-\dfrac{2}{3}x+5$.

4.3. В11. а) $f(x)=6-x\sqrt{9x-17}$. $f^{/}(x)=-\sqrt{9x-17}-\dfrac{9x}{2\sqrt{9x-17}}$;

$f^{/}(2)=-1-\dfrac{18}{2}=-10$; f(2)=6–2= 4.

Уравнение касательной y=f$^{/}$(2)(x–2)+f(2); y(x)= –10x+24.
Ответ: y(x)= –10x+24.

б) $f(x)=5+x\sqrt{3x-11}$. $f^{/}(x)=\sqrt{3x-11}+\dfrac{3x}{2\sqrt{3x-11}}$;

$f^{/}(4)=1+\dfrac{12}{2}=7$; f(4)=5+4=9.

Уравнение касательной y=f$^{/}$(4)(x–4)+f(4); y(x)=7x–19.
Ответ: y(x)=7x–19.

4.3.В12. а) $5x=\sqrt{15\cdot x}$ x=0, $x=\dfrac{3}{5}$

$$S=\int_0^{\frac{3}{5}}\left(\sqrt{15x}-5x\right)dx=\left(\sqrt{15}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}\sqrt{15}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{25}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{9}\cdot\frac{3}{5}-\frac{9}{10}=\frac{6}{5}-\frac{9}{10}=\frac{3}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{10}$;

б) $3x=\sqrt{6x}$ x=0, $x=\dfrac{2}{3}$

$$S=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{6x}-3x\right)dx=\left(\sqrt{6}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}}=\sqrt{6\cdot\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$

$$=2\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{8}{9}-\frac{6}{9}=\frac{2}{9}.$$ Ответ: $\dfrac{2}{9}$.

Уровень С.

4.3.C01. а) $f(x)=21-5\sqrt{8x+33}$.

Пусть (x_0; –4) — точка касания;

$-4=21-5\sqrt{8x_0+33} \Leftrightarrow \sqrt{8x_0+33}=5$;

$8x_0+33=25 \Rightarrow x_0=-1$.

$f^{/}(x)=\frac{-5\cdot 8}{2\sqrt{8x+33}}=\frac{-20}{\sqrt{8x+33}}$; $f^{/}(-1)=\frac{-20}{5}=-4$.

Уравнение касательной: $y=f^{/}(-1)(x+1)+f(-1)$; $y(x)=-4x-8$. Ответ: $y=-4x-8$.

б) $f(x)=31-5\sqrt{6x+7}$. Пусть (x_0; 6) — точка касания;

$6=31-5\sqrt{6x_0+7} \Leftrightarrow \sqrt{6x_0+7}=5$; $6x_0+7=25 \Rightarrow x_0=3$;

$f^{/}(x)=\frac{-5\cdot 6}{2\sqrt{6x+7}}=\frac{-15}{\sqrt{6x+7}}$; $f^{/}(3)=\frac{-15}{5}$.

Уравнение касательной: $y=f^{/}(3)(x-3)+f(3)$; $y(x)=-3x+15$. Ответ: $y=-3x+15$.

4.3.C02. а) $f(x)=x+1-\sqrt{9x+46}$.

Найдем точку с равными координатами (x_0; x_0):

$x_0=x_0+1-\sqrt{9x_0-46} \Leftrightarrow 9x_0+46=1$; $x_0=-5$;

$f^{/}(x)=1-\frac{9}{2\sqrt{9x+46}}$; $f^{/}(-5)=-3{,}5$.

Уравнение касательной: $y=f^{/}(-5)(x+5)+f(-5)$;
$y(x)=-3{,}5x-22{,}5$. Ответ: $y=-3{,}5x-22{,}5$.

б) $f(x)=x+2-\sqrt{5x+19}$.

Найдем точку с координатами (x_0; x_0):

$x_0=x_0+2-\sqrt{5x_0+19} \Leftrightarrow 5x_0+19=4$; $x_0=-3$;

$f^{/}(x)=1-\frac{5}{2\sqrt{5x_0+19}}$; $f^{/}(-3)=1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$.

Уравнение касательной $y=f^{/}(-3)(x+3)+f(-3)$; $y(x)=-\frac{1}{4}x-3\frac{3}{4}$.

Ответ: $y(x)=-\frac{1}{4}x-3\frac{3}{4}$.

4.3.C03.

а) $f(x)=3x^2-4\sqrt{x}+8$. $f^{/}(x)=6x-\frac{2}{\sqrt{x}}$; $f^{/}(1)=4$; $f(1)=7$.

Уравнение касательной в точке (1; f(1)) $y=f^{/}(1)(x-1)+f(1)$; $y(x)=4x+3$.
Прямая y(x) пересекает ось ординат в точке (0; 3), ось абсцисс — в точке $\left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$. Ответ: (0; 3); $\left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$.

б) $f(x)=2x^2-8\sqrt{x}+5$. $f^{/}(x)=4x-\frac{4}{\sqrt{x}}$; $f^{/}(4)=14$; $f(4)=21$.

Уравнение касательной в т. (4; 21): $y=f^{/}(4)(x-4)+f(4)$; $y(x)=14x-35$.

Прямая пересекает ось ординат в точке (0; –35), ось абсцисс $\left(\frac{5}{2};\ \ 0\right)$.

Ответ: (0; –35); $\left(\frac{5}{2};\ \ 0\right)$.

4.3.C04.

а) $f(x)=\sqrt{8x^{16}+9}+\frac{1}{\sqrt[3]{9x^{32}+8}}+2$.

f(x) — производная для F(x). На отрезке [8; 9] f(x)>0, значит F(x) возрастает. То есть F(9)>F(8). Ответ: F(9) > F(8).

б) $f(x)=\sqrt{4x^{8}+5}+\frac{1}{\sqrt[3]{5x^{16}+4}}+5$.

f(x) — производная для F(x). На отрезке [4; 5] f(x)>0, значит F(x) возрастает. То есть F(5)>F(4). Ответ: F(5) > F(4).

4.3.C05.

а) $f(x)=-10-\sqrt[3]{3x-10}$.

Найдем точку с ординатой –9: $-9=-10-\sqrt[3]{3x_0-10}\Leftrightarrow$ $3x_0$–10= –1;

x_0=3 — точка касания (её абсцисса); $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-10)^2}}$; $f'(3)$= –1; f(3)= –9.

Уравнение касательной в т. (3; 9) y=$f'(3)$(x–3)+f(3); y(x)= –x–6.
Ответ: y= –x–6.

б) $f(x)=-7-\sqrt[3]{3x+8}$.

Найдем точку с ординатой –6: $-6=-7-\sqrt[3]{3x_0+8}\Leftrightarrow 3x_0+8=-1$;

x_0= –3 — абсцисса точки касания. $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+8)^2}}$; $f'(-3)$= –1; $f(-3)$= –6.

Уравнение касательной y=$f'(-3)$(x+3)+f(–3); y(x)= –x–9.
Ответ: y= –x–9.

4.3.C06. а) $f(x)=(4x+9)\sqrt{4x+9}=(4x+9)^{\frac{3}{2}}$.

$f'(x)=4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{4x+9}=6\sqrt{4x+9}$.

Найдем абсциссы точек пересечения:

$(4x+9)^{\frac{3}{2}}=6(4x+9)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow(4x+9)^{\frac{1}{2}}(4x+9-6)=0$;

$\left[\begin{array}{l}4x+9=0\\4x+9=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{9}{4}\\x=-\frac{3}{4}\end{array}\right.$.

Ответ: $-\frac{9}{4};\ \ -\frac{3}{4}$.

б) $f(x)=(3x-1)\sqrt{3x-1}=(3x-1)^{\frac{3}{2}}$. $f'(x)=3\cdot\frac{3}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}}$.

Найдем абсциссы точек пересечения:

$$(3x-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (3x-1)^{\frac{1}{2}}\left(3x-1-\frac{9}{2}\right)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x-1=0 \\ 3x-1=\frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{11}{6} \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{1}{3}$ и $\frac{11}{6}$.

4.3.C07. а) $y=2\sqrt{3x}$ $y'=\sqrt{\frac{3}{x}}$, $y'(3)=1$

$y_{\text{кас}}=y(3)+y'(3)(x-3)=6+(x-3)=x+3$

$$S=\int_{-3}^{0}(x+3)dx+\int_{0}^{3}\left((x+3)-2\sqrt{3}\sqrt{x}\right)dx=\frac{9}{2}+\left(\frac{x^2}{2}+3x-2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=18-12=6.$$

Ответ: 6;

б) $y=3\sqrt{2x}$ $y'=\frac{3}{\sqrt{2x}}$ $y'(2)=\frac{3}{2}$ $y(2)=6$

$y_{\text{кас}}=y(2)+y'(2)(x-2)=6+\frac{3}{2}(x-2)=\frac{3}{2}x+3$

$$S=\int_{-2}^{0}\left(\frac{3}{2}x+3\right)dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{3}{2}x+3-3\sqrt{2x}\right)dx=3+\left(\frac{3}{4}x^2+3x-2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2=$$

$=3+3+6-8=4$.

Ответ: 4.

4.3.C08.

а) Пусть x_0 — абсцисса точек касания, тогда $f'(x_0)=g'(x_0)$.

$$\frac{3}{\sqrt{3x_0+16}}=\frac{3}{\sqrt{2x_0+19}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0+16=2x+19 \\ 3x_0+16>0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=3;$$

$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{3x+16}}$, $g'(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+19}}$; $f'(3)=\frac{3}{5}=g'(3)$.

Касательная для f: $y(x)=f'(3)(x-3)+f(3)$;

$y(x)=\frac{3}{5}x+\frac{41}{5}$.

Касательная для g: $y(x)=g'(3)(x-3)+g(3)$;

$y(x)=\frac{3}{5}x+\frac{66}{5}$; Ответ: $\frac{3}{5}x+\frac{41}{5}$; $\frac{3}{5}x+\frac{66}{5}$.

б) Пусть x_0 — абсцисса точек касания, тогда: $f'(x_0) = g'(x_0)$;

$$\frac{5}{\sqrt{5x_0-11}} = \frac{5}{\sqrt{2x_0+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0-11 = 2x_0+1 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 4;$$

$f'(4) = g'(4) = \frac{5}{3}$; $f(4) = 6$; $g(4) = 15$.

Касательная для f: $y(x) = f'(4)\,(x-4) + f(4)$; $g(x) = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$.

Касательная для g: $y(x) = g'(4)(x-4) + g(4)$; $y(x) = \frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$.

Ответ: $y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$ и $y = \frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$.

4.3.С09.

а) $f(x) = \sqrt{3x-2}$ – возрастает, $y=8-7x$ – убывает.

Легко угадывается общая точка $x=1$.

$f(1)=1$ $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ $f'(1) = \frac{3}{2}$

$y_{кас}=f(1)+f'(1)(x-1)=1+\frac{3}{2}(x-1) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Ответ: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = \sqrt{9-8x}$ – убывает, $y=5x-4$ – возрастает.

$x=1$ – абсцисса точки пересечения.

$f(1)=1$ $f'(x) = \frac{-8}{2\sqrt{9-8x}}$ $f'(1) = \frac{-4}{1} = -4$.

$y_{кас}=1-4(x-1)=-4x+5$.

Ответ: $y=-4x+5$.

4.3.С10.

а) $y= 4x+13$; $f(x) = 5\sqrt[4]{4x+13}$.

Первообразная $F(x) = (4x+13)^{\frac{5}{4}} + C$.

Найдем точки пересечения: $4x + 13 = (4x+13)^{\frac{5}{4}} + C$.

Известно, что (-3) — корень, тогда $1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Уравнение: $4x + 13 = (4x + 13)\ (4x+13)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4x + 13)\,((4x+13)^{\frac{1}{4}} - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{13}{4} \\ (4x+13)^{\frac{1}{4}} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{13}{4} \\ 4x+13 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{13}{4} \\ x = -3 \end{array}\right.;$$ Ответ: -3 и $-\frac{13}{4}$.

б) $g = 2x - 7$; $f(x) = 3\sqrt{2x-7}$.

Первообразная $F(x) = (2x-7)^{\frac{3}{2}} + C$.

Найдем точки пересечения: $2x–7 = (2x-7)^{\frac{3}{2}} + C$.

Известно, что 4 — корень: $1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Уравнение: $2x - 7 = (2x-7)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-7)(\sqrt{2x-7} - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=0 \\ \sqrt{2x-7}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = 4 \end{cases}$; Ответ: 4 и $\frac{7}{2}$.

4.3.C11.

а) $y = -\sqrt{100-x^2}$.

$y'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$; $y'(6) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $y(6) = -8$.

Уравнение касательной: $g(x) = y'(6)(x - 6) + y(6)$;

$g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2} - 8 = \frac{3}{4}x - \frac{25}{2}$.

Ответ: $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{25}{2}$.

б) $y = -\sqrt{225-x^2}$. $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{225-x^2}}$; $y(9) = -12$, $y'(9) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Уравнение касательной: $g(x) = y'(9)(x - 9) + y(9)$;

$g(x) = \frac{9}{12}x - \frac{27}{4} - 12 = \frac{3}{4}x - \frac{75}{4}$. Ответ: $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{75}{4}$.

4.3.C12.

а) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4x+7}$. $f'(x) = \frac{3}{4}\left(\sqrt{4x+7}\right)^{-1} \cdot 4 = \frac{3}{\sqrt{4x+7}}$;

$f'(-1) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

В треугольнике (из условия) один угол прямой, второй — $\frac{\pi}{3}$, третий — $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$.

б) $f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2}$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-2}}$; $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

В треугольнике один угол прямой, второй равен $\frac{\pi}{6}$, третий — $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$.

Уровень D.

4.3.D01. а) $f(x) = x^2 + (x-2)^{0,8}$. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^{1,8}}{1,8} + C$;

$f(x)$ — производная $F(x)$ — всегда положительна $\Rightarrow$
$F(x) = 0$ имеет не более одного корня, т.к. F возрастает.
$x = 6$ — корень (из условия). Ответ: 6.
б) $f(x) = x^8 + (x+4)^{0,1}$. $f(x)$ — производная $F(x)$ — всегда положительна $\Rightarrow$
$F(x) = 0$ имеет не более 1 корня, т.к. F возрастает.
$x = -3$ — корень (из условия). Ответ: –3.

4.3.D02. а) $f(x) = x^2 + \sqrt{3x-2}$.

$f'(x) = 2x + \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$;

$f'(1) = 3,5$ — угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона).
Тангенс угла наклона прямой есть:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}3,5\right) = -\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}3,5) = -\frac{1}{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}3,5)} = -\frac{2}{7}.$$

Эта прямая проходит через $(1; f(1)) = (1; 2)$.

Ее уравнение: $y = -\frac{2}{7}(x-1) + 2 = -\frac{2}{7}x + 2\frac{2}{7}$. Ответ: $y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{2}{7}$.

б) $f(x) = -x^2 + \sqrt{2x+11}$. $f'(x) = -2x + \frac{1}{\sqrt{2x+11}}$;

$f'(-1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ — тангенс угла наклона касательной.

Тангенс угла наклона прямой есть:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\frac{7}{3}\right) = -\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\frac{7}{3}\right) = -\frac{1}{\frac{3}{7}} = -\frac{3}{7}.$$

Эта прямая проходит через $(-1; f(-1)) = (-1; 2)$.

Ее уравнение: $y = -\frac{3}{7}(x+1) + 2 = -\frac{3}{7}x + \frac{11}{7}$. Ответ: $-\frac{3}{7}x + \frac{11}{7}$.

4.3.D03. а) Если на касательной нет ни одной точки с равными координатами, то она параллельна $y = x$ и не совпадает с ней.

$f(x) = (-2x+3)^{\frac{3}{2}} + 2x^2 - 3$; $f'(x) = -3(-2x+3)^{\frac{1}{2}} + 4x$.

Пусть x_0 — точка касания $\Rightarrow f'(x_0) = -3(-2x_0+3)^{\frac{1}{2}} + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x_0^2 - 8x_0 + 1 = -18x_0 + 27 \\ 4x_0 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x_0^2 + 10x_0 - 26 = 0 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1; f(x_0) = 0.$$

Тогда уравнение нашей касательной: $y = x - 1$. Ответ: $y = x - 1$.
б) На касательной нет точек с равными координатами, значит она параллельна $y = x$, но не совпадает с ней.

$f(x)=(2x+3)^{\frac{3}{2}}+2x^2+7$; $f'(x)=3(2x+3)^{\frac{1}{2}}+4x$

Пусть x_0 — точка касания $\Rightarrow$ $f'(x_0)=3(2x_0+3)^{\frac{1}{2}}+4x_0=1$

$\begin{cases}18x_0+27=16x_0^2+8x_0+1\\4x_0<1\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}16x_0^2-10x_0-26=0\\x_0<\dfrac{1}{4}\end{cases}$. Откуда $x_0=-1$; $f(x_0)=6$.

Уравнение касательной $y=1(x+1)+6$.

Ответ: $y=x+7$.

4.3.D04. а) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $y=x$.

Найдем точки пересечения:

$\sqrt{5-4x}=x$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}5-4x=x^2\\x\ge 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x^2+4x-5=0\\x\ge 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.\\x\ge 0\end{cases}$ $\Rightarrow x=1$.

$f'(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}}$; $f'(1)=-2$.

Касательная в точке (1; 1): $y=f'(1)(x-1)+1\Leftrightarrow y=-2x+3$.

Она пересекает оси в точках (0; 3) и (1,5; 0).

Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 1{,}5=2{,}25$.

Ответ: 2,25.

б) $f(x)=\sqrt{7-6x}$, $y=x$. Найдем точки пересечения:

$\sqrt{7-6x}=x$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x^2=7-6x\\x\ge 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x^2+6x-7=0\\x\ge 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-7\end{array}\right.\\x\ge 0\end{cases}$ $\Rightarrow x=1$;

$f'(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{7-6x}}$; $f'(1)=-3$.

Касательная в точке (1; 1): $y=f'(1)(x-1)+1\Leftrightarrow y=-3x+4$.

Она пересекает оси в точках (0; 4) и $\left(\dfrac{4}{3};\ 0\right)$.

Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$. Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

4.3.D05. а) $f(x)=(3x+2)^4\cdot\sqrt{(3x+2)}=(3x+2)^{\frac{9}{2}}$.

$f'(x)=4{,}5\cdot 3(3x+2)^{3,5}=13{,}5(3x+2)^{3,5}$.

Первообразная $F(x)=\dfrac{1}{16{,}5}(3x+2)^{5,5}+C$.

Найдем общие точки графиков (их абсциссы):

$13{,}5(3x+2)^{3,5}=\dfrac{1}{16{,}5}(3x+2)^{5,5}+C$.

Известно, что $-\frac{2}{3}$ — корень этого уравнения, тогда $C = 0$.

$13{,}5(3x+2)^{3,5} = \frac{1}{16{,}5}(3x+2)^{5,5}$; $(3x+2)^{3,5}\left(\frac{(3x+2)^2}{16{,}5} - 13{,}5\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} 3x+2=0 \\ (3x+2)^2 = 222{,}75 = \frac{891}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3} \\ x=-\frac{2}{3}\pm\frac{3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right. \\ 3x+2\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x=-\frac{2}{3} \\ x=-\frac{2}{3}+\frac{3\sqrt{11}}{2} \end{array}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}+\frac{3\sqrt{11}}{2}$.

б) $f(x) = (5x-4)^2\sqrt{5x-4} = (5x-4)^{2,5}$

$f'(x) = 12{,}5(5x-4)^{1,5}$

Первообразная $F(x) = \frac{1}{17{,}5}(5x-4)^{3,5} + C$.

Найдем общие точки графиков (их абсциссы)

$12{,}5(5x-4)^{1,5} = \frac{1}{17{,}5}(5x-4)^{3,5} + C.$

Из того, что $\frac{4}{5}$ — корень, следует, что $C = 0$.

$$(5x-4)^{1,5}\left(\frac{(5x-4)^2}{17{,}5} - 12{,}5\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{5} \\ (5x-4)^2 = (25\sqrt{0{,}35})^2 \end{array}\right. \\ 5x-4\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{5} \\ x=5\sqrt{0{,}35}+\frac{4}{5} \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{4}{5}$; $5\sqrt{0{,}35}+\frac{4}{5}$.

4.3.D06. а) $f(x) = \sqrt[3]{4x+3}$.

Пусть $(x_0, f(x_0))$ — точка касания: $f'(x_0) = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x_0+3)^2}}$;

Уравнение касательной: $y = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x_0+3)^2}}(x-x_0) + f(x_0)$;

$y = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x_0+3)^2}}(x-x_0) + \sqrt[3]{4x_0+3}$; $y = \frac{4(x-x_0)+3(4x_0+3)}{3\sqrt[3]{(4x_0+3)^2}}$.

Известно, что прямая проходит через $\left(-\frac{15}{4};\ 6\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -15 - 4x_0 + 12x_0 + 9 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}$.

Точка пересечения с осью ординат — $(0; y(0))$

$y(0)=\dfrac{-4x_0+12x_0+9}{3\sqrt[3]{(4x_0+3)^2}}=\dfrac{8x_0+9}{3\sqrt[3]{(4x_0+3)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt[3]{6^2}}=\dfrac{5}{\sqrt[3]{36}}$. Ответ: $\left(0;\ \dfrac{5}{\sqrt[3]{36}}\right)$.

б) $f(x)=\sqrt[3]{3x-5}$. Пусть $(x_0, f(x_0))$ — точка касания $f'(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x_0-5)^2}}$.

Уравнение касательной: $y=\dfrac{(x-x_0)}{\sqrt[3]{(3x_0-5)^2}}+\sqrt[3]{3x_0-5}=\dfrac{x-x_0+3x_0-5}{\sqrt[3]{(3x_0-5)^2}}$

$y=\dfrac{x+2x_0-5}{\sqrt[3]{(3x_0-5)^2}}$. Известно, что прямая проходит через $\left(\dfrac{25}{3};\ 0\right)$ $\Leftrightarrow$ $0=\dfrac{25}{3}+$ $2x_0-5 \Leftrightarrow$ $x_0=-\dfrac{5}{3}$.

Точка пересечения с осью ординат $(0; y(0))$.

$y(0)=\dfrac{2x_0-5}{\sqrt[3]{(3x_0-5)^2}}=\dfrac{-\dfrac{10}{3}-5}{\sqrt[3]{100}}=\dfrac{-25}{3\sqrt[3]{100}}$. Ответ: $\left(0;\ -\dfrac{25}{3\sqrt[3]{100}}\right)$.

4.3.D07. а) $y=\sqrt{-4x-x^2}$ $\quad y=\dfrac{x^2}{2}$

Найдем абсциссы точек пересечения.

$\sqrt{-4x-x^2}=\dfrac{x^2}{2}$

1) x=0

2) $-4x-x^2=\dfrac{x^4}{4}$

$x^3+4x+16=0$

$x^3=-4x-16$.

–1 решение $x=-2$.

Итак, $x=-2$, $x=0$.

$$S=\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{-4x-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=-\int_{-2}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_{-2}^{0}\sqrt{-4x-x^2}\,dx=$$

$$=2+\int_{-2}^{0}\sqrt{4-(x+2)^2}\,dx=2+\int_{-2}^{0}\sqrt{4-t^2}\,dt=2+4\int_{0}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du=$$

$$=2+4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=2+4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=2+4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=2+\pi+\int_{0}^{\pi}\cos\psi\,d\psi=2+\pi$$ Ответ: $2+\pi$.

б) $y=\sqrt{6x-x^2}$ $\quad y=\dfrac{x^2}{3}$

$\sqrt{6x-x^2}=\dfrac{x^2}{3}$

1) x=0

2) $6-x=\frac{x^3}{9}$ x=3

$$S=\int_0^3\left(\sqrt{6x-x^2}-\frac{x^2}{3}\right)dx=\left(-\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_0^3+\int_0^3\sqrt{6x-x^2}\,dx=$$

$$=-3+\int_0^3\sqrt{9-(x-3)^2}\,dx=-3+\int_{-3}^0\sqrt{9-t^2}\,dt=-3+9\int_{-1}^0\sqrt{1-u^2}\,du=$$

$$=-3+9\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\sin 2\varphi}\cos\varphi d\varphi=-3+9\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=-3+9\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=-3+\frac{9\pi}{2}+\frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos 2\varphi d\varphi=-3+\frac{9\pi}{2}.$$ Ответ: $\frac{9\pi}{2}-3$.

4.3.D08. а) $f(x)=-9\sqrt{|x|-7}$.

При $x\ge 0$, $f(x)=f_1(x)=-9\sqrt{x-7}$.

При $x\le 0$, $f(x)=f_2(x)=-9\sqrt{-x-7}$.

$f(11)=f(-11)=-18$.

Две вершины: (11; –18) и (–11; –18).

Касательная в точке 11:

$y_1=f_1'(11)(x-11)-18$; $f_1'(x)=-\frac{9}{2\sqrt{x-7}}$. Значит,

$y_1=-\frac{9}{4}x+\frac{99}{4}-\frac{72}{4}=-\frac{9}{4}x+\frac{27}{4}$.

Касательная в точке –11:

$y_2=f_2'(-11)(x+11)-18$; $f_2'(x)=\frac{9}{2\sqrt{-x-7}}$.

Значит, $y_2=\frac{9}{4}x+\frac{27}{4}$.

Точка пересечения этих касательных — $\left(0;\ \frac{27}{4}\right)$.

Полученный треугольник равнобедренный с основанием 22 и высотой 24,75.

$S=\frac{1}{2}\cdot 22\cdot 24{,}75=272{,}25$. Ответ: 272,25.

б) $f(x)=-6\sqrt{|x|-5}$.

При $x\ge 0$, $f(x)=f_1(x)=-6\sqrt{x-5}$.

При $x\le 0$, $f(x)=f_2(x)=-6\sqrt{-x-5}$.

$f(21)=f(-21)=-24$. Две вершины: (21; –24) и (–21; –24).

Касательная в точке (21; –24): $y_1=f_1'(21)(x-21)-24$; $f_1'(x)=\frac{-3}{\sqrt{x-5}}$. Значит,

$y_1=-\frac{3}{4}x+\frac{63}{4}-24=-\frac{3}{4}x-\frac{33}{4}$.

Касательная в точке (–21; –24): $y_2 = f_2'(-21)(x+21) - 24$; $f_2'(x) = \frac{3}{\sqrt{-x-5}}$.

Значит, $y_2 = \frac{3}{4}x - \frac{33}{4}$.

Точка пересечения этих касательных $\left(0;\ -\frac{33}{4}\right)$.

Полученный треугольник равнобедренный с основанием 42 и высотой $\frac{63}{4}$.

Площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \frac{63}{4} = 330,75$. Ответ: 330,75.

4.3.D09. а) $f(x) = (6x+3)^{\frac{3}{2}} - 8x + 4$.

По условию касательная параллельна прямой $y = x$. Если $(x_0, f(x_0))$ — точка касания, то $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 9(6x_0+3)^{\frac{1}{2}} - 8 = 1 \Leftrightarrow 6x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{3}$;

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{3}$.

Уравнение касательной: $y = x + \frac{1}{3} + \frac{23}{3} = x + 8$. Ответ: $y = x + 8$.

б) $f(x) = (-6x+3)^{\frac{3}{2}} + 10x + 2$.

По условию касательная параллельна прямой $y = x$. Если $(x_0; f(x_0))$ — точка касания, то $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -9(-6x_0+3)^{\frac{1}{2}} + 10 = 1 \Leftrightarrow -6x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3}$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{3}$.

Уравнение касательной: $y = x - \frac{1}{3} + \frac{19}{3} = x + 6$. Ответ: $y = x + 6$.

4.3.D10.

а) $f(x) = \sqrt{2x+7}$.

Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания. Уравнение касательной:

$y = \frac{1}{\sqrt{2x_0+7}}(x - x_0) + \sqrt{2x_0+7}$; $y = \frac{x - x_0 + 2x_0 + 7}{\sqrt{2x_0+7}} = \frac{x + x_0 + 7}{\sqrt{2x_0+7}}$.

По условию $y\left(-\frac{21}{2}\right) = 0$. То есть $\begin{cases} -\frac{21}{2} + x_0 + 7 = 0 \\ 2x_0 + 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{7}{2} \\ x_0 \neq -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{7}{2}$.

$f'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}$ — искомый тангенс. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

б) $f(x) = \sqrt{4x+5}$.

Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

Уравнение касательной:

$y = \frac{2}{\sqrt{4x_0+5}}(x-x_0)+\sqrt{4x_0+5}$; $y = \frac{2x-2x_0+4x_0+5}{\sqrt{4x_0+5}} = \frac{2x+2x_0+5}{\sqrt{4x_0+5}}$.

По условию $y\left(-\frac{15}{4}\right)=0$:

$$\begin{cases} -\frac{15}{2}+2x_0+5=0 \\ 4x_0+5\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0=\frac{5}{4} \\ x_0\neq -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow x_0=\frac{5}{4}.$$

$f'\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{10}}$ — искомый тангенс. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

4.3.D11. а) $f(x)=\frac{3+2\sqrt{3x+7}}{2\sqrt{3x+7}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+7}}+1$

$f(x)$ — производная для $F(x)$, и $f(x) > 0$, значит $F(x)$ достигает наименьшего значения в (–1), т.к. она возрастает.

$F(x)=\sqrt{3x+7}+x+C$; $F(-1) = 2 - 1 + C = 9 \Rightarrow C = 8$.

Ответ: $F(x)=\sqrt{3x+7}+x+8$.

б) $f(x)=\frac{5+6\sqrt{5x-4}}{2\sqrt{5x-4}}=\frac{5}{2\sqrt{5x-4}}+3$.

$f(x)$ — производная для $F(x)$ и $f(x) > 0$, значит $F(x)$ достигает наименьшего значения в 1, т.к. возрастает.

$F(x)=3x+\sqrt{5x-4}+C$. По условию $F(1) = 5$.

$3 + 1 + C = 5 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \mathrm{F}(x) = 3x + \sqrt{5x-4}+1$. Ответ: $F(x)=3x+\sqrt{5x-4}+1$.

4.3.D12.

а) $f(x)=\sqrt{3x+13}-4x$.

$f(x) \le 0$ при $x \in [1; 12]$ — т.е. $F(x)$ убывает на [1; 12].

$f(x) \ge 0$ при $x \in [0; 1]$ — т.е. $F(x)$ возрастает на [0; 1].

Отсюда заключаем, что наибольшего значения $F(x)$ достигает в 1.

$F(x)=\frac{2}{9}\left(\sqrt{3x+13}\right)^3-2x^2+C$. По условию $F(1)=\frac{128}{9}=\frac{128}{9}-2+C \Rightarrow C=2$.

Ответ: $F(x)=\frac{2}{9}\left(\sqrt{3x+13}\right)^3-2x^2+2$.

б) $f(x)=\sqrt{5x+6}-2x$.

$f(x) \le 0$ при $x \in [2; 6]$, т.е. $F(x)$ убывает на [2; 6];

$f(x) \ge 0$ при $x \in [0; 2]$, т.е. $F(x)$ возрастает на [0; 2].

Отсюда заключаем, что наибольшее значение $F(x)$ в точке 2.

$F(x)=\frac{2}{15}\left(\sqrt{5x+6}\right)^3-x^2+C$. По условию $F(2)=\frac{128}{15}=\frac{128}{15}-4+C \Rightarrow C=4$.

Ответ: $F(x)=\frac{2}{15}\left(\sqrt{5x+6}\right)^3-x^2+4$.

§ 4. Тригонометрические функции

Уровень А.

4.4.A01. а) Касательная параллельна оси абсцисс — значит производная равна 0.
$f(x) = 12x - 9\text{tg}x + 1$;

$$f'(x) = 12 - \frac{9}{\cos^2 x} = 0 \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \wedge$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \wedge$.

б) Касательная параллельна оси абсцисс — значит производная равна 0.

$f(x) = 8x - 6\text{tg}x - 1$; $f'(x) = 8 - \frac{6}{\cos^2 x} = 0 \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \wedge$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \wedge$.

4.4.A02. а) Пусть x_0 — абсцисса точек касания, тогда $f(x_0) = f'(x_0)$ по условию $2\sin x_0 - \cos x_0 = 2\cos x_0 + \sin x_0 \Leftrightarrow \sin x_0 = 3\cos x_0 \Leftrightarrow \text{tg}x_0 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0 = \text{arctg}3 + \pi k$, $k \in \wedge$. Ответ: $\text{arctg}3 + \pi k$, $k \in \wedge$.
б) Пусть x_0 — абсцисса точки касания, тогда $f(x_0) = f'(x_0)$ по условию
$5\sin x_0 - \cos x_0 = 5\cos x_0 + \sin x_0$;

$4\sin x_0 = 6\cos x_0 \Rightarrow \text{tg}x_0 = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = \text{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$, $k \in \wedge$. Ответ: $\text{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$, $k \in \wedge$.

4.4.A03. а) $f(x) = -5\cos x + 27x^2 - 6x - 1$.
Первообразная $F(x) = -5\sin x + 9x^3 - 3x^2 - x + C$.
По условию $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.
Ответ: $F(x) = -5\sin x + 9x^2 - 3x^2 - x$.
б) $f(x) = -4\cos x + 3x^2 + 4x + 1$.
Первообразная $F(x) = -4\sin x + x^3 + 2x^2 + x + C$.
По условию $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.
Ответ: $F(x) = -4\sin x + x^3 + 2x^2 + x$.

4.4.A04. а) $f(x) = 2x - 5\sin x + 1$.
$f'(x) = 2 - 5\cos x$; $f(0) = 1$; $f'(0) = -3$.
Уравнение касательной в т. (0; 1): $y = -3(x - 0) + 1 = -3x + 1$.
Ответ: $y = -3x + 1$.
б) $f(x) = 5x - 4\sin x + 1$. $f'(x) = 5 - 4\cos x$; $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$.
Уравнение касательной в т. (0; 1): $y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$.
Ответ: $y = x + 1$.

4.4.A05. а) $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$.
Первообразная $F(x) = -3\cos x - 2\sin x + C$.
По условию $F(-2\pi) = 0$: $-3 + C = 0 \Rightarrow C = 3$; $F(x) = -3\cos x - 2\sin x + 3$.
График пересекает ось ординат в т. $(0; F(0))$;
$F(0) = -3 - 0 + 3 = 0$. Ответ: (0; 0).
б) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$. Первообразная $F(x) = -2\cos x - 3\sin x + C$.
По условию $F(2\pi) = 0 \Rightarrow -2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$; $F(x) = -2\cos x - 3\sin x + 2$.
График $F(x)$ пересекает ось ординат в т. $(0; F(0))$;
$F(0) = -2 - 0 + 2 = 0$. Ответ: (0; 0).

4.4.А06. а) $S = 4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -4\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(-4\cdot\frac{1}{2}\right) = 2$;

б) $S = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \cos x dx = 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = 1$.

Уровень В.

4.4.В01. а) $f(x) = x^2 - 4\cos 3x$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}\sin 3x + C$.

По условию $F(-x) = -F(x)$: $-\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}\sin 3x + C = -\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}\sin 3x - C$.

Отсюда, $C = 0$. Ответ: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}\sin 3x$.

б) $f(x) = x^4 + 2\cos 2x$; $F(x) = \frac{x^5}{5} + \sin 2x + C$.

По условию $F(-x) = -F(x)$:

$-\frac{x^5}{5} - \sin 2x + C = -\frac{x^5}{5} - \sin 2x - C$. Отсюда $C = 0$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^5}{5} + \sin 2x$.

4.4.В02. а) $f(x) = (10x^2 - 57x + 54)\sin \pi x$.

Касательная к графику $F(x)$ параллельна оси абсцисс, значит $F'(x) = f(x) = 0$;

$f(x) = (10x^2 - 57x + 54)\sin\pi x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin\pi x = 0 \\ 10x^2 - 57x + 54 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k,\ k\in Z \\ x = \frac{9}{2}; \\ x = \frac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{9}{2}$, $x = \frac{6}{5}$, $x = k$, $k \in \wedge$.

б) $f(x) = (20x^2 + 4(x - 9)\sin\pi x$.

Касательная параллельна оси абсцисс, значит $F'(x) = f(x) = 0$;

$f(x) = (20x^2 + 41x - 9)\sin\pi x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\pi x = 0 \\ 20x^2 + 41x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k,\ k\in Z \\ x = -\frac{9}{4} \\ x = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

; Ответ: $x = -\frac{9}{4}$, $x = \frac{1}{5}$, $x = k$, $k \in \wedge$.

4.4.В03.

а) $f(x) = \mathrm{tg}(2x - 3)$.

Касательная к графику $F(x)$ образует угол arctg5 $\Rightarrow f(x) = F'(x) = 5$ в этой точке: $f(x) = \mathrm{tg}(2x - 3) = 5$; $2x - 3 = \mathrm{arctg}5 + \pi k$;

$x=\frac{\operatorname{arctg}5+3}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\wedge$. Ответ: $\frac{\operatorname{arctg}5+3}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\wedge$.

б) $f(x) = \operatorname{tg}(7x + 1)$.

Касательная к графику $F(x)$ образует угол arctg4 $\Rightarrow f(x) = F'(x) = 4$ в этой точке:

$f(x) = \operatorname{tg}(7x+1) = 4$; $7x + 1 = \operatorname{arctg}4 + \pi k \Rightarrow x=\frac{\operatorname{arctg}4-1}{7}+\frac{\pi k}{7}$, $k\in\wedge$.

Ответ: $\frac{\operatorname{arctg}4-1}{7}+\frac{\pi k}{7}$, $k\in\wedge$.

4.4.B04. а) $f(x) = 5x\sin2\pi x$.

Тангенс искомого угла — производная $F(x)$ в точке $x_0=\frac{1}{4}$, т.е. $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

$\operatorname{tg}\alpha=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{5}{4}$; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\pi k$, $k\in\wedge$. Ответ: $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$.

б) $f(x) = -2x\sin3\pi x$

Тангенс искомого угла — производная $F(x)$ в точке $x_0=\frac{1}{6}$, т.е. $f\left(\frac{1}{6}\right)$.

$\operatorname{tg}\alpha=f\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{3}$; $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$, $k\in\wedge$. Ответ: $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

4.4.B05. а) $S=2\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}\cos4x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$;

б) $S=6\int\limits_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}}\sin3x\,dx=2\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sin t\,dt=-2\cos t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=-2\left(-1+\frac{1}{2}\right)=1$.

4.4.B06. а) $f(x)=\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}+x+1=\frac{1}{2}\sin3x+x+1$. $f'(x)=\frac{3}{2}\cos3x+1$.

Уравнение касательной в точке $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$; $f'(0)=\frac{5}{2}$; $f(0) = 1$.

Ответ: $y=\frac{5}{2}x+1$.

б) $f(x)=\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2}+3x-7=\frac{1}{2}\sin5x+3x-7$; $f'(x)=\frac{5}{2}\cos5x+3$.

Уравнение касательной в точке $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$; $f'(0)=\frac{11}{2}$; $f(0) = -7$.

Ответ: $y=\frac{11}{2}x-7$.

4.4.B07. а) $f(x) = 4x^8 + 3x + \operatorname{tg}x + 7$. $f'(x)=32x^7+3+\frac{1}{\cos^2x}$.

Уравнение касательной в точке $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$; $f'(0) = 4$; $f(0) = 7$.
Ответ: $y = 4x + 7$.

б) $f(x) = 3x^6 + 2x + \text{tg}x + 6$. $f'(x) = 18x^5 + 2 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Уравнение касательной в точке $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$; $f'(0) = 3$; $f(0) = 6$.
Ответ: $y = 3x + 6$.

4.4. B08. а) $f(x) = \sqrt{2x+1} - \cos^2 2x + \sin^2 2x - 6$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} + 4\sin 2x\cos 2x + 4\sin 2x\cos 2x$.

Уравнение касательной в т. $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$, $f'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$; $f(0) = -6$.

Ответ: $y = x - 6$.

б) $f(x) = \sqrt{6x+1} + 2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x - 1$;

$f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{6x+1}} - 8\sin 2x\cos 2x - 8\sin 2x\cos 2x$.

Уравнение касательной в т. $(0; f(0))$:
$y = f'(0)x + f(0)$, $f'(0) = 3$; $f(0) = 2$. Ответ: $y = 3x + 2$.

4.4.B09.

а) $f(x) = 2\sin 3x\cos 3x - 5(2x + 1)^{0,4} = \sin 6x - 5(2x + 1)^{0,4}$;
$f'(x) = 6\cos 6x - 4(2x + 1)^{-0,6}$. Уравнение касательной в т. $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$, $f'(0) = 2$; $f(0) = -5$. Ответ: $y = 2x - 5$.

б) $f(x) = 3\sin 4x\cos 4x - 10(5x + 1)^{0,5} = \dfrac{3}{2}\sin 8x - 10(5x + 1)^{0,5}$.

$f'(x) = 12\cos 8x - 25(5x + 1)^{-0,5}$.
Уравнение касательной в т. $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$, $f'(0) = -13$; $f(0) = -10$.
Ответ: $y = -13x - 10$.

4.4.B10. а) $f(x) = 3x^2 + 2x + \text{tg}2x + 7$. $f'(x) = 6x + 2 + \dfrac{2}{\cos^2 2x}$.

Уравнение касательной в т. $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$, $f'(0) = 4$; $f(0) = 7$.
Ответ: $y = 4x + 7$.

б) $f(x) = 2x^2 - 3x + \text{tg}5x - 5$. $f'(x) = 4x - 3 + \dfrac{5}{\cos^2 5x}$.

Уравнение касательной в т. $(0; f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$, $f'(0) = 2$; $f(0) = -5$.
Ответ: $y = 2x - 5$.

4.4.B11.

а) $f(x) = 1 + \cos 6x$. Первообразная $F(x) = x + \dfrac{1}{6}\sin 6x + C$.

По условию $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\pi$. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{6}\sin 6\cdot\dfrac{\pi}{6} + C = 2\pi$; $C = \dfrac{11\pi}{6}$.

Ответ: $F(x) = x + \dfrac{1}{6}\sin 6x + \dfrac{11\pi}{6}$.

б) $f(x) = 3 + \sin 2x$. Первообразная $F(x) = 3x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

По условию $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\pi$; $\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi+C=-3\pi$; $C=-\frac{9\pi}{2}-\frac{1}{2}$.

Ответ: $F(x) = 3x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{9\pi}{2}-\frac{1}{2}$.

4.4.В12. а) $f(x) = 5x + \sin\frac{x}{2}$. Первообразная $F(x)=\frac{5}{2}x^2-2\cos\frac{x}{2}+C$.

По условию $F(0) = 0$; $0 - 2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$. Ответ: $F(x)=\frac{5}{2}x^2-2\cos\frac{x}{2}+2$.

б) $f(x) = 2x + \cos\frac{x}{5}$.

Первообразная $F(x) = x^2 + 5\sin\frac{x}{5} + C$.

По условию $F(0) = 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$. Ответ: $F(x) = x^2 + 5\sin\frac{x}{5}$.

Уровень С.

4.4.С01. а) $f(x)=3\mathrm{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt[5]{x^9}+5$. $f'(x)=\frac{-12}{\sin^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$.

Пересечение с осью ординат: $(0; f(0)) = (0; 5)$.
Уравнение касательной в т. $(0; 5)$:
$y= f'(0)x + 5$; $f'(0) = -12$. Ответ: $y = -12x + 5$.

б) $f(x)=\mathrm{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt[5]{x^8}-3$. $f'(x)=\frac{-3}{\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}$.

Пересечение с осью ординат: $(0; f(0)) = (0; -3)$
Уравнение касательной в т. $(0; -3)$: $y = f'(0)x - 3$; $f'(0) = -3$. Ответ: $y = -3x - 3$.

4.4.С02.

а) $f(x) = \sin x - 7\cos x$. Первообразная $F(x) = -\cos x - 7\sin x + C$.
Известно, что $F(4\pi) = 0 \Rightarrow -\cos 4\pi - 7\sin 4\pi + C = 0 \Rightarrow C = 1$.
$F(x) = -\cos x - 7\sin x + 1$.
Найдем нули: $\cos x + 7\sin x = 1$;

$\frac{1}{\sqrt{50}}\cos x+\frac{7}{\sqrt{50}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{50}}$; $\cos\left(x-\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}\right)=\frac{1}{\sqrt{50}}$;

$$\left[\begin{aligned} &x-\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}+2\pi k,\ k\in Z\\ &x-\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}=-\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}+2\pi n,\ n\in Z\end{aligned}\right.;$$

Ответ: $2\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}+2\pi k$, $k \in \wedge$, $2\pi n$, $n \in \wedge$,

б) $f(x) = \sin x - 5\cos x$. Первообразная $F(x) = -\cos x - 5\sin x + C$.
Известно, что $F(-4\pi) = 0 \Rightarrow -\cos(-4\pi) -5\sin(-4\pi) + C = 0$.
Отсюда $C = 1$. Найдем нули F: $\cos x + 5\sin x = 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{26}}\cos x+\frac{5}{\sqrt{26}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{26}};\ \cos\left(x-\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}\right)=\frac{1}{\sqrt{26}};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{26}}+\pi k,\ k\in Z \\ x=\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.;\ \text{Ответ: } 2\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}+\pi k,\ k\in\wedge;\ \pi n,\ n\in\wedge.$$

4.4.С03. а) $f(x) = 10\sin^2 x - 5\sqrt{3}\sin x + 1$.

Из условия следует, что $F'(x) = f(x) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$ в искомых точках.

$f(x) = 10\sin^2 x - 5\sqrt{3}\sin x + 1 = 1$; $10\sin x\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k,\ k\in Z \\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.. \text{ Ответ: } \pi k,\ k\in\wedge;\ (-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\wedge.$$

б) $f(x) = 6\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x - 1$.

Из условия следует, что $F'(x) = f(x) = \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$ в искомых точках:

$f(x) = 6\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x - 1 = -1$; $6\sin x\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k,\ k\in Z \\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.. \text{ Ответ: } \pi k,\ k\in\wedge;\ (-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\wedge.$$

4.4. С04. а) $f(x) = 2\pi\sin\pi x + 5\pi\cos\pi x$.
Первообразная $F(x) = -2\cos\pi x + 5\sin\pi x + C$;
$F(8) = -2\cos 8\pi + 5\sin 8\pi + C = C - 2$.
По условию расстояние от (0; 0) до (8; $C - 2$) равно 10. Значит,

$$64+(C-2)^2=100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=8 \\ C=-4 \end{array}\right..$$

Ответ: $F(x) = -2\cos\pi x + 5\sin\pi x + 8$; $F(x) = -2\cos\pi x + 5\sin\pi x - 4$.
б) $f(x) = \pi\sin\pi x - \pi\cos\pi x$. Первообразная $F(x) = -\cos\pi x - \sin\pi x + C$;
$F(3) = -\cos 3\pi - \sin 3x + C = C + 1$.
По условию расстояние от (0; 0) до (3; $C + 1$) равно 5:

$$9+(C+1)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=3 \\ C=-5 \end{array}\right..$$

Ответ: $F(x) = -\cos\pi x - \sin\pi x + 3$; $F(x) = -\cos\pi x - \sin\pi x - 5$.
4.4.С05. а) $f(x) = -6\text{tg}x + 3$; $y = -6x - 5$.

Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания. По условию $f'(x_0)=-\frac{6}{\cos^2 x_0}=-6$.

Отсюда $\cos^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x_0=1 \\ \cos x_0=-1 \end{array}\right. \Rightarrow x_0 = \pi k,\ k\in\wedge$.

Уравнение касательных в т. $(\pi k; f(\pi k))$: $y = f'(\pi k)(x - \pi k) + f(\pi k)$; $f(\pi k) = 3$
$y = -6x + 6\pi k + 3$, $k \in \wedge$. Ответ: $y = -6x + 6\pi k + 3$, $k \in \wedge$.
б) $f(x) = 4\text{tg}x + 1$; $y = 4x + 5$. Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

По условию $f'(x_0) = \dfrac{4}{\cos^2 x_0} = 4$.

Отсюда $\cos^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x_0 = 1\\ \cos x_0 = -1\end{array}\right. \Rightarrow x_0 = \pi k$, $k \in \wedge$.

Уравнение касательных в т. $(\pi k; f(\pi k))$: $y = f'(\pi k)(x - \pi k) + f(\pi k)$; $f(\pi k) = 1$
Ответ: $y = 4x - 4\pi k + 1$, $k \in \wedge$.

4.4.C06. а) $f(x) = 2\cos x - 11\sin x$. Первообразная $F(x) = 2\sin x + 11\cos x + C$.
Производная $f'(x) = -2\sin x - 11\cos x$.
По условию $F(x) = -f'(x)$; $2\sin x + 11\cos x + C = 2\sin x + 11\cos x$.
Отсюда $C = 0$. Ответ: $F(x) = 2\sin x + 11\cos x$.
б) $f(x) = 5\cos x + 12\sin x$. Первообразная $F(x) = 5\sin x - 12\cos x + C$.
Производная $f'(x) = -5\sin x + 12\cos x$.
По условию $f'(x) = -F(x)$: $-5\sin x + 12\cos x = -5\sin x + 12\cos x - C$;
Отсюда $C = 0$. Ответ: $F(x) = 5\sin x - 12\cos x$.

4.4.C07. а) $f(x) = 3\cos x - 4x$; $y = -x - 2$;
$f'(x) = -3\sin x - 4$.
По условию $f'(x_0) = -3\sin x_0 - 4 = -1$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания;

$-3\sin x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \wedge$.

Наименее удалена от нуля точка $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$.

Уравнение касательной в т. $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$: $y = f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Тогда $y = -x - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi = -x + \dfrac{3\pi}{2}$. Ответ: $y = -x + \dfrac{3\pi}{2}$.

б) $f(x) = 2\cos x - 3x$; $y = -x - 1$
По условию $f'(x_0) = -2\sin x_0 - 3 = -1$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.
$-2\sin x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \wedge$.

Наименее удалена от начала координат точка $-\dfrac{\pi}{2}$.

Уравнение касательной в т. $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$: $y = f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$. Тогда $y = -x + \pi$. Ответ: $y = -x + \pi$.

4.4.C08. а) $f(x) = 9x + \sin 2x$.
У графика $f(x)$ единственная точка пересечения с осью абсцисс — (0; 0), т.к. $f(x)$ строго возрастает ($f'(x) = 9 + 2\cos 2x > 0$).

Уравнение касательной в т. $(x_0; f(x_0))$:
$y = (9 + 2\cos 2x_0)(x - x_0) + (9x_0 + \sin 2x_0)$.
Известно, что $y(0) = 0$.
$0 = -9x_0 - 2x_0\cos 2x_0 + 9x_0 + \sin 2x_0$. $2x_0 = \operatorname{tg} 2x_0$.
У этого уравнения только нулевое решение $x_0 = 0$.
Тогда $y = 11x$. Ответ: $y = 11x$.
б) $f(x) = 10x + \sin 6x$.
У графика $f(x)$ единственная точка пересечения с осью абсцисс (0; 0), т.к. $f(x)$ строго возрастает ($f'(x) = 10 + 6\cos 6x > 0$).
Уравнение касательной в т. $(x_0; f(x_0))$:
$y = (10 + 6\cos 6x_0)(x - x_0) + (10x_0 + \sin 6x_0)$.
Известно, что $y(0) = 0$.
$0 = -10x_0 - 6x_0\cos 6x_0 + 10x_0 + \sin 6x_0$
$6x_0 = \operatorname{tg} 6x_0$ — имеет только нулевое решение $x_0 = 0$.
Тогда $y = 16x$. Ответ: $16x$.

4.4.C09. а) $f(x) = \sin 4x$. Первообразная $F(x) = \frac{-\cos 4x}{4} + C$.

По условию $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\cos\pi}{4} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$

$F(x) = -\frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$

Найдем нули: $\frac{\cos 4x}{4} = -\frac{1}{4}$;

$\cos 4x = -1$; $4x = \pi + 2\pi k$, $k \in \wedge$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \wedge$. Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \wedge$.

б) $f(x) = \cos 5x$. Первообразная $F(x) = \frac{\sin 5x}{5} + C$.

По условию $F\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{5} + C = 0 \Rightarrow -\frac{\cos\pi}{4} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{5}$;

$F(x) = \frac{\sin 5x}{5} - \frac{1}{5}$. Найдем нули: $\frac{\sin 5x}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin 5x = 1 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,
$k \in \wedge \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \wedge$. Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \wedge$.

4.4.C10. а) $f(x) = 5\sin x - 2\sin 3x$.
Первообразная $F(x) = -5\cos x + \frac{2}{3}\cos 3x + C$.

Известно, что $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0$. $F(x) = -5\cos x + \frac{2}{3}\cos 3x = 0$;

$\cos x\left(-5 + \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\sin^2 x\right) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin^2 x = -\frac{13}{8}\end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \wedge$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \wedge$.

б) $f(x) = 4\cos x + 3\cos 3x$. Первообразная $F(x) = 4\sin x + \sin 3x + C$.
Известно, что $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$; $F(x) = 4\sin x + \sin 3x$.
Найдем нули: $4\sin x + \sin 3x = 0$; $\sin x(4 + 4\cos^2 x - 1) = 0$; $x = \pi k$, $k \in \wedge$.
Ответ: πk, $k \in \wedge$.

4.4.C11. а) $f(x) = \dfrac{1+3\sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} + 3$.
Первообразная $F(x) = -\mathrm{ctg}\,x + 3x + C$.
По условию $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$: $-\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} + C = \dfrac{\pi}{4}$; $C = -\dfrac{\pi}{2} + 1$

Ответ: $F(x) = -\mathrm{ctg}\,x + 3x - \dfrac{\pi}{2} + 1$.

б) $f(x) = \dfrac{3-2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 x} - 2$. Первообразная $F(x) = 3\mathrm{tg}\,x - 2x + C$.
По условию $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$: $3\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} - 2\cdot\dfrac{\pi}{4} + C = -\dfrac{\pi}{4}$; $C = \dfrac{\pi}{4} - 3$

Ответ: $F(x) = 3\mathrm{tg}\,x - 2x + \dfrac{\pi}{4} - 3$.

4.4.C12.
а) $y(x) = -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$y'(x) = -2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Пусть x_0 — искомая точка.
По условию $y(x_0) = y'(x_0)$;
$-2\sin\left(x_0 + \dfrac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(x_0 + \dfrac{\pi}{3}\right)$; $\mathrm{tg}\left(x_0 + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x_0 + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \wedge$;

$x_0 = -\dfrac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \wedge$. Ответ: $-\dfrac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \wedge$.

б) $y(x) = -6\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$. $y'(x) = 6\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
Пусть x_0 — искомая точка.
По условию $y(x_0) = y'(x_0)$;
$-6\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \wedge$;

$x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \wedge$. Ответ: $-\dfrac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \wedge$.

Уровень D.

4.4.D01.
а) $f(x) = \sin 12x - 3$; $y = 12x - 1$. $f'(x) = 12\cos x$.
По условию $f'(x_0) = 12$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.
$12\cos x_0 = 12 \Rightarrow \cos x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 2\pi k$, $k \in \wedge$
Уравнение касательной в $(x_0; f(x_0))$: $y = 12(x - 2\pi k) + f(2\pi k)$, $f(2\pi k) = -3$;

$y = 12x - 24\pi k - 3$. График ее пересекает оси в точках $(0;\ -24\pi k - 3)$ и $\left(2\pi k + \frac{1}{4};\ 0\right)$. Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2}\left(2\pi k + \frac{1}{4}\right)(24\pi k + 3) = \frac{3}{8}$;

$24(\pi k)^2 - 2\pi k + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$; $2\pi k(12\pi k - 1) = 0$, но k — целое $\Rightarrow k = 0$.

Уравнение касательной $y = 12x - 3$.

Ответ: $y = 12x - 3$.

б) $f(x) = \sin 11x + 1$; $y = 11x + 7$. $f'(x) = 11\cos x$.

По условию $f'(x_0) = 11$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

$11\cos x_0 = 11 \Rightarrow \cos x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 2\pi k,\ k \in \wedge$.

Уравнение касательной: $y = 11(x - 2\pi k) + f(2\pi k)$, $f(2\pi k) = 1$;

$y = 11x - 22\pi k + 1$. График ее пересекает оси в точках $(0;\ -22\pi k + 1)$ и $\left(2\pi k - \frac{1}{11};\ 0\right)$. Тогда площадь треугольника: $S = \frac{1}{2}\left(2\pi k - \frac{1}{11}\right)(22\pi k - 1) = \frac{1}{22}$;

$22\pi^2 k^2 - 2\pi k = 0$; $2\pi k(11\pi k - 1) = 0$, но k — целое $\Rightarrow k = 0$.

Уравнение касательной $y = 11x + 1$.

Ответ: $y = 11x + 1$.

4.4.D02. а) $f(x) = -\sin 6x\cos 4x$

$f(x) = -\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 10x)$; $F(x) = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{20}\cos 10x + C$

Наибольшее значение F(x) принимает при $x = \pi k$, $k \in Z$.

$4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + C$, $C = 3\frac{7}{10}$. $F(x) = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{20}\cos 10x + 3\frac{7}{10}$.

б) $f(x) = -\sin x\cos 3x$.

$f(x) = -\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 10x)$; $F(x) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{20}\cos 10x + C$.

F(x) принимает наибольшее значение при $x = \pi k$, $k \in Z$.

$2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + C$, $C = 1\frac{33}{40}$. $F(x) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{20}\cos 10x + 1\frac{33}{40}$.

4.4.D03.

а) $f(x) = 5x - \sin 3x$.

$f'(x) = 5 - 3\cos 3x$ принимает наибольшее значение 8 при

$\cos 3x_0 = -1 \Rightarrow 3x_0 = \pi + 2\pi k,\ k \in \wedge$;

$x_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \wedge$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

Уравнение касательной: $y = 8\left(x - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi k}{3}\right) + f(x_0)$; $f(x_0) = 5x_0 - \sin 3x_0$;

$f\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \frac{10\pi k}{3}$. Тогда $y = 8x - \frac{8\pi}{3} - \frac{16\pi k}{3} + \frac{5\pi}{3} + \frac{10\pi k}{3} = 8x - \pi - 2\pi k$.

Эта прямая пересекает ось ординат в т. $(0;\ -\pi - 2\pi k)$, абсцисс — в точке $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4};\ 0\right)$.

Площадь треугольника $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right)(\pi+2\pi k)=\frac{49\pi^2}{16}$. $\frac{\pi^2}{16}(1+2k)(1+2k)=\frac{49\pi^2}{16}$;

$1 + 2k = \pm 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=3 \\ k=-4 \end{array}\right.$.

Тогда искомые уравнения: $y = 8x - 7\pi$ и $y = 8x + 7\pi$.

Ответ: $y = 8x - 7\pi$ и $8x + 7\pi$.

б) $f(x) = 6x - \sin 2x$. $f'(x) = 6 - 2\cos 2x$. Очевидно, что угол наибольший при наибольшем $f'(x)$. Это достигается при $\cos 2x_0 = -1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \wedge$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

Уравнение касательной: $y=8\left(x-\frac{\pi}{2}-\pi k\right)+6\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; Тогда $y = 8x - \pi - 2\pi k$.

Эта прямая пересекает ось ординат в т. $(0; \pi + 2\pi k)$, а ось абсцисс — в точке $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ 0\right)$.

Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right)(\pi+2\pi k)$.

По условию $S=\frac{25\pi^2}{16}$; $\frac{\pi^2}{2}(1+2k)\left(\frac{1}{8}+\frac{k}{4}\right)=\frac{25\pi^2}{16}$; $(1 + 2k)^2 = 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-3 \end{array}\right.$;

Тогда искомые уравнения: $y = 8x - 5\pi$ и $y = 8x + 5\pi$.

Ответ: $y = 8x - 5\pi$ и $y = 8x + 5\pi$.

4.4.D04.

а) $f(x) = 5\mathrm{tg}2\pi x$.

$f'(x)=\frac{10\pi}{\cos^2(2\pi x)}$.

Угол наименьший при наименьшем $f'(x)$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания. А это происходит при $\cos^2(2\pi x_0) = 1 \Leftrightarrow 2\pi x_0 = \pi k$, $k \in \wedge$;

$x_0=\frac{k}{2}$, $k \in \wedge$

Уравнение касательной: $y=10\pi\left(x-\frac{k}{2}\right)+f\left(\frac{k}{2}\right)$; $f\left(\frac{k}{2}\right)=5\mathrm{tg}\pi k=0$;

$y = 10\pi x - 5k$.

Эта прямая пересекает ось ординат в точке $(0; -5k)$, а ось абсцисс — в точке $\left(\frac{k}{2\pi}; 0\right)$. Тогда площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot\frac{k}{2\pi}$.

По условию $S = 5\pi \Rightarrow \frac{5k^2}{4\pi}=5\pi \Rightarrow k = \pm 2\pi$.

Искомые уравнения: $y = 10\pi x + 10\pi$. $y = 10\pi x - 10\pi$

Ответ: $y = 10\pi x + 10\pi$; $y = 10\pi x - 10\pi$.

б) $f(x) = 4\text{tg}3\pi x$; $f'(x) = \dfrac{12\pi}{\cos^2(3\pi x)}$.

Угол наименьший при наименьшем $f'(x)$, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

А это происходит при $\cos^2(3\pi x_0) = 1 \Leftrightarrow 3\pi x_0 = \pi k$, $k \in \wedge \Rightarrow x_0 = \dfrac{k}{3}$, $k \in \wedge$.

Уравнение касательной:

$y = 12\pi\left(x - \dfrac{k}{3}\right) + f\left(\dfrac{k}{3}\right)$; $f\left(\dfrac{k}{3}\right) = 4\text{tg}\pi k = 0$;

$y = 12\pi x - 4k$, $k \in \wedge$.

Эта прямая пересекает ось ординат в точке $(0; -4k)$, а ось абсцисс — в точке $\left(\dfrac{k}{3\pi}; 0\right)$. Тогда площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 4k \cdot \dfrac{k}{3\pi} = \dfrac{4k^2}{6\pi}$.

По условию $S = 6\pi \Rightarrow \dfrac{4k^2}{6\pi} = 6\pi \Rightarrow k = \pm 3\pi$.

Искомые уравнения: $y = 12\pi x - 12\pi$ и $y = 12\pi x + 12\pi$

Ответ: $y = 12\pi x - 12\pi$ и $y = 12\pi x + 12\pi$.

4.4.D05.

а) $f(x) = 9\text{tg}\dfrac{x}{11}$.

$f'(x) = \dfrac{9}{11\cos^2\left(\dfrac{x}{11}\right)}$. Угол наименьший при $f'(x_0)$ наименьшем, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

$\cos^2\left(\dfrac{x}{11}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{11} = \pi k$, $k \in \wedge$.

Уравнение касательной: $y = \dfrac{9}{11}(x - 11\pi k) + f(11\pi k)$;

$f(11\pi k) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{9}{11}x - 9\pi k$.

Эта прямая пересекает ось ординат в т. $(0; -9\pi k)$, а ось абсцисс в т. $(11\pi k; 0)$.

Расстояние между ними: $l = \sqrt{202}\,\pi k$. Тогда периметр будет равен:

$L = 9\pi k + 11\pi k + \sqrt{202}\,\pi k = \pi k(20 + \sqrt{202})$.

По условию $L = \pi k(20 + \sqrt{202}) = 4(20 + \sqrt{202})\pi$. Значит, $k = 4$.

Уравнение касательной:

$y = \dfrac{9}{11}x - 36\pi$. Ответ: $y = \dfrac{9}{11}x - 36\pi$.

б) $f(x) = 11\text{tg}\dfrac{x}{9}$; $f'(x) = \dfrac{11}{9\cos^2\left(\dfrac{x}{9}\right)}$.

Угол наименьший при $f'(x_0)$ наименьшем, где $(x_0; f(x_0))$ — точка касания.

$$\cos^2\left(\frac{x_0}{9}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{9}=\pi k,\ k\in\wedge \Leftrightarrow x_0=9\pi k,\ k\in\wedge$$

Уравнение касательной: $y=\frac{11}{9}(x-9\pi k)+f(9\pi k)$;

$f(9\pi k)=0 \Rightarrow y=\frac{11}{9}x-11\pi k.$

Эта прямая пересекает оси в т. $(0; -11\pi k)$ и $(9\pi k; 0)$.

Расстояние между ними $l=\sqrt{202}\pi k$.

Тогда периметр будет равен:

$L=9\pi k+11\pi k+\sqrt{202}\pi k=\pi k(20+\sqrt{202})$.

По условию $L=\pi k(20+\sqrt{202})=3(20+\sqrt{202})\pi$.

Значит, $k=3$. Ответ: $y=\frac{11}{9}x-33\pi$.

4.4.D06.

а) $f_1(x)=8\sin x$; $f_2(x)=4\operatorname{tg} x$

По условию $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, $8\sin x_0-\frac{4\sin x_0}{\cos x_0}=0$

$$4\sin x_0\left(2-\frac{1}{\cos x_0}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x_0=0\\ \cos x_0=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=\pi k,\ k\in Z\\ x_0=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right. .$$

Т.к. $x_0\in(0;\pi)$, то $x_0=\frac{\pi}{3}$

$F(x)$ — первообразная для $f_1(x)$: $F(x)=-8\cos x+C$.

Уравнение касательной к

$F(x)$: $y=f_1(x_0)(x-x_0)+F(x_0)$; $f_1(x_0)=4\sqrt{3}$;

$F(x_0)=-4+C$. Тогда $y=4\sqrt{3}x-\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}+C-4$.

Эта прямая пересекает ось абсцисс в т. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}-\frac{C}{4\sqrt{3}};\ 0\right)$.

По условию $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}-\frac{C}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}$;

$$C=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-8$$

Тогда $y=4\sqrt{3}x+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-8-\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}-4$.

Ответ: $y=4\sqrt{3}x-\pi\sqrt{3}-12$.

б) $f_1(x)=10\sin x$; $f_2(x)=-5\operatorname{tg} x$

По условию $f_1(x_0)=f_2(x_0)$

$10\sin x_0=-5\operatorname{tg} x_0$

$$5\sin x_0\left(2+\frac{1}{\cos x_0}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x_0=0\\ \cos x_0=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=\pi k,\ k\in Z\\ x_0=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right..$$

Т.к. $x_0 \in (0; \pi)$, то $x_0=\frac{2\pi}{3}$

$F(x)$ — первообразная для $f_1(x)$: $F(x) = -10\cos x + C$.

Уравнение касательной для $F(x)$ в т. $(x_0; F(x_0))$:

$y = f_1(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$; $f_1(x_0) = 5\sqrt{3}$; $F(x_0) = 5 + C$

$$y=5\sqrt{3}x-\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}+5+C.$$

Эта прямая пересекает ось абсцисс в т. $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{C}{5\sqrt{3}};\ 0\right)$.

По условию $\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{C}{5\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\frac{C}{5\sqrt{3}} \Rightarrow C=\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}-20$;

Тогда $y=5\sqrt{3}x-\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}+5+\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}-20$.

$$y=5\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}-15.$$

Ответ: $y=5\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}-15$.

4.4.D07.

а) $f(x)=\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$, $g(x)=\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$.

По условию $f'(x_0) = g'(x_0)$;

$5\cos\left(5x_0+\frac{\pi}{2}\right)=-5\sin\left(5x_0+\frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{tg}\left(5x_0+\frac{\pi}{2}\right)=-1$;

$5x_0+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k \in \wedge$; $x_0=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$.

Из таких точек в $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ лежат $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{20}$.

Для $\frac{\pi}{4}$: уравнение касательной к $f(x)$:

$$y=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right);$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}};\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}};$$

$$y=\frac{5x}{\sqrt{2}}-\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

уравнение касательной к $g(x)$

$y = g'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$; $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$y = \frac{5x}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$;

Для $\frac{9\pi}{20}$: уравнение касательной к $f(x)$

$y = f'\left(\frac{9\pi}{20}\right)\left(x - \frac{9\pi}{20}\right) + f\left(\frac{9\pi}{20}\right)$; $f'\left(\frac{9\pi}{20}\right) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$; $f\left(\frac{9\pi}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = -\frac{5x}{\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$;

уравнение касательной к $g(x)$: $y = g'\left(\frac{9\pi}{20}\right)\left(x - \frac{9\pi}{20}\right) + g\left(\frac{9\pi}{20}\right)$; $g'\left(\frac{9\pi}{20}\right) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$;

$g\left(\frac{9\pi}{20}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{5x}{\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{7}\right)$, $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{7}\right)$.

По условию $f'(x_0) = g'(x_0)$.

$3\cos\left(3x_0 - \frac{\pi}{7}\right) = -3\sin\left(3x_0 - \frac{\pi}{7}\right)$; $\operatorname{tg}\left(3x_0 - \frac{\pi}{7}\right) = -1$; $3x_0 - \frac{\pi}{7} = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \wedge$;

$3x_0 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{7} + \pi k$; $x_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{21} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \wedge$. Т.к. $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $x_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{21}$.

Уравнение касательной к $f(x)$: $y = f'(x_0)\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{21}\right) + f(x_0)$; $f'(x_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$;

$f(x_0) = \sin\left(3 \cdot \frac{25\pi}{84} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

Тогда $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{21\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}x + \frac{25\pi}{28\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$;

Уравнение касательной к $g(x)$:

$y = g'(x_0)\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{21}\right) + g(x_0)$; $g'(x_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$; $g(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{25\pi}{28\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.4.D08.

а) $f(x) = 4 + 3\cos 4x$; $f'(x) = -12\sin 4x$.

Уравнение касательной: $y = f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

$f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$; $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ = 4 + 3 = 7; Тогда y = 7 — касательная.

Решим уравнение: 4 + 3 cos4x = 7; cos4x = 1 $\Leftrightarrow$ 4x = 2πk, $k \in \wedge$;

$x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \wedge$;

Точки пересечения $\left(\frac{\pi k}{2};\ 4\right)$.

$f'\left(\frac{\pi k}{2}\right)=0$ $\Rightarrow$ данная прямая является касательной и в других общих с графиком точках.

Ответ: $\left(\frac{\pi k}{2};\ 4\right)$, является.

б) $f(x)$ = 3 + 2cos8x; $f'(x)$ = –16sin8x

Уравнение касательной: $y = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=5$

Тогда y = 5 — касательная.
Решим уравнение: 3 + 2cos8x = 5; cos8x = 1

8x = 2πk, $k \in \wedge$, $\Rightarrow x = \frac{\pi k}{4}$. Точки пересечения $\left(\frac{\pi k}{4};\ 5\right)$.

$f'\left(\frac{\pi k}{4}\right)=0$ $\Rightarrow$ данная прямая является касательной для всех общих точек.

Ответ: $\left(\frac{\pi k}{4};\ 5\right)$, k ∈ Z; является.

4.4.D09.

а) $f(x) = 4 + 5\sin\frac{3x}{2}$.

$f'(x) = \frac{15}{2}\cos\frac{3x}{2}$.

Уравнение касательной: $y = f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)+f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

$f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=0$; $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ = 9. Тогда y = 9 — касательная.

Решим уравнение: $4 + 5\sin\frac{3x}{2} = 9$, $\sin\frac{3x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k \in \wedge$. Все общие точки $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3};\ 9\right)$, $k \in \wedge$

$f'\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}\right)=0$, значит прямая является касательной для всех общих точек абсцисс. Ответ: $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3};\ 9\right)$, $k \in \wedge$; является.

б) $f(x) = 7 + 2\sin 2x$.

$f'(x) = 4\cos 2x$.

Уравнение касательной: $y=f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)+f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=9$; $y = 9$ — касательная.

Решим уравнение: $7 + 2\sin 2x = 9$; $\sin 2x = 1$;

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \wedge$;

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \wedge$; Общие точки: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ 9\right)$, $k \in \wedge$;

$f'\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)=0$,

значит прямая является касательной для всех общих точек.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ 9\right)$, $k \in \wedge$; является.

4.4.D10.

а) $f(x) = 3\cos x - \sqrt{55}\sin x$.

Первообразная $F(x) = 3\sin x + \sqrt{55}\cos x + C =$

$=8\left(\frac{3}{8}\sin x+\frac{\sqrt{55}}{8}\cos x\right)+C=8\sin\left(x+\arccos\frac{3}{8}\right)+C$.

Очевидно, что экстремумы — либо $8 + C$, либо $-8 + C$.

1. $8 + C = 1 \Rightarrow C = -7$ и $F(x) = 3\sin x + \sqrt{55}\cos x + C = 3\sin x - \sqrt{55}\cos x - 7$.
2. $-8 + C = 1 \Rightarrow C = 9$ и $F(x) = 3\sin x + \sqrt{55}\cos x + C = 3\sin x - \sqrt{55}\cos x + 9$.

Ответ: $F(x) = 3\sin x - \sqrt{55}\cos x - 7$; $F(x) = 3\sin x - \sqrt{55}\cos x + 9$.

б) $f(x) = -3\cos x - \sqrt{91}\sin x$.

Первообразная $F(x) = -3\sin x + \sqrt{91}\cos x + C =$

$=10\left(-\frac{3}{10}\sin x+\frac{\sqrt{91}}{10}\cos x\right)+C=10\sin\left(x+\arccos\left(-\frac{3}{10}\right)\right)+C$.

Очевидно, что экстремумы — либо $10 + C$, либо $-10 + C$.

1. $10 + C = 1 \Rightarrow C = -9$ и $F(x) = 3\sin x + \sqrt{91}\cos x - 9$.
2. $-10 + C = 1 \Rightarrow C = 11$ и $F(x) = -3\sin x + \sqrt{91}\cos x + 11$.

Ответ: $F(x) = -3\sin x + \sqrt{91}\cos x - 9$; $F(x) = -3\sin x + \sqrt{91}\cos x + 11$.

4.4.D11. а) $f(x) = \sin 15x\sin 30x$.

$f(x) = \frac{1}{2}\cos 15x - \frac{1}{2}\cos 45x$;

Первообразная $F(x) = \frac{1}{30}\sin 15x - \frac{1}{90}\sin 45x + C$.

Известно, что $f(-7\pi) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Решим: $3\sin 15x = \sin 45x$. $3\sin 45x = 3(3\sin 15x - 4\sin^3 15x) \Rightarrow \sin 15x = 0$;

$15x = \pi k$. $k \in \wedge$; $x = \frac{\pi k}{15}$, $k \in \wedge$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{15}$, $k \in \wedge$.

б) $f(x) = \cos 14x\cos 28x$.

$f(x) = \frac{1}{2}\cos 14x + \frac{1}{2}\cos 42x$;

Первообразная $F(x) = \frac{1}{28}\sin 14x - \frac{1}{84}\sin 42x + C$.

Известно, что $F(-6\pi) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Решим уравнение: $\frac{1}{28}\sin 14x - \frac{1}{84}\sin 42x = 0$.

$3\sin 14x = 3\sin 14x - 4\sin^3 14x \Rightarrow \sin 14x = 0$;

$14x = \pi k$. $k \in \wedge$; $x = \frac{\pi k}{14}$, $k \in \wedge$; Ответ: $x = \frac{\pi k}{14}$, $k \in \wedge$.

4.4.D12. а) $f(x) = \cos 6x\cos 18x$.

$f(x) = \frac{1}{2}\cos 12x + \frac{1}{2}\cos 24x$.

Первообразная $F(x) = \frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{48}\sin 24x + C$.

Известно, что $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Решим уравнение:

$\frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{48}\sin 24x = 0$; $2\sin 12x + 2\sin 12x\cos 12x = 0$;

$2\sin 12x(\cos 12x + 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin 12x = 0\\ \cos 12x = -1\end{array}\right.$;

Очевидно, что второе входит в первое. Решаем только первое уравнение.

$\sin 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = \pi k$, $k \in \wedge$; $x = \frac{\pi k}{12}$, $k \in \wedge$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{12}$, $k \in \wedge$.

б) $f(x) = \sin 2x\sin 6x$.

$f(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 8x$.

Первообразная $F(x) = \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 8x}{16} + C$. Известно, что $F\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Решим уравнение: $\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{16} = 0$; $2\sin 4x - 2\sin 4x\cos 4x = 0$;

$2\sin 4x(1-\cos 4x)=0;\ \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0\\ \cos 4x=1\end{array}\right.;$

Второе входит в первое. $\sin 4x = 0$; $4x = \pi k$, $k \in \wedge$; $x=\dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \wedge$.

Ответ: $\dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \wedge$.

§ 5. Показательная функция

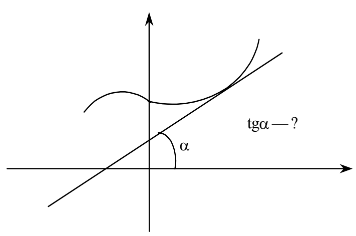
Уровень А.

4.5.A01. а) $f(x)=2e^{x-4}-x-10\sqrt{x}$. Точка касания $M(4; y_0)$.

$y_{\text{кас}}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f'(x_0)=2e^{x_0-4}-1-\dfrac{10}{2\sqrt{x_0}}=2\cdot e^0-1-\dfrac{10}{4}=1-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2}$;

$f(x_0)=2-4-20=-22 \Rightarrow y_{\text{кас}}=-\dfrac{3}{2}(x-4)-22$

$\operatorname{tg}\alpha = k$, где k: $y = kx + 6 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{2}$.



Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{2}$.

б) $f(x)=-3e^{x-9}-4x+15\sqrt{x}$. Точка касания $M(9; y_0)$.

$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ (искомое); $f'(x_0)=-3e^{x-9}-4+\dfrac{15}{2\sqrt{x}}$;

$f'(9)=-3-4+\dfrac{15}{6}=-\dfrac{9}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{9}{2}$. Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{9}{2}$.

4.5.A02. а) Найти $y'(x)$. $y(x)=2x^2e^{3x+4}$; $x=-\dfrac{4}{3}$. $y'(x)=4x\cdot e^{3x+4}+6x^2e^{3x+4}$;

$y'\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{16}{3}+\dfrac{6\cdot 16}{9}=\dfrac{16}{3}$. Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

б) $y(x)=4x^2e^{5x+3}$; $x=-\dfrac{3}{5}$.

$y'(x)=8x\cdot e^{5x+3}+20x^2e^{5x+3}$; $y'\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{24}{5}+\dfrac{20\cdot 9}{25}=\dfrac{12}{5}$. Ответ: $\dfrac{12}{5}$.

4.5.A03. а) $f(x) = 3x + 1 - 2e^{x-2}$, т. М $(2; y_0)$.

$y_{\text{кас}}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f'(x)=3-2e^{x-2}$; $f'(x_0)=3-2=1$;

$f(x_0) = 6 + 1 - 2 = 5 \Rightarrow y_{\text{кас}} = x - 2 + 5 = x + 3$. Ответ: $y = x + 3$.
б) $f(x) = 5x - 1 + 2e^{x+2}$; т. $M(-2; y_0)$.
$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x) = 5 + 2e^{x+2}$; $f'(x_0) = 5 + 2 = 7$; $f(x_0) = -10 - 1 + 2 = -9 \Rightarrow y_{\text{кас}} = 7(x + 2) - 9 = 7x + 5$.
Ответ: $y = 7x + 5$.

4.5.A04. а) касательная $f(x) \parallel y$
$f(x) = 5x - 8e^x$; $y = -3x - 16$. Т. $M(x_0; y_0)$ — точка касания.
$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, если $y_{\text{кас}} \parallel y \Rightarrow$ из условия коэффициенты равны $\Rightarrow$ $f'(x_0) = -3$. $f'(x_0) = 5 - 8e^{x_0} = -3 \Rightarrow x_0 = 0$.
Ответ: $x_0 = 0$.
б) $f(x) = 3x + 7e^x$; $y = 10x + 14$; $f(x) \parallel y$.
$y = 10x + 14$; $f'(x_0) = 10$; $f'(x_0) = 3 + 7e^{x_0} = 10 \Rightarrow x_0 = 0$.
Ответ: $x_0 = 0$.

4.5.A05. а) $f(x) = 7e^x + 3$ первообразная пересекает ось Oy в т. $(0; 4)$.
$\int(7e^x + 3)dx = 7e^x + 3x + C = y$;
т. $M(0; 4) \in y \Rightarrow 7 + C = 4 \Leftrightarrow C = -3 \Rightarrow y = 7e^x + 3x - 3$.
Ответ: $y = 7e^x + 3x - 3$.
б) $f(x) = 2e^x - 3$, первообразная $\cap$ Oy в т. $(0; -3)$.
$\int(2x^x - 3)dx = 2e^x - 3x + C = y$; $2 + C = -3 \Rightarrow C = -5 \Rightarrow y = 2e^x - 3x - 5$.
Ответ: $e = 2e^x - 3x - 5$.

4.5.A06. а) $S = \int\limits_{-\ln 3}^{\ln 2} e^x dx = e^x\Big|_{-\ln 3}^{\ln 2} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$;

б) $S = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 3} e^x dx = e^x\Big|_{-\ln 2}^{\ln 3} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Уровень B.

4.5.B01. а) $f(x) = 3e^{\frac{x+1}{3}} + 2e^{4x+4} + 3$, т. $M(-1; y_0)$.
$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = e^{\frac{x_0+1}{3}} + 8e^{4x_0+4} = 1 + 8 = 9$;
$f(x_0) = 3 + 2 + 3 = 8 \Rightarrow y_{\text{кас}}$: $9(x + 1) + 8 = 9x + 17$.
Ответ: $y = 9x + 17$.

б) $f(x) = 2e^{\frac{x+1}{2}} - 3e^{2x+2} + 9$, т. $M(-1; y_0)$.
$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{x_0+1}{2}} - 3 \cdot 2e^{2x_0+2} = 1 - 6 = -5$;
$f(x_0) = 2 - 3 + 9 = 8$; $y_{\text{кас}} = -5(x + 1) + 8 = -5x + 3$.
Ответ: $y = -5x + 3$.

4.5.B02. а) $f(x) = e^{5-x}(3x - 14)^4$ т. $M(5; y_0)$.
$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f(x_0) = 1$;
$f'(x_0) = -e^{5-x_0}(3x_0 - 14)^4 + 12e^{5-x}(3x - 14)^3 = -1 + 12 = 11$;
$y_{\text{кас}} = 11(x - 5) + 1 = 11x - 54$. Ответ: $y = 11x - 54$.
б) $f(x) = e^{2-x}(4x - 7)^4$, т. $M(2; y_0)$.
$f'(x_0) = -e^{2-x}(4x - 7)^4 + 16e^{2-x}(4x - 7)^3 = -1 + 16 = 15$;
$f(x_0) = 1 \Rightarrow y_{\text{кас}} = 15(x - 2) + 1 = 15x - 29$. Ответ: $y = 15x - 29$.

4.5.B03. а) $f(x) = 11^x\ln29 - 29^x\ln11$. $f(x) \perp Oy \Rightarrow f(x) \parallel Ox$;
Ox: $y = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$;
$f'(x_0) = 11^{x_0}\ \ln11 \cdot \ln29 - 29^{x_0}\ \ln11{\cdot}\ln29 \Rightarrow\ 11^{x_0} - 29^{x_0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$.
Ответ: 0.
б) $f(x) = 19^x\ln28 - 28^x\ln19$. $f(x) \parallel Ox \Rightarrow f'(x_0) = 0$;
$f'(x_0) = (\,19^{x_0} - 28^{x_0}\,)\ln19 \cdot \ln28 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. Ответ: 0.
4.5.B04. а) $f(x) = 14^x - 1$, $y_{кас} \parallel y$, $y = x\ln14 - 20$
т. $M(x_0; y_0) \Rightarrow$
$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow$ коэф. $y_{кас} = y$; $f'(x_0) = 14^{x0}\ln14$;
$f(x_0) = \ln14x_0 - 1 \Rightarrow 14^{x_0} = 1 \Rightarrow f'(x_0) = \ln14 \Rightarrow 14^{x_0}\ \ln14 = \ln14 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$.
Ответ: $y_0 = 0$.
б) $f(x) = 21^x + 11$, $y = x\ln21 - 11$, т. $M(x_0, y_0)$ — ?
$y_{кас} \parallel y \Rightarrow f'(x_0) = \ln21$; $f'(x_0) = 21^{x_0}\ \ln21 = \ln21 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 12$.
Ответ: $y_0 = 12$.

4.5.B05. а) $f(x) = \dfrac{5 - 2e^{2x}}{e^x}$, $F'(x) = f(x)$ $y = 10 + 7\cos x$.

$\int\left(\dfrac{5}{e^x} - 2e^x\right)dx = -5e^{-x} - 2e^x + C = y$, т.к. в условии $Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

$y = 10 + 7\cos0 = 17 \Rightarrow -5 - 2 + C = 17 \Rightarrow C = 24 \Rightarrow -5e^{-x} - 2e^x + 24$
Ответ: $F(x) = -5e^{-x} - 2e^x + 24$.

б) $f(x) = \dfrac{9 + 8e^{2x}}{e^x}$, $y = 14 + 11\cos x$.
$\int(9e^{-x} + 8e^{x-})dx = -9e^{-x} + 8e^x + C = y$ (1)
$x = 0 \Rightarrow y = 25$;
Подставим эти значения в (1) получим: $\Rightarrow -9 + 8 + C = 25 \Rightarrow C = 26 \Rightarrow y =$
$= -9^{-x} + 8e^x + 26$. Ответ: $y = -9^{-x} + 8e^x + 26$.

4.5.B06.

а) $y(x) = \dfrac{3\cdot36^x + 4\cdot6^{x+1} - 30x\ln6}{6\ln6}$. $y'(x) = \dfrac{3\cdot\ln36\cdot36^x + 4\ln6\cdot6^{x+1} - 30\ln6}{6\ln6} = 0$;
$6\ln6 \cdot 6^{2x} + 24\ln6 \cdot 6^x - 30\ln6 = 0$; $6^{2x} + 4 \cdot 6^x - 5 = 0$; $6^x = t$, $t > 0$; $t^2 + 4t - 5 = 0$;
$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right. \Rightarrow t = 1$; $6^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Ответ: $x = 0$.

б) $y(x) = \dfrac{2\cdot16^x + 4^{x+1} - 80x\ln4}{4\ln4}$. $y'(x) = \dfrac{2\cdot\ln16\cdot16^x + \ln4\cdot4^{x+1} - 80\ln4}{4\ln4} = 0$;
$4\ln4 \cdot 4^{2x} + 4\ln4 \cdot 4^x - 80\ln4 = 0$; $4^{2x} + 4^x - 20 = 0$;
$\left[\begin{array}{l} 4^x = 4 \\ 4^x = -5 \end{array}\right. \Rightarrow 4^x = 4 \Rightarrow x = 1$. Ответ: $x = 1$.

4.5.B07. $f(x) = 14e^{15x} + 5$, $F(x) \cap f'(x) =$ т. $M(0;y_0)$.
$\int\left(14e^{15x} + 5\right)dx = \dfrac{14}{15}e^{15x} + 5x + C$;

$f'(x) = 210e^{15x}$;

$x = 0 \Rightarrow y = 210 \Rightarrow \frac{14}{15} + C = 210 \Rightarrow C = \frac{3136}{15} \Rightarrow y = \frac{14}{15}e^{15x} + 5x + \frac{3136}{15}$.

Ответ: $y = \frac{14}{15}e^{15x} + 5x + \frac{3136}{15}$.

б) $f(x) = 6e^{7x} + 13$; $F(x) \cap f'(x) =$ т. $M(0;y_0)$.

$\int(6x^{7x} + 13)dx = \frac{6}{7}e^{7x} + 13x = C$;

$f'(x) = 42e^{7x}$;

$x = 0 \Rightarrow y = 42 \Rightarrow \frac{6}{7} + C = \Rightarrow 42 \Rightarrow C = \frac{288}{7} \Rightarrow y = \frac{6}{7}e^{7x} + 13x + \frac{288}{7}$.

Ответ: $y = \frac{6}{7}e^{7x} + 13x + \frac{288}{7}$.

4.5.B08.

а) $S = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} 2e^{3x}dx = \frac{2}{3}\int\limits_{3\ln 2}^{3\ln 5} e^t dt = \frac{2}{3}e^t\Big|_{3\ln 2}^{3\ln 5} = \frac{2}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = \frac{2}{3}(125 - 8) =$

$= \frac{2}{3}\cdot 117 = 78$;

б) $S = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 7} 3e^{2x}dx = \frac{3}{2}\int\limits_{2\ln 3}^{2\ln 7} e^t dt = \frac{3}{2}\left(7^2 - 3^2\right) = \frac{3}{2}\cdot 40 = 60$.

4.5.B09.

а) $f(x) = 6^x - 36x\ln 6 + 5$. $y_{\text{кас}} \perp x = -19$; x_0 — ?

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow y_{\text{кас}} \parallel Oy$;

$f'(x_0) = \ln 6 \cdot 6^{x_0} - 36\ln 6 = 0$;

$6^{x_0} = 36 \Rightarrow x_0 = 2$. Ответ: $x_0 = 2$.

б) $f(x) = 18^x - 18x\ln 18 + 29$; $x = -7$; x_0 — ?

$y_{\text{кас}} \parallel Oy \Rightarrow f'(x_0) = 0$;

$f'(x_0) = \ln 18 \cdot 18^{x_0} - 18\ln 18 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$. Ответ: $x_0 = 1$.

4.5.B10.

а) $f(x) = \frac{26^x}{\ln 26} - 28x - 2$; $y_{\text{кас}} \parallel y = -2$; x_0 — ?

Из условия следует, что $f'(x_0) = 0$; $f'(x_0) = 26^{x_0} - 28 = 0$; $x_0 = \log_{26} 28$.

Ответ: $x_0 = \log_{26}28$.

б) $f(x) = \frac{19^x}{\ln 19} - 25x + 7$; $y_{\text{кас}} \parallel y = -7$; x_0 — ?

$f'(x_0) = 0$; $f'(x_0) = 19^{x_0} - 25$; $\Rightarrow x_0 = \log_{19} 25$.

Ответ: $x_0 = \log_{19}25$.

4.5.B11.

а) $f(x) = \cos 3x + e^x$; т. $(0; 0) \in F(x)$; $F(x)$ — ?

$\int(\cos 3x + e^x)dx = \frac{\sin 3x}{3} + e^x + C = y$;

$\Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1; \Rightarrow\ y = \frac{\sin 3x}{3} + e^x - 1$.

Ответ: $y = \frac{1}{3}\sin 3x + e^x - 1$.

б) $f(x) = \sin 4x + e^x$; т. $(0; 0) \in F(x)$; $F(x)$ — ?

$\int (\sin 4x + e^x)dx = \frac{-\cos 4x}{4} + e^x + C$;

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{4} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{4}; \Rightarrow\ y = \frac{-\cos 4x}{4} + e^x - \frac{3}{4}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{4}\cos 4x + e^x - \frac{3}{4}$.

4.5.B12.

а) $f(x) = 3^x + \sqrt{x+4} + 1$; т. $M(0; y_0)$.

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f(x_0) = 4$; $f'(x_0) = 3^x \ln 3^{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0+4}} = \ln 3 + \frac{1}{4}$;

$\Rightarrow\ y_{кас} = \left(\frac{1}{4} + \ln 3\right)x + 4$.

Ответ: $y = \left(\frac{1}{4} + \ln 3\right)x + 4$.

б) $f(x) = e^x + 2\sqrt{x+1} + 1$; т. $M(1; y_0)$.

$f(x_0) = e + 2\sqrt{2} + 1$; $f'(x_0) = e^{x_0} + \frac{1}{\sqrt{x_0+1}} = e + \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\Rightarrow y_{кас} = \left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ответ: $y = \left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Уровень C.

4.5.C01.

а) $f(x)=2^x\ln 2+6x-5$

$F(x)=2^x+3x^2-5x+C$

$F'(x)=f(x)=0=2^x\ln 2+6x-5<0$ на $[-5; 0]$

Значит $F(x)$ убывает на $[-5; 0]$ $x_{max}=-5$ $x_{min}=0$.

$F(-5)-F(0)=2^{-5}-1+3\cdot 25+25=99+2^{-5}=99\frac{1}{32}$.

Ответ: $99\frac{1}{32}$.

б) $f(x)=5^x\ln 5+4x-6$, $F(x)=5^x+2x^2-6x+C$

$F'(x)=f(x)<0$ при $x \in [-2; 0]$.

Значит $F(x)$ убывает на $[-2; 0]$

$x_{max}=-2$ $x_{min}=0$.

$F(-2)-F(0)= \frac{1}{25} - 1 + 8 + 12 = 19 + \frac{1}{25} = 19,04$

Ответ: 19,04.

б) $f(x)=\frac{2\ln 5}{5^x}-6x-24;\qquad [-1;\,2].$

$f'(x)=\frac{-2\ln^2 5}{5^x}-6<0$ при $\forall x; \Rightarrow f(-1)=10\ln5-18$ — max;

$f(2)=\frac{2}{25}\ln5-36$ — min; $\Rightarrow$ max – min $=10\ln5-18-\frac{2}{25}\ln5+36=\frac{248}{25}\ln5+18.$

Ответ: $\frac{248}{25}\ln 5+18$.

4.5.С02.

а) $f(x)=\frac{9\cdot 8^{2x+1}}{2\ln 8}-\frac{145\cdot 72^x}{\ln 72}+\frac{8\cdot 9^{2x+1}}{2\ln 9}$.

$y_{кас}\perp Oy\Rightarrow y_{кас}\parallel Ox\Rightarrow f'(x_0)=0;$

$f'(x_0)=\frac{9\cdot 8^{2x+1}\cdot\ln 8\cdot 2}{2\ln 8}-\frac{145\cdot 72^x\cdot\ln 72}{\ln 72}+\frac{8\cdot 9^{2x+1}\cdot 2\cdot\ln 9}{2\ln 9}=$

$=9\cdot 8^{2x+1}-145\cdot 72^x+8\cdot 9^{2x+1}=0;$

$72\cdot 8^{2x}-145\cdot 8^x\cdot 9^x+72\cdot 9^{2x}=0;$

$72\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{2x}-145\left(\frac{8}{9}\right)^x+72=0$; $\left(\frac{8}{9}\right)^x=\left(\frac{9}{8}\right)$; $\left(\frac{8}{9}\right)^x=\left(\frac{8}{9}\right)\Rightarrow x=1;\ x=-1.$

Ответ: x = 1; x = –1.

б) $f(x)=\frac{4\cdot 9^{2x+1}}{2\ln 9}-\frac{97\cdot 36^x}{\ln 36}+\frac{9\cdot 4^{2x+1}}{2\ln 4}$.

$f'(x_0)=0; f'(x_0)=4\cdot 9^{2x+1}-97\cdot 36^x+9\cdot 4^{2x+1}=0;$

$36\cdot 9^{2x}-97\cdot 9^x\cdot 4^x+36\cdot 4^{2x}=0;$

$36\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}-97\left(\frac{9}{4}\right)^x+36=0$; $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{9}{4}\\ \left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{4}{9}\end{array}\right.\Rightarrow x=1;\ x=-1.$

Ответ: x = 1; x = –1.

4.5.С03.

а) $f(x)=3e^{8x}-3e^{7x}+2,\qquad$ т. $M(x_0;\,2).$

$3e^{8x_0}-3e^{7x_0}+2=2$; $3e^{8x_0}-3e^{7x_0}=0\Rightarrow x_0=0;$

$y_{кас}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0);$

$f(x_0)=2; f'(x_0)=24e^{8x_0}-21e^{7x_0}=24-21=3$;

$\Rightarrow y_{кас}=3x+2.$ Ответ: y = 3x + 2.

б) $f(x)=4e^{6x}-4e^{5x}-3,\qquad$ т. $M(x_0;\,-3).$

$4e^{6x_0}-4e^{5x_0}-3=-3\Rightarrow x_0=0;$

$y_{кас}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0); f'(x_0)=24e^{6x_0}-20e^{5x_0}=4$; $\Rightarrow y_{кас}=4x-3.$

Ответ: y = 4x – 3.

4.5.С04. а) $f(x)=(x^2-8x+16)e^x+2$; $y_{кас}\parallel Ox$.

$y_{кас}\parallel Ox\Rightarrow f'(x_0)=0;$

$f'(x_0) = (2x - 8)e^x + e^x(x^2 - 8x + 16) = 0;$
$x^2 - 8x + 16 + 2x - 8 = 0;$
$\left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 4 \end{array}\right.$; $\Rightarrow f(2) = 4e^2 + 2$; $y = 4e^2 + 2$; $f(4) = 2$; $y = 2$.
Ответ: $y = 4e^2 + 2$; $y = 2$.
б) $f(x) = (x^2 - 9x + 21)e^x + 1$, у нас $\parallel Ox$.
$f'(x) = 0$; $e^x(x^2 - 9x + 21 + 2x - 9) = 0;$
$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow f(4) = e^4 + 1 = y_1$; $f(3) = 3e^3 + 1 = y_2$
Ответ: $y = e^4 + 1$; $y = 3e^3 + 1$.
4.5.C05.
а) $f(x) = e^x - 2\sin x - 4x + 3$; $F(x) \cap f'(x) =$ т. $(0; y_0)$.
$f'(x) = e^x - 2\cos x - 4$; $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2 - 4 = -5$;
$\int (e^x - 2\sin x - 4x + 3)dx = e^x + 2\cos x - 2x^2 + 3x + C = y;$
$1 + 2 + C = -5 \Rightarrow C = -8; \Rightarrow y = e^x + 2\cos x - 2x^2 + 3x - 8.$
Ответ: $y = e^x + 2\cos x - 2x^2 + 3x - 8$.
б) $f(x) = 2e^x + 3\sin x + 6x - 1$; $F(x) \cap f'(x) = (0; y_0)$.
$f'(x) = 2e^x + 3\cos x + 6$; $x = 0 \Rightarrow y = 2 + 3 + 6 = 11$;
$\int (2e^x + 3\sin x + 6x - 1)dx = 2e^x - 3\cos x + 3x^2 - x + C;$
$\Rightarrow 2 - 3 + C = 11 \Rightarrow C = 12 \Rightarrow y = 2e^x - 3\cos x + 3x^2 - x + 12.$
Ответ: $y = 2e^x - 3\cos x + 3x^2 - x + 12$.
4.5.C06.
а) $f(x) = 16x^{2x} - 35e^x$;
$F(x) \cap Ox =$ т. A и т. B; $A(0; 0)$; $B(x_1, 0)$; x_1 — ?
$\int (16e^{2x} - 35e^x)dx = 8e^{2x} - 35e^x + C = y;$ (1)
т. $(0; 0) \in (1) \Rightarrow 8 - 35 + C = 0 \Rightarrow C = 27;$
$\Rightarrow y = 8e^{2x} - 35e^x + 27;$ (2)
т. $(x_1; 0) \in (2) \Rightarrow 8e^{2x} - 35e^x + 27 = 0;$
$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \ln\frac{27}{8} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = \ln\frac{27}{8}$. Ответ: $\ln\frac{27}{8}$.

б) $f(x) = 2e^{2x} - 29e^x$;
$(0; 0)$; $(x_0; 0) \in F(x)$; x_0 — ?
$\int (2e^{2x} - 29e^x)dx = e^{2x} - 29e^x + C = 0;$
$(0; 0)$: $1 - 29 + C = 0 \Rightarrow C = 28 \Rightarrow y = e^{2x} - 29e^x + 28;$
$(x_0; 0)$: $e^{2x_0} - 29e^{x_0} + 28 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \ln 28 \end{array}\right. \Rightarrow x_0 = \ln 28.$
Ответ: ln28.
4.5.C07.
а) $f(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x - 14x\ln 2$; $y_{кас} \parallel y_1$; $y_1 = x\ln 4$; x_0 — ?
Т.к. $y_{кас} \parallel y_1 \Rightarrow f'(x_0) = \ln 4$;

$f'(x_0) = 4^x\ln4 - 4\ln2 \cdot 2^x - 14\ln2 = \ln4 = 2\ln2;$
$2 \cdot 2^{2x} \cdot \ln2 - 4\ln2 \cdot 2^x - 16\ln2 = 0;$
$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$; $2^x = 4$; $x_0 = 2$. Ответ: x = 2.
б) $f(x) = 9^x - 14 \cdot 3^x - 34x\ln3$; $y_{кас} \parallel y_1$; $y_1 = x\ln9$; x_0 — ?
$f'(x_0) = \ln9;$
$f'(x_0) = \ln9 \cdot 9^x - 14\ln3 \cdot 3^x - 34\ln3 = 2\ln3;$
$2 \cdot 3^{3x} - 14 \cdot 3^x - 36 = 0$; $3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0;$
$3^x = 9$; $x_0 = 2$. Ответ: $x_0 = 2$.
4.5.С08. а) $f(x) = (5x + 2)e^{2x}$; $g(x) = (17x - 4)e^{2x}$;
$y^1_{\text{кас}\,(f)} \parallel y^2_{\text{кас}\,(g)}$; $x_{0f} = x_{0g}$;
Найти y^1 и y^2.
По условия получаем: $f'(x_0) = g'(x_0)$;
$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=5e^{2x_0}+2e^{2x_0}(5x_0+2) \\ g'(x_0)=17e^{2x_0}+2e^{2x_0}(17x_0-4) \end{array}\right| \Rightarrow 5e^{2x_0}+10e^{2x_0}x_0+4e^{2x_0}-17e^{2x_0}-34e^{2x_0}x_0+8e^{2x_0}=0;$$
$-24e^{2x_0}$ $x_0=0$; $x_0 = 0$;
$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$
$f'(x_0) = g'(x_0) = 9$; $f(x_0) = 2$; $g(x_0) = -4$; $\Rightarrow y^1 = 9x + 2$; $y^2 = 9x - 4$.
Ответ: $y_{кас\,(f)} = 9x + 2$; $y_{кас\,(g)} = 9x - 4$.
б) $f(x) = (4x + 5)e^{3x}$;
$g(x) = (22x - 1)e^{3x}$; $y_{кас\,(f)} \parallel y_{кас\,(g)}$;
$f'(x_0) = g'(x_0)$; Найти $y_{кас\,(f)}$ и $y_{кас\,(g)}$.
$f'(x_0) = 3e^{3x_0}(4x_0+5)+4\cdot e^{3x_0}$;
$g'(x_0) = 3e^{3x_0}(22x_0-1)+22e^{3x_0}; \Rightarrow 12x_0e^{3x_0}+15e^{3x_0}+$
$+4e^{3x_0}-22e^{3x_0}+3e^{3x_0}-66xe^{3x_0}=0;$
$-54x_0 \cdot e^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0$; $f'(x_0) = g'(x_0) = 19$; $f(x_0) = 5$; $g(x_0) = -1$;
$\Rightarrow y_{кас\,(f)} = 19x + 5$; $y_{кас\,(g)} = 19x - 1$. Ответ: $y_{кас\,(f)} = 19x + 5$; $y_{кас\,(g)} = 19x - 1$.
4.5.С09. а) $f(x)=1-2x-4^x\ln4$, $x \in [0; 5]$.
$F(x)=x-x^2-4^x+C$ $F'(x)=f(x)<0$ на $[0; 5]$
$\Rightarrow$ F(x) убывает. $x_{max}=0$
$F(x_{max})=-1+C=5 \Rightarrow C=6$.
Ответ: $F(x)=x-x^2-4^x+6$;
б) $f(x)=1-4x-3^x\ln3$ $x \in [-3; 0]$.
$F(x)=x-2x^2-3^x+C$ $F'(x)=f(x)$ – сначала положительна, потом отрицательна.
Сравним F(–3) и F(0): $F(-3)=-3-18-\frac{1}{27}+C=-21-\frac{1}{27}+C$.
$F(0)=-1+C$. $x_{min}=-3$ $-21\frac{1}{27}+C=-3$ $C=18\frac{1}{27}$
Ответ: $x-2x^2-3^x+18\frac{1}{27}$.
4.5.С10. а) $f(x)=\frac{11\cdot36^x}{2\ln6}+\frac{6^{x+1}}{\ln6}$; $y_{кас} \parallel y = 17x + 5$.

$\Rightarrow f'(x_0) = 17;$

$$f'(x_0) = \frac{11 \cdot 2\ln 6 \cdot 36^x}{2\ln 6} + \frac{6 \cdot \ln 6 \cdot 6^x}{\ln 6} = 17;$$

$11 \cdot 6^{2x} + 6 \cdot 6^{2x} - 17 = 0;$

$\Rightarrow 6^x = 1 \Rightarrow x_0 = 0;$

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$

$$f(x_0) = \frac{11}{2\ln 6} + \frac{12}{2\ln 6} = \frac{23}{2\ln 6}; \Rightarrow y_{кас} = 17x + \frac{23}{2\ln 6}.$$

Ответ: $y = 17x + \dfrac{23}{2\ln 6}$.

б) $f(x) = \dfrac{17 \cdot 4^x}{2\ln 2} + \dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}$; $y_{кас} \parallel y = 19x + 1$.

$$f'(x_0) = 19;\ f'(x_0) = \frac{17 \cdot 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x}}{2\ln 2} + \frac{2 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{\ln 2} = 19;$$

$17 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 19 = 0;\ 2^x = 1 \Rightarrow x_0 = 0;$

$$f(x_0) = \frac{17}{2\ln 2} + \frac{4}{2\ln 2} = \frac{21}{2\ln 2}; \Rightarrow y_{кас} = 19x + \frac{21}{2\ln 2}.$$

Ответ: $y = 19x + \dfrac{21}{2\ln 2}$.

4.5.C11.

а) $x(t) = 3t + e^{9-t} + 38;\ V > 2;\ t$ — ?

$x'(t)$ — это есть скорость точки.

$x'(t) = 3 - e^{9-t} > 2 \Rightarrow e^{9-t} < 1 \Rightarrow 9 - t < 0 \Rightarrow t > 9.$

Ответ: начиная с t = 9.

б) $x(t) = 5t + e^{7-t} + 41;\ V > 4;$ t — ?

$x'(t) = 5 - e^{7-t} > 4;\ e^{7-t} < 1 \Rightarrow 7 - t < 0 \Rightarrow t > 7.$

Ответ: начиная с t = 7.

4.5.C12.

а) $x(t) = t - e^{4-t} + 41;\ V < 2;\ t$ — ?

$x'(t)$ — скорость $\Rightarrow x'(t) = 1 + e^{4-t} < 2 \Rightarrow e^{4-t} < 1;$

$4 - t < 0 \Rightarrow t > 4$. Ответ: начиная с t = 4.

б) $x(t) = 2t - e^{1-t} + 38;\ V < 3;\ t$ — ?

$x'(t) = 2 + e^{1-t} < 3 \Rightarrow e^{1-t} < 1 \Rightarrow 1 - t < 0 \Rightarrow t > 1.$

Ответ: начиная с t = 1.

Уровень D.

4.5.D01.

а) $f(x) = 16^x\ln16 - 2 \cdot 4^x \cdot \ln4;\ F(x) \cap Oy = (0; -9);\ F(x) \cap Ox = (x_0; 0)$ — ?

$\int(16^x \ln 16 - 2 \cdot 4^x \ln 4)dx = 16^x - 2 \cdot 4^x + C = y;$

т. $(0; -9) \in$ данной прямой $\Rightarrow 1 - 2 + C = -9 \Rightarrow C = -8;$

$\Rightarrow y = 16^x - 2 \cdot 4^x - 8 = 0;\ 4^x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ т. (1; 0).

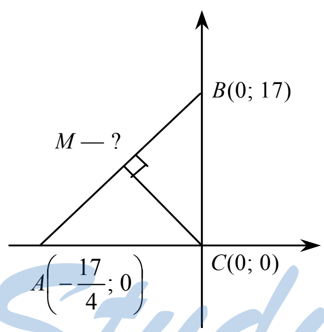
Ответ: (1; 0).

б) $f(x) = 25^x\ln25 - 5^x\ln5;\ (0; -20).$

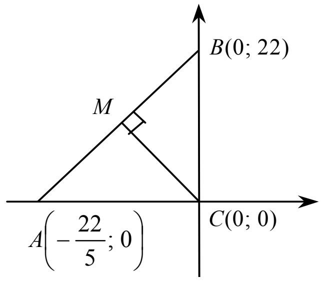
$F(x) = \int(25^x \ln 25 - 5^x \ln 5)dx = 25^x - 5^x + C = y;$

т. $(0; -20) \in y \Rightarrow 1 - 1 + C = -20 \Rightarrow C = -20$;
$\Rightarrow y = 25^x - 5^x - 20$;
т. $(x_0; 0) \in y \Rightarrow 25^x - 5^x - 20 = 0$;
$5^x = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ искомая точка $(1; 0)$.
Ответ: $(1; 0)$.

4.5.D02.
а) $f(x) = 4e^{x+4} - 3$; $(-4; 1)$.
$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;
$f'(x_0) = 4e^{x_0+4} = 4$;
$f(x_0) = 1$
$\Rightarrow y_{\text{кас}} = 4(x + 4) + 1 = 4x + 17$;
Найдем расстояние от т. O $(0; 0)$ до $y = 4x + 17$.
ABC — прямоугольный треугольник
$S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CM$;
$AC = \frac{17}{4}$;
$BC = 17 \Rightarrow S = \frac{289}{8}$;



$AB = \sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 + (17)^2} = \frac{17\sqrt{17}}{4}$;
$\Rightarrow CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{289}{4} \cdot \frac{4}{17\sqrt{17}} = \sqrt{17}$;
$CM = \sqrt{17}$.
Ответ: $\sqrt{17}$.
б) $f(x) = 5e^{x+4} - 3$; $(-4; 2)$.
$f'(x_0) = 5e^{x+4} = 5$; $f(x_0) = 2$
$\Rightarrow y_{\text{кас}} = 5(x + 4) + 2 = 5x + 22$;



Аналогично пункту а) $CM = \dfrac{AC \cdot BC}{AB}$; $AC = \dfrac{22}{5}$; $BC = 22$; $AB = \dfrac{22\sqrt{26}}{5}$;

$\Rightarrow CM = \dfrac{22}{5} \cdot 22 \cdot \dfrac{5}{22\sqrt{26}} = \dfrac{22}{\sqrt{26}}$;

Ответ: $\dfrac{22}{\sqrt{26}}$.

4.5.D03.

а) $f(x) \cap g(x) = (x_0; y_0)$ — точка касания;

$f(x) = 7 \cdot 18^{x+2}$;

$g(x) = 6 \cdot 21^{x+2}$. $7 \cdot 18^{x+2} = 6 \cdot 21^{x+2}$;

$\left(\dfrac{18}{21}\right)^{x+2} = \dfrac{6}{7} = \dfrac{18}{21} \Rightarrow x_0 + 2 = 1$; $x_0 = -1$;

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

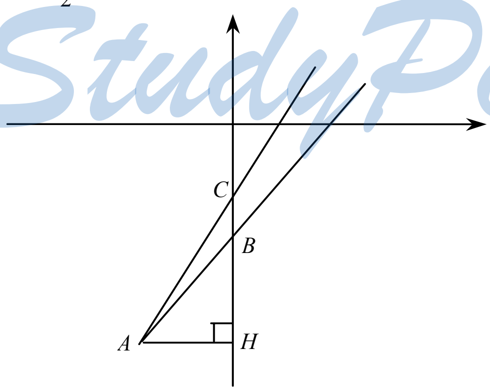
$f'(x_0) = 7 \cdot \ln 18 \cdot 18^{x+2} = 126\ln 18$;

$f(x_0) = 126 \Rightarrow y_{1кас} = 126\ln 18 x + 126\ln 18 + 126$;

$g'(x_0) = 6\ln 21 \cdot 21^{x+2} = 126\ln 21$;

$g(x_0) = 126 \Rightarrow y_{2кас} = 126\ln 21 x + 126\ln 21 + 126$;

$S_\Delta = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC$



т. B $(0;\ 126\ln 18 + 126)$; т. C $(0;\ 126\ln 21 + 126)$; $\Rightarrow BC = 126\ln 21 - 126\ln 18$;

$A(-1;\, y_0) \Rightarrow AH = 1 \Rightarrow S_\Delta = 63(\ln 21 - \ln 18)$.

Ответ: $S_\Delta = 63(\ln 21 - \ln 18)$.

б) $f(x) = 8 \cdot 21^{x-1}$; $g(x) = 7 \cdot 24^{x-1}$.

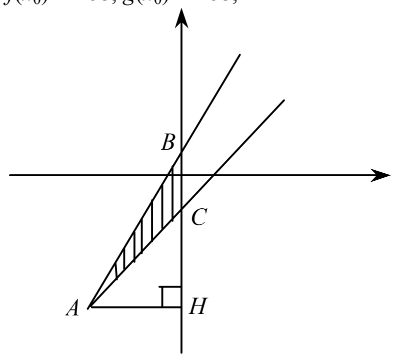
$8 \cdot 21^{x-1} = 7 \cdot 24^{x-1} \Rightarrow x = 2$;

$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$f'(x_0) = 8 \cdot \ln 21 \cdot 21^{x-1} = 168\ln 21$;

$g'(x_0) = 7 \cdot \ln 24 \cdot 24^{x-1} = 168\ln 24$;

$f(x_0) = 168$; $g(x_0) = 168$;



$\Rightarrow y_{1\text{к}} = 168\ln 21x - 336\ln 21 + 168$; $y_{2\text{к}} = 168\ln 24\text{x} - 336\ \ln 24 + 168$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$; т. A $(2;\, y_0) \Rightarrow AH = 2$;

т. B $(0;\, 168 - 336\ln 21)$;

т. C $(0;\, 168 - 336\ln 24)$; $\Rightarrow BC = 336\ln 24 - 336\ln 21 \Rightarrow S_{ABC} = 336(\ln 24 - \ln 21)$.

Ответ: $S_\Delta = 336(\ln 24 - \ln 21)$.

4.5.D04. а) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 25^x + 8 \cdot 5^x$, $\qquad y_{\text{кас}} \perp y = \frac{-x}{9\ln 5}$.

Если прямые $\perp$, то угловые коэффициенты составляют равенство:

$k_1 = \frac{-1}{k_2} \Rightarrow f'(x_0) = 9\ln 5$;

$f'(x_0) = \frac{1}{2}\ln 25 \cdot 25^x + 8 \cdot \ln 5 \cdot 5^x = 9\ln 5$;

$\ln 5 \cdot 5^{2x} + 8 \cdot \ln 5 \cdot 5^x - 9\ln 5 = 0$; $5^{2x} + 8 \cdot 5^x - 9 = 0$; $5^x = 1$;

$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2} \Rightarrow y_{\text{кас.}} = 9\ln 5x + \frac{17}{2}$.

Ответ: $\text{y} = 9\text{x}\ln 5 + \frac{17}{2}$.

б) $f(x) = \frac{7}{2} \cdot 49^x - 3 \cdot 7^x$, угол $\perp$ $y = \frac{-x}{4\ln 7}$.

Аналогично п. а) $f'(x_0) = 4\ln 7$;

$f'(x_0) = \frac{7}{2} 2\ln 7 \cdot 49^x - 3 \cdot \ln 7 \cdot 7^x = 4\ln 7$; $7 \cdot 7^{2x} - 3 \cdot 7^x - 4 = 0$;

$7^x = 1 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{кас.} = 4\ln 7x + \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = 4x\cdot\ln 7 + \frac{1}{2}$.

4.5 D05.
а) $f(x) = 7\cdot5^x\ln5 + 4\cdot8^x\ln8 + 3$;
$\min F(x) = -6$ на [0;4]. Найти max.
$F(x) = \int(7\cdot5^x\cdot\ln5 + 4\cdot8^x\ln8 + 3)dx = 7\cdot5^x + 4\cdot8^x + 3x + C = y$;
$f(x)>0$ при $\forall x$ $F(x)$ возрастает на $[0;4] \Rightarrow$
$\Rightarrow \min F(x)$ достигается в т. $0 \Rightarrow 7 + 4 + C = -6 \Rightarrow C = -17$;
max в т. 4;
$y = 7\cdot5^x + 4\cdot8^x + 3x - 17$;
$F(4) = 4375 + 16384 + 12 - 17 = 20754$.
Ответ: 20754.
б) $f(x) = 5\cdot2^x\ln2 + 7\cdot7^x\ln7 + 5$; на [0;2]. $\min F(x) = -7$. Найти max.
$f(x)>0$ при $\forall x \Rightarrow \min F(x)$ достигается в т.0, а max — в т. 2.
$F(x) = \int(5\cdot2^x\cdot\ln2 + 7\cdot7^x\ln7 + 5)dx = 5\cdot2^x + 7\cdot7^x + 5x + C$;
$F(0) = 5 + 7 + C = -7 \Rightarrow C = -19$; $y(x) = 5\cdot2^x + 7\cdot7^x + 5x - 19$;
$f(2) = 20 + 343 + 10 - 19 = 354$.
Ответ: 354.

4.5.D06. а) $f(x) = -7 - \frac{\ln 6}{6^x}$; На $[-2;-1]$ $\max F(x) = -7$, $\min F(x)$ — ?

$F(x) = \int(-7 - \ln6\cdot6^{-x})dx = -7x + 6^{-x} + C$;

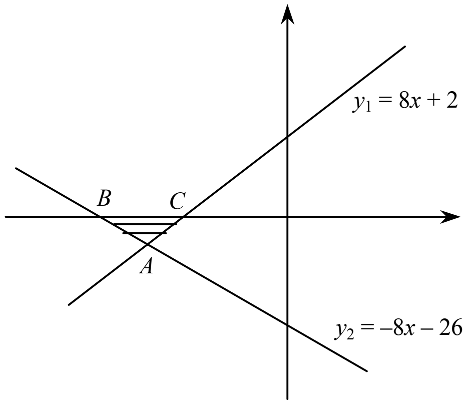
$F'(x) = -7 - \frac{\ln 6}{6^x} \neq 0$;

$-7\cdot6^x - \ln6 < 0$, при $\forall x \Rightarrow f(x)<0$ при $\forall x \Rightarrow F(x)$ — убывает $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ max достигается в т. $x = -2$, а min в т. $x = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow F(-2) = 14 + 36 + C = -7 \Rightarrow C = -57 \Rightarrow y = -7x + 6^{-x} - 57$;
$F(-1) = 7 + 6 - 57 = -44 \Rightarrow \min F(x) = -44$. Ответ: –44.

б) $f(x) = -5 - \frac{\ln 3}{3^x}$; На $[-3;-2]$ $\max F(x) = -6$, $\min F(x)$ — ?
$F(x) = \int(-5 - \ln3\cdot3^{-x})dx = -5x + 3^{-x} + C$;
Аналогично п. а): max в т. (–3), min в т. (–2)
$y = -5x + 3^{-x} + C$
$F(-3) = 15 + 27 + C = -6 \Rightarrow C = -48 \Rightarrow y = -5x + 3^{-x} - 48$,
$F(-2) = 10 + 9 - 48 = -29 \Rightarrow \min F(x) = -29$.
Ответ: 29.
4.5.D07. а) $f(x) = 2e^{x^2+4x}$; т. (0;2); т. (–4;2), S_{ABC} — ?
$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$;
$f'(x) = 2e^{x^2+4x}(2x + 4)$; $f'(0) = 2\cdot4 = 8$; $f'(-4) = -4\cdot2 = -8$;
$\Rightarrow y_1 = 8x + 2, \qquad y_2 = -8x - 30$
$C\left(-\frac{1}{4};0\right)$, $B\left(-\frac{15}{4};0\right)$, $A(-2;-14)$

$\overrightarrow{AB}\left\{-\frac{7}{4};14\right\}$; $\overrightarrow{AC}\left\{\frac{7}{4};14\right\}$; $BC=\frac{7}{2}$, h = 14

$S_{ABC}=\frac{1}{2}h\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{2}$.



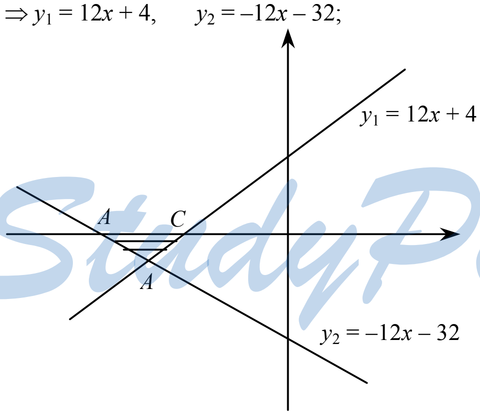
Ответ: $S_\Delta=\frac{49}{2}$.

б) $f(x)=4e^{x^2+3x}$; т. (0;4); (–3;4), S_{ABC} — ?

$f'(x)=4e^{x^2+3x}(2x+3)$;

$f'(0)=12$; $f'(-3)=-12$; $f(-3)=4$;

$\Rightarrow y_1=12x+4,\quad y_2=-12x-32$;



$C\left(-\frac{1}{3};0\right)$, $B\left(-\frac{3}{2};-14\right)$, $A\left(-\frac{8}{3};0\right)$; $AC=\frac{7}{3}$; h = 14.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}h\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot\frac{7}{3}=\frac{49}{3}$.

Ответ: $S_\Delta=\frac{49}{3}$.

4.5.D08. а) $f(x) = 3(x + 8)^2e^{x+10}$.
$y_{кас.} \perp OY \Rightarrow y_{кас.} \parallel OX$
$\Rightarrow$ по условию $f'(x_0) = 0$
$f'(x) = 6(x + 8)e^{x+10} + e^{x+10} \cdot 3(x + 8)^2 = 0$;
$6x + 48 + 3x^2 + 48x + 192 = 0$; $3x^2 + 54x + 240 = 0$; $x^2 + 18x + 80 = 0$;
$$\left[\begin{array}{l} x = -10, \\ x = -8. \end{array}\right.$$
$y_{кас.} = f'(x_0)(x–x_0)$; $y_1 = f(–10) = 12$; $y_2 = f(–8) = 0$
расстояние между y_1 и y_2 равно 12.
Ответ: 12.
б) $f(x) = 8(x + 3)^2e^{x+5}$.
$f'(x_0) = 0$
$f'(x) = 16(x + 3)e^{x+5} + e^{x+5} \cdot 8(x + 3)^2 = 0$;
$16x + 48 + 8x^2 + 48x + 72 = 0$; $8x^2 + 64x + 120 = 0$; $x^2 + 8x + 15 = 0$;
$$\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -5. \end{array}\right.$$
$\Rightarrow y_1 = f(–3) = 0$, $y_2 = f(–5) = 32$
$\Rightarrow$ расстояние между касательными равно 32. Ответ: 32.
4.5.D09. а) $f(x) = 16^x – 4^{x+1}$ $\quad f(x) \cap OX \cap OY$.
т. 1 (пересечение OX): $y = 0 \Rightarrow 16^x – 4^{x+1} = 0$;
$x = 1 \Rightarrow$ т. 1 (1;0);
т.2: $x = 0 \Rightarrow y = 1 – 4 = –3 \Rightarrow$ т. 2 (0;–3).
$y_{кас.} = f'(x_0)(x–x_0) + f(x_0)$;
$f'(x) = \ln16 \cdot 16^x – \ln4 \cdot 4^{x+1}$; $f'(1) = 16\ln16 – 16\ln4 = 16\ln4$;
$f'(0) = \ln16 – 4\ln4 = –2\ln4$;
$\Rightarrow y_{кас.1} = 16\ln4x – 16\ln4$,
$y_{кас.2} = –2\ln4x – 3$.
т. $\cap$ y_1 и y_2: $16\ln 4x – 16\ln4 + 2\ln4x + 3 = 0$;
$18\ln4x = 16\ln4 – 3$;
$\Rightarrow x = \dfrac{16\ln 4 - 3}{18\ln 4}$.
Ответ: $\dfrac{16\ln 4 - 3}{18\ln 4}$.
б) $f(x) = 9^x – 3^{x+2}$; $f(x) \cap OX \cap OY$.
т. 1 (пересечение OX): $9^x – 3^{x+2} = 0$;
$x = 2 \Rightarrow$ т. 1 (2;0),
т.2: $x = 0$, $y = 1 – 9 = –8 \Rightarrow$ т. 2 (0;–8).
$y_{кас.} = f'(x_0)(x–x_0) + f(x_0)$;
$f'(x) = \ln9 \cdot 9^x – \ln3 \cdot 3^{x+2}$; $f'(2) = 81 \cdot \ln9 – 81 \cdot \ln3 = 81 \cdot \ln3$;
$f'(0) = \ln9 – 9\ln3 = –7\ln3$;
$\Rightarrow y_{кас.1} = 81 \cdot (\ln3)x – 162\ln3$,
$y_{кас.2} = –7\ln3x – 8$.
$\Rightarrow$ т. $\cap$ y_1 и y_2: $81 \cdot (\ln 3)x + 7 \cdot (\ln3)x = 162\ln3 – 8$;

$\Rightarrow x = \dfrac{162\ln 3 - 8}{88\ln 3} = \dfrac{81\ln 3 - 4}{44\ln 3}$. Ответ: $\dfrac{81\ln 3 - 4}{44\ln 3}$.

4.5.D10. а) $f(x) = 7\cdot 8^{x-3}$, $g(x) = 8\cdot 7^{x-3}$.

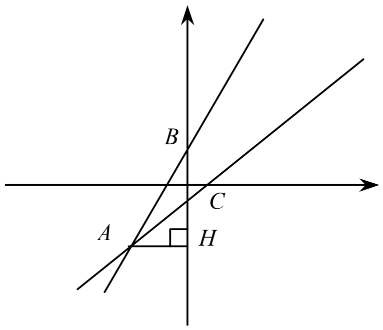
$7\cdot 8^{x-3} = 8\cdot 7^{x-3}$; $x_0 = 4$ — точка касания; $y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$;

$f'(x_0) = 7\ln 8\cdot 8^{x-3} = 56\ln 8$, $g'(x_0) = 8\ln 7\cdot 7^{x-3} = 56\ln 7$;

$f(x_0) = 56$, $g(x_0) = 56$;

$\Rightarrow y_{кас.1} = 56(\ln 8)x - 224\ln 8 + 56$, $y_{кас.2} = 56(\ln 7)x - 224\ln 7 + 56$;

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC\cdot AH$



т.B $(0;56 - 224\ln 8)$; т.C $(0;56 - 224\ln 7)$; $\Rightarrow BC = 224\ln 8 - 224\ln 7$;

т.A $(4;56) \Rightarrow AH = 4$; $\Rightarrow S_{ABC} = 2\cdot 224(\ln 8 - \ln 7) = 448(\ln 8 - \ln 7)$.

Ответ: $448(\ln 8 - \ln 7)$.

б) $f(x) = 8\cdot 9^{x-2}$, $g(x) = 9\cdot 8^{x-2}$.

$8\cdot 9^{x-2} = 9\cdot 8^{x-2}$, $x_0 = 3$ — точка касания; $y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$;

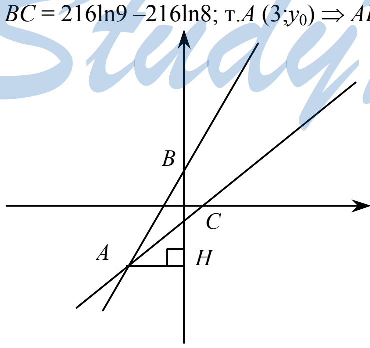
$f'(x_0) = 8\ln 9\cdot 9^{x-2} = 72\ln 9$, $g'(x_0) = 9\ln 8\cdot 8 = 72\ln 8$;

$f(x_0) = 72$, $g(x_0) = 72$;

$\Rightarrow y_{кас.1} = 72\ln 9x - 216\ln 9 + 72$, $y_{кас.2} = 72\ln 8 - 216\ln 8 + 72$;

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC\cdot AH$; т.$B$ $(0;72 - 216\ln 9)$; т.C $(0;72 - 216\ln 8)$;

$BC = 216\ln 9 - 216\ln 8$; т.A $(3;y_0) \Rightarrow AH = 3$;



$\Rightarrow S_{ABC} = 324(\ln 9 - \ln 8)$.

Ответ: $324(\ln 9 - \ln 8)$.

4.5.D11. а) $f(x) = 5x - 12e^{9-\sqrt{x^2+72}}$, $M(-3;10) \in F(x)$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$;
$F'(x_0) = f(-3) = 5(-3) - 12e^{9-\sqrt{x^2+72}} = -15 - 12 = -27$;

т.к. т. $M \in F(x) \Rightarrow F(-3) = 10 \Rightarrow y_{кас.} = -27(x+3) + 10 = -27x - 71$.
Ответ: y = –27x – 71.
б) $f(x) = 4x - 15e^{10-\sqrt{x^2+75}}$, $M(-5;11) \in F(x)$.

$y_{кас.}(F(x)) = F'(x_0)(x-x_0) + F(x_0)$, $x_0 = -5$;
$F'(x_0) = f(x_0) = -20 - 15 = -35$,
$F(x_0) = 11$
$\Rightarrow y_{кас.} = -35(x+5) + 11 = -35x - 164$. Ответ: y = –35x – 164.
4.5.D12. а) $f(x) = e^{3x+4}$.
$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 3e^{3x_0+4}$, $f(x_0) = e^{3x_0+4}$;
$\Rightarrow y_{кас.} = 3e^{3x_0+4} \cdot x - 3x_0 \cdot e^{3x_0+4} + e^{3x_0+4}$;

т.к. т.$O(0;0) \in y_{кас.} \Rightarrow e^{3x_0+4}(1 - 3x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$; $f(x_0) = e^5$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ e^5\right)$.

б) $f(x) = e^{4x+7}$.
$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 4e^{4x_0+7}$, $f(x_0) = e^{4x_0+7}$;
$\Rightarrow y_{кас.} = 4e^{4x_0+7} \cdot x - 4x_0 \cdot e^{4x_0+7} + e^{4x_0+7}$;

т.к. т.$O(0;0) \in y_{кас.} \Rightarrow e^{4x_0+7}(1 - 4x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$; $f(x_0) = e^8$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\ e^8\right)$.

§ 6. Логарифмическая функция

Уровень А.

4.6. A01. а) $f(x) = -x + 5 + 3\ln(x+2)$; $y_{кас.} \parallel OX$, x_0 — ?

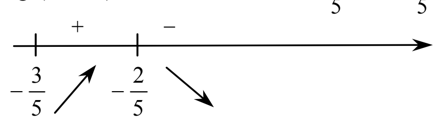
По условию получаем: $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = -1 + \frac{3}{x+2} = 0 \Rightarrow x_0 = 1$.

Ответ: $x_0 = 1$.
б) $f(x) = x + 4 - 5\ln(x+5)$; $y_{кас.} \parallel OY$, x_0 — ?

По условию получаем: $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 1 - \frac{5}{x+5} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. Ответ: $x_0 = 0$

4.6. A02. а) $f(x) = -\log_5(5x+3)$. Сравнить F(1) и F(7).
Найдем промежутки возрастания и убывания функции $F(x)$:
$F'(x) = f(x) = 0$,

$-\log_5(5x+3) = 0$; $5x + 3 = 1$; $x = -\frac{2}{5}$, $x > -\frac{3}{5}$.



$F(x)$ убывает на $\left[-\frac{2}{5};+\infty\right] \Rightarrow F(7) < F(1)$.

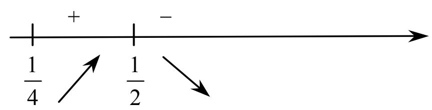
Ответ: F(7) < F(1).

б) $f(x) = -\log_9(4x - 1)$. Сравнить $F(3)$ и $F(9)$.

Найдем промежутки возрастания и убывания функции $F(x)$:

$f(x) = -\log_9(4x - 1) = 0$; $4x - 1 = 1$;

$x = \frac{1}{2}$. $4x - 1 \geq 0$; $x > \frac{1}{4}$;



$F(x)$ убывает на $\left[\frac{1}{2};+\infty\right] \Rightarrow F(3) > F(9)$.

Ответ: F(3) > F(9).

4.6. А03. а) $f(x) = \ln(x - 3) + 2$, $x_0 = 4$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = \frac{1}{x-3} = 1$, $f(x_0) = 2 \Rightarrow y_{кас.} = x - 2$.

Ответ: y = x – 2.

б) $f(x) = \ln(x + 6) - 3$, $x_0 = -5$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = \frac{1}{x+6} = 1$, $f(x_0) = -3 \Rightarrow y_{кас.} = x + 2$.

Ответ: y = x + 2.

4.6. А04. а) $f(x) = 1 - x - 3\ln(x - 1)$, $x_0 = 2$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$f'(x_0) = -1 - \frac{3}{x_0 - 1} = -4$, $f(x_0) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow y_{кас.} = -4x + 7$. Ответ: y = –4x + 7.

б) $f(x) = -1 - x + 4\ln(x + 3)$, $x_0 = -2$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$f'(x_0) = -1 + \frac{4}{x_0 + 3} = 3$, $f(x_0) = -1 + 2 = 1 \Rightarrow y_{кас.} = 3x + 7$. Ответ: y = 3x + 7.

4.6. А05. а) $y(x) = \frac{5x^2}{2} + \frac{4}{5}\ln\left(x + \frac{4}{5}\right) - 3$. $y'(x) = 5x + \frac{4}{5\left(x + \frac{4}{5}\right)} = 0$;

$25x^2 + 20x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{25} + \frac{4}{5}\cdot\ln\frac{2}{5} - 3 = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}\ln\frac{2}{5}$.

Ответ: $-\frac{13}{5} + \frac{4}{5}\ln\frac{2}{5}$.

б) $y(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln\left(x + \frac{4}{3}\right) - 2$.

$y'(x) = 3x + \frac{4}{3x + 4} = 0$;

$9x^2 + 12x + 4 = 0$, $(3x + 2)^2 = 0$, $x = -\frac{2}{3}$;

$y\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\cdot\ln\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\cdot\ln\frac{2}{3}$.

4.6. А06. а) $y(x) = x^2 + 6\sqrt{x+6} + 4\ln(x-2)$, $x_0 = 3$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 2x_0 + \frac{3}{\sqrt{x_0+6}} + \frac{4}{x_0-2} = 6 + 1 + 4 = 11$;

$f(x_0) = 9 + 18 = 27 \Rightarrow y_{кас.} = 11x - 6$.

Ответ: y = 11x – 6.

б) $y(x) = -3x^2 + 2\sqrt{x-1} - \ln(x-1)$, $x_0 = 2$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = -6x_0 + \frac{1}{\sqrt{x_0-1}} - \frac{1}{x_0-1} = -12 + 1 - 1 = -12$,;

$f(x_0) = -12 + 2 = -10 \Rightarrow y_{кас.} = -12x + 14$.

Ответ: y = –12x + 14.

Уровень В.

4.6. В01.

а) $f(x) = (x-5)\log_4(33-4x)$, $F(4) - F(3)$ — сравнить с нулем.

$F'(x) = f(x) < 0$ на $[3;4] \Rightarrow F(x)$ убывает на $[3;4] \Rightarrow F(3) > F(4) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(4) - F(3) < 0$.

Ответ: F(4) – F(3) < 0;

б) $f(x) = (x-3)\log_2(13-3x)$, $F(-2) - F(-5)$ — сравнить с нулем.

$f(x) = 0$: $x = 3$, $x = 4$

$f(x) < 0$ при $x < 3$, $F(x)$ убывает на $[-5;-2] \Rightarrow F(-5) > F(-2) \Rightarrow$;

$\Rightarrow F(-2) - F(-5) < 0$. Ответ: F(–2) – F(–5) < 0.

4.6. В02. а) $f(x) = (4x-1)\ln(5x+3)$, $x_0 = -\frac{2}{5}$, tgα-?

$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 4\ln(5x_0+3) + \frac{4x_0-1}{5x_0+3}\cdot 5 = -13 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = -13$.

Ответ: tgα = –13.

б) $f(x) = (5x-3)\ln(3x+5)$, $x_0 = -\frac{4}{3}$, tgα-?

$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 5\ln(3x+5) + \frac{5x-3}{5+3x}\cdot 3 = -29 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = -29$.

Ответ: tgα = –29.

4.6. В03. а) $f(x) = 4x + 3 - \ln 2\cdot\log_2(3x+1)$, $\alpha = arc\mathrm{tg}3$, x_0-?

$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) = 3$; $f'(x_0) = 4 - \frac{3}{3x+1} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

б) $f(x) = 3x - 2 - \ln 4\cdot\log_4(3x+2)$, $\alpha = arc\mathrm{tg}2$, x_0-?

$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) = 2$

$f'(x_0) = 3 - \frac{3}{3x_0+2} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

4.6.В04. а) $f(x) = \ln\frac{(x-4)e^{3x}}{x+1}$; x = 5.

f(x) = $\ln(x-4) + \ln e^{3x} - \ln(x+1) = \ln(x-4) + 3x - \ln(x+1)$,

$f'(x) = \frac{1}{x-4} + 3 - \frac{1}{x+1}$;

$f'(5) = 1 + 3 - \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$. Ответ: $\frac{23}{6}$.

б) $f(x) = \ln\frac{(x-1)e^{4x}}{x+4}$; x = 3.

f(x) = $\ln(x-1) + 4x - \ln(x+4)$; $f'(x) = \frac{1}{x-1} + 4 - \frac{1}{x+4}$; $f'(3) = \frac{61}{14}$. Ответ: $\frac{61}{14}$.

4.6.В05. а) $f(x) = -x - 3 + 5\ln(3x-4)$, $y_{кас.} \parallel y = 14x - 20$.

По условию, угловой коэффициент $y_{кас.}$ и y равны $\Rightarrow f'(x_0) = 14$,

$f'(x_0) = -1 + \frac{15}{3x_0-4} = 14 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{3}$;

$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3} - 3 = -\frac{14}{3} \Rightarrow y_{кас.} = 14x - 28$.

Ответ: y = 14x – 28.

б) $f(x) = -x - 1 - 5\ln(2x+3)$, $y_{кас.} \parallel y = -11x - 22$.

$f'(x_0) = -11$, $f'(x_0) = -1 - \frac{10}{2x_0+3} = -11 \Rightarrow x_0 = -1$;

$f(x_0) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y_{кас.} = -11x - 11$.

Ответ: y = –11x – 11.

4.6.В06. а) $y(x) = 8x^2 + \ln(4x+9) - 3$.

$y'(x) = 16x + \frac{4}{4x+9}$; $y''(x) = 16 - \frac{16}{(4x+9)^2} = 0$;

$\begin{cases}(4x+9)^2 = 1\\ 4x+9 > 0\end{cases} \Rightarrow 4x + 9 = 1 \Rightarrow x = -2.$

В точке x = –2 вторая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, x = –2 — точка минимума y′(x).

y(–2) = 29. Ответ: 29.

б) $y(x) = 2x^2 + \ln(2x+9) - 2$

$y'(x) = 4x + \frac{2}{2x+9}$; $y''(x) = 4 - \frac{4}{(2x+9)^2}$; y′′(x) = 0;

$4 - \frac{4}{(2x+9)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases}(2x+9)^2 = 1\\ 2x+9 > 0\end{cases} \Rightarrow 2x + 9 = 1 \Rightarrow x = -4.$

В точке x = –4 вторая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, x = –4 — точка минимума y′(x).

y(–4) = 30. Ответ: 30.

4.6.B07. а) $y(x)=\ln((3x-2)(4-x)=\ln(-3x^2+14x-8)$;

$y'(x)=\frac{1}{14x-3x^2-8}\cdot(-6x+14)$; $y'(2)=\frac{1}{14\cdot 2-3\cdot 4-8}\cdot(-6\cdot 2+14)=\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25

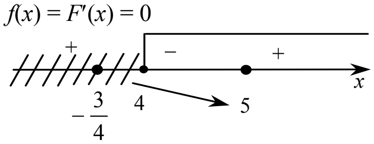
б) $y(x)=\ln((3x-4)(10-3x))=\ln(42x-9x^2-40)$;

$y'(x)=\frac{1}{42x-9x^2-40}\cdot(-18x+42)$;

$y'(3)=\frac{1}{42\cdot 3-9\cdot 27-40}\cdot(-18\cdot 3+42)=\frac{1}{117}\cdot 30=\frac{10}{39}$. Ответ: $\frac{10}{39}$

4.6. B08. а) $f(x)=(4x+3)\ln(x-4)$. Сравнить $F(4;4)$ и $F(4;9)$.

$f(x)=F'(x)=0$

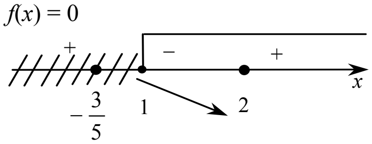


F(x) убывает на (–4; 5) $\Rightarrow$ F(4, 4) > F(4, 9). Ответ: F(4; 4) > F(4, 9).

б) $f(x)=(5x+3)\ln(x-1)$. Сравнить $F(1, 1)$ и $F(1, 3)$.

$F'(x)=f(x)$

$f(x)=0$



x > 1. $F(x)$ убывает на (1, 2] $\Rightarrow F(1;1)>F(1;3)$. Ответ: F(1, 1) > F(1,3).

4.6. B09. а) $f(x)=-8-3\sqrt[3]{4+3x}-4\ln(-x)$, $x_0=-1$.

$y_{\text{кас.}}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f'(x)=-3\left(4+3x\right)^{-\frac{2}{3}}-\frac{4}{x}$;

$f'(x_0)=-3+4=1$; $f(x_0)=-8-3=-11$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}}=x-10$. Ответ: y = x – 10;

б) $f(x)=5+\sqrt[5]{6+5x}-\ln(-x)$, $x_0=-1$.

$f'(x_0)=\left(6+5x_0\right)^{-\frac{4}{5}}-\frac{1}{x_0}=1+1=2$; $f(x_0)=5+1=6$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}}=2x+8$. Ответ: y = 2x + 8.

4.6. B10. а) $f(x)=7x+\ln(3x-2)$, $x_0=1$.

$y_{\text{кас.}}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f'(x_0)=7+\frac{3}{3x-2}=7+3=10$;

$f(x_0)=7\Rightarrow y_{\text{кас.}}=10x-3$.

Ответ: y = 10x – 3.

б) $f(x)=3x+\ln(4x+5)$, $x_0=-1$.

$y_{\text{кас.}}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f'(x_0)=3+\frac{4}{4x_0+5}=3+4=7$;

$f(x_0)=-3\Rightarrow y_{\text{кас.}}=7x+4$.

Ответ: y = 7x + 4.

4.6. B11. а) $f(x) = x^3\ln(3-x)$, $x_0 = 2$.

$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 3x_0{}^2\cdot\ln(3-x_0) - \dfrac{x_0^3}{3-x_0} = -8$; $f(x_0) = 0$;

$\Rightarrow y_{кас.} = -8(-x-2) = -8x + 16$. Ответ: $y = -8x + 16$.

б) $f(x) = x^2\ln(5-x)$, $x_0 = 4$;

$y_{кас.} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 2x_0\cdot\ln(5-x_0) - \dfrac{x_0^2}{5-x_0} = -16$; $f(x_0) = f(4) = 0$;

$\Rightarrow y_{кас.} = -16(x-4) = -16x + 64$.

Ответ: $y = -16x + 64$.

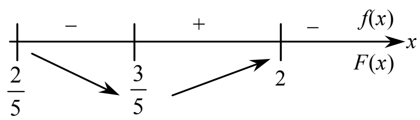
4.6. B12. а) $y(x) = \dfrac{2-x}{\log_4(5x-2)}$, $F(y(x))$, сравнить $F\left(\dfrac{21}{50}\right)$ и $F\left(\dfrac{29}{50}\right)$.

Найдем промежутки возрастания и убывания $F(x)$:

$F'(x) = y(x) = 0$;

$y(x) = \dfrac{2-x}{\log_4(5x-2)} = 0$;

$x = 2$.



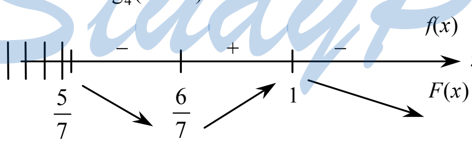
на $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{30}{50}\right)$ $F(x)$ убывает $\Rightarrow F\left(\dfrac{21}{50}\right) > F\left(\dfrac{29}{50}\right)$.

Ответ: $F\left(\dfrac{21}{50}\right) > F\left(\dfrac{29}{50}\right)$.

б) $f(x) = \dfrac{1-x}{\log_4(7x-5)}$, сравнить $F\left(\dfrac{3}{4}\right)$ и $F\left(\dfrac{7}{9}\right)$.

Найдем промежутки возрастания и убывания $F(x)$: $F'(x) = f(x)$;

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1-x}{\log_4(7x-5)} = 0$;



$\dfrac{3}{4} < \dfrac{7}{9} \in \left(\dfrac{5}{7};\dfrac{6}{7}\right)$, на котором $F(x)$ убывает, $\dfrac{3}{4} < \dfrac{7}{9} \Rightarrow F\left(\dfrac{3}{4}\right) > F\left(\dfrac{7}{9}\right)$.

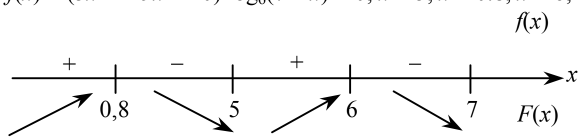
Ответ: $F\left(\dfrac{3}{4}\right) > F\left(\dfrac{7}{9}\right)$.

Уровень С.

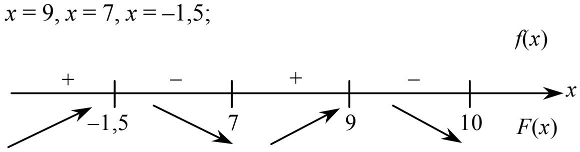
4.6. C01. а) $F(1)$ и $F(2)$, если: $F'(x) = f(x) = (5x^2 - 29x + 20)\log_6(7-x)$.

Найдем промежутки возрастания $F(x)$:

$f(x) = (5x^2 - 29x + 20)\cdot\log_6(7 - x) = 0$; $x = 5$, $x = 0.8$, $x = 6$;



$7 - x > 0$, $x < 7$.
$F(x)$ убывает на $[0.8;5] \Rightarrow F(1) > F(2)$.
Ответ: F(1) > F(2).
б) $f(x) = (2x^2 - 11x - 21)\log_3(10 - x)$, $F(2)$ и $F(4)$.
$(2x^2 - 11x - 21)\cdot\log_3(10 - x) = 0$;
$x = 9$, $x = 7$, $x = -1{,}5$;



$10 - x > 0$, $x < 10$.
$F(x)$ убывает на $[-1.5;7] \Rightarrow F(2) > F(4)$.
Ответ: F(2) > F(4).
4.6.C02. а) $f(x) = \ln3\cdot\log_{6x-9}(5x - 9)$, $x_0 = 2$, $y_{\text{кас.}} = kx + b$, k-?
$k = f'(x_0)$;

$$f(x) = \ln3\cdot\frac{\ln(5x-9)}{\ln(6x-9)};$$

$$f'(x) = \ln3\cdot\left(\frac{\ln(6x-9)\cdot\frac{5}{5x-9} - \ln(5x-9)\cdot\frac{6}{6x-9}}{\ln^2(6x-9)}\right);$$

$$f'(2) = \ln3\cdot\left(5\ln3\cdot\frac{1}{\ln3\cdot\ln3}\right) = 5.$$

Ответ: 5.
б) $f(x) = \ln5\cdot\log_{7x-16}(6x - 17)$, $x_0 = 3$, k-?
$k = f'(x_0)$;

$$f(x) = \ln5\cdot\frac{\ln(6x-17)}{\ln(7x-16)};\ f'(x) = \ln5\cdot\left(\frac{\ln(7x-16)\cdot\frac{6}{6x-17} - \ln(6x-17)\cdot\frac{7}{7x-16}}{\ln^2(7x-16)}\right);$$

$f'(3) = \ln5\cdot\left(\frac{6\cdot\ln5}{\ln^2 5}\right) = 6$. Ответ: 6.
4.6.C03. а) $f(x) = e^{x-3}$, $x_0 = 3$; $g(x) = -4\ln(x + 6)$, $x_0 = -5$.
$f'(x_0) = e^{x_0-3} = 1$;
$f(x_0) = 1 \Rightarrow y'_{\text{кас.}} = x - 2$; $g'(x_0) = \frac{-4}{x+6} = -4$; $g(x_0) = 0 \Rightarrow y''_{\text{кас.}} = -4x - 20$;
$\Rightarrow y' = y''$, $x - 2 = -4x - 20 \Rightarrow x = 3{,}6$. Ответ: x = –3,6.

б) $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$, $x_0 = 2$; $g(x) = 11\ln(x-9)$, $x_0 = 10$.

$f'(x_0) = e^{x_0-2} = 1$;

$f(x_0) = 1 \Rightarrow y_{\text{кас.}} = x - 1$; $g'(x_0) = \dfrac{11}{x-9} = 11$; $g(x_0) = 0 \Rightarrow y''_{\text{кас.}} = 11x - 110$;

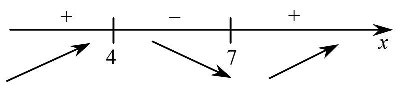
$\Rightarrow x - 1 = 11x - 110 \Rightarrow x = 10{,}9$.

Ответ: $x = \dfrac{109}{10}$.

4.6.С04. а) $y(x) = (x-7)\cdot\ln(x-3)$.

$F'(x) = y(x)$. Найдем max $F(x)$.

$y(x) = (x-7)\ln(x-3) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = 4 \end{array}\right.$



т. max: $x_0 = 4$

$\Rightarrow y'(x) = \ln(x-3) + \dfrac{x-7}{x-3}$; $y'(4) = \dfrac{-3}{1} = -3$.

Ответ: –3.

б) $y(x) = (x+3)\cdot\ln(x+5)$.

$F'(x) = y(x)$.

$y(x) = (x+3)\ln(x+5) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -4 \end{array}\right.$

т. max: $x_0 = -4$

$\Rightarrow y'(x) = \ln(x+5) + \dfrac{x+3}{x+5} \Rightarrow y'(-4) = -1$.

Ответ: –1.

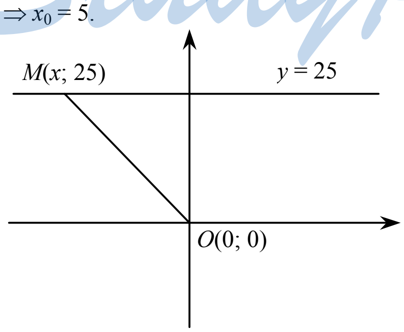
4.6.С05. а) $f(x) = 5 + 4x + 4\ln 2\cdot\log_2(6-x)$.

$y_{\text{кас.}} \perp OY \Rightarrow y_{\text{кас.}} \parallel OX$

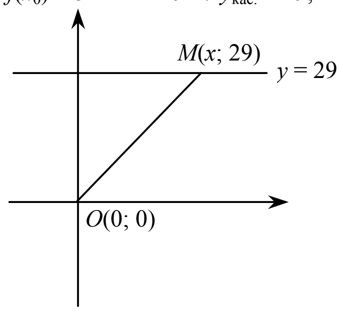
$\Rightarrow$ по условию $f'(x_0) = 0$,

$f'(x_0) = 4 - \dfrac{4\ln 2}{(6-x)\cdot\ln 2} = 4 - \dfrac{4}{6-x} = 0$;

$\Rightarrow x_0 = 5$.



$y_{кас.} = f'(x_0)(x–x_0) + f(x_0)$;
$f(x_0) = 5 + 20 = 25 \Rightarrow y_{кас.} = 25$;
$MO = 25\sqrt{2}$; $MO = \sqrt{x^2+625} = 25\sqrt{2}$;
$\Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = -25 \end{array}\right. \Rightarrow$т. (25;25), т. (–25;25).
Ответ: (25; 25); (–25; 25).
б) $f(x) = 5 + 6x + 6\ln3\cdot\log_3(5 - x)$.
$f'(x_0) = 0, f'(x_0) = 6 - \dfrac{6}{5-x_0} = 0$; $\Rightarrow x_0 = 4$.
$f(x_0) = 5 + 24 = 29 \Rightarrow y_{кас.} = 29$,



$MO = 29\sqrt{2} = \sqrt{x^2+29^2}$;
$\Rightarrow x^2 = 29^2 \Rightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x = 29, \\ x = -29 \end{array}\right. \Rightarrow$т. A (29;29), т. B (–29;29).
Ответ: (29; 29); (–29; 29).
4.6.C06. а) $f(x) = 4x^2 - 4x + 5 + \ln10\,lg(2x + 3)$, $x_0 = -1$.
$y_{кас.} = f'(x_0)(x–x_0) + f(x_0)$;
$f'(x_0) = 8x - 4 + \dfrac{2}{2x+3} = -8 - 4 + 2 = -10$; $f(x_0) = 4 + 4 + 5 = 13$;
$\Rightarrow y_{кас.} = -10x + 3$;
$\Rightarrow$ т. $\cap$ с OX и OY: т. A (0;3), т. B $\left(\dfrac{3}{10};0\right)$. Ответ: (0; 3); $\left(\dfrac{3}{10};\ 0\right)$.
б) $f(x) = 16x^2 - 4x - 3 + \ln10\,lg(4x - 3)$, $x_0 = 1$.
$f'(x_0) = 32x_0 - 4 + \dfrac{4}{4x-3} = 32 - 4 + 4 = 32$; $f(x_0) = 16 - 4 - 3 = 9$;
$\Rightarrow y_{кас.} = 32x - 23$;
$\Rightarrow$ т. $\cap$ с OX и OY: т. A (0;–23), т. B $\left(\dfrac{23}{32};0\right)$. Ответ: (0; –23); $\left(\dfrac{23}{32};0\right)$.

4.6.C07. а) $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x}$; f(3) + f′(5) = F(1).
F'(x) = f(x); $f(3) + f'(5) = F(1)$;

$f(3)=\dfrac{7}{12}$; $f'(5)=\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{50}$;

$\Rightarrow F(1)=\dfrac{1}{50}+\dfrac{7}{12}=\dfrac{181}{300}$.

$\int\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2x}\right)dx=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}\ln|x|+C$; $F(1)=\dfrac{3}{4}+C=\dfrac{181}{300}$; $C=-\dfrac{11}{75}$;

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{\ln|x|}{2}-\dfrac{11}{75}$.

Ответ: $F(x)=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{\ln|x|}{2}-\dfrac{11}{75}$.

б) $f(x)=\dfrac{5x-2}{6x}$; $f(2)+f'(3)=F(1)$, $F(x)$-?

$f(2)=\dfrac{2}{3}$; $f'(3)=\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{1}{27}$;

$\Rightarrow f(2)+f'(3)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{19}{27}=F(1)$.

$F(x)=\int\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3}x\right)dx=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{\ln|x|}{3}+C$; $F(1)=\dfrac{5}{6}+C=\dfrac{19}{27}$;

$\Rightarrow C=-\dfrac{7}{54}$; $\Rightarrow F(x)=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{\ln|x|}{3}-\dfrac{7}{54}$. Ответ: $F(x)=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{\ln|x|}{3}-\dfrac{7}{54}$.

4.6.С08. а) $f(x)=9-x+\ln(2x+5)$, $x_0=-2$.

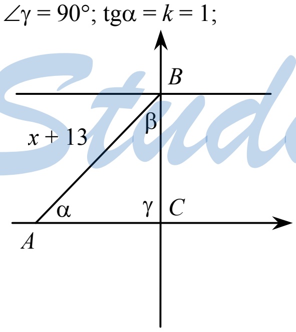
$y_{кас.}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$f'(x_0)=-1+\dfrac{2}{2x+5}=-1+2=1$;

$f(x_0)=9+2=11$;

$\Rightarrow y_{кас.}=x+13=kx+b$;

$\angle\gamma=90°$; $\operatorname{tg}\alpha=k=1$;

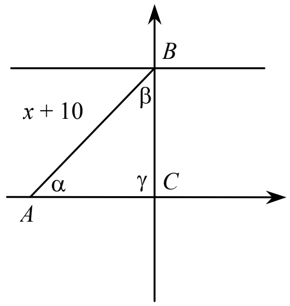


$\Rightarrow \alpha=45° \Rightarrow \angle\beta=45°$. Ответ: 90°; 45°; 45°.

б) $f(x)=4-5x+3\ln(2x+3)$, $x_0=-1$.

$f'(x_0)=-1+\dfrac{6}{2x+3}=-5+6=1$; $f(x_0)=4+5=9$;

$\Rightarrow y_{кас.}=x+10$; $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент



$y = x + 10$; $\operatorname{tg}\alpha = 1$;

$\Rightarrow \angle\alpha = 45° \Rightarrow \angle\beta = 45°$.

Ответ: 90°; 45°; 45°.

4.6.С09. а) $f(x) = 3 + \ln(4x + 21)$, $(x_0;3)$.

$3 + \ln(4x + 21) = 3$;

$\Rightarrow \ln(4x + 21) = 0$;

$\Rightarrow x_0 = -5$;

$f'(x_0) = \dfrac{4}{4x+21} = 4$;

$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $y_{\text{кас.}} = 4x + 23$.

Ответ: y = 4x + 23.

б) $f(x) = 3 - 5\ln(3x + 4)$, $(x_0;3)$.

$3 - 5\ln(3x + 4) = 3$; $\ln(3x + 4) = 0$; $x_0 = -1$.;

$f'(x_0) = \dfrac{-15}{3x_0+4} = -15$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -15(x + 1) + 3 = -15x - 12$. Ответ: y = –15x – 12.

4.6.С10. а) $f(x) = \ln(3x + 10) - \ln(7x + 22)$; $y_{\text{кас.}} \cap OX =$ т. М; т. М $(x_0;0)$.

$\Rightarrow \ln\dfrac{3x+10}{7x+22} = 0$;

$\Rightarrow x_0 = -3$;

$f'(x_0) = \dfrac{3}{3x+10} - \dfrac{7}{7x+22} = 3 - 7 = -4$;

$f(x_0) = 0 \Rightarrow y_{\text{кас.}} = -4(x + 3) = -4x - 12$. Ответ: y = –4x – 12.

б) $f(x) = \ln(8x + 9) - \ln(2x + 3)$; т. М $(x_0;0)$.

$f(x) = \ln\dfrac{8x+9}{2x+3} = 0$;

$\Rightarrow x = -1$; $f'(x_0) = \dfrac{8}{8x_0+9} - \dfrac{2}{2x_0+3} = 8 - 2 = 6$;

$y_{\text{кас.}} = 6(x + 1) + 0 = 6x + 6$. Ответ: y = 6x + 6.

4.6.С11. а) $f(x) = 1 + \dfrac{7}{2}\ln(2x-5)^2$, $x_0 = 2$.

$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f(x) = 1 + 7\ln(|2x - 5|)$; $f(x_0) = 1$; $f'(x_0) = \dfrac{14}{2x-5} = -14$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -14x + 29$, т. $\cap$ с OX и OY: т. A (0;29), т. B $\left(\frac{29}{14};0\right)$.

Ответ: (0; 29); $\left(\frac{29}{14};0\right)$.

б) $f(x) = 7 + \frac{9}{2}\ln(3x+5)^2$, $x_0 = -2$.

$f'(x_0) = \frac{27}{3x+5} = -27$; $f(x_0) = 7$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -27x - 47$;

т. $\cap$ с OX и OY: т. A (0;–47); т. B $\left(-\frac{47}{27};0\right)$. Ответ: (0; –47); $\left(-\frac{47}{27};0\right)$.

4.6.C12.

а) $f(x) = 5 - \frac{1}{2}\ln(4x+5)^2$, $x_0 = -1$.

$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = -\frac{4}{4x+5} = -4$; $f(x_0) = 5$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -4x + 1$;

т. A(0;1), т. B$\left(\frac{1}{4};0\right)$ — т. $\cap$ с OX и OY.

Ответ: (0; 1); $\left(\frac{1}{4};0\right)$.

б) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\ln(2x-1)^2$, $x_0 = 1$.

$f'(x_0) = -\frac{2}{2x-1} = -2$; $f(x_0) = 3$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -2x + 5$;

$\Rightarrow$ т. A(0;5), т. B$\left(\frac{5}{2};0\right)$ — т. $\cap$ с OX и OY. Ответ: (0; 5); $\left(\frac{5}{2};0\right)$.

Уровень D.

4.6.D01.

а) $f(x) = \ln\frac{5x-12}{4x-15}$, $x_0 = -3$.

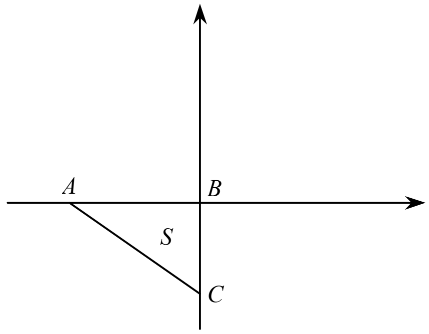
$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$;

$f(x) = \ln(5x - 12) - \ln(4x - 15)$;

$f'(x_0) = \frac{5}{5x-12} - \frac{4}{4x-15} = -\frac{1}{27}$; $f(x_0) = 0$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -\frac{x}{27} - \frac{1}{9}$;

A (–3;0), C $\left(0;-\frac{1}{9}\right)$;



$\Rightarrow AB = 3;\ BC = \frac{1}{9}$.

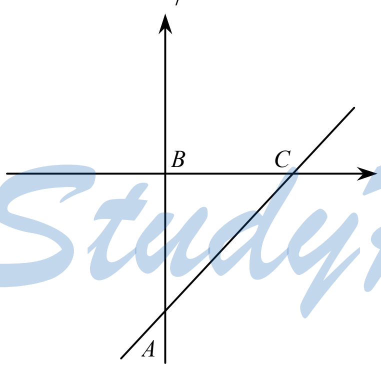
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$. Ответ: $S = \frac{1}{6}$.

б) $f(x) = \ln \frac{5x+6}{2x+15}$, $x_0 = 3$.

$f'(x_0) = [\ln(5x+6) - \ln(2x+15)]' = \frac{5}{5x+6} - \frac{2}{2x+15} = \frac{5}{21} - \frac{2}{21} = \frac{1}{7}$;

$f(x_0) = 0 \Rightarrow y_{\text{кас.}} = \frac{1}{7}(x-3) = \frac{x}{7} - \frac{3}{7}$; $A\left(0; -\frac{3}{7}\right)$, $C\,(3;0)$

$\Rightarrow BC = 3;\ AB = \frac{3}{7}$.



$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$. Ответ: $S = \frac{9}{14}$.

4.6.D02. а) $f(x) = \ln 81 \cdot \log_3(3x-2) - 1$, $g(x) = \ln \frac{1}{125} \cdot \log_5(5-4x) + 2$ ю

x_1 — точка касания
x_2 — точка касания
$k_1 = k_2$, т. к. касательные параллельны $\Rightarrow f'(x) = g'(x)$;

$f'(x) = \dfrac{\ln 81 \cdot 3}{(3x-2)\ln 3} = \dfrac{12}{3x-2}$; $g'(x) = \dfrac{-3\cdot(-4)\cdot\ln 5}{(5-4x)\ln 5} = \dfrac{12}{5-4x}$;

$\Rightarrow 3x_0 - 2 = 5 - 4x_0 \Rightarrow x_0 = 1$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}1} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = 12x - 13$;

$y_{\text{кас.}2} = g'(x_0)(x-x_0) + g(x_0) = 12x - 10$;

$\Rightarrow$ (1) $12x - y - 13 = 0$,

(2) $12x - y - 10 = 0$,

$P(y_1;y_2) = \dfrac{|-13+10|}{\sqrt{12^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{145}}$. Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{145}}$.

б) $f(x) = \ln 64 \cdot \log_4(4x-7) - 4$, $g(x) = \ln\dfrac{1}{16}\cdot\log_2(7-3x) - 3$.

$f'(x) = g'(x)$, (1)

$f'(x) = \dfrac{3\ln 4\cdot 4}{(4x-7)\ln 4} = \dfrac{12}{4x-7}$; $g'(x) = \dfrac{-4\cdot\ln 2\cdot(-3)}{(7-3x)\ln 2} = \dfrac{12}{7-3x}$;

$\Rightarrow$ по (1) $4x - 7 = 7 - 3x \Rightarrow x = 2$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}1} = 12x - 28$: $12x - y - 28 = 0$;

$y_{\text{кас.}2} = 12x - 27$: $12x - y - 27 = 0$;

$\Rightarrow P(y_1;y_2) = \dfrac{|-28+27|}{\sqrt{12^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{145}}$. Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{145}}$.

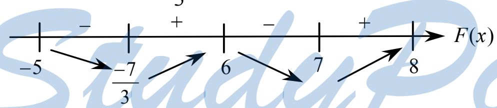
4.6.D03.

а) $F'(x) = f(x) = (3x^2 - 11x - 42)\cdot\log_{\frac{3}{5}}(8-x)$, $\dfrac{F(4)-F(5)}{F(-4)-F(-5)}$ — сравнить с нулем.

Найдем промежутки возрастания и убывания функции $F(x)$:

$F'(x) = f(x) = (3x^2 - 11x - 42)\cdot\log_{\frac{3}{5}}(8-x) = 0$,

$x = 7$, $x = 6$, $x = -\dfrac{7}{3}$.



Из данного рисунка видно, что $F(-5) > F(-4)$; $F(4) < F(5)$

$\Rightarrow F(4) - F(5) < 0$; $F(-4) - F(-5) < 0$;

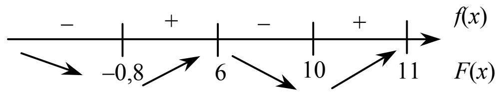
$\Rightarrow \dfrac{F(4)-F(5)}{F(-4)-F(-5)} > 0$. Ответ: $\dfrac{F(4)-F(5)}{F(-4)-F(-5)} > 0$.

б) $\dfrac{F(2)-F(5)}{F(-2)-F(-5)}$.

$F'(x) = f(x) = (5x^2 - 26x - 24)\cdot\log_{\frac{2}{7}}(11-x) = 0$,

(аналогично п. а)

$x = 10$, $x = 6$, $x = -0.8$.



Находим, что $F(2) < F(5)$ и $F(-5) > F(-2)$

$\Rightarrow \dfrac{F(2)-F(5)}{F(-2)-F(-5)} > 0$.

Ответ: $\dfrac{F(2)-F(5)}{F(-2)-F(-5)} > 0$.

4.6.D04.

а) $f(x) = 4\ln(3x + 4) - 1$, $g(x) = 3\ln(4x + 5) - 4$.

$y_{\text{кас}.f} \parallel y_{\text{кас}.g} \Rightarrow f'(x_1) = g'(x_2)$;

причем $x_1 = x_2 = x_0$;

$f'(x_0) = \dfrac{12}{3x_0+4}$; $g'(x_0) = \dfrac{12}{4x_0+5}$;

$\Rightarrow 3x_0 + 4 = 4x_0 + 5 \Rightarrow x_0 = -1$;

$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$;

$f(x_0) = -1$; $g(x_0) = -4$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = 12x + 11$;

$y_{\text{кас.}} = 12x + 8$.

Ответ: y = 2x + 11; y = 12x + 8.

б) $f(x) = 3\ln(2x + 3) - 5$, $g(x) = 2\ln(3x + 4) + 2$.

$f'(x_0) = g'(x_0)$;

$f'(x_0) = \dfrac{6}{2x+3}$,

$g'(x_0) = \dfrac{6}{3x+4}$;

$\Rightarrow 2x_0 + 3 = 3x_0 + 4 \Rightarrow x_0 = -1$;

$\Rightarrow f(x_0) = -5$,

$g(x_0) = 2$;

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = 6x + 1$;

$y_{\text{кас.}} = 6x + 8$.

Ответ: y = 6x + 1; y = 6x + 8.

4.6.D05.

а) $f(x) = 16x^2 + 8x + \ln 10 \cdot lg(4x + 3) - 3$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$

$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = 32x_0 + 8 + \dfrac{4}{4x_0+3} = -4$

$f(x_0) = 4 - 4 - 3 = -3$

$\Rightarrow y_{\text{кас.}} = -4x - 5$

расстояние от точки до прямой, если т. (0;0), $y = kx + b$:

$p = \dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{1+16}} = \dfrac{5}{\sqrt{17}}$. б) $f(x) = 25x^2 + 5x + \ln 10 \lg(5x + 3) + 3$.

$x_0 = -\frac{2}{5}$; $y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0) = 50x_0 + 5 + \frac{5}{5x_0+3} = -10$;

$f(x_0) = 4 - 2 + 3 = 5$; $\Rightarrow y_{кас} = -10x + 1$, т.о. (0; 0);

$\Rightarrow \rho(y_{кас}; 0) = \frac{|1|}{\sqrt{1+100}} = \frac{1}{\sqrt{101}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{101}}$.

4.6.D06.

а) $f(x) = 2\ln5\log_5(5x + 1) - 5\ln2\log_2(2x + 1) + 4$.

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $y_{кас} \parallel OX$;

$\Rightarrow f'(x_0) =; 0$

$f'(x_0) = \frac{10}{5x+1} - \frac{10}{2x+1} = 0$; $x_0 = 0$;

$\Rightarrow f(x_0) = 4 \Rightarrow y_{кас} = 4$;

искомая точка $M(t_0; 4)$; $O(0; 0)$;

$\Rightarrow \rho(M; 0) = \sqrt{t^2+16} = 5; \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_0 = 3 \\ t_0 = -3 \end{array}\right.$;

Ответ: (–3; 4); (3; 4).

б) $f(x) = 5\ln6 \cdot \log_6(6x + 1) - 6\ln5 \cdot \log_5(5x + 1) + 6$.

$y_{кас} \parallel OX \Rightarrow f'(x_0) = 0$. $y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$f'(x_0) = \frac{30}{6x+1} - \frac{30}{5x+1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. $f(0) = 6 \Rightarrow y_{кас} = 6$.

т. $M(t_0; 6)$ — искомая т. $O(0; 0)$. $\rho(M; 0) = \sqrt{t^2+36} = 10$;

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -8 \end{array}\right.$.

Ответ: (–8; 6); (8; 6).

4.6.D07.

а) $f(x) = \ln4 \cdot \log_{\frac{5x+49}{x+1}}(25 - 7x)$.

$x_0 = 3$; $y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = kx + b$;

где k — искомое $\Rightarrow$ найти: $f'(x_0)$;

$f(x) = \frac{\ln4\cdot\ln(25-7x)}{\ln\left(\frac{5x+49}{x+1}\right)} = \frac{\ln4\cdot\ln(25-7x)}{\ln(5x+49)-\ln(x+1)}$;

$$f'(x) = \ln4\cdot\frac{-\frac{7}{25-7x}\ln\frac{5x+49}{x+1} - \ln(25-7x)\left(\ln\frac{5x+49}{x+1}\right)'}{\left(\ln\left(\frac{5x+49}{x+1}\right)\right)^2} .=$$

$$= \ln 4 \cdot \frac{-\frac{7}{25-7x}\ln\frac{5x+49}{x+1} - \ln(25-7x)\left(\frac{5}{5x+49}-\frac{1}{x+1}\right)'}{\left(\ln\left(\frac{5x+49}{x+1}\right)\right)^2}\ ;$$

$$f'(3) = \ln 4\frac{-\frac{7}{4}\cdot\ln 16 + \ln 4\cdot\frac{44}{64}}{(\ln 16)^2} = \ln 4\frac{-\frac{7}{4}\cdot 2\ln 4 + \ln 4\cdot\frac{44}{64}}{4\ln^2 4} =$$

$$= -\frac{7}{2\cdot 4} + \frac{11}{64} = -\frac{45}{64}.$$

Ответ: $-\frac{45}{64}$.

б) $f(x) = \ln 2 \cdot \log_{\frac{3x+20}{x+6}}(-18 - 5x)$. $x_0 = -4$; Найти $f'(x_0)$;

$$f(x) = \frac{\ln 2\cdot\ln(-18-5x)}{\ln(3x+20)-\ln(x+6)}\ ;\ f'(x_0) = \ln 2\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\frac{-5}{-18-5x}(\ln(3x+20)-\ln(x+6)) - \ln(-18-5x)\left(\frac{3}{3x+20}-\frac{1}{x+6}\right)}{\ln^2\left(\frac{3x+20}{x+6}\right)}\right);$$

$$\Rightarrow f'(-4) = \frac{\ln 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\cdot\ln 4 - \ln 2\cdot -\frac{1}{8}\right)}{\ln 4\cdot\ln 4} = \frac{\ln 2\cdot\ln 2\left(-5+\frac{1}{8}\right)}{2\cdot\ln 2\cdot\ln 2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}-5\right) = \frac{-39}{32};$$

Ответ: $-\frac{39}{32}$.

4.6.D08.

а) $f(x) = 5x^2 - 2x - 4 + \ln(6x + 7)$.

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. $y_{кас} \parallel y = -6x + 16 \Rightarrow f'(x_0) = -6$

$6 + f'(x_0) = 10x_0 - 2 + \frac{6}{6x_0+7} + 6 = 0$; $30x_0^2 + 47x_0 + 17 = 0$, $x \neq -\frac{6}{7}$;

т.к. x_0 — целое $\Rightarrow x_0 = -1$; $f(x_0) = 5 + 2 - 4 = 3$;

$\Rightarrow y_{кас} = -6x - 3 = kx + b$;

Искомое расстояние до т. $O(0; 0)$ вычисляется по формуле:

$$p = \frac{161}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow p = \frac{3}{\sqrt{1+36}} = \frac{3}{\sqrt{37}}.$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{37}}$.

б) $f(x) = 3x^2 - x + 3 + \ln(4x - 3)$, $y = 9x + 24$.

$f'(x) = 6x - 1 + \frac{4}{4x-3}$;

Пусть $(x_0; f(x_0))$ — точка касания, тогда по условию

$f'(x_0) = 6x_0 - 1 + \dfrac{4}{4x_0 - 3} = 9;$

$$\frac{24x_0^2 - 18x_0 - 4x_0 + 3 - 36x_0 + 27 + 4}{4x_0 - 3} = 0\ ;\ \frac{24x_0^2 - 58x_0 + 34}{4x_0 - 3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{34}{24} \end{array}\right. \\ x_0 \neq \dfrac{3}{4} \end{array}\right.;$$

Т.к. по условию x_0 — целое, то $x_0 = 1$;
Уравнение касательной: $y = 9(x - 1) + f(1)$; $f(1) = 5$; $y = 9x - 4$;

Расстояние от начала координат до этой прямой $l = \dfrac{4}{\sqrt{82}}$.

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{82}}$.

4.6.D09.

а) $f(x) = \ln 9 \cdot \log_3 \dfrac{3x-2}{2x-1}$, $y = 2x - 3$.

$f(x) = \ln 9(\log_3(3x - 2) - \log_3(2x - 1))$;

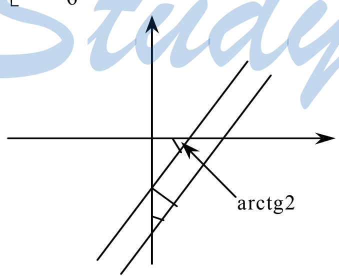
$$f'(x) = \ln 9\left(\frac{\frac{3}{3x-2}}{\ln 3} - \frac{\frac{2}{2x-1}}{\ln 3}\right) = \frac{\ln 9}{\ln 3}\left(\frac{3}{3x-2} - \frac{2}{2x-1}\right) =$$

$$= 2\frac{6x - 3 - 6x + 4}{(3x-2)(2x-1)} = \frac{2}{(3x-2)(2x-1)};$$

По условию $f'(x_0) = 2$, где $(x_0; f(x_0))$ точка касания;

$\dfrac{2}{(3x_0-2)(2x_0-1)} = 2 \Leftrightarrow (3x_0 - 2)(2x_0 - 1) = 1$; $6x_0^2 - 7x_0 - 1 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{1}{6} \end{array}\right.$, но x_0 — целое, значит $x_0 = 1$



Уравнение касательной: $y = 2(x - 1) + f(1)$; $f(1) = 0$; $y = 2x - 2$;
расстояние между этой прямой и $y = 2x - 3$ равно $\cos(\text{arctg}2) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2)+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

б) $f(x) = \ln 49 \cdot \log_7 \dfrac{5x+11}{2x+5}$, $y = 6x + 5$.

$$f'(x) = \frac{\ln 49}{\ln 7}\left(\frac{5}{5x+11} - \frac{2}{2x+5}\right) = 2\frac{3}{(5x+11)(2x+5)};$$

По условию $f'(x_0) = 6$, где $(x_0; f(x_0))$ точка касания.

$\dfrac{6}{(5x_0+11)(2x_0+5)} = 6$; $(5x_0 + 11)(2x_0 + 5) = 1$; $10x_0^2 + 47x_0 + 54 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -\dfrac{27}{10} \end{array}\right.$, но x_0 — целое $\Rightarrow x_0 = -2$.

Уравнение касательной: $y = f'(x_0)(x + 2) + f(x_0)$;
$f'(x_0) = 6$; $f(x_0) = 0$; $y = 6x + 12$.
Расстояние от $y = 6x + 5$ до $y = 6x + 12$ равно $7\cos(\operatorname{arctg}6) =$
$\dfrac{7}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 6)+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{36+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\dfrac{7}{\sqrt{37}}$.

4.6.D10. а) $f(x) = \ln 5 \log_{14-3x} \dfrac{4x-7}{4-x}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln 5}{\ln 14-3x} \cdot (\ln(4x-7) - \ln(4-x))\right)' =$$

$$= \ln 5 \cdot \frac{\ln(14-3x)\left(\dfrac{4}{4x-7} + \dfrac{1}{4-x}\right) + (\ln(4x-7) - \ln(4-x))\dfrac{3}{14-3x}}{\ln^2(14-3x)};$$

Подставляя $x = 3$ получим $f'(3) = \ln 5 \cdot \dfrac{\ln 5 \cdot \dfrac{9}{5} + (\ln 5 - 0)\cdot\dfrac{3}{5}}{\ln^2 5} = \dfrac{12}{5}$. Ответ: $\dfrac{12}{5}$.

б) $f(x) = \ln 5 \log_{40-7x} \dfrac{2x-5}{6-x}$.

$$f'(x) = \ln 5 \frac{\ln(40-7x)\left(\dfrac{2}{2x-5} + \dfrac{1}{6-x}\right) + (\ln(2x-5) - \ln(6-x) \cdot \dfrac{7}{4-7x}}{\ln^2(10-7x)};$$

Подставляя $x = 5$: $f'(5) = \ln 5 \dfrac{\ln 5\left(\dfrac{2}{5}+1\right) + \ln 5 \cdot \dfrac{7}{5}}{\ln^2 5} = \dfrac{14}{5}$. Ответ: $\dfrac{14}{5}$.

4.6.D11. а) $f(x) = (x + 5)\ln(7 - x)$ и $g(x) = (x - 2)\ln(x + 4)$.
На отрезке $[2; 3]$ $f(x) = F'(x) > 0$, значит $F(x)$ возрастает и $F(3) > F(2)$;

На отрезке [3; 4] $g(x) = G'(x) > 0$, значит $G(x)$ возрастает и $G(4)>G(3)$;
Т.к. $F(3) = G(3)$, то $G(4) > G(3) = F(3) > F(2)$.
Ответ: $G(4) > F(2)$.
б) $f(x) = (x + 3)\ln(4 - x)$, $g(x) = (x + 2)\ln(x + 6)$.
На отрезке [2; 3] $f(x) = F'(x) \geq 0$, значит $F(x)$ возрастает и $F(3) > F(2)$;
На отрезке [3; 4] $g(x) = G'(x) > 0$, значит $G(x)$ возрастает и $G(4)>G(3)$;
$G(4) > G(3) = F(3) > F(2)$.
Ответ: $G(4) > F(2)$.
4.6.D12 а) Пусть $x_0 = 3$ — абсцисса точек касания. Угловые коэффициенты обеих касательных равны, т.к. $F'(x_0) = G'(x_0) = f(x_0) = 3$.
Касательные имеют вид $y = 3x + b$ и $y = 3x + c$, где $|b - c| = 9 + 1 = 10$ (это заключаем из точек $K(3; 9)$ и $T(3; -1)$). Тогда расстояние между прямыми:

$$l = |b - c|\cos\operatorname{arctg}3 = 10\cos\operatorname{arctg}3 = \frac{10}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}3)+1}} = \frac{10}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10}.$$

Ответ: $\sqrt{10}$.
б) 2 — абсцисса точек касания; касательные параллельны, т.к.
$F'(2)=G'(2) = f(2) = 2$.
Они имеют вид $y = 2x + b$ и $y = 2x + c$, где $|b - c| = 20$ (из вида точек $K(2; -1)$ и $T(2; -21)$).
Тогда расстояние между касательными

$$l = |b - c|\cos\operatorname{arctg}2 = 20\cos\operatorname{arctg}2 = \frac{20}{\sqrt{2^2+3}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$ Ответ: $4\sqrt{5}$.

Глава 5. Исследование функций

§ 1. Многочлены

Уровень А.

5.1.A01.
) $f'(x)=12x^2-40x+25=(4x-5)^2$
Функция возрастает на R.
б) $f'(x)=33x^2-46x+16=33x^2-22x-24x+16=(3x-2)(11x-8)=$
$$= 33\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{8}{11}\right)$$
$f(x)$ убывает на $\left[\frac{2}{3}; \frac{8}{11}\right]$ю
$f(x)$ возрастает на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ и $\left[\frac{8}{11}; +\infty\right)$.

5.1.A02. а) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} + 24x + 15$.
Найдем нули производной: $f'(x) = x^2 + 11x + 24 = 0$; $x = -3$, $x = -8$;
В обеих из них производная меняет знак, значит это точки экстремума.
Ответ: -3 и -8.

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{13x^2}{2} - 14x + 13.$

$f'(x) = x^2 + 13x - 14;$

Ее нули $x = 1$ и $x = -14$;

В обеих точках $f'(x)$ меняет знак, значит это точки экстремума.

Ответ: 1 и –4.

5.1.A03. а) $f(x) = (x-2)\left(x^2 + 5x - \frac{10}{3}\right) = x^3 + 3x^2 - \frac{40}{3}x + \frac{20}{3}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - \frac{40}{3} = \frac{1}{3}(9x^2 + 18x - 40) = \frac{1}{3}(9x^2 + 30x - 12x - 40) =$

$= \frac{1}{3}(3x+10)(3x-4) = 3\left(x + \frac{10}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

$f(x)$ убывает на $\left[-\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right]$

$f(x)$ возрастает на $\left(-\infty; -\frac{10}{3}\right]$ и $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$;

б) $f(x) = (x+1)\left(x^2 + 4x + \frac{4}{3}\right) = x^3 + 5x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{4}{3}$

$f'(x) = 3x^2 + 10x + \frac{16}{3} = \frac{1}{3}\left(9x^2 + 30x + 16\right) = \frac{1}{3}\left(9x^2 + 24x + 6x + 16\right) =$

$= \frac{1}{3}(3x+8)(3x+2) = 3\left(x + \frac{8}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$

$f(x)$ убывает на $\left[-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right]$

$f(x)$ возрастает на $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right]$ и $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

5.1.A04. а) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 63x + 4.$

$f'(x) = x^2 - 14x + 63 > 0$, т.к. $\frac{D}{4} = 7 - 63 < 0$;

Т.к. $f'(x) > 0$ везде, то $f(x)$ возрастает везде на $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + 72x + 5$

$f'(x) = x^2 - 16x + 72 > 0$, т.к. $\frac{D}{4} = 64 - 72 < 0.$

Значит, $f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Ответ: возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

5.1.A05. а) $f(x) = \frac{26}{3}x^3 - 169x + 4.$

$f'(x) = 25x^2 - 169 = (5x - 13)(5x + 13)$.

В точках $\frac{13}{5}$ и $\left(-\frac{13}{5}\right)$ производная обращается в 0 и меняет знак, значит, это точки экстремума. Ответ: $\frac{13}{5}$ и $-\frac{13}{5}$.

б) $f(x) = \frac{121}{3}x^3 - 64x + 5$.

$f'(x) = 121x^2 - 64 = (11x - 8)(11x + 8)$;

В точках $\frac{8}{11}$ и $\left(-\frac{8}{11}\right)$ производная меняет знак, значит, это точки экстремума.

Ответ: $\frac{8}{11}$ и $-\frac{8}{11}$.

5.1.A06.

а) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}$.

$f'(x) = 2x^2 - 2x = 2x(x - 1) = 0$;

$f(0) = -\frac{2}{3}$, а $f(1) = \frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{3} = -1$;

на [0; 1] $f'(x) \le 0$, т.е. f(x) — не возрастает $\Rightarrow$

Максимальное значение $-\frac{2}{3}$, минимальное — 1. Ответ: $-\frac{2}{3}$ и –1.

б) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}$.

$f'(x) = 4x^2 - 4x = 4x(x - 1)$; На отрезке [0; 1] $f(x)$ не возрастает, т.к. $f'(x) \le 0$;

Значит, наибольшее значение — $f(0) = -\frac{1}{3}$, наименьшее — $f(1) = -1$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$ и –1.

Уровень В.

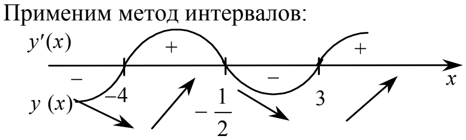
5.1.B01.

а) $y(x) = (x + 4)^2(x - 3)^2$.

$y'(x) = 2(x + 4)(x - 3)^2 + 2(x - 3)(x + 4)^2 = 2(x + 4)(x - 3)(2x + 1) =$

$= 4(x + 4)(x - 3)(x + \frac{1}{2})$;

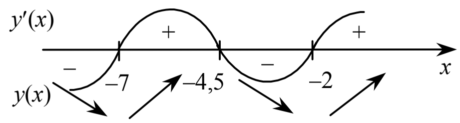
Применим метод интервалов:



Ответ: $y(x)$ возрастает на $\left[-4; -\frac{1}{2}\right]$ и на $[3; +\infty)$,

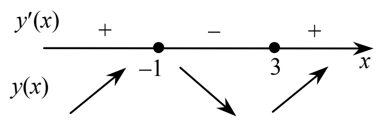
$y(x)$ убывает на $[-\infty; -4]$ и на $\left[-\frac{1}{2};\ 3\right]$.

б) $y(x) = (x + 2)^2(x + 7)^2$.
$y'(x) = 2(x + 2)(x + 7)^2 + 2(x + 7)(x + 2)^2 = 2(x + 2)(x + 7)(2x + 9) =$
$= 4(x + 2)(x + 7)(x + 4{,}5)$;



Ответ: $y(x)$ возрастает на $[-7; -4{,}5]$ и на $[-2; +\infty)$,
$y(x)$ убывает на $(-\infty; -7]$ и на $[-4{,}5; -2]$.

5.1.В02. а) $y(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$
$y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$;

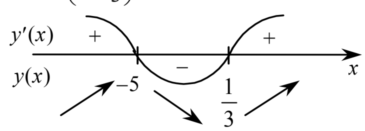


Ответ: $y(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $[-1; 3]$.

б) $y(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 2$.

$y'(x) = 3x^2 + 14x - 5$; $\frac{D}{4} = 49 + 15 = 64$; $x_1 = \frac{-7+8}{3} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{-7-8}{3} = -5$;

$y'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 5)$;

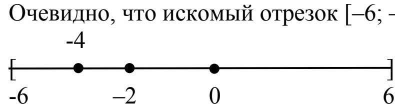


Ответ: $y(x)$ возрастает на $(-\infty; -5]$ и на $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$;

$y(x)$ убывает на $\left[-5;\ \frac{1}{3}\right]$.

5.1.В03. а) $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 36x + 17$.

$y'(x) = x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$;
$y'(x) \le 0$ при $x \in [-6; 6] \Rightarrow y(x)$ убывает на отрезке $[-6; 6]$;
Очевидно, что искомый отрезок $[-6; -2]$. Ответ: $[-6; -2]$.

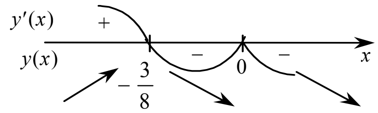


б) $y(x) = x^3 - 147x + 20$.
$y'(x) = 3x^2 - 147 = 3(x^2 - 49) = 3(x - 7)(x + 7)$;
$y'(x) \le 0$ на $[-7; 7] \Rightarrow y'(x)$ убывает на $[-7; 7]$;

Очевидно, что искомый отрезок [3; 7]; Ответ: [3; 7].

5.1.В04. а) $y(x) = -2x^4 - x^3 - 2\sqrt{23}$

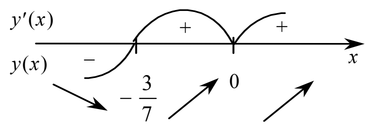
$y'(x) = -8x^3 - 3x^2 = -x^2(8x + 3) = -8x^2\left(x + \frac{3}{8}\right)$;



Ответ: $y(x)$ возрастает на $\left(-\infty;\ -\frac{3}{8}\right]$; $y(x)$ убывает на $\left[\frac{3}{8};\ +\infty\right)$.

б) $y(x) = 7x^4 + 4x^3 - \sqrt{19}$.

$y'(x) = 28x^3 + 12x^2 = 4x^2(7x + 3) = 28x^2\left(x + \frac{3}{7}\right)$.



Ответ: $y(x)$ возрастает на $\left[-\frac{3}{7};\ +\infty\right)$; $y(x)$ убывает на $\left(-\infty;\ -\frac{3}{7}\right]$.

5.1.В05. а) $y(x) = 27x - (x + 2)^3$.
$y'(x) = 27 - 3(x + 2)^2 = 3(3 - x - 2)(3 - x + 2) = -3(x - 1)(x + 5)$;
На отрезке [–5,5; 1,5] производная имеет 2 нуля: –5 и 1, и меняет в них знак
$\Rightarrow$ это экстремумы.
$y(-5) = -135 - (-5 + 2)^3 = -108$;
$y(1) = 27 - 27 = 0$;
$y(-5{,}5) = -148{,}5 + 42{,}875 = -105{,}625$;
$y(1{,}5) = 40{,}5 - 42{,}875 = -2{,}375$;
Ответ: наибольшее значение — 0; наименьшее значение — (–108).
б) $y(x) = 48x - (x + 5)^3$.
$y'(x) = 48 - 3(x + 5)^2 = 3(4 - x - 5)(4 + x + 5) = -3(x + 1)(x + 9)$;
В точках –1 и –9 $y(x)$ имеет экстремумы, т.к. $y'(x)$ меняет знак;
$y(-1) = -48 - 64 = -112$;
$y(-9) = -432 + 64 = -368$;
$y(-0{,}5) = -24 - 91{,}125 = -115{,}125$;
$y(-9{,}5) = -456 + 91{,}125 = -364{,}875$;
Ответ: наибольшее значение — –112; наименьшее — (–368).

5.1.В06. а) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 12x + 8$.
$f'(x) = 3x^2 + 24x + 12 = 3(x^2 + 8x + 4)$;
Решим $f'(x) = 0 = 3(x^2 + 8x + 4)$;

$\frac{D}{4} = 16 - 4 = 12$; $x_1 = -4 + 2\sqrt{3}$; $x_2 = -4 - 2\sqrt{3}$;

Производная $f'(x) \le 0$ при $x \in \left[-4 - 2\sqrt{3};\ -4 + 2\sqrt{3}\right]$;

$f'(x) \geq 0$ при $x \in \left(-\infty;\ -4-2\sqrt{3}\right]$ и $x \in \left[-4+2\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

В точках $-4-2\sqrt{3}$ и $-4+2\sqrt{3}$ производная 0 и она меняет знак, значит, это экстремумы.

В точке $-4-2\sqrt{3}$ $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», значит, это точка максимума.

В точке $-4+2\sqrt{3}$ $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», значит, это точка минимума.

Ответ: $-4-2\sqrt{3}$ — точка максимума, $-4+2\sqrt{3}$ — точка минимума.

б) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x + 5$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 27 = 3(x^2 - 4x - 9)$;

Решим $3(x^2 - 4x - 9) = 0$;

$\frac{D}{4} = 4 + 9 = 13$; $x_1 = 2+\sqrt{13}$; $x_2 = 2-\sqrt{13}$;

$f'(x) \leq 0$ при $x \in \left[2-\sqrt{13};\ 2+\sqrt{13}\right]$;

$f'(x) \geq 0$ при $x \in \left(-\infty;\ 2-\sqrt{13}\right]$ и $x \in \left[2+\sqrt{13};\ +\infty\right)$;

Точки $2+\sqrt{13}$ — экстремумы, т.к. $f'(x)$ меняет знак в них;

Точка $2-\sqrt{13}$ — точка максимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–»;

Точка $2+\sqrt{13}$ — точка минимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+».

5.1.В07. а) $f(x) = x^2(2x - 1) - 8$.

$f'(x) = 2x(2x - 1) + x^2 \cdot 2 = 6x^2 - 2x = (3x - 1) \cdot 2x$;

В точках 0 и $\frac{1}{3}$ производная обращается в 0 и меняет знак $\Rightarrow$ это точки экстремума;

В точке 0 производная меняет знак с «–» на «+», значит, это точка максимума;

В точке $\frac{1}{3}$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, это точка минимума.

Ответ: 0 — точка максимума; $\frac{1}{3}$ — точка минимума.

б) $f(x) = x^2(2x - 3) - 1$.

$f'(x) = 2x(2x - 3) + 2x^2 = 2x(3x - 3) = 6x(x - 1)$;

В точках 0 и 1 f' равна 0 и меняет знак, значит, это точки экстремума;

В т. 0 f' меняет знак с «+» на «–», значит, это точка максимума;

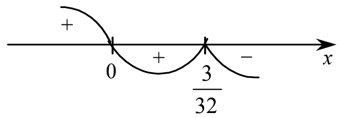
В т. 1 f' меняет знак с «–» на «+», значит, это точка минимума.

Ответ: 0 — точка максимума; 1 — точка минимума.

5.1.В08.

а) $f(x) = x^3(1 - 8x)$.

$f'(x) = 3x^2(1 - 8x) - 8x^3 = x^2(3 - 24x - 8x) = x^2(3 - 32x) = -32x^2\left(x - \frac{3}{32}\right)$;

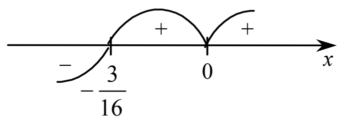


В точке $\frac{3}{32}$ $f'(x)$ равна 0 и меняет знак, значит, это точка экстремума (максимума, т.к. с «+» на «–»);
В т. 0 $f'(x)$ не меняет знак, это не точка экстремума.

Ответ: $\frac{3}{32}$ — точка максимума; точек минимума нет.

б) $f(x) = x^3(4x + 1)$.

$f'(x) = 3x^2(4x + 1) + 4x^3 = x^2(12x + 3 + 4x) = x^2(16x + 3) = 16x^2\left(x + \frac{3}{16}\right)$;



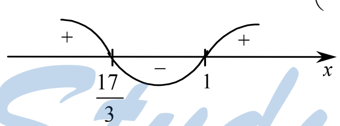
В т. 0 производная равна 0, но знак не меняет, значит, это не точка экстремума;

В т. $\left(-\frac{3}{16}\right)$ производная равна 0 и меняет знак с «–» на «+» $\Rightarrow$ это точка минимума.

Ответ: $-\frac{3}{16}$ — точка максимума; точек минимума нет.

5.1.В09 а) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 17x - 4$.

$f'(x) = 3x^2 + 14x - 17 = 3(x - 1)\left(x + \frac{17}{3}\right)$;



В точке (1) $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» $\Rightarrow$ это точка минимума.
f(1) = –13; Наибольшее целое, меньшее –13 — это (–14).
Ответ: –14.
б) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 4$.
$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x - 1)(x + 5)$;
В т. (1) $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» $\Rightarrow$ это точка минимума.
$f(1) = -12$. Наибольшее целое, меньшее –12 — это –13.
Ответ: –13.

5.1.В10.

а) $f(x) = (x - 3)^7(x - 1)^2$.
$f'(x) = 7(x - 3)^6(x - 1)^2 + 2(x - 3)^7(x - 1) =$
$= (x - 3)^6(x - 1)(7x - 7 + 2x - 6) = (x - 3)^6(x - 1)(9x - 13) =$

$= 9(x-3)^6(x-1)\left(x-\dfrac{13}{9}\right)$;

Нули производной: 3; 1; $\dfrac{13}{9}$. Но в т. 3 производная не меняет знак $\Rightarrow$ это не точка экстремума.

В точках 1 и $\dfrac{13}{9}$ она знак меняет $\Rightarrow$ это точка экстремума.

Ответ: 1 и $\dfrac{13}{9}$.

б) $f(x) = (x+5)^5(x+4)^2$.

$f'(x) = 5(x+5)^4(x+4)^2 + 2(x+5)^5(x+4) =$

$= (x+5)^4(x+4)(5x+20+2x+10) = (x+5)^4(x+4)(7x+30) =$

$= 7(x+5)^4(x+4)\left(x+\dfrac{30}{7}\right)$;

Нули производной: (–5); (–4) и $\left(-\dfrac{30}{7}\right)$, но в т. (–5) она не меняет знак $\Rightarrow$ (–5) — не точка экстремума.

В т. (–4) и $\left(-\dfrac{30}{7}\right)$ производная меняет знак $\Rightarrow$ это точки экстремума.

Ответ: –4 и $\dfrac{30}{7}$.

5.1.В11.

а) $f(x) = 14x^3 + 81x^2 - 24x - 2$.

$f'(x) = 42x^2 + 162x - 24 = 6(7x^2 + 27x - 4)$;

Решим $f'(x) = 6(7x^2 + 27x - 4) = 0$;

$D = 29^2$; $x_1 = \dfrac{-27+29}{14} = \dfrac{1}{7}$; $x_0 = \dfrac{-27-29}{14} = -4$; $f'(x) = 42(x+4)\left(x-\dfrac{1}{7}\right)$;

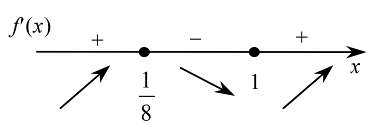
В т. (–4) $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–» $\Rightarrow$ это точка максимума.

В т. $\dfrac{1}{7}$ $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» $\Rightarrow$ это точка минимума.

Ответ: –4 — точка максимума; $\dfrac{1}{7}$ — точка минимума.

б) $f(x) = 16x^3 - 27x^2 + 6x - 5$.

$f'(x) = 48x^2 - 54x + 6 = 6(8x^2 - 9x + 1) = 6(x-1)(8x-1) = 48(x-1)\left(x-\dfrac{1}{8}\right)$;



В т. $\left(\dfrac{1}{8}\right)$ производная равна 0 и меняет знак с «+» на «–» $\Rightarrow$ это точка максимума.

В т. 1 производная обращается в 0 и меняет знак с «–» на «+» $\Rightarrow$ это точка минимума.

Ответ: $\frac{1}{8}$ — точка максимума; 1 — точка минимума.

5.1.B12. а) $y(x) = x^{39} - 39x + 8{,}3$.
$y'(x) = 39x^{38} - 39$;
Очевидно, что $y'(x) \ge 0$ при $|x| \ge 1$.
Значит, $y(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$.
При $|x| \le 1$ $y'(x) \le 0 \Rightarrow y(x)$ убывает на $[-1; 1]$.
Ответ: y(x) возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$ и убывает на $[-1; 1]$.
б) $y(x) = x^{61} - 61x + 8$. $y'(x) = 61x^{60} - 61$.
Очевидно, что при $|x| \ge 1$ $y'(x) \ge 0 \Rightarrow y(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$.
При $|x| \le 1$ $y'(x) \le 0 \Rightarrow y(x)$ убывает на $[-1; 1]$.
Ответ: y(x) возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$ и убывает на $[-1; 1]$.

Уровень С.

5.1.C01.

а) $f(x) = \dfrac{(x+8)^4 + (x-6)^4}{4}$.

$f'(x) = \frac{4}{4}((x + 8)^3 + (x - 6)^3) = (2x + 2)((x + 8)^2 - (x + 8)(x - 6) + (x - 6)^2) =$
$= 2(x + 1)(x^2 + 16x + 64 - x^2 - 2x + 48 + x^2 - 12x + 36) = 2(x + 1)(x^2 + 2x + 148)$;
$\frac{D}{4} = 1 - 148 < 0$;
Знак $f'(x)$ зависит только от $(x + 1)$.
При $x \le 1$ $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ убывает. При $x \ge -1$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает.
Ответ: убывает на $[-\infty; -1]$; возрастает на $[-1; +\infty]$.

б) $f(x) = \dfrac{(x+12)^4 + (x+14)^4}{4}$. f'(x) $=(x + 12)^3 + (x + 4)^3 =$
$= (2x + 16)(x^2 + 24x + 144 - x^2 - 16x - 48 + x^2 + 8x + 16) =$
$= 2(x + 8)(x^2 + 16x + 112)$; $D < 0$;
Знак $f'(x)$ зависит только от $(x + 8)$.
При $x \le -8$ $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ убывает. При $x \ge -8$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает.
Ответ: убывает на $(-\infty; -8]$; возрастает на $[-8; +\infty)$.

5.1.C02. а) $y(x) = (x + 8)^2(x - 4)$.
$y'(x) = 2(x + 8)(x - 4) + (x + 8)^2 = (x + 8)(3x) = 3x(x + 8)$;
Точка максимума — (–8); точка минимума — 0.
Обе принадлежат отрезку $[-8; 4]$.
$f(-8) = 0$; $f(0) = -256$; $f(4) = 0$; Сумма: –256. Ответ: –256.
б) $y(x) = (x - 7)^2(x - 10)$ $[7; 10]$.
$y'(x) = 2(x - 7)(x - 10) + (x - 7)^2 = (x - 7)(3x - 27) = 3(x - 7)(x - 9)$;
Точка максимума: 7; минимума: 9.
$f(7) = 0$; $f(9) = -4$; $f(10) = 0$; Искомая сумма (–4). Ответ: –4.

5.1.C03.

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3$.

$f'(x) = x^2 - 10x = x(x - 10)$;
$f'(x) \le 0$ при $x \in [0;\ 10] \Rightarrow f(x)$ убывает на $[0;\ 10]$;
$f'(x) \ge 0$ при $x \in (-\infty;\ 0]$ и $[10;\ +\infty) \Rightarrow f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и на $[10;\ +\infty)$;

$f(0) = 3$; $f(10) = \frac{1000}{3} - 500 + 3 < 0$;

т.к. $f(x)$ монотонна на $[0;\ 10]$ и принимает значения разных знаков на концах, то она имеет ровно 1 нуль (с учетом непрерывности $f(x)$).
Ответ: f(x) возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и на $[10;\ +\infty)$ и убывает на $[0;\ 10]$; f(x) имеет один ноль на $(0;\ 10]$.

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 1$. $f'(x) = x^2 - 6x = x(x - 6)$;

$f'(x) \le 0$ при $x \in [0;\ 6] \Rightarrow f(x)$ убывает на $[0;\ 6]$;
$f'(x) \le 0$ при $x \in (-\infty;\ 0]$ и $x \in [6;\ +\infty) \Rightarrow f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и на $[6;\ +\infty)$;

$f(0) = 1$; $f(6) = \frac{216}{3} - 108 + 1 < 0$;

Т.к. на концах отрезка $[0;\ 6]$ f(x) принимает значения разных знаков, то на этом отрезке нуль ровно один в силу монотонности и непрерывности $f(x)$.
Ответ: f(x) возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и на $[6;\ +\infty)$ и убывает на $[0;\ 6]$; на $[0;\ 6]$ f(x) имеет один ноль.

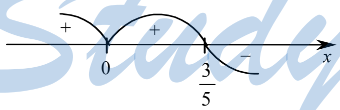
5.1.С04.

а) $f(x) = 4x^3 - 5x^4 + 0{,}03$.

$f'(x) = 12x^2 - 20x^3 = 4x^2(3 - 5x) = -20x^2\left(x - \frac{3}{5}\right)$;

$f'(x) \le 0$ при $x \ge \frac{3}{5} \Rightarrow f(x)$ убывает на $\left[\frac{3}{5};\ +\infty\right)$;

$f'(x) \ge 0$ при $x \le \frac{3}{5} \Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left(-\infty;\ \frac{3}{5}\right]$.



В силу всего этого, уравнение $f(x) = f\left(\frac{3}{5}\right)$ имеет единственный корень

$x = \frac{3}{5}$ (т.к. т. $\frac{3}{5}$ — точка глобального максимума).

Ответ: f(x) возрастает на $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right]$; убывает на $\left[\frac{3}{5}; +\infty\right)$; $x = \frac{3}{5}$.

б) $f(x) = 5x^3 - 3x^4 - 0{,}05$.

$f'(x) = 15x^2 - 12x^3 = 3x^2(5-4x) = -12x^2\left(x - \frac{5}{4}\right)$;

$f'(x) \le 0$ при $x \ge \frac{5}{4}$ $\Rightarrow f(x)$ убывает на $\left[\frac{5}{4};\ +\infty\right)$;

$f'(x) \ge 0$ при $x \le \frac{5}{4}$ $\Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right]$.

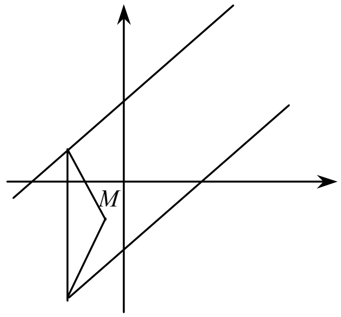
Точка $\frac{5}{4}$ — точка глобального максимума, поэтому уравнение $f(x) = f\left(\frac{5}{4}\right)$ имеет единственный корень $x = \frac{5}{4}$.

Ответ: f(x) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right]$;

убывает на $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$; $x = \frac{5}{4}$.

5.1.C05.

а) Пусть (x_1, y_1) — первая точка, тогда $y_1 = x_1 + 3$.
Имеем $(x_1; x_1 + 3)$.
Пусть (x_2, y_2) — вторая точка, тогда $y_2 = x_2 - 1$.
Имеем $(x_2; x_2 - 1)$.
По условию $x_1 = x_2$.
$L(x) = (x + 2)^2 + (x + 2)^2 + (x - 1 + 3)^2 + (x + 3 + 3)^2$;
$L(x) = 4x^2 + 24x + \ldots$;
$A(x_1; x_1 + 3)$;
$B(x_1; x_1 - 1)$;
$M(-2; -3)$;
$f(x_1) = AM^2 + BM^2 = (x_1 + 2)^2 + (x_1 + 3 + 3)^2 + (x_1 + 2)^2 + (x_1 - 1 + 3)^2 =$
$= 4{x_1}^2 + 24x_1 + 4 + 36 + 4 + 4$;
Наименьшее значение парабола принимает в вершине
$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{8} = -3$;
$A(-3; 0)$; $B(-3; -4)$;
Ответ: $(-3; 0)$; $(-3; -4)$.
б) (x_1, y_1) и (x_2, y_2).
Тогда по условию $y_1 = x_1 + 5$; $y_2 = x_2 - 3$ и $x_1 = x_2$;
Имеем точки $(x_1; x_1 + 5)$ и $(x_1; x_1 - 3)$.
Сумма квадрата расстояний до $M(-1; -2)$:
$L(x) = (x + 1)^2 + (x + 1)^2 + (x + 5 + 2) + (x - 3 + 2)^2 = 4x^2 + 16x + 52$;
$L(x) = 4x^2 + 16x + \ldots$
$x_0 = -\frac{b}{25} = -2$.



Парабола достигает наименьшего значения в вершине $-\frac{b}{2a}=-2$.;

$x_1 = -2$;

Итак, точки (–2; 3) и (–2; –5).

Ответ: (–2; 3) и (–2; –5).

5.1.С06. а) $f(x) = 2{,}5x^4 + 4x^3 + 1{,}7$,

$f'(x) = 10x^3 + 12x^2 = 2x^2(5x + 6) = 10x^2\left(x+\frac{6}{5}\right)$;

$f'(x) < 0$, при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; -\frac{6}{5}) \Rightarrow f(x)$ убывает на $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right]$;

$f'(x) > 0$, при $x \in [-\frac{6}{5}; +\infty) \Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{6}{5}; +\infty\right)$;

Значит, $-\frac{6}{5}$ — точка глобального минимума и уравнение $f(x)=f\left(-\frac{6}{5}\right)$ имеет только одно решение $x=-\frac{6}{5}$.

Ответ: f(x) убывает на $\left(-\infty;\frac{6}{5}\right]$; возрастает на $\left[\frac{6}{5};+\infty\right)$; $x=-\frac{6}{5}$.

б) $f(x) = 0{,}5x^4 - 3x^3 + 1{,}6$.

$f'(x) = 2x^3 - 9x^2 = 2x^2\left(x-\frac{9}{2}\right)$;

При $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{9}{2})$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $\left(-\infty;\frac{9}{2}\right]$.

При $x>\frac{9}{2}$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left[\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

$\frac{9}{2}$ — глобальный минимум $\Rightarrow$ уравнение $f(x)=f\left(\frac{9}{2}\right)$ имеет единственное решение $x=\frac{9}{2}$.

5.1.С07.

а) $f(x)=\sqrt{17}-16x-\frac{1}{2}x^4$.

$f'(x) = –16 – 2x^3 = –2(x^3 + 8)$;

При $x \ge –2$ $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $[2; +\infty)$;

При $x \le –2$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $(–\infty; 2]$;

Из этого следует, что $x = 2$ — глобальный максимум и неравенство $f(x) \ge f(2)$ верно только при $x = 2$.

б) $f(x) = \sqrt{3} + 32x – x^4$.

$f'(x) = 32 – 4x^3 = –4(x^3 – 8)$;

При $x \ge 2$ $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $[2; +\infty)$;

При $x \le 2$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $(–\infty; 2]$;

Значит, $x = 2$ — глобальный максимум и неравенство $f(x) < f(2)$ верно при всех x кроме $x = 2$, т.е. при $x \in (–\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

5.1.С08.

а) $y(x) = –2(x^2 – 14x + 13)(x – 13)^2$.

$y'(x) = –2(2x – 14)(x – 13)^2 – 4(x – 13)(x^2 – 14x + 13) =$

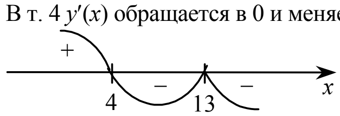
$= –4(x – 13)((x – 7)(x – 13) + x^2 – 14x + 13) =$

$= –4(x – 13)(x^2 – 20x + 91 + x^2 – 14x + 13) =$

$= –4(x – 13)(2x^2 – 34x + 104) = –8(x – 13)(x^2 – 17x + 52) = –8(x – 13)^2(x – 4)$;

В т. 13 $y'(x)$ обращается в 0, но не меняет знак;

В т. 4 $y'(x)$ обращается в 0 и меняет знак с «+» на «–»$\Rightarrow$ это точка максимума.



Ответ: 4 — точка максимума, точек минимума нет.

б) $y(x) = 8(x^2 – 15x + 14)(x – 1)^2 = 8(x – 14)(x – 1)^3$.

$y'(x) = 8(x – 1)^3 + 24(x – 1)^2(x – 14) = 8(x – 1)^2(x – 1 + 3x – 42) =$

$= 8(x – 1)^2(4x – 43) = 32(x – 1)^2\left(x-\frac{43}{4}\right)$;

В т. 1 $y'(x)$ обращается в 0, но не меняет знак;

В т. $\frac{43}{4}$ $y'(x)$ обращается в 0 и меняет знак с «–» на «+» $\Rightarrow$ это точка минимума. Ответ: $\frac{43}{4}$ — точка минимума, точек максимума нет.

5.1.С09.

а) $f(x)=(21x^2–2x–3)^2$

$f'(x)=2(21x^2–2x–3)(42x–2)=2(21x^2–9x+7x–3)(42x–2)=$

$=84(7x–3)(3x+1)\left(x-\frac{1}{21}\right)=84\cdot 7\cdot 3\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{21}\right)=0$

$x_1=\frac{3}{7}$ $x_2=-\frac{1}{3}$ $x_3=\frac{1}{21}$ Ответ: $\frac{1}{21}$;

б) $f(x)=(15x^2–8x+1)^2$

$f'(x)=2(15x^2–8x+1)(30x–8)=2(15x^2–5x–3x+1)(30x–8)=$

$= 20(3x-1)(5x-1)\left(x-\dfrac{4}{15}\right) = 900\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)\left(x-\dfrac{4}{15}\right)$

$x_1 = \dfrac{1}{3}$ $x_2 = \dfrac{1}{5}$ $x_3 = \dfrac{4}{15}$

Ответ: $\dfrac{1}{5}$.

5.1.C10.

а) $f(x) = 5x^3 + 2x + 2\sqrt{2}$.

$f'(x) = 15x^2 + 2 > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

$f(-1) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow$ существует ровно один нуль.

б) $f(x) = 4x^3 + 5x + \sqrt{6}$.

$f'(x) = 12x^2 + 5 > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

$f(-1) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow$ существует ровно один нуль.

5.1.C11.

а) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 8x - 1$.

$f'(x) = 9x^2 + 6x - 8 = 9\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x+\dfrac{4}{3}\right)$;

На промежутке $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right]$ у $f(x)$ нет экстремумов.

$f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{9} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{28}{9} - 1 = \dfrac{19}{9}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{8}{3} - 1 = \dfrac{-20}{9} - 1 = -\dfrac{29}{9}$.

Множество значений: $\left[-\dfrac{29}{2}; \dfrac{19}{9}\right]$.

б) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x - 1$.

$f'(x) = 9x^2 - 12x - 5 = 9\left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$; на $\left[-\dfrac{1}{6}; \dfrac{5}{6}\right]$ у $f(x)$ экстремумов нет

$f\left(-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{-3}{216} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} - 1 = \dfrac{-1}{72} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{72}{72} = \dfrac{48-73}{72} = -\dfrac{25}{72}$,

$f\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{3\cdot125}{216} - \dfrac{25}{6} - \dfrac{25}{6} - 1 = \dfrac{125-300-300-72}{72} = -\dfrac{547}{72}$.

Множество значений: $\left[-\dfrac{547}{72}; -\dfrac{25}{72}\right]$.

5.1.C12.

а) Пусть x — длина стороны квадрата.

Вместимость коробки: $V(x) = x(33 - 2x)^2$.

$V'(x) = (33 - 2x)^2 - 4x(33 - 2x) = (33 - 2x)(33 - 2x - 4x) =$

$= 3(33 - x)(11 - x) = 3(2x - 11)(2x - 33)$

Точка максимума — $x = 5{,}5$; в ней $V'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Очевидно, это и есть искомая сторона квадрата.

Ответ: 5,5.

б) Пусть x — сторона квадрата.
Вместимость коробки: $V(x) = x(39 - 2x)^2$.
$V'(x) = (39 - 2x)^2 - 4x(39 - 2x) = (39 - 2x)(39 - 2x - 4x) =$
$= 3(2x - 39)(2x - 13)$.
Точка максимума — $x = 6{,}5$; в ней $V'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Очевидно, это и есть искомая сторона квадрата.   Ответ: 6,5.

Уровень D.

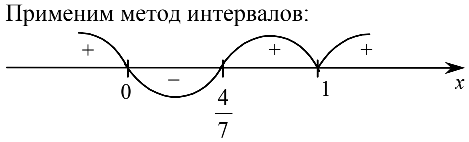
5.1.D01.

а) $y(x) = \dfrac{(x-1)^3 x^4}{2} - 3$.

$y'(x) = 2x^3(x-1)^3 + \dfrac{3}{2}x^4(x-1)^2 = x^3(x-1)^2(2(x-1) + \dfrac{3}{2}x) =$

$= x^3(x-1)^2\left(\dfrac{7}{2}x - 2\right) = \dfrac{7}{2}x^3(x-1)^2\left(x - \dfrac{4}{7}\right)$.

Применим метод интервалов:

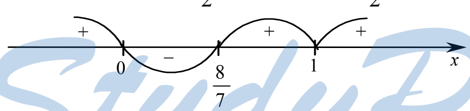


Ответ: $y(x)$ возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\dfrac{4}{7};\ +\infty\right)$;

$y(x)$ убывает на $\left[0;\ \dfrac{4}{7}\right)$.

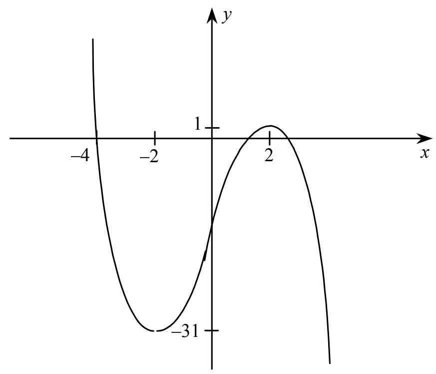
б) $y(x) = \dfrac{(x^2-1)^3 x^4}{2} + 1$. $y'(x) = 2x^3(x-2)^3 + \dfrac{3}{2}(x-2)^2x^4 =$

$=(x-2)^2x^3(2x - 4 + \dfrac{3}{2}x) = (x-2)^2x^3(\dfrac{7}{2}x - 4) = \dfrac{7}{2}(x-2)^2x^3(x - \dfrac{8}{7})$.

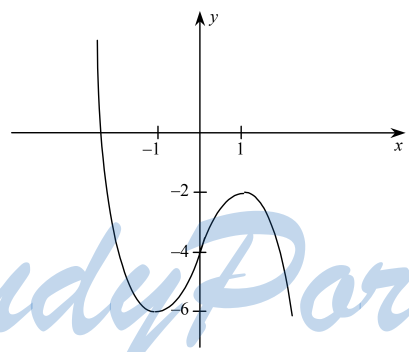


Ответ: $y(x)$ возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\dfrac{8}{7};\ +\infty\right)$; $y(x)$ убывает на $\left[0;\ \dfrac{8}{7}\right]$.

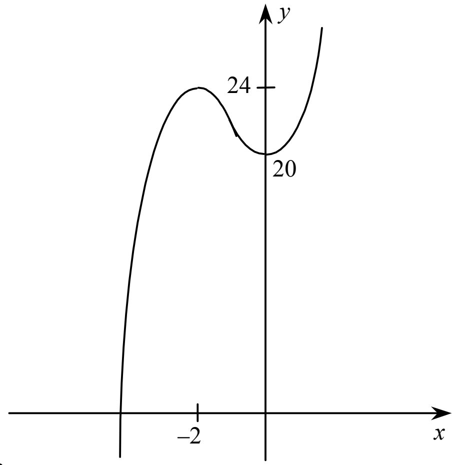
5.2.D02.
а) $y(x) = -x^3 + 12x - 15$. $y'(x) = -3x^2 + 12$.
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $[-2; 2]$. Убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[2; +\infty)$.
Точки экстремума: 2 и –2. Экстремумы: –31 и 1.
Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



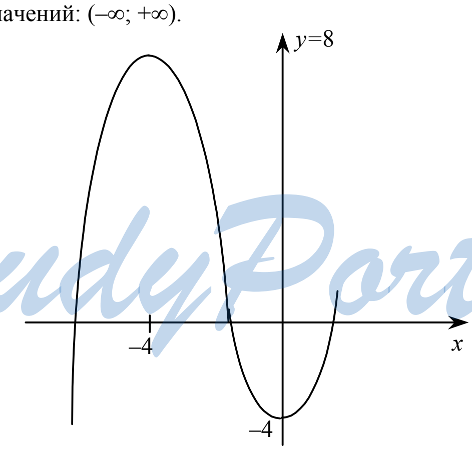
б) $y(x) = -x^3 + 3x - 4$. $y'(x) = -3x^2 + 3$.
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $[-1; 1]$.
Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$.
Точки экстремума: 1 и –1.
Экстремумы: –2 и –6.
Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



5.1.D03.
а) $y(x) = x^3 + 3x^2 + 20$. $y'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$.
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $(-\infty;-2]$ и $[0; +\infty)$.
Убывает на $[-2; 0]$.
Точки экстремума: –2 и 0.
Экстремумы: 24 и 20.
Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



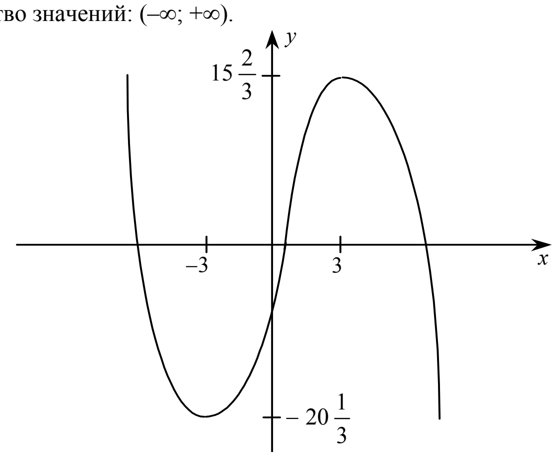
б) $y(x) = x^3 + 6x^2 - 4$.
$y'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x + 4)$.
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $(-\infty; -4]$ и на $[0; +\infty)$.
Убывает на $[-4; 0]$.
Точки экстремума: 0 и –4.
Экстремумы: –4 и 28.
Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



5.1.D04. а) $y(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x - \frac{7}{3}$. $y'(x) = -x^2 + 9$.
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $[-3; 3]$.
Убывает на $(-\infty; -3]$ и на $[3; +\infty)$.

Точки экстремума: –3 и 3. Экстремумы: $-20\frac{1}{3}$ и $15\frac{2}{3}$.

Множество значений: (–∞; +∞).



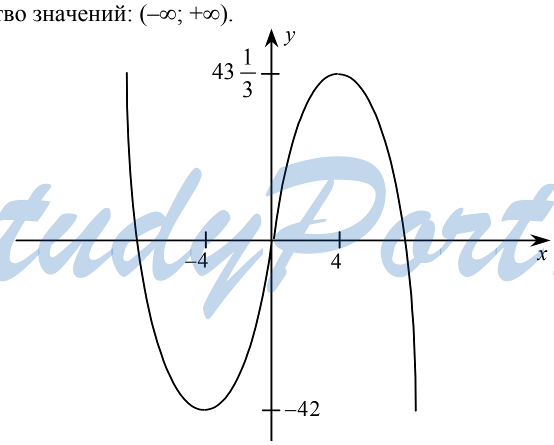
б) $y(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 16x + \frac{2}{3}$. $y'(x) = -x^2 + 16 = (4 - x)(4 + x)$.

Область определения: (–∞; +∞).

Возрастает на [–4; 4]. Убывает на (–∞; –4] и на [4; +∞).

Точки экстремума: –4 и 4. Экстремумы: –42 и $43\frac{1}{3}$.

Множество значений: (–∞; +∞).



5.1.D05. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$. $y'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

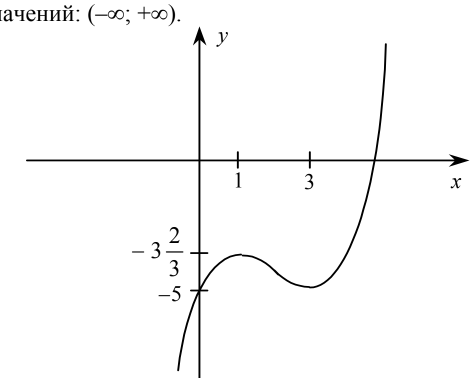
Область определения: (–∞; +∞).

Возрастает на (–∞; 1] и на [3; +∞). Убывает на [1; 3].

Точки экстремума: 1 и 3.

Экстремумы: $-3\frac{2}{3}$ и -5.

Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.

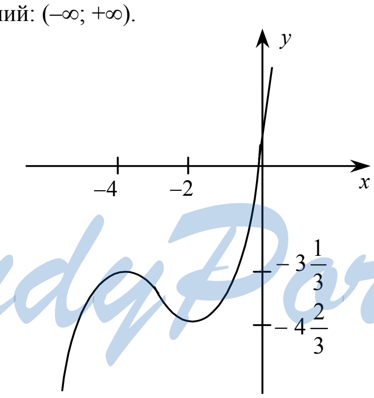


б) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x + 2$. $y'(x) = x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$.

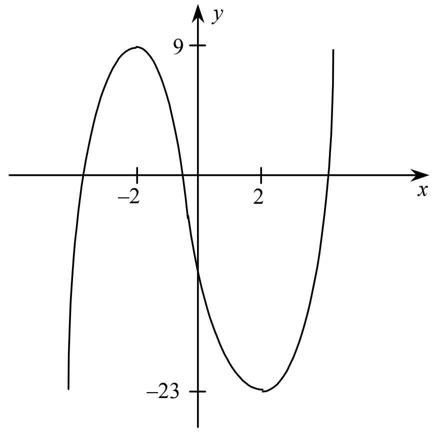
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $(-\infty; -4]$ и на $[-2; +\infty)$.
Точки экстремума: -2 и -4.

Экстремумы: $-4\frac{2}{3}$ и $-3\frac{1}{3}$.

Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



5.1.D06. а) $y(x) = x^3 - 12x - 7$. $y'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$.
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[2; +\infty)$.
Убывает на $[-2; 2]$.
Точки экстремума: -2 и 2.
Экстремумы: 9 и -23.
Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



б) $y(x) = x^3 - 3x - 7$. $y'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

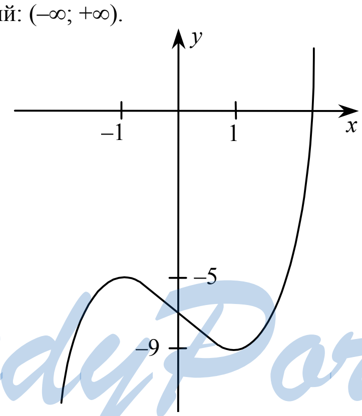
Область определения: $(-\infty; +\infty)$.

Возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$.

Убывает на $[-1; 1]$.

Точки экстремума: -1 и 1. Экстремумы: -5 и -9.

Множество значений: $(-\infty; +\infty)$.



5.1.D07. а) $f(x) = -\frac{x^4}{5} + 4x - 1{,}7$. $f'(x) = -\frac{4x^3}{5} + 4 = -\frac{4}{5}(x^3 - 5)$;

При $x \ge \sqrt[3]{5}$ $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $\left[\sqrt[3]{5};\ +\infty\right)$;

При $x \le \sqrt[3]{5}$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left(-\infty;\ \sqrt[3]{5}\right]$.

$1 + \sqrt[6]{6}$ и $\sqrt[3]{7}$ лежат в $\left[\sqrt[3]{5};\ +\infty\right)$, к тому же $1 + \sqrt[6]{6} > \sqrt[3]{7}$; в силу возрастания f,

$f\left(1 + \sqrt[6]{6}\right) - f\left(\sqrt[3]{7}\right) > 0$.

б) $f(x) = -\frac{x^4}{7} + 3x + 0{,}2$. $f'(x) = -\frac{4x^3}{7} + 3 = -\frac{4}{7}\left(x^3 - \frac{21}{4}\right)$;

При $x \geq \sqrt[3]{\frac{21}{4}}$ $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $\left[\sqrt[3]{\frac{21}{4}};\ +\infty\right)$;

При $x \leq \sqrt[3]{\frac{21}{4}}$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left(-\infty;\ \sqrt[3]{\frac{21}{4}}\right]$.

$\sqrt[3]{7{,}25}$ и $1+\sqrt[7]{7}$ лежат в $\left[\sqrt[3]{\frac{21}{4}};\ +\infty\right) \Rightarrow$ в силу возрастания f из неравенства

$1+\sqrt[7]{7} > 2 > \sqrt[3]{7{,}25}$ следует $f\left(\sqrt[3]{7{,}25}\right) - f\left(1+\sqrt[7]{7}\right) > 0$.

5.1.D08. а) $x_0 \notin [-4; 2] \Rightarrow x_0 \in [-5; -4) \cup (2; 7]$=M.
Найдем все такие x, что $(x+4)(x-2)>0$
$x \in (-\infty; -4)(2; +\infty) \supset$ M Ответ: +.
б) Из условия следует, что x_0 либо больше 3, либо меньше –1.
Отсюда, $(x_0 + 1)(x_0 - 3) > 0$.

5.1.D09. а) Пусть $A(x_0, f(x_0))$.

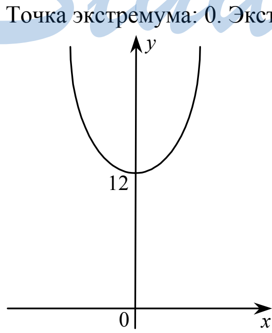
Тогда площадь треугольника будет: $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot f(x_0) = 2(x_0^4 - 4x_0 + 55)$.

$f'(x) = 4x_0^3 - 4 = 4(x_0^3 - 1)$;
Точка 1 — точка минимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+».
Минимальная площадь при $x_0 = 1$, $A(1; 52)$. $S = 2 \cdot 52 = 104$.
б) Пусть $A(x_0, f(x_0))$.

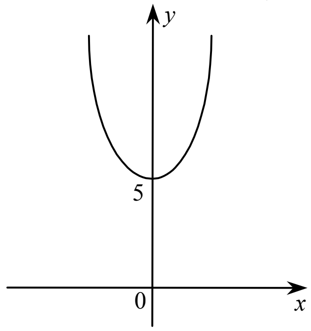
Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot f(x_0) = 3(x_0^4 + 32x_0 + 49)$.

$f'(x) = 4x_0^3 + 32 = 4(x_0^3 + 8)$; Точка (–2) — точка минимума.
Минимальная площадь при $x_0 = -2$, $A(-2; 1)$.
Минимальная площадь $S = 3 \cdot 1 = 3$.

5.1.D10. а) $y(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 12$.
$y'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 14x = 2x(2x^2 - 3x + 14)$. Область определения $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает при $x \in [0; +\infty)$. Убывает при $x \in (-\infty; 0]$.
Точка экстремума: 0. Экстремум: 12. Область значений: $[12; +\infty)$.



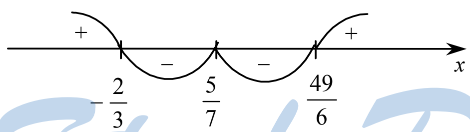
б) $y(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 5$. $y'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 16x = 2x(x^2 + 3x + 8)$.
Область определения $(-\infty; +\infty)$.
Возрастает на $[0; +\infty)$.
Убывает на $(-\infty; 0]$.
Точка экстремума: 0.
Экстремум: 5.
Область значений: $[5; +\infty)$.



5.1.D11. а) $f(x) = (7x - 5)^3(3x + 2)^4$.
$f'(x) = 3\cdot 7(7x - 5)^2(3x + 2)^4 + 4\cdot 3(7x - 5)^3(3x + 2)^3 =$
$= (7x - 5)^2(3x + 2)^3(3\cdot 21x + 3\cdot 14 + 4\cdot 21x - 4\cdot 15) = (7x - 5)^2(3x + 2)^3(147x - 18)$;

Точки экстремума: $-\frac{2}{3}$ и $\frac{49}{6}$;

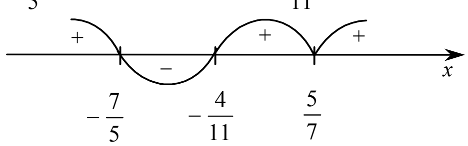
$-\frac{2}{3}$ — точка максимума, $\frac{49}{6}$ — точка минимума.



б) $y(x) = (2x - 1)^5(5x + 7)^6$.
$y'(x)=((2x - 1)^5(5x + 7)^6)' = 30(5x + 7)^5(2x - 1)^5 + 10(2x - 1)^4(5x + 7)^6=$
$= 10(5x + 7)^5(2x - 1)^4(6x - 3 + 5x + 7) = 10(5x + 7)^5(2x - 1)^4(11x + 4)$;

Точки экстремума: $-\frac{7}{5}$ и $-\frac{4}{11}$;

$-\frac{7}{5}$ — точка максимума, $-\frac{4}{11}$ — точка минимума.



5.1.D12.

а) $y(x) = x^3(x^2 - 5) + 1$.
$y'(x) = 3x^2(x^2 - 5) + = 3x^4 - 15x^2 + 2x^4 =$
$= 5x^2(x^2 - 3) = 5x^2\ \left((x-\sqrt{3})\left(+\sqrt{3}\right)\right.$.

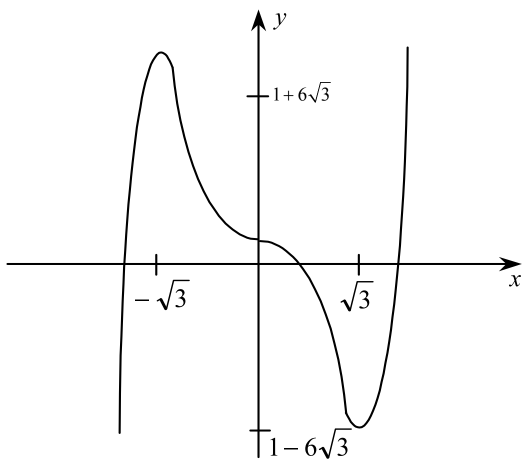
Область определения $(-\infty; +\infty)$.

Возрастает на $(-\infty;\ -\sqrt{3}\ ]$ и на $[\ \sqrt{3}\ ; +\infty)$.

Убывает на $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

Точки экстремума: $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Экстремумы: $6\sqrt{3}+1$ и $-6\sqrt{3}+1$.



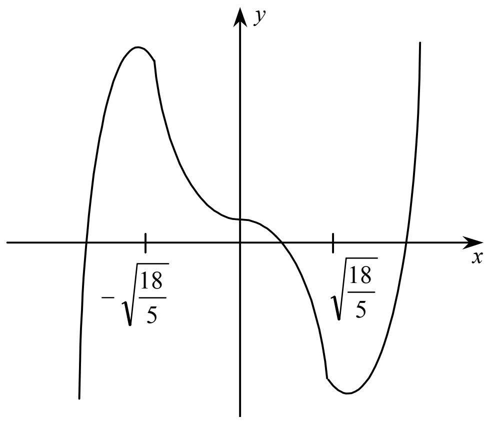
б) $y(x) = 2x^3(x^2 - 6) + 1 = 2x^5 - 12x^3 + 1$.
$y'(x) = 10x^4 - 36x^2 = 2x^2(5x^2 - 18) =$
$= 10x^2\left(x-\sqrt{\frac{18}{5}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$.

Область определения: $(-\infty; +\infty)$.

Возрастает на $\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{18}{5}}\right]$ и на $\left[\sqrt{\frac{18}{5}};\ +\infty\right)$.

Экстремумы: $1\pm\frac{1296}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}$;

Точки экстремума: $-\sqrt{\frac{18}{5}}$ и $\sqrt{\frac{18}{5}}$.



§ 2. Рациональные функции

Уровень А.

5.2.A01. а) $f(x)=\frac{2x^3-3x^2+1}{8x^3}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x^{-1}+\frac{1}{8}x^{-3}$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^{-2}-\frac{3}{8}x^{-4}=\frac{3(2x^2-1)}{8x^4}\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_{\max}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2}+1}{-\frac{4}{\sqrt{2}}}=\frac{1+\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{4}=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}$;

б) $f(x)=\frac{7x^3-3x^2+9}{5x^3}=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}x^{-1}+\frac{9}{5}x^{-3}$

$f'(x)=\frac{3}{5}x^{-2}-\frac{27}{5}x^{-4}=\frac{3x^2-27}{5x^4}=\frac{3(x-3)(x+3)}{5x^4}$

x_{max}=–3 $f(-3)=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{21+3-1}{15}=\frac{23}{15}$ Ответ: $\frac{23}{15}$.

5.2.A02. а) $f(x)=\frac{9x^2+7x-3}{13x}$. ОДЗ: $x\neq 0$.

Для исследования функции на монотонность найдем $f'(x)$ и ее корни, также найдем интервалы знакопостоянства, что нам дает возможность найти интервалы возрастания и убывания.

$f'(x)=\frac{(18x+7)13x-(9x^2+7x-3)\cdot 13}{169x^2}=$

$$= \frac{234x^2 + 91x - 167x^2 - 91x + 39}{169x^2} = \frac{9x^2 + 3}{13x^2} = \frac{3(x^2 + 1)}{13x^2};$$

Учитывая, что $x^2 + 1 > 0\ \forall x$ и $13x^2 \geq 0\ \forall x$, то $f'(x) > 0\ \forall x \in$ ОДЗ $\Rightarrow f'(x) > 0$ $\forall x \neq \{0\} \Rightarrow$ функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0;+\infty)$.

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

б) Аналогично с а).

ОДЗ: $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{7x^2 + 13x - 5}{12x}.$$

$$f'(x) = \frac{(14x + 13) \cdot 12x - 12(7x^2 + 13x - 5)}{144x^2} = \frac{14x^2 + 13x - 7x^2 - 13x + 5}{12x^2} = \frac{7x^2 + 5}{12x^2};$$

$f'(x) > 0\ \forall x \in$ ОДЗ $\Rightarrow$

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

5.2.А03. а) $f(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 3}{5x^2}$. ОДЗ: $x \neq 0$.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений $f(x)$ на интервале $a = \left[\frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right]$, рассмотрим ее значение в краевых точках и значения в критических точках (экстремумы) $\in$ нашему интервалу, и выберем из них нужные нам значения.

$$f'(x) = \left(\frac{-4x^2 + 16x - 3}{5x^2}\right)' = \frac{(-8x + 16) \cdot 5x^2 - 10x(-4x^2 + 16x - 3)}{25x^4} =$$

$$= \frac{-8x^3 + 16x^2 + 8x^3 - 32x^2 + 6x}{5x^4} = \frac{-16x^2 + 6x}{5x^4} = \frac{-2x(8x - 3)}{5x^4} = \frac{-2(8x - 3)}{5x^3};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8} \in a.$$

Рассмотрим f (от краевых точек интервала):

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-4 \cdot \frac{9}{16} + 16 \cdot \frac{3}{4} - 3}{5 \cdot \frac{9}{16}} = \frac{12}{5};\ f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{-4 \cdot \frac{9}{64} + 16 \cdot \frac{3}{8} - 3}{5 \cdot \frac{9}{64}} = \frac{52}{15}.$$

Т.к. краевая точка совпала с критической, то рассматриваем только $f\left(\frac{3}{8}\right)$ и $f\left(\frac{3}{4}\right)$, т.к. $f'(x) \neq 0$ на интервале a и значит функция монотонна, т.е.

Ответ: наибольшее значение $f(x) = \frac{52}{12}$ при $x = \frac{3}{8}$;

наименьшее значение $f(x) = \frac{12}{5}$ при $x = \frac{3}{4}$.

б) $f(x) = \dfrac{-2x^2+18x-3}{5x^2}$. ОДЗ: $x \neq 0$.

Решение аналогично пункту а): $f'(x) = \dfrac{(-4x+18)\cdot 5x^2 - 10x(-2x^2+18x-3)}{25x^4} =$

$$= \frac{-4x^3+18x^2+4x^3-36x^2+6x}{5x^4} = \frac{-18x^2+6x}{5x^4} = \frac{-18x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{5x^4};$$

$x_1 = 0$ — не подходит $\notin$ ОДЗ, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2\cdot\frac{1}{9}+18\cdot\frac{1}{3}-3}{5\cdot\frac{1}{9}} = 5,\quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2\cdot\frac{4}{9}+18\cdot\frac{2}{3}-3}{5\cdot\frac{4}{9}} = \frac{73}{20}.$$

Ответ: наибольшее $f(x) = 5$ при $x = \dfrac{1}{3}$;

наименьшее $f(x) = \dfrac{73}{20}$ при $x = \dfrac{2}{3}$.

5.2.А04.

а) ОДЗ: $x \neq \{1; 8\}$.

Найдем $y'(x)$ и найдем x, удовлетворяющие условию $y'(x) = 0$.

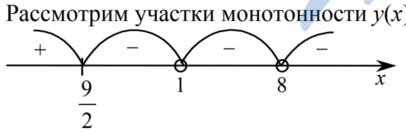
$$y'(x) = \left(\frac{7}{(x-8)(x-1)}\right)' = 7\left((x-8)^{-1}(x-1)^{-1}\right)' = 7\left(\frac{1}{x-8}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)' + \frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{x-8}\right)'\right) =$$

$$= 7\left(\frac{1}{x-8}\cdot\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{1}{x-1}\cdot\left(-\frac{1}{(x-8)^2}\right)\right) = 7\left(-\frac{1}{(x-1)^2(x-8)} - \frac{1}{(x-1)(x-8)^2}\right) =$$

$$= -7\cdot\frac{1}{(x-1)(x-8)}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-8}\right) = -7\cdot\frac{1}{(x-1)(x-8)}\left(\frac{2x-9}{(x-1)(x-8)}\right) = \frac{-14\left(x-\frac{9}{2}\right)}{(x-1)^2(x-8)^2};$$

$y'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{9}{2}$.

Рассмотрим участки монотонности $y(x)$:



при $x = \dfrac{9}{2}$ мы имеем; $y\left(\dfrac{9}{2}\right) = -\dfrac{4}{7}$. Ответ: $-\dfrac{4}{7}$.

б) аналогично пункту а):

ОДЗ: $x \neq \{5; 8\}$.

$y(x) = -\frac{3}{(x-5)(x-8)}$.

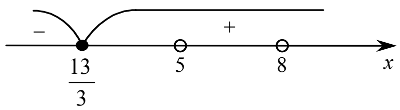
$$y'(x) = -3\left(\frac{1}{x-5}\cdot\frac{1}{x-8}\right)' = -3\left(\frac{1}{x-5}\cdot\left(\frac{1}{x-8}\right)' + \frac{1}{x-8}\left(\frac{1}{x-5}\right)'\right) =$$

$$= -3\left(\frac{1}{x-5}\cdot\left(-\frac{1}{(x-8)^2}\right) + \frac{1}{x-8}\left(-\frac{1}{(x-5)^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{(x-5)(x-8)}\left(\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-5}\right) = \frac{3}{(x-5)(x-8)}\left(\frac{2x-13}{(x-5)(x-8)}\right) = \frac{6\left(x-\frac{13}{3}\right)}{(x-5)^2(x-8)^2};$$

$x_1 = \frac{13}{3}$.

Исследуем на монотонность:



при $x_1 = \frac{13}{3}$ мы имеем min; $y\left(\frac{13}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

5.2.А05.

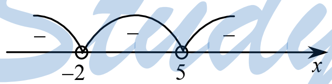
а) Найдем $y'(x)$ и рассмотрим интервалы знакопостоянства $y'(x)$:

$$y'(x) = \left(\frac{2x-3}{(x+2)(x-5)}\right)' = \frac{2(x+2)(x-5)-(2x-3)(2x-3)}{(x+2)^2(x-5)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-6x-20-4x^2+12x-9}{(x+2)^2(x-5)^2} = \frac{-2x^2+6x-29}{(x+2)^2(x-5)^2};$$

$y'(x) \neq 0$ $\forall x$, и даже $y'(x) > 0$.

$\forall x \in$ ОДЗ $\Rightarrow$ исследуем на знакопостоянство:



функция убывает.

Ответ: $y(x)$ убывает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 5)$, $(5; +\infty)$.

б) ОДЗ: $x \neq -6$.

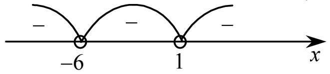
$y(x) = \frac{2x+5}{(x+6)(x+1)}$.

аналогично пункту а):

$$y'(x) = \frac{2(x+6)(x-1)-(2x+5)(2x+5)}{(x+6)^2(x-1)^2} = \frac{2x^2+10x-12-4x^2-20x-25}{(x+6)^2(x-1)^2} =$$

$= \dfrac{-2x^2-10x-37}{(x+6)^2(x-1)^2} = -\dfrac{2x^2+10x+37}{(x+6)^2(x-1)^2}$;

$D < 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 37 > 0 \Rightarrow y'(x) < 0\ \forall x \in$ ОДЗ $\Rightarrow$



Ответ: функция убывает на интервалах $(-\infty; -6)$, $(-6; 1)$, $(1, +\infty)$.

5.2.А06. а) $f(x) = \dfrac{2x^2+16x+5}{6x^2}$.

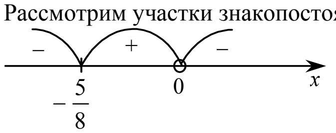
ОДЗ: $x \neq 0$.

Найдем $f'(x)$ и участки монотонности, определив, таким образом, max, min или перегибом являются критические точки:

$$f'(x) = \frac{(4x+16)(6x^2)-(2x^2+16x+5)\cdot 12x}{36x^4} = \frac{4x^3+16x^2-4x^3-32x^2-10x}{6x^4} =$$

$= \dfrac{-16x^2-10x}{6x^4} = \dfrac{-16x\left(x+\frac{5}{8}\right)}{6x^4}$; f′(x) = 0 $\Leftrightarrow x_1 = 0$ — не корень, $\notin$ ОДЗ, $x_2 = -\dfrac{5}{8}$.

Рассмотрим участки знакопостоянства $f'(x)$:



при $x = -\dfrac{5}{8}$ мы имеем min.

Ответ: $x = -\dfrac{5}{8}$ — точка минимума.

б) аналогично с а):

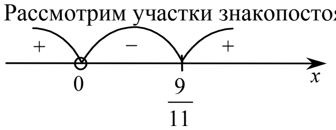
ОДЗ: $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{14x^2-22+9}{4x^2}\right)' = \frac{(28x-22)\cdot 4x^2-(14x^2-22x+9)\cdot 8x}{16x^4} =$$

$= \dfrac{28x^3-22x^2-28x^3+44x^2-18x}{16x^4} = \dfrac{22x^2-18x}{4x^4} = \dfrac{22x\left(x-\frac{9}{11}\right)}{4x^4}$; f′(x) = 0;

$x_1 = 0$ — не корень, $\notin$ ОДЗ, $x_2 = \dfrac{9}{11}$.

Рассмотрим участки знакопостоянства:



$\Rightarrow$ при $x = \dfrac{9}{11}$ достигается min.

Ответ: $x = \dfrac{9}{11}$ — точка минимума.

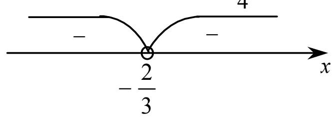
Уровень В.

5.2.B01. а) $f(x)=\frac{3}{2x+3}-\frac{x+2\sqrt{5}}{5}$. ОДЗ: $x\neq-\frac{3}{2}$.

Найдем $f'(x)$ и исследуем на знакопостоянство:

$$f'(x)=-\frac{3\cdot2}{(2x+3)^2}-\frac{1}{5}=-\frac{30+4x^2+12x+9}{5\cdot(2x+3)^2}=-\frac{4x^2+12x+39}{5\cdot(2x+3)^2};$$

$f'(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-394}}{4}$; $D<0\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in$ ОДЗ.

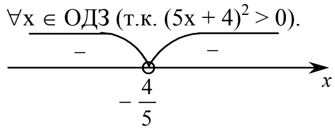


Ответ: $f(x)$ убывает на интервалах $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$ и $\left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

б) аналогично с а). ОДЗ: $x\neq-\frac{4}{5}$. $f(x)=\frac{1}{5x+4}-\frac{5x+3\sqrt{2}}{8}$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+4}-\frac{5x+3\sqrt{2}}{8}\right)'=-\frac{1\cdot5}{(5x+4)^2}-\frac{5}{8}\neq0$$

$\forall x\in$ ОДЗ (т.к. $(5x+4)^2>0$).



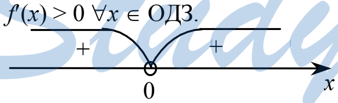
Ответ: $f(x)$ убывает на интервалах $\left(-\infty;\ -\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{4}{5};\ +\infty\right)$.

5.2.B02.

а) аналогично с 5.2.B01 а): ОДЗ: $x\neq0$.

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2+15x-8}{x}\right)'=\frac{(4x+15)x-(2x^2+15x-8)}{x^2}=\frac{4x^2+15x-2x^2-15x+8}{x^2}=\frac{2x^2+8}{x^2}.$$

$f'(x)>0\ \forall x\in$ ОДЗ.

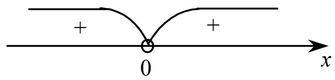


Ответ: $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

б) аналогично с 5.2.B01 а): ОДЗ: $x\neq0$.

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2+8x-15}{x}\right)'=\frac{(6x+8)x-(3x^2+8x-15)}{x^2}=$$

$$=\frac{6x^2+8x-3x^2-8x+15}{x^2}=\frac{3x^2+15}{x^2};$$ $D<0\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x\in$ ОДЗ.

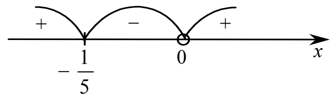


Ответ: $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

5.2.В03. а) аналогично с 5.2. а): ОДЗ: $x \neq 0$.

$f(x) = 25x - \dfrac{1}{10x^2} + \text{tg}25°$. $f'(x) = 25 + \dfrac{3}{10x^3} = 25 + \dfrac{1}{5x^3} = 0$; f′(x) = 0;

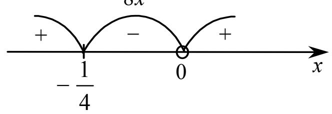
$125x^3 = -1$; $x = -\dfrac{1}{5}$.



Ответ: $f(x)$ возрастает на интервалах $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{5}\right)$ и $(0;\ +\infty)$ и убывает на $\left(-\dfrac{1}{5};\ 0\right)$.

б) аналогично с 5.2.В01 а): ОДЗ: $x \neq 0$.

$f(x) = 16x - \dfrac{1}{8x^2} + \text{tg}20°$. $f'(x) = 16 + \dfrac{2}{8x^3} = 16 + \dfrac{1}{4x^3}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.



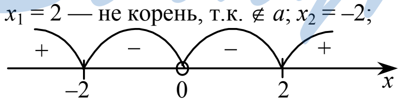
Ответ: $f(x)$ возрастает на интервалах $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{4}\right)$ и $(0;\ +\infty)$; $f(x)$ убывает на $\left(-\dfrac{1}{4};\ 0\right)$.

5.2.В04. а) $y(x) = x + \dfrac{4}{x}$. ОДЗ: $x \neq 0$; $a = [-4;\ -0{,}4]$.

Обозначим множество решений как $E(y)$ и рассмотрим $y'(x)$:

$y'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$; $y'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$;

$x_1 = 2$ — не корень, т.к. $\notin a$; $x_2 = -2$;



$\Rightarrow$ при $x = -2$ — max; $y(-2) = -2 + \dfrac{4}{-2} = -2 - 2 = -4$.

Рассмотрим $y(x)$ от краевых точек отрезка a:

$y(-4) = -4 + \dfrac{4}{-4} = -5$; $y(-0{,}4) = -0{,}4 + \dfrac{4}{-0{,}4} = -0{,}4 - 10 = -10{,}4$;

$\Rightarrow E(y) = [-10{,}4;\ -4]$. Ответ: E(y) = [–10,4; –4].

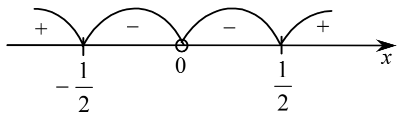
б) аналогично с а): ОДЗ: $x \neq 0$;

$y(x) = 4x + \frac{1}{x}$;

$y'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$;

$y'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$; $x_1 = \frac{1}{2}$ — не корень, т.к. $\notin a$, $x_2 = -\frac{1}{2}$;

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 - 2 = -4$;



$\Rightarrow$ при $x = -\frac{1}{2}$ — max.

Рассмотрим $y(x)$ от краевых точек: $y(-1) = 4 \cdot (-1) + \frac{1}{(-1)^2} = -5$,

$y(-0{,}2) = 4 \cdot (-0{,}2) + \frac{1}{-0{,}2} = -0{,}8 - 5 = -5{,}8$,

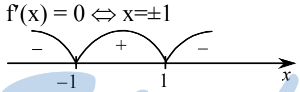
$\Rightarrow E(y) = [-5{,}8; -4]$. Ответ: $E(y) = [-5{,}8; -4]$.

5.2.В05. а) аналогично с 5.2.В04 а): ОДЗ: $x \in R$;

$f(x) = \frac{7x}{x^2+1}$; $a = \left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

$f'(x) = \frac{7(x^2+1) - 7x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{7x^2 + 7 - 14x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-7x^2+7}{(x^2+1)^2} = \frac{-7(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$



$x_1 = 1$ — $\notin$ ОДЗ, $x_2 = -1$ — точка минимума;

$f(-1) = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}$, $f(-2) = \frac{7 \cdot (-2)}{(-2)^2+1} = -\frac{14}{5}$,

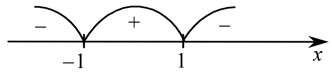
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{14}{5} \Rightarrow E(y) = \left[-\frac{7}{2}; \frac{14}{5}\right]$.

Ответ: $E(y) = \left[-\frac{7}{2}; \frac{14}{5}\right]$, т.е. наибольшее $\frac{14}{5}$ и наименьшее $-\frac{7}{2}$.

б) аналогично с 5.2.В04 а): ОДЗ: $x \in R$.

$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$;

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — не корень, т.к. $\notin \left[-5;\ \frac{1}{5}\right]$;



$\Rightarrow$ при $x = -1$ — min.

$f(-1) = \frac{-4}{(-1)^2+1} = -2$, $f(-5) = \frac{4(-5)}{(-5)^2+1} = -\frac{20}{26} = -\frac{10}{13}$, $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{25}+1} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$.

$\Rightarrow E(y) = \left[-2;\ \frac{10}{13}\right]$.

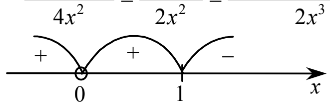
Ответ: $E(y) = \left[-2;\ \frac{10}{13}\right]$, т.е. наибольшее $\frac{10}{3}$, а наименьшее -2.

5.2.В06. а) $g(x) = \frac{-20+2x\sqrt[3]{9}-x^3}{4x}$. ОДЗ: $x \neq 0$.

Найдем $g'(x)$ и участки знакопостоянства:

$g'(x) = \frac{(2\sqrt[3]{9}-3x^2)\cdot 4x - 4(-20+2x\sqrt[3]{9}-x^3)}{16x^2} = \frac{2\sqrt[3]{9}x - 3x^3 + 20 - 2x\sqrt[3]{9} + x^3}{4x^2} =$

$= \frac{-2x^3+20}{4x^2} = \frac{-x^3+1}{2x^2} = \frac{-(x-1)(x^2+x+1)}{2x^3}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.



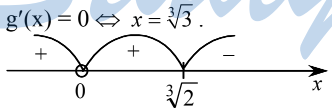
Ответ: функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$ и убывает на $(1; +\infty)$.

б) $g(x) = \frac{-6+3x\sqrt[5]{14}-x^3}{6x}$. Аналогично а): ОДЗ: $x \neq 0$.

$g'(x) = \left(\frac{-6+3x\sqrt[5]{14}-x^3}{6x}\right)' = \frac{(3\sqrt[5]{14}-3x^2)6x - (-6+3x\sqrt[5]{14}-x^3)6}{36x^2} =$

$= \frac{3\sqrt[5]{14}x - 3x^3 + 6 - 3x\sqrt[5]{14} + x^3}{6x^2} = \frac{-2x^3+6}{6x^2} = \frac{-x^3+3}{3x^2} = \frac{-(x-\sqrt[3]{3})(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{3})}{3x^3}$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$.



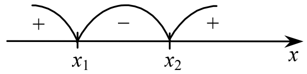
Ответ: функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0;\ \sqrt[3]{3})$ и убывает на $(\sqrt[3]{3};\ +\infty)$.

5.2.В07. а) $y(x) = \frac{1-x}{4x^2+8x+13}$. Аналогично5.2.В06 а): ОДЗ: $x \in R$;

$y'(x) = \left(\frac{1-x}{4x^2+8x+13}\right)' = \frac{(1-x)(8x+8)+4x^2+8x+13}{(4x^2+8x+13)^2} = \frac{-4x^2+8x+21}{(4x^2+8x+13)^2}$;

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 8x + 21 = 0$; $D = 16 + 84 = 100$;

$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 10}{-4} \Rightarrow x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{7}{2}$.



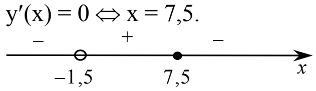
Ответ: функция возрастает на $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{7}{2};\ +\infty\right)$ и убывает на $\left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{7}{2}\right)$.

б) $y(x) = \dfrac{x-4}{4x^2+12x+9} = \dfrac{x-4}{(2x+3)^2}$.

аналогично а): ОДЗ: $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

$$y'(x) = \frac{(2x+3)^2 - 4(2x+3)(x-4)}{(2x+3)^4} = \frac{2x+3-4x+16}{(2x+3)^3} = \frac{19-2x}{(2x+3)^2};$$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$.



Ответ: функция возрастает на (–1,5; 7,5] и убывает на (–∞; –1,5) и на [7,5; +∞).

5.2.В08. а) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{2}{5x}$. $f'(x) = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{2}{5x^2} = \dfrac{2}{5}\dfrac{(x^3-1)}{x^2}$.

Точка экстремума $x = 1$. Это точка минимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+».

б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{16}{3x}$. $f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{8}{x^2}\right) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(x^3-8)}{x^2}$.

Точка экстремума $x = 2$. Это точка минимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+».

5.2.В09. а) $f(x) = -2x^3 - \dfrac{1}{x} + 4$.

$$f'(x) = -6x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-6x^4}{x^2} = -\frac{6\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}{x^2};$$

Точки $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ и $x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ — точки экстремума.

$x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ — точка минимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+»,

$x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ — точка максимума, т.к. $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–».

б) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{5}{x} - 5$.

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{5}{x^2} = \frac{6\left(x^2 - \sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(x^2 + \sqrt{\frac{5}{6}}\right)}{x^2};$$

Точки x= $\sqrt[4]{\dfrac{5}{6}}$ и $x = -\sqrt[4]{\dfrac{5}{6}}$ — точки экстремума.

$x = \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ — точке минимума. т. к. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+»,

$x = \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ — точке максимума, т. к. $f'(x)$ меняет знак «+» на «–».

5.2.B10. а) $y(x) = 4x + \frac{1}{x}$. $y'(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$.

На [0,2; 1] есть экстремум $\frac{1}{2}$ — точка минимума.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4$, $f(0,2) = 0,8 + 5 = 5,8$. $f(1) = 4 + 1 = 5$

Наибольшее значение: 5,8. Наименьшее: 4.

б) $y = 9x + \frac{16}{x}$, [–2; –0,5]. $y' = 9 - \frac{16}{x^2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{x^2}$.

На [–2; –0,5] есть 1 экстремум $\left(-\frac{4}{3}\right)$.

$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -12 - 12 = -24$, $f(-2) = -18 - 8 = -26$, $f(-0,5) = -4,5 - 32 = -36,5$.

Наибольшее: –24. Наименьшее: –36,5

5.2.B11. а) $f(x) = 7x - \frac{3,5}{(x-5)^2} + 7$. $f'(x) = 7 + \frac{7}{(x-5)^3} = 7\frac{(x-5)^3+1}{(x-5)^3}$;

$x = 4$ — точка экстремума, точка минимума.

б) $f(x) = 5x + \frac{2,5}{(x+3)^2} + 3$. $f'(x) = 5 - \frac{5}{(x+3)^3} = 5\frac{(x+3)^3-1}{(x+3)^3}$;

$x = -2$ — точка экстремума, точка минимума.

5.2.B12. а) $f(x) = 3x^2 + \frac{15}{x}$. $f'(x) = 6x - \frac{15}{x^2} = \frac{3(2x^3-5)}{x^2} = \frac{6\left(x^3 - \frac{5}{2}\right)}{x^2}$.

Точка $\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ — точка экстремума, точка минимума.

б) $f(x) = -2x^2 + \frac{12}{x} - 9$. $f'(x) = -4x - \frac{12}{x^2} = -4\frac{(x^3+3)}{x^2}$.

Точка $\sqrt[3]{-3}$ — точка экстремума, точка максимума.

Уровень С.

5.2.C01. а) $f(x) = \frac{5}{x-2} + \frac{2}{x} + 12$. D(f) = R \ {0; 2};

$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{-5x^2 - 2x^2 + 8x - 8}{(x-2)^2 x^2} = \frac{-7x^2 + 8x - 8}{(x-2)^2 x^2} = -\frac{7x^2 - 8x + 8}{x^2 (x-2)^2} < 0$,

т.к. D числителя отрицателен $\Rightarrow f(x)$ убывает на (–∞; 0), на (0; 2) и на (2; + ∞).

б) $f(x) = \frac{4}{x-3} + \frac{3}{x} + 14$. D(f) = R \ {0; 3];

$f'(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^2} - \dfrac{3}{x^2} = -\dfrac{4x^2+3x^2-18x+27}{x^2(x-3)^2} = -\dfrac{7x^2-18x+27}{(x-3)^2x^2} < 0$, т.к. дискриминант числителя отрицателен;
$f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 0)$, на $(0;\ 3)$ и на $(3;\ +\infty)$.

5.2.C02. а) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-1}{x^2-3x}$. D(f) = R \ {0; 3};

$$f'(x) = \frac{(4x-3)(x^2-3x)-(2x-3)(2x^2-3x-1)}{(x^2-3x)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-15x^2+9x-4x^3+12x^2-7x-3}{(x^2-3x)^2} = \frac{-3x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2} = -\frac{3x^2-2x+3}{(x^2-3x)^2} < 0$$

(т.к. $D < 0$), значит, $f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 0)$, на $(0;\ 3)$ и на $(3;\ +\infty)$.

б) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-5}{x^2-x}$. D(f) = R \ {0; 1};

$$f'(x) = \frac{(6x+4)(x^2-x)-(2x-1)(3x^2+4x-5)}{(x^2-x)^2} = \frac{6x^3-2x^2-4x-6x^3-5x^2+14x-3}{(x^2-x)^2} =$$

$$= \frac{-7x^2+10x-5}{(x^2-x)^2} = -\frac{7x^2-10x+5}{(x^2-x)^2} < 0$$

(т.к. $D < 0$), значит, $f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 0)$, на $(0;\ 1)$ и на $(1;\ +\infty)$.

5.2.C03.

а) $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{7}{x^2} - 3$. $f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{14}{x^3} = \dfrac{x^3-56}{4x^3}$;

$f'(x) < 0$ при $x \in (0;\ 2\sqrt[3]{7}\,] \Rightarrow f(x)$ убывает на $(\,0, 2\sqrt[3]{7}\,]$;

$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и на $[\,2\sqrt[3]{7}\,;\ +\infty)$;

$f(-2) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{4} - 3 < 0$, $f(-0{,}3) = -\dfrac{0{,}3}{4} + \dfrac{7}{0{,}09} - 3 > 0$.

В силу монотонности f на $(-\infty;\ 0)$ имеем ровно один нуль.

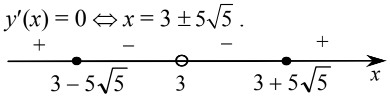
б) $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{x^2} - 10$. $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{10}{x^3} = \dfrac{x^3-30}{3x^3}$;

$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $x \in [\,\sqrt[3]{30}\,;\ +\infty)$ — на этих промежутках f возрастает; $(-3;\ -0{,}3) \in (-\infty;\ 0)$ и f монотонна на нем и в концах принимает разные знаки. Значит, есть ровно один нуль.

5.2.C04. а) $y(x) = \dfrac{x+4}{5} + \dfrac{25}{x-3}$. D(y) = R \ {3};

$$y'(x) = \frac{1}{5} - \frac{25}{(x-5)^2} = \frac{(x-3)^2-125}{5(x-3)^2} = \frac{(x-3-5\sqrt{5})(x-3+5\sqrt{5})}{5(x-3)^2};$$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm 5\sqrt{5}$.



$y(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 3-5\sqrt{5}\ ]$ и на $[3+5\sqrt{5}\ ;\ +\infty)$;
$y(x)$ убывает на $[3-5\sqrt{5}\ ;\ 3)$ и на $(3;\ 3+5\sqrt{5}\ ]$.

б) $y(x)=\frac{x-1}{3}+\frac{36}{x-6}$. D(f) = R \ {6}.

$$y'(x)=\frac{1}{3}-\frac{36}{(x-6)^2}=\frac{(x-6)^2-(6\sqrt{3})^2}{3(x-6)^2}=\frac{(x-6-6\sqrt{3})(x-6+6\sqrt{3})}{3(x-6)^2};$$

$y(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 6-6\sqrt{3}\ ]$ и на $[\ 6+6\sqrt{3}\ ;\ +\infty)$;
$y(x)$ убывает на $[6-6\sqrt{3}\ ;\ 6)$ и на $(6;\ 6+6\sqrt{3}\ ]$.

5.2.С05. а) $f(x)=-1+\frac{2x-5}{x^2-2x+15}$. ОДЗ: $x\in(-\infty;\ +\infty)$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-2x+15)-(2x-5)(2x-2)}{(x^2-2x+15)^2}=\frac{2x^2-4x+30-4x^2+14x-10}{(x^2-2x+15)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2+10x+20}{(x^2-2x+15)^2}=-2\frac{x^2-5x-10}{(x^2-2x+15)^2};$$

$x^2-5x-10=0$; $D=25+40\ 65$; $x=\frac{5\pm\sqrt{65}}{2}$;

$f(x)$ возрастает на $\left[\frac{5-\sqrt{65}}{2};\ \frac{5+\sqrt{65}}{2}\right]$;

$f(x)$ убывает на $\left(-\infty;\ \frac{5-\sqrt{65}}{2}\right]$ и на $\left[\frac{5+\sqrt{65}}{2};\ +\infty\right)$.

б) $f(x)=-4+\frac{2x-3}{x^2-6x+15}$. D(f) = R.

$$f'(x)=\frac{2x^2-12x+30-(2x-3)(2x-6)}{(x^2-6x+15)^2}=\frac{2x^2-12x+30-4x^2+18x-18}{(x^2-6x+15)^2}=$$

$=\frac{-2x^2+6x+12}{(x^2-6x+15)^2}=-2\frac{x^2-3x-6}{(x^2-6x+15)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x-6=0$;

$D=9+6=15$; $x_1=\frac{3+\sqrt{15}}{2}$; $x_2=\frac{3-\sqrt{15}}{2}$;

$f(x)$ возрастает на $\left[\frac{3-\sqrt{15}}{2};\ \frac{3+\sqrt{15}}{2}\right]$;

$f(x)$ убывает на $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{15}}{2}\right]$ и на $\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2};+\infty\right)$.

5.2.С06. а) $y(x)=\left(\frac{x-3}{x-17}\right)^2$, $[-11;\ 10]$.

$$y'(x)=\frac{2(x-3)}{(x-17)}\cdot\frac{x-17-x+3}{(x-17)^2}=-28\frac{(x-3)}{(x-17)^3}.$$

На [–11; 10] есть один экстремум; в точке x = 3;

$y(-11) = \frac{1}{4}$, $y(10) = 1$, $y(3) = 0$.

Наибольшее: 1; наименьшее: 0.

б) $y(x) = \left(\frac{x-10}{x-12}\right)^2$, [8; 11].

$y'(x) = 2\frac{x-10}{x-12} \cdot \frac{x-12-x+10}{(x-12)^3} = -4\frac{x-10}{(x-12)^3}$;

На [8; 11] есть один экстремум в точке x = 10;

$f(8) = \frac{1}{4}$; $f(11) = 1$; $f(10) = 0$.

Наибольшее: 1; наименьшее: 0.

5.2.C07.

а) $y(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-36} + 14$. D(y) = R \ {±6};

$y'(x) = \frac{2(x-1)(x^2-36)-(x-1)^2(2x)}{(x^2-36)^2} = \frac{2(x-1)(x^2-36-x^2+x)}{(x^2-36)^2} = \frac{2(x-1)(x-36)}{(x^2-36)^2}$;

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 36$;

+		+		−		−		+	
	−6		1		6		36		x

$y(x)$ возрастает на $(-\infty; -6)$, на $(-6; 1]$ и на $[36;+\infty)$ и убывает на $[1; 6)$ и на $(6; 36]$.

б) $y(x) = \frac{(x-4)^2}{x^2-64} - 8$. D(y) = R \ {±8}.

$y'(x) = \frac{2(x-4)(x^2-64)-(x-4)^2 \cdot 2x}{(x^2-64)^2} = \frac{2(x-4)(x^2-64-x^2+4x)}{(x^2-64)^2} = \frac{8(x-4)(x-16)}{(x^2-64)^2}$;

$y'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty; -8) \cup (-8; 4] \cup [16; +\infty) \Rightarrow y(x)$ возрастает на $(-\infty; -8)$, на $(-8; 4]$ и на $[16; +\infty)$.

$y'(x) \leq 0$ при $x \in [4; 8) \cup (8; 16] \Rightarrow y(x)$ убывает на $[4; 8)$ и на $(8; 16]$.

5.2.C08.

а) $f(x) = \frac{x^2-3x+16}{x}$. D(f) = R \ {0}.

$f'(x) = \frac{(2x-3)x-x^2+3x-16}{x^2} = \frac{x^2-16}{x^2}$;

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-4; 0) \cup (0; 4] \Rightarrow f(x)$ убывает на $[-4; 0)$ и на $(0; 4]$.

$f(1) = 14$;

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{\left(\frac{49}{4} - \frac{21}{2} + 16\right)^2}{7} = \frac{\frac{49}{2}+11}{7} = \frac{71}{14};$$

Множество значений: $\left[\frac{71}{14}; 14\right)$.

б) $f(x)=\frac{x^2-x+25}{x}=x+\frac{25}{x}-1$. D(f) = R \ {0}.

$f'(x)=1-\frac{25}{x^2}=\frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$;

$f'(x)\le 0$ при $x\in[-5;0)\cup(0;+5]\Rightarrow f(x)$ убывает на [–5; 0) и на (0; 5].

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}+10-1=\frac{23}{2}$; $f(3)=3+\frac{25}{3}+1=\frac{6+25}{3}=\frac{31}{3}$;

Множество значений: $\left(\frac{31}{3};\ \frac{23}{2}\right]$.

5.2.C09.

а) $y(x)=x+\frac{36}{x}$. $y'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x-6)(x+6)}{x^2}$;

Пусть x_0 — середина отрезка, тогда $x_0+\frac{36}{x_0}=12$;

$\frac{x_0^2-12x_0+36}{x_0}\Leftrightarrow x_0=6$. Отрезок [1; 11].

б) $y(x)=49x+\frac{100}{x}$. $y'(x)=49-\frac{100}{x^2}$;

Пусть x_0 — середина отрезка, тогда $49x_0-\frac{100}{x_0^2}=0$;

$x_0=\pm\frac{10}{7}$; $x=-\frac{10}{7}$ — точка максимума,

$f\left(-\frac{10}{7}\right)=-140\Rightarrow$ искомый отрезок $\left[-\frac{13}{7};-1\right]$. Отрезок $\left[-\frac{13}{7};-1\right]$.

5.2.C10. а) $f(x)=\frac{3x^3}{\frac{2}{3}-x^2}-1$.

$$f'(x)=\frac{9x^2\left(\frac{2}{3}-x^2\right)-3x^3(-2x)}{\left(\frac{2}{3}-x^2\right)^2}=\frac{6x^2-3x^4}{\left(\frac{2}{3}-x^2\right)^2}=-3\frac{x^2(x^2-2)}{\left(\frac{2}{3}-x^2\right)^2}.$$

Точка экстремума $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума.

Точка экстремума $x=\sqrt{2}$ — точка максимума.

б) $f(x)=\frac{5x^3}{6x^2-9}-7$.

$$f'(x)=\frac{5}{3}\left(\frac{3x^2(2x^2-3)-x^3(4x)}{(2x^2-3)^2}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{(6x^4-9x^2-4x^4)}{(2x^2-3)^2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{(2x^4-9x^2)}{(2x^2-3)^2}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x^2\left(x^2-\frac{9}{2}\right)}{(2x^2-3)^2}.$$

Точка экстремума $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ — точка максимума.

Точка экстремума $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ — точка минимума.

5.2.C11. а) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+5x-6}$.

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+5x-6)-x^2(2x+5)}{(x-1)^2(x+6)^2}=\frac{5x^2-12x}{(x-1)^2(x+6)^2}=\frac{5x\left(x-\frac{12}{5}\right)}{(x-1)^2(x+6)^2}.$$

Точка экстремума $x=0$ — точка максимума.

Точка экстремума $x=\frac{12}{5}$ — точка минимума.

б) $f(x)=\frac{7x^2}{x^2+2x-3}-7$.

$$f'(x)=\frac{14x(x^2+2x-3)-7x^2(2x+2)}{(x-1)^2(x+3)^2}=\frac{14x^2-3-14x}{(x-1)^2(x+3)^2}=\frac{14x(x-3)}{(x-1)^2(x+3)^2}.$$

Точка экстремума $x=0$ — точка максимума.
Точка экстремума $x=3$ — точка минимума.

5.2.C12. а) $f(x)=\frac{-5x^2+x+22}{x^2-5}$.

$$f'(x)=\frac{(-10x+1)(x^2-5)+27(5x^2-x-22)}{(x^2-5)^2}=\frac{-x^2+6x-5}{(x^2-5)^2}=-\frac{(x-1)(x-5)}{(x^2-5)^2};$$

x = 1 и x = 5 — точки экстремума;

$f(1)=-\frac{9}{2}$; $f(5)=-\frac{49}{10}$; $\frac{1}{2}(f(1)+f(5))=-\frac{47}{10}$.

Ответ: $-\frac{47}{10}$.

б) $f(x)=\frac{3x^2+x-27}{x^2-8}$.

$$f'(x)=\frac{(6x+1)(x^2-8)-2x(3x^2+x-27)}{(x^2-8)^2}=\frac{-x^2+6x-8}{(x^2-8)^2}=-\frac{(x-4)(x-2)}{(x^2-8)^2};$$

x = 2 и x = 4 — точки экстремума;

$f(2)=\frac{13}{4}$; $f(4)=\frac{25}{8}$; $\frac{1}{2}(f(2)+f(4))=\frac{51}{16}$. Ответ: $\frac{51}{16}$.

Уровень D.

5.2.D01. а) $f(x)=\frac{7x-19}{12x^2+17x-5}+3$.

$$f'(x)=\frac{7(12x^2+17x-5)-(17x-19)(24x+17)}{(12x^2+17x-5)^2}=$$

$$= \frac{-84x^2 + 24\cdot 19x + 228}{(12x^2+17x-5)^2} = -12\frac{7x^2-38x-24}{(12x^2+17x-5)^2} = -12\frac{7(x-6)\left(x+\frac{4}{7}\right)}{(12x^2+17x-5)^2};$$

$f(x)$ убывает на $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right]$ и на $[6; +\infty)$.

б) $f(x) = \dfrac{8x-7}{3x^2+11x-4} - 3$.

$$f'(x) = \frac{24x^2+88x-32-(8x-7)(6x+11)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)} = \frac{24x^2+88x-32-48x^2-46x+77}{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)} =$$

$$\frac{-24x^2+42x+45}{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)} = -3\frac{(8x^2-14x-15)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)} = -24\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)};$$

$f(x)$ убывает на $(-\infty; -4)$, на $\left(-4; -\frac{3}{4}\right]$ и на $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

5.2.D02. а) $y(x) = \dfrac{(x-3)^3}{(x-6)^2} - \dfrac{69}{4}$. D(y) = R \ {6};

$$y'(x) = \frac{3(x-3)^2(x-6)^2 - 2(x-6)(x-3)^3}{(x-6)^4} =$$

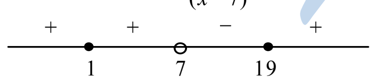
$$= (x-3)^2\frac{3x-18-2x+6}{(x-6)^3} = (x-3)^2\frac{(x-12)}{(x-6)^3};$$

$y(x)$ возрастает на $(-\infty; 6)$ и на $[12; +\infty)$.
x = 12 — точка минимума;

$y(12) = \dfrac{93}{6^2} - \dfrac{69}{4} = 3$. Ответ: $\dfrac{109}{36}$.

б) $y(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x-7)^2} - \dfrac{69}{2}$. D(y) = R \ {7};

$$y'(x) = \frac{3(x-1)^2(x-7)^2 - 2(x-7)(x-1)^3}{(x-7)^4} = \frac{(x-1)^2(3x-21-2x+2)}{(x-7)^3} = \frac{(x-1)^2(x-19)}{(x-7)^3};$$



$y(x)$ возрастает на $(-\infty; 7)$ и на $[19; +\infty)$.

x = 19 — точка минимума; $f(19) = \dfrac{18^3}{12^2} - \dfrac{69}{2} = 6$ — минимум. Ответ: 6.

5.2.D03. а) $y(x) = \dfrac{(x-15)^2}{(x-12)^3} + \dfrac{23}{81}$. ОДЗ: R \ {12};

$$y'(x)=\frac{2(x-15)(x-12)^3-3(x-12)^2(x-15)^2}{(x-12)^6}=$$

$$=\frac{(x-15)(x-12)^2(2x-24-3x+45)}{(x-12)^6}=-\frac{(x-15)(x-21)}{(x-12)^4};$$

$y(x)$ убывает на (–∞; 12), на (12; 15] и на [21; +∞).

x = 21 — точка максимума; $y(21)=\frac{6^2}{9^2}+\frac{23}{81}=\frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

б) $y(x)=\frac{(x-9)^2}{(x-8)^3}+\frac{23}{27}$. $y'(x)=\frac{2(x-9)(x-8)^3-3(x-8)^2(x-9)^2}{(x-8)^6}=$

$$=(x-9)\frac{2x-16-3x+27}{(x-8)^4}=-(x-9)\frac{(x-11)}{(x-8)^4};$$

$y(x)$ убывает на (–∞; 8), на (8; 9] и на [11; +∞).

т. максимума — $x = 11$, $y(11)=\frac{2^2}{3^3}+\frac{23}{27}=1$. Ответ: 1.

5.2.D04. а) $y(x)=x+\frac{4}{x}-\frac{4}{7}$. $y'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$;

Область определения: $x\neq 0$;
Возрастает на (–∞; –2] и на [2; +∞); Убывает на [–2; 0) и на (0; 2];
Точки экстремума 2 и –2;

Экстремумы $\frac{24}{7}$ и $-\frac{32}{7}$.

б) $y(x)=x+\frac{9}{x}+\frac{2}{7}$. $y'(x)=1-\frac{9}{x^2}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$;

Область определения $x\neq 0$;
Возрастает на (–∞; –3] и на [3; +∞); Убывает на [–2; 0) и на (0; 2];

Точки экстремума –3 и 3; Экстремумы $-\frac{40}{7}$ и $\frac{44}{7}$.

§ 3. Иррациональные функции

Уровень А.

5.3.A01. а) $f(x)=5x+\frac{6}{\sqrt{x}}+1$ $f'(x)=5-\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{5x^{\frac{3}{2}}-3}{x^{\frac{3}{2}}}$

$x^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{5}$ $x=\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$ Ответ: $\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$;

б) $f(x)=3x+\frac{8}{\sqrt{x}}+9$ $f'(x)=3-\frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x^{\frac{3}{2}}-4}{x^{\frac{3}{2}}}$

$x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$ $x=\sqrt[3]{\frac{16}{9}}$ Ответ: $\sqrt[3]{\frac{16}{9}}$.

5.3.A02. а) $y(x)=\frac{3}{x}-\frac{16}{\sqrt{x}}-5$. $y'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{8}{\left(\sqrt{x}\right)^3}=0$;

$\sqrt{x}=\frac{3}{8}\Rightarrow x=\frac{9}{64}$; $y\left(\frac{9}{64}\right)=\frac{64}{3}-\frac{128}{3}-5=-\frac{64}{3}-5=-\frac{79}{3}$;

$y(9)=\frac{1}{3}-\frac{16}{3}-5=-10$.

Наибольшее значение (–10), наименьшее $\left(-\frac{79}{3}\right)$.

б) $y(x)=\frac{5}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2$. $y'(x)=-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{\left(\sqrt{x}\right)^3}=0$; $\sqrt{x}=\frac{5}{4}\Rightarrow x=\frac{25}{16}$;

$y\left(\frac{25}{16}\right)=\frac{16}{5}-\frac{32}{5}+2=-\frac{6}{5}$; $y(25)=\frac{1}{5}-\frac{8}{5}+2=\frac{3}{5}$.

Наибольшее значение $\frac{3}{5}$, наименьшее $\left(-\frac{6}{5}\right)$.

5.3.A03. а) $y(x)=-4x\sqrt{x}+12\sqrt{x}-1$.

$y'(x)=-4\sqrt{x}-\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt{x}}=\frac{-4x-2x+6}{\sqrt{x}}=-\frac{6(x-1)}{\sqrt{x}}$.

Точка $x=1$ — экстремум, т.к. $y'(x)$ меняет знак с «+» на «–» — то максимум.

б) $y(x)=\frac{8}{3}x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+1$.

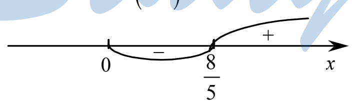
$y'(x)=4\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}=\frac{4(x-1)}{\sqrt{x}}$;

Точка $x=1$ — экстремум, т.к. $y'(x)$ меняет знак с «–» на «+» — то минимум.

5.4.A04.

а) $f(x)=5\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}$. D(f) = (0; +∞);

$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{5x-8}{2x\sqrt{x}}<0$ на $\left(0;\ \frac{8}{5}\right)\Rightarrow$



$f(x)$ убывает на $\left(0;\frac{8}{5}\right]$.

б) $f(x)=10\sqrt{x}+\frac{13}{\sqrt{x}}-8$. $f'(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{13}{2x\sqrt{x}}=\frac{10x-13}{2x\sqrt{x}}\le 0$ при $10x-13<0$ и

$x<\frac{13}{10}$, но $x>0$ по О.Д.З. $f(x)$ убывает на $\left(0;\frac{13}{10}\right]$.

5.3.A06. а) $y(x)=-\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{27}{2}\sqrt[3]{x^2}-11$.

$y'(x) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} - \frac{27}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-x-9}{\sqrt[3]{x}} = 0$

$\Leftrightarrow x = -9$, но $-9 \notin (0;+\infty)$. Ответ: в $(0;+\infty)$ таких точек нет.

б) $y(x) = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + 4$. $y'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{x-3}{\sqrt[3]{x}} = 0$;

$x = 3$ — критическая, $3 \in (0;+\infty)$. Ответ: 3.

Уровень В.

5.3.В01. а) $g(x) = (x + 8)\sqrt{x+8} - 39\sqrt{x+8} + 10$.

$g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+8} - \frac{39}{2\sqrt{x+8}} = \frac{3x+24-39}{2\sqrt{x+8}} = \frac{3x-15}{2\sqrt{x+8}}$.

При $x > 5$ $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ возрастает на $[5; +\infty)$;
При $-8 < x < 5$ $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ убывает на $[-8; 5)$.
Ответ: возрастает на $[5;+\infty)$, убывает на $(-8; 5]$.

б) $g(x) = (x - 10)\sqrt{x-10} - 12\sqrt{x-10} + 14$.

$g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-10} - \frac{6}{\sqrt{x-10}} = \frac{3x-30-21}{2\sqrt{x-10}} = \frac{3(x-14)}{2\sqrt{x-10}}$.

При $10 < x < 14$ $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ убывает.
При $x > 14$ $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ возрастает.
Ответ: возрастает на $[14;+\infty)$, убывает на $(10;14]$.

5.3.В02. а) $g(x) = 3\sqrt{(x-6)^5} - 35\sqrt{(x-6)^3} - 11$.

$g'(x) = \frac{15}{2}\sqrt{(x-6)^3} - \frac{105}{2}\sqrt{(x-6)} = \frac{15}{2}\sqrt{(x-6)}(x-6-7) =$

$= \frac{15}{2}\sqrt{x-6}(x-13)$.

При $6 < x < 13$ $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ убывает на $[6; 13]$.
При $x > 13$ $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ возрастает на $[13; +\infty)$.
Ответ: возрастает на $[13;+\infty)$; убывает на $[6;13]$.

б) $g(x) = 3\sqrt{(x-12)^5} - 25\sqrt{(x-12)^3} + 19$.

$g'(x) = \frac{15}{2}\sqrt{(x-12)^3} - \frac{75}{2}\sqrt{(x-12)} = \frac{15}{2}\sqrt{(x-12)}(x-12-5) = \frac{15}{2}\sqrt{x-12}(x-17)$;

При $x > 17$ $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ возрастает на $[17; +\infty)$.
При $12 < x < 17$ $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ убывает на $[12; 17]$.
Ответ: возрастает на $[17;+\infty)$; убывает на $[12;17]$.

5.3.В03. а) $g(x) = \frac{(x+14)^2}{(x+5)^{\frac{1}{2}}} + 5$; D(y) = $(-5; +\infty)$;

$$g'(x) = \frac{2(x+14)(x+5)^{\frac{1}{2}} - \frac{(x+14)^2}{2(x+5)^{\frac{1}{2}}}}{x+5} = \frac{4(x+14)(x+5) - (x+14)^2}{2(x+5)(x+5)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$=\frac{(x+14)(4x+20-x-14)}{(x+5)(x+5)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x+14)(3x+6)}{(x+5)(x+5)^{\frac{1}{2}}}.$$

Единственная критическая точка из области определения $(-5;+\infty)$ — это $x=-2$.
Ответ: $x=-2$.

5.3.B04. а) $g(x)=-7(x+2)(x-4)^{-\frac{1}{3}}+1$.

$$g'(x)=-7(x-4)^{-\frac{1}{3}}+\frac{7(x+2)}{3(x-4)^{\frac{4}{3}}}=-7\left(\frac{3x-12-x-2}{3(x-4)^{\frac{4}{3}}}\right)=-7\frac{(2x-14)}{3(x-4)^{\frac{4}{3}}}.$$

$x=7$ — точка максимума. Ответ: 7.

б) $g(x)=-5(x-2)(x-8)^{-\frac{1}{3}}+7$.

$$g'(x)=-5(x-8)^{-\frac{1}{3}}+\frac{5(x-2)}{3(x-8)^{\frac{4}{3}}}=-5\left(\frac{3x-24-x+2}{3(x-8)^{\frac{4}{3}}}\right)=-5\frac{(2x-22)}{3(x-8)^{\frac{4}{3}}}.$$

$x=11$ — точка максимума.
Ответ: 11.

5.3.B05. а) $g(x)=14(x+1)(x-11)^{-\frac{1}{3}}-7$.

$$g'(x)=14\left((x-11)^{-\frac{1}{3}}-\frac{x+1}{3(x-11)^{\frac{4}{3}}}\right)=14\left(\frac{3x-33-x-1}{3(x-11)^{\frac{4}{3}}}\right)=14\frac{(2x-34)}{3(x-11)^{\frac{4}{3}}};$$

$x=17$ — точка минимума.
Ответ: 17.

б) $g(x)=11(x-4)(x-8)^{-\frac{1}{3}}-14$.

$$g'(x)=11\left((x-8)^{-\frac{1}{3}}-\frac{x-4}{3(x-8)^{\frac{4}{3}}}\right)=11\left(\frac{3x-24-x+4}{3(x-8)^{\frac{4}{3}}}\right)=\frac{2x-20}{3(x-8)^{\frac{4}{3}}};$$

$x=10$ — точка минимума. Ответ: 10.

5.3.B06. а) $g(x)=15\cdot\frac{x-11}{\sqrt{x-24}}-2$.

$$g'(x)=15\cdot\frac{\sqrt{x-24}-\frac{1}{2}(x-11)(x-24)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{x-24}\right)^2}=15\frac{\frac{2x-48-x+11}{2\sqrt{x-24}}}{x-24}=15\frac{x-37}{2(x-24)^{\frac{3}{2}}};$$

$x=37$ — критическая точка.

б) $g(x)=11\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x-23}}$.

$$g'(x)=11\cdot\frac{\sqrt{x-23}-\frac{1}{2}(x+1)(x-23)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{x-23}\right)^2}=11\frac{2x-46-x-1}{2\left(x-23\right)^{\frac{3}{2}}}=11\frac{x-47}{2\left(x-23\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$x=47$ — критическая точка.

5.3.B07. а) $g(x)=(20-x)(x-6)^{\frac{1}{3}}+6$.

$$g'(x)=-\left(x-6\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{20-x}{3\left(x-6\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-3x+18+20-x}{3\left(x-6\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-4x+38}{3\left(x-6\right)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{4x-38}{3\left(x-6\right)^{\frac{2}{3}}};$$

$x=\frac{19}{2}$ — критическая точка.

б) $g(x)=(21-x)(x-18)^{\frac{1}{3}}-14$.

$$g'(x)=-\left(x-18\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{21-x}{3\left(x-18\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-3x+54+21-x}{3\left(x-18\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-4x+75}{3\left(x-18\right)^{\frac{2}{3}}}=-4\frac{(x-\frac{75}{4})}{3\left(x-18\right)^{\frac{2}{3}}};$$

$x=\frac{75}{4}$ — критическая точка.

5.3.B08. а) $g(x)=\frac{10}{3}x\sqrt{x}-6x+11$. $g'(x)=5\sqrt{x}-6=0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{x}=\frac{6}{5}\Rightarrow x=\frac{36}{25}$;

$g\left(\frac{36}{25}\right)=\frac{10}{3}\cdot\frac{36}{25}\cdot\frac{6}{5}-\frac{26}{25}+11=\frac{393}{25}$. Ответ: $\frac{393}{25}$.

б) $g(x)=4x\sqrt{x}-9x-4$. $g'(x)=6\sqrt{x}-9=0\Leftrightarrow\ \sqrt{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{9}{4}$;

$g\left(\frac{9}{4}\right)=4\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}-\frac{81}{4}-4=-\frac{27}{4}-4=-\frac{43}{4}$. Ответ: $-\frac{43}{4}$.

5.3.B09. а) $g(x)=-2x\sqrt{x}+6x+19$. $g'(x)=-3\sqrt{x}+6=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\ \Leftrightarrow\ x=4$.
$g(4)=-16+24+19=27$.
Ответ: 27.

б) $g(x)=-8x\sqrt{x}+3x-2$. $g'(x)=-12\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{16}$

$g\left(\frac{1}{16}\right)=-\frac{8}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{16}-2=-\frac{1}{8}+\frac{3}{16}-2=-1\frac{15}{16}$. Ответ: $-1\frac{15}{16}$.

5.3.B10. а) $g(x)=7(x+14)^{\frac{2}{3}}(x+11)^{-\frac{1}{3}}+4$.

$$g'(x)=7\cdot\left(\frac{2\left(x+11\right)^{-\frac{1}{3}}}{3\left(x+14\right)^{\frac{1}{3}}}-\frac{\left(x+14\right)^{\frac{2}{3}}}{3\left(x+11\right)^{\frac{4}{3}}}\right)=\frac{7}{3}\cdot\frac{2x+22-x-14}{\left(x+14\right)^{\frac{1}{3}}\left(x+11\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{7(x+8)}{3\left(x+14\right)^{\frac{1}{3}}\left(x+11\right)^{\frac{4}{3}}};$$

критическая точка $x = -8$.
Ответ: -8.

б) $g(x) = 10(x+12)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{-\frac{1}{3}} + 9$.

$$g'(x) = 10\cdot\left(\frac{2(x+2)^{-\frac{1}{3}}}{3(x+12)^{\frac{1}{3}}} - \frac{(x+12)^{\frac{2}{3}}}{3(x+2)^{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{2x+4-x-12}{(x+12)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{4}{3}}} = \frac{10}{3}\cdot\frac{x-8}{(x+12)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{4}{3}}};$$

$x = 8$ критическая точка.
Ответ: 8.

5.3.В11. а) $f(x) = 6\sqrt[3]{4x} - 3(8x-12)^{\frac{1}{3}}$. $D(f) = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$;

$f'(x) = \dfrac{8}{\sqrt[3]{16x^2}} - \dfrac{8}{\sqrt[3]{(8x-2)^2}} = 8\dfrac{\sqrt[3]{(8x-12)^2} - \sqrt[3]{16x^2}}{\sqrt[3]{16x^2}\sqrt[3]{(8x-12)^2}}$; $f'(x) = 0$ при $(8x-12)^2 = 16x^2$

$$\left[\begin{array}{l} 8x-12 = 4x \\ 8x-12 = -4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in D(f), \\ x = 1 \notin D(f). \end{array}\right.$$

В т. $x = 3$ $f'(x)$ меняет знак $\Rightarrow$ $x = 3$ — точка экстремума.
Ответ: 3.

б) $f(x) = 2(4x)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{8x-9}$. $D(f) = (0; +\infty)$;

$$f'(x) = \frac{8}{3\sqrt[3]{16x^2}} - \frac{8}{3\sqrt[3]{(8x-9)^2}} = \frac{8}{3}\frac{\sqrt[3]{(8x-9)^2} - \sqrt[3]{16x^2}}{\sqrt[3]{16x^2}\sqrt[3]{(8x-9)^2}};$$

$f'(x) = 0$ при $(8x-9)^2 = 16x^2$;

$$\left[\begin{array}{l} 8x-9 = 4x \\ 8x-9 = -4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{9}{4}, \\ x = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

В т. $x = \frac{9}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$ $f'(x)$ меняет знак $\Rightarrow$ это точки экстремума; в т. $x = \frac{9}{8}$ $f'(x)$ неопределенна, но имеет один и тот же знак и справа, и слева от этой точки $\Rightarrow$ $x = \frac{9}{8}$ — не точка экстремума. Ответ: $\frac{9}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

5.3.В12. а) $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} - 2x + 1$

$f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке $[4, 9]$ $f'(x)>0$, тогда максимум достигается при $x=9$

$f(9)=81-2\cdot9\cdot3-18+1=10$

б) $f(x) = 2 - x^2 - 2x\sqrt{x} + 5x$

$f'(x) = -2x - 3\sqrt{x} + 5 = -2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

На отрезке [1, 4] $f'(x)<0$ наименьшее значение достигается при $x=4$
$f(x)=2-16-16+20=-10$.

Уровень С.

5.3.С01.

а) $y(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{-4x-5}$.

$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{4}{\sqrt{-4x-5}}=\frac{\sqrt{-4x-5}+8\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{-4x-5}}>0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ y(x) возрастает при всех допустимых x.

О.Д.З.

$$\begin{cases} x>-2 \\ 4x<-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Наибольшее значение в $x=-\frac{5}{4}$;

$$y\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Наименьшее значение в $x=-2$; $y(-2)=\ -2\sqrt{3}$

б) $y(x)=3\sqrt{5x-4}-\sqrt{-x+1}$.

$y'(x)=\dfrac{15}{2\sqrt{5x-4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{-x+1}}>0$ $\Rightarrow$ y(x) возрастает при всех допустимых x.

О.Д.З.

$$\begin{cases} -x+1\ge 0 \\ 5x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x\ge \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Наибольшее значение в т. x = 1

$y(1)=3$

Наименьшее значение в т. x = $\left(\frac{4}{5}\right)$; $y\left(\frac{4}{5}\right)=-\sqrt{\frac{1}{5}}$.

5.3.С02.

а) $y(x)=\sqrt{-4x-3}-3\sqrt{4x+5}$. $y'(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{-4x-3}}-\dfrac{6}{\sqrt{4x+5}}<0$.

О.Д.З.

$$\begin{cases} -4x-3\ge 0 \\ 4x+5\ge 0 \end{cases};\ \begin{cases} x\le -\dfrac{3}{4} \\ x\ge -\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Наибольшее значение в $x=-\frac{5}{4}$: $y\left(-\frac{5}{4}\right)=\sqrt{2}$.

Наименьшее значение в $x=-\frac{3}{4}$: $y\left(-\frac{3}{4}\right)=-3\sqrt{2}$.

б) $y(x)=3\sqrt{-x+4}-\sqrt{4x-3}$. $y'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{-x+4}}-\frac{2}{\sqrt{4x-3}}<0$;

О.Д.З.

$\begin{cases}-x+4\ge 0\\ 4x-3\ge 0\end{cases}$; $\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ x\ge \frac{3}{4}\end{cases}$.

Наибольшее значение в $x=\frac{3}{4}$: $y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{13}$.

Наименьшее значение в $x=4$: $y(4)=-\sqrt{13}$.

5.3.C03.

а) $f(x)=\sqrt{6x^2-4x+49}$.

$6x^2-4x+49>0$ всегда, так как D=16–4 · 6 · 49 < 0.

$f'(x)=\frac{12x-4}{2\sqrt{6x^2-4x+49}}=\frac{6x-2}{\sqrt{6x^2-4x+49}}$;

$f'(x)<0$ при $x<\frac{1}{3}$ $\Rightarrow f(x)$ убывает на $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$;

$f'(x)>0$ при $x>\frac{1}{3}\Rightarrow f(x)$ возрастает на $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

б) $f(x)=\sqrt{5x^2+4x+41}$.

О.Д.З.: $(-\infty;+\infty)$;

$f'(x)=\frac{10x+4}{2\sqrt{5x^2+4x+41}}=\frac{10(x+0.4)}{2\sqrt{5x^2+4x+41}}$;

при $x<-0.4$ $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ убывает на $(-\infty;-0.4]$;

при $x>-0.4$ $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ возрастает на $[-0.4;+\infty)$.

5.3.C04. а) $f(x)=(1-9x)\sqrt{1+18x}$.

Нули функции $f(x)$: $\frac{1}{9}$ и $-\frac{1}{18}$.

$f'(x)=\frac{9}{\sqrt{1+18x}}-9\sqrt{1+18x}-\frac{81x}{\sqrt{1+18x}}=\frac{9-81x-9-162x}{\sqrt{1+18x}}=\frac{-243x}{\sqrt{1+18x}}$.

$x=0$ — точка максимума, $0\in\left[-\frac{1}{18};\frac{1}{9}\right]$; максимальное значение: $f(0)=1$;

$f\left(\frac{1}{9}\right)=0$; $f\left(-\frac{1}{18}\right)=0$ — минимальное значение. Ответ: 1 и 0.

б) $f(x)=(9-4x)\sqrt{9+8x}$. Нули функции $f(x)$: $\frac{9}{4}$ и $-\frac{9}{8}$.

$$f'(x)=-4\sqrt{9+8x}+\frac{(9-4x)4}{\sqrt{9+8x}}=\frac{-36-32x+36-16x}{\sqrt{9+8x}}=\frac{-48x}{\sqrt{9+8x}};$$

$x=0$ — точка максимума, $0\in\left[-\frac{9}{8};\frac{9}{4}\right]$.

Максимальное значение: $f(0) = 27$.

Минимальное значение — в концах отрезка, т.е. 0.

Ответ: 27 и 0.

5.3.C05.

а) $f(x)=\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}$. D(f) = [4; +∞);

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}\sqrt{x+1}}>0 \text{ на D(f).}$$

Наибольшее значение — $f(8) = 2 - 3 = -1$.

Наименьшее значение $f(5)=1-\sqrt{6}$. Ответ: -1 и $1-\sqrt{6}$.

б) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+4}$. D(f) = [2; +∞);

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}=\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+4}}>0 \text{ на D(f).}$$

Наибольшее значение: $f(6)=2-\sqrt{10}$.

Наименьшее значение $f(3)=1-\sqrt{7}$. Ответ: $2-\sqrt{10}$ и $1-\sqrt{7}$.

5.3.C06.

а) $f(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}$

Функция определена при $x\geq\frac{3}{4}$

$f'(x)=x-2+\sqrt{4x-3}$

$f'(x)$=0, $\begin{cases}x<2\\(x-2)^2=4x-3\end{cases}$, $\begin{cases}x<2\\x^2-8x+7=0\end{cases}$, $\begin{cases}x<2\\(x-1)(x-7)=0\end{cases}$

где x=1 – точка экстремума, причем минимума.

Итак, $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ – точка минимума $f(x)$;

б) $f(x)=\frac{x^2}{2}-5x+\frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$

Функция определена при $x\geq-\frac{5}{2}$.

$f'(x)=x-5+\sqrt{2x+5}$

$f'(x)$=0 $\begin{cases}x<5\\(x-5)^2=2x+5\end{cases}$, $\begin{cases}x<5\\x^2-12x+120=0\end{cases}$, $\begin{cases}x<5\\(x-10)(x-2)=0\end{cases}$

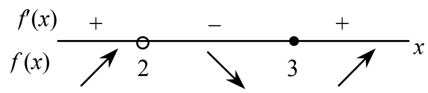
т.е. x=2 – абсцисса точки экстремума, причем минимума.

Итак, (2, 1) – точка минимума $f(x)$.

5.3.С07.

а) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{(x-2)^2} - 2$. $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$;

$f'(x) = 0$ при $\sqrt[3]{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$;
при x = 2 f′(x) — не определена.



$x = 2$ — точка максимума; x = 3 — точка минимума;

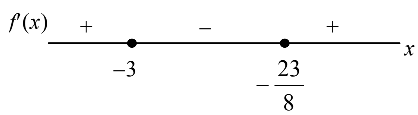
f(2) = 2; f(3) = 1; $\dfrac{f(2)}{f(1)} = 2$;

Ответ: 2.

б) $f(x) = 4x - 3\sqrt[3]{(x+3)^2} + 1$. $f'(x) = 4 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x+3}} = 4\dfrac{\sqrt[3]{x+3} - \frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x+3}}$;

$f'(x) = 0$ при $\sqrt[3]{x+3} = \dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{1}{8} - 3 = -\dfrac{23}{8}$.

f′(x) не определена в точке x = –3;



$x = 3$ — точка максимума;

$x = -\dfrac{23}{8}$ — точка минимума.

Искомое отношение $\dfrac{f(-3)}{f\left(-\frac{23}{8}\right)} = \dfrac{-11}{\frac{-23}{2} + 1 - \frac{3}{4}} = \dfrac{-11}{\frac{-46+4-3}{4}} = \dfrac{44}{45}$.

Ответ: $\dfrac{44}{45}$.

5.3.С08. а) $f(x) = x\sqrt[3]{x-1} - 8$, на отрезке [2, 65].

$f'(x) = \sqrt[3]{x-1} + \dfrac{x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \dfrac{3x - 3 + x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \dfrac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

На отрезке (2, 65] $f'(x)>0$ поэтому наименьшее значение функция принимает при x=2, а наибольшее при x=65,
т.е. $f_{min}=f(2)=-6$
$f_{max}=f(65)=252$;

б) $f(x)=4-x\sqrt[5]{x-4}\ \ x\in[5,\,36]$

$$f'(x)=-\left(\sqrt[5]{x-4}+\frac{x}{5\sqrt[5]{(x-4)^4}}\right)=-\frac{5x-4+x}{5\sqrt[5]{(x-4)^4}}=-\frac{6x-4}{5\sqrt[5]{(x-4)^4}}$$

На отрезке [5, 36], $f'(x)<0$, поэтому наименьшее значение функция принимает при $x=36$, а наибольшее при $x=5$.

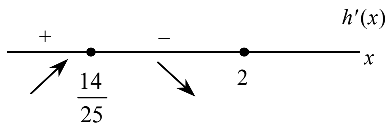
т.е. $f_{min}=f(36)=4-72=-68$

$f_{max}=f(5)=4-5=-1$.

5.3.C09. а) $h(x)=5x+12\sqrt{2-x}-9$, D(h) = $(-\infty;\,2]$;

$$h'(x)=5-\frac{6}{\sqrt{2-x}}=\frac{5\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=5\frac{\sqrt{2-x}-\frac{6}{5}}{\sqrt{2-x}};$$

$h'(x)=0$ при $\sqrt{2-x}=\frac{6}{5}\Leftrightarrow 2-x=\frac{36}{25}\Leftrightarrow x=\frac{14}{25}$; при x = 2 h′(x) не определена.



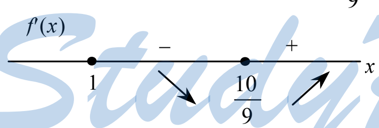
$h(x)$ возрастает при $x\in\left(-\infty;\frac{14}{25}\right]$, $h(x)$ убывает при $x\in\left[\frac{14}{25};\ 2\right]$.

Ответ: $h(x)$ возрастает при $x\in\left(-\infty;\frac{14}{25}\right]$; $h(x)$ убывает при $x\in\left[\frac{14}{25};\ 2\right]$.

б) $g(x)=3x-2\sqrt{x-1}+1$. D(g) = $[1;\,+\infty)$;

$$g'(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{3\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$$

$g'(x)=0$ при $3\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{9}\ \Leftrightarrow x=\frac{10}{9}$



Ответ: $g(x)$ возрастает на $\left[\frac{10}{9};+\infty\right)$; $g(x)$ убывает при $\left[1;\ \frac{10}{9}\right]$.

5.3.C10. а) $f(x)=2x-12\sqrt{x-2}+1$. D(f) = $[2;\,+\infty)$;

$$f'(x)=2-\frac{6}{\sqrt{x-2}}=2\frac{\sqrt{x-2}-3}{\sqrt{x-2}}=0$$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{x-2}=3$

$\Leftrightarrow x=11;$

$f'(x)$ меняет в точке 11 знак с «+» на «–» $\Rightarrow$

11 — точка минимума.

б) $f(x) = 3x - 6\sqrt{x-6} + 5$. D(f) = [6; +∞);

$f'(x) = 3 - \frac{3}{\sqrt{x-6}} = 3\frac{\sqrt{x-6}-1}{\sqrt{x-6}} = 0$

$\Leftrightarrow x = 7$.

$f'(x)$ меняет в т. 7 знак с «–» на «+» ⇒

7 — точка минимума.

5.3.C11. а) $f(x) = (x-7)\sqrt{5+x} + 2$. D(f) = [–5; +∞);

$f'(x) = \sqrt{5+x} + \frac{x-7}{2\sqrt{5+x}} = \frac{2x+10+x-7}{2\sqrt{5+x}} = 3\frac{x+1}{2\sqrt{5+x}}$;

$f'(x)$ обращается в 0 в $x = -1$ и меняет знак с «–» на «+» ⇒

–1 — точка минимума.

б) $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x} - 5$. D(f) = (–∞; 2];

$f'(x) = \sqrt{2-x} - \frac{x+1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-2x-x-1}{2\sqrt{2-x}} = -3\frac{x-1}{2\sqrt{2-x}}$.

Точка $x = 1$ — точка экстремума: $f'(x)$ меняет в ней знак с «+» на «–» ⇒ x = –1 — точка максимума.

5.3.C12. а) $f(x) = 14\sqrt{x} - 5\sqrt[5]{x} - 101\sqrt[101]{101}$. $f'(x) = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{7\sqrt[5]{x^4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{x^4}} = 0$.

$7\sqrt[5]{x^4} = \sqrt{x}$. $7 = x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{5}} = x^{-0.3}$.

$x = 7^{-\frac{10}{3}}$ — точка экстремума, причем минимума.

б) $f(x) = 10\sqrt{x} - 7\sqrt[7]{x} - 141\sqrt[141]{141}$. $f'(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} = \frac{5x^{\frac{5}{14}}-1}{x^{\frac{6}{7}}} = 5\frac{\left(x^{\frac{5}{14}} - \frac{1}{5}\right)}{x^{\frac{6}{7}}}$.

$x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{14}{5}}$ — точка экстремума, причем минимума.

Уровень D.

5.3.D01. а) $y(x) = 2 - 3x + 8\sqrt{3x-2}$.

$y'(x) = -3 + \frac{12}{\sqrt{3x-2}} = -3\frac{\sqrt{3x-2}-4}{\sqrt{3x-2}} = 0$;

$3x - 2 = 16 \Rightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6$.

Наибольшее значение $y(6) = 2 - 18 + 8 \cdot 4 = 16$. Ответ: 16.

б) $y(x) = 1 - 5x + 4\sqrt{5x-1}$.

$y'(x) = -5 + \frac{10}{\sqrt{5x-1}} = -5\frac{\sqrt{5x-1}-2}{\sqrt{5x-1}} = 0$;

$5x - 1 = 4 \Rightarrow x = 1$.

Наибольшее значение: $y(1) = 1 - 5 + 4 \cdot 2 = 4$. Ответ: 4.

5.3.D02. а) $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{7x+1}-\sqrt{7x-1}}$.

$$y'(x)=\frac{-\dfrac{7}{2\sqrt{7x+1}}+\dfrac{7}{2\sqrt{7x-1}}}{14x-2\sqrt{49x^2-1}}=\frac{7}{2}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{7x+1}-\sqrt{7x-1}}{\sqrt{49x^2-1}}}{\left(\sqrt{7x+1}-\sqrt{7x-1}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{7}{2\sqrt{49x^2-1}\left(\sqrt{7x+1}-\sqrt{7x-1}\right)}>0.$$

Наибольшее значение — в $x = 7$: $y(7)=\dfrac{1}{\sqrt{50}-\sqrt{48}}$.

Наименьшее значение — в $x = 5$: $y(5)=\dfrac{1}{6-\sqrt{34}}$.

б) $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

$$y'(x)=\frac{-\dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}+\dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}}}{\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{5x-1}\right)^2}=\frac{5}{2}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{25x^2-1}}}{\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{5x-1}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{25x^2-1}\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{5x-1}\right)}>0.$$

Наибольшее значение в $x = 4$: $y(4)=\dfrac{1}{\sqrt{21}-\sqrt{19}}$.

Наименьшее значение в $x = 2$: $y(2)=\dfrac{1}{\sqrt{11}-3}$.

5.3.D03. а) $f(x)=0{,}6x+\sqrt{4x-17}$.

$f'(x)=0{,}6+\dfrac{2}{\sqrt{4x-17}}>0$, значит $f(x)$ возрастает на области определения.

Значит, уравнение $f(x^2) = f(8x - 7)$ имеет своими решениями только решения уравнения.
$x^2 = 8x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$;
$x = 1$; $x = 7$, но $x = 1$ не входит в область определения. Значит, $x = 7$.
Ответ: 7.

б) $f(x)=1{,}1x+\sqrt{6x-7}$.

$f'(x)=1{,}1+\dfrac{3}{\sqrt{6x-7}}>0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на области определения.

Тогда уравнение $f(x^2) = f(7x + 8) \Leftrightarrow x^2 = 7x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$;
$x = -1$ и $x = 8$;
$x = -1$ не входит в область определения.

Ответ: 8.

5.3.D04. а) $f(x)=\frac{1}{7}+\frac{4}{6x+7}-\frac{6}{4x+5}$.

$$f'(x)=-\frac{24}{(6x+7)^2}+\frac{24}{(4x+5)^2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (6x+7)^2 \le (4x+5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+7\le 4x+5 \\ 6x+7\ge -4x-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x\ge -1{,}2, \text{ и } x\ne -\frac{7}{6} \end{cases}$. Ответ: $\left[-\frac{6}{5};-\frac{7}{6}\right)$ и $\left(-\frac{7}{6};-1\right]$.

б) $f(x)=\frac{1}{5}+\frac{1}{4x+5}-\frac{4}{x+4}$.

$f'(x)=\frac{-4}{(4x+5)^2}+\frac{4}{(x+4)^2}\le 0 \Leftrightarrow (4x+5)^2\le (x+4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5\le x+4 \\ 4x+5\ge -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\frac{1}{3} \\ x\ge -\frac{9}{5},\ x=-\frac{5}{4} \end{cases}$. Ответ: $\left[-\frac{9}{5};-\frac{5}{4}\right)$ и $\left(-\frac{5}{4};-\frac{1}{3}\right]$.

5.3.D05. а) $y(x)=\sqrt{x^2+6x+8}+4$.

Область определения: $x^2+6x+8\ge 0$; $x\in(-\infty;-4]\cup[-2;+\infty)$;

$y'(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+8}}$;

$y'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-4] \Rightarrow y(x)$ убывает на $(-\infty;-4)$;

$y'(x)>0$ при $x\in(-2;+\infty) \Rightarrow g(x)$ возрастает на $(-2;+\infty)$.

$x=-3$ не входит в область определения $\Rightarrow$ точек экстремума нет.

б) $y(x)=\sqrt{x^2+4x-5}+3$.

Область определения: $x^2+4x-5\ge 0$;

$x\in(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$; $y'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$;

$y(x)$ убывает на $(-\infty;-5)$; $y(x)$ возрастает на $(1;+\infty$.)

Точек экстремума нет.

5.3.D06. а) $y(x)=\sqrt{3-2x-x^2}-1$.

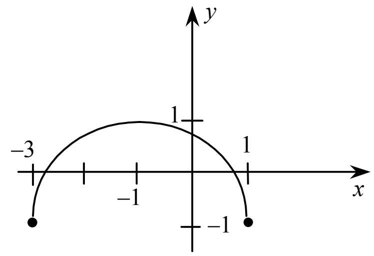
Область определения: $x^2+2x-3\le 0$; $x\in[-3;1]$;

$y'(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; $y(x)$ возрастает на $[-3;-1]$; $y(x)$ убывает на $[-1;1)$.

Точка экстремума $x=-1$

Экстремум: 1

У функции два нуля.



б) $y(x)=\sqrt{2x+8-x^2}-2$.

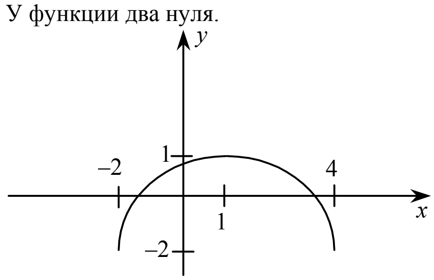
Область определения:$x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow x\in[-2;\,4]$.

$y'=\dfrac{-x+1}{\sqrt{2x+8-x^2}}$; $y(x)$ возрастает на $(-2;\,1]$; $y(x)$ убывает на $[1;\,4)$.

Точка экстремума $x = 1$

Экстремум: 1

У функции два нуля.



5.3.D07. а) $y(x)=\dfrac{1}{4}+\sqrt{1-x}+2$.

Область определения: $(-\infty;\,1)$;

$y'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4\sqrt{1-x}}$;

$y(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;\,-3]$; $y(x)$ убывает при $x\in[-3;\,1)$.

Точка экстремума: $x = -3$.

Экстремум: $y(-3)=-\dfrac{3}{4}+4=3\dfrac{1}{4}$.

б) $y(x)=\dfrac{x}{2}+\sqrt{6-x}+3$.

Область определения $(-\infty;\,6]$;

$y'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{2\sqrt{6-x}}$;

$y(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;\,5]$; $y(x)$ убывает при $x\in[5;\,6)$.

Точка экстремума: $x = 5$.

Экстремум: $y(5)=\frac{5}{2}+4=6\frac{1}{2}$.

5.3.D08. а) $y(x)=(3-x)\sqrt{3+2x}$.

Область определения $\left[-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$;

$y'(x)=-\sqrt{3+2x}+\frac{3-x}{\sqrt{3+2x}}=\frac{-3-2x+3-x}{\sqrt{3+2x}}=\frac{-3x}{2\sqrt{3+2x}}$;

$y(x)$ возрастает при $x\in\left(-\frac{3}{2};\ 0\right]$; $y(x)$ убывает при x ∈ [0; +∞).

Точка экстремума: x = 0.

Экстремум: $3\sqrt{3}$.

б) $y(x)=(1-4x)\sqrt{1+8x}$.

Область определения: $\left[-\frac{1}{8};\ +\infty\right)$;

$y'(x)=-4\sqrt{1+8x}+\frac{4(1-4x)}{\sqrt{1+8x}}=\frac{48x}{2\sqrt{1+8x}}$;

$y(x)$ возрастает на $\left(-\frac{1}{8};\ 0\right]$; $y(x)$ убывает на [0; +∞).

Точка экстремума x = 0.

Экстремум: y = 1.

5.3.D09. а) $y(x)=3\sqrt[3]{2x}-2\sqrt[3]{3x-5}+2$.

Область определения (–∞; +∞);

$y'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{(2x)^2}}-\frac{2}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$;

$y'(x)=0$ при $(3x-5)^2=(2x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases}2x=3x-5\\2x=5-3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\x=1\end{cases} \Rightarrow x=5$

На (–∞; 1) и на [5; +∞) $y(x)$ возрастает; на(1; 5] — убывает.

Точки экстремума 5, 1.

Экстремумы: $y(5)=3\sqrt[3]{10}-2\sqrt[3]{10}+2=\sqrt[3]{10}+2$, $y(1)=5\sqrt[3]{2}+2$.

б) $y=5\sqrt[3]{3x}-3\sqrt[3]{5x-8}-2$.

Область определения (–∞; +∞);

$y'(x)=\frac{5}{\sqrt[3]{(3x)^2}}-\frac{5}{\sqrt[3]{(5x-8)^2}}=5\frac{\sqrt[3]{(5x-8)^2}-\sqrt[3]{(3x)^2}}{\sqrt[3]{(3x)^2}\cdot\sqrt[3]{(5x-8)^2}}$;

$y'(x)=0$ при $(5x-8)^2=(3x)^2$;

$16x^2-80x+64=0$; x = 1, x = 4;

$y(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;\ 1]$ и $x\in[4;\ +\infty)$;

$y(x)$ убывает при $x\in[1;\ 4]$.

Точки экстремума: 1 и 4.

Экстремумы: $5\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-2=8\sqrt[3]{3}-2$ и $5\sqrt[3]{12}-3\sqrt[3]{12}-2=2\sqrt[3]{12}-2$

5.3.D10. а) $7a-2\sqrt{a}=f(a)$. $f'(a)=7-\frac{1}{\sqrt{a}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=\frac{1}{7} \Rightarrow a=\frac{1}{49}$;

$f\left(\frac{1}{49}\right)=\frac{1}{7}-\frac{2}{7}=-\frac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{49}$; $-\frac{1}{7}$.

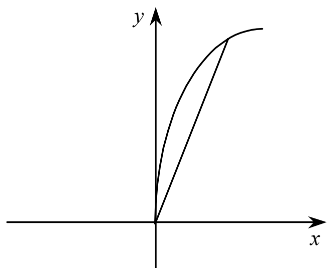
б) $a-8\sqrt{a}=f(a)$.

$f'(a)=1-\frac{4}{\sqrt{a}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=4 \Rightarrow a=16$;

$f(16)=16-8\cdot 4=-16$.

Ответ: 16; –16.

5.3.D11. а) $y=2\sqrt{8x}=4\sqrt{2x}$; $y=3x$; $\left[0;\ \frac{32}{9}\right]$.



Пусть $y=a$ — прямая.

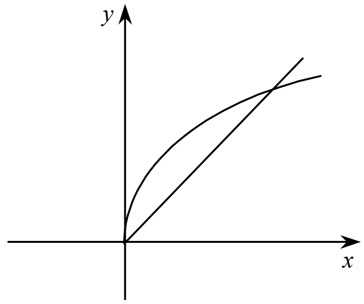
Абсцисса пересечения с первым графиком $\frac{a^2}{32}$; со вторым $\frac{a}{3}$.

Длина отрезка: $\frac{a}{3}-\frac{a^2}{32}=f(a)$; $f'(a)=\frac{1}{3}-\frac{a}{16}$;

$f'(a)=0 \Leftrightarrow a=\frac{16}{3}$; $f(a)=\frac{16}{9}-\frac{8}{9}=\frac{8}{9}$.

Ответ: $\frac{8}{9}$.

б) Пусть $y=a$ — прямая.



Точка пересечения (абсцисса) с первой кривой $x_{01} = \frac{a^2}{8}$; со второй $x_{02} = a$.

Длина отрезка: $a - \frac{a^2}{8} = f(a)$; $f'(a) = 1 - \frac{a}{4} = 0 \Leftrightarrow a = 4$;

$f(4) = 4 - \frac{16}{8} = 2$.

Ответ: 2.

5.3.D12.

а) $f(x) = 4\sqrt{3x+4} - 3x$. $D(f) = \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right]$;

$f'(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}} - 3 = 3\frac{(2-\sqrt{3x+4})}{\sqrt{3x+4}}$.

$f'(x) \geq 0$ при $0 < 3x + 4 \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases}$.

На $\left[-\frac{4}{3};\ 0\right]$ $f(x)$ возрастает. На $[0; +\infty)$ $f(x)$ убывает.

$f(x) = f(0)$ имеет единственный корень 0, т.к. 0 — точка глобального максимума.

Ответ: возрастает на $\left[-\frac{4}{3};\ 0\right]$; убывает на $[0; +\infty)$; корень 0.

б) $f(x) = 2x - 5\sqrt{4x-3}$. $D(f) = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$;

$f'(x) = 2 - \frac{10}{\sqrt{4x-3}} = 2\frac{(\sqrt{4x-3}-5)}{\sqrt{4x-3}}$;

$f'(x) \geq 0$ при $4x - 3 \geq 25 \Rightarrow x \geq 7$.

На $[7; +\infty)$ $f(x)$ возрастает. На $\left[\frac{3}{4};\ 7\right]$ $f(x)$ убывает.

Уравнение $f(x) = f(7)$ имеет единственный корень 7, т.к. т. 7 — глобальный минимум.

Ответ: возрастает на [7; +∞); убывает на $\left[\frac{3}{4};\ 7\right]$; корень 7.

§ 4. Тригонометрические функции

Уровень А.

5.4.A01.

а) $f(x)=x^2-x\cos x+\sin x$

$f'(x)=2x-\cos x+x\sin x+\cos x=x(2+\sin x)$

$f'(x)=0$ при $x=0$ (т.к. $2+\sin x>0$)

Точка экстремума при $x=0$, (0, 0) – минимум;

б) $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$

$f'(x)=2x-x\cos x-\sin x+\sin x=x(2-\cos x)$

$f'(x)=0$ при $x=0$ (т.к. $2-\cos x>0$)

Точка экстремума при $x=0$, (0, –1) – минимум.

5.4.A02.

а) $f(x)=16x\sin x+16\cos x+10\sin x+36x^2+45x-6$

$f'(x)=16x\cos x+16\sin x-16\sin x+10\cos x+72x+45=16x\cos x+10\cos x+72x+45=2\cos x(8x+5)+9(8x+5)=(2\cos x+9)(8x+5)$

т.к. $2\cos x+9>0$, то экстремум будет при $x=-\frac{5}{8}$ в точке $\left(-\frac{5}{8},\ f\left(-\frac{5}{8}\right)\right)$ – причем минимум.

$f\left(-\frac{5}{8}\right)=0$;

б) $f(x)=12x\sin x+12\cos x+27\sin x+10x^2+45x+3$

$f'(x)=12\sin x+12x\cos x\ x12\sin x+27\cos x+20x+45=3\cos x(4x+9)+5(4x+9)=$
$=(3\cos x+5)(4x+9)$

т.к. $3\cos x+5>0$, то экстремум будет при $x=-\frac{9}{4}$ в точке $\left(-\frac{9}{4},\ 0\right)$.

5.4.A03.

а) $f'(x) = 19(\sin x + x\cos x) - 19\sin x - 13\cos x = \cos x(19x - 13) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ 19x-13=0 \quad x=\frac{13}{19}\end{array}\right.$; т.к. $x \in (0;\ \pi) \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{13}{19}$; $\frac{\pi}{2}$.

б) $f'(x) = 20(\sin x + x\cos x) - 20\sin x - 19\cos x = \cos x(20x - 19) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ 20x-19=0 \quad x=\frac{19}{20}\end{array}\right.$; т.к. $x \in (0;\ \pi) \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{19}{20}$; $\frac{\pi}{2}$.

5.4.A04.

а) $f(x)=7x+\sin 3x$

$f'(x)=7+3\cos 3x$, т.к. $7+3\cos x>0$, т.е.

$f'(x)>0$ при любых x, то функция возрастате на всей области определения;
б) $f(x)=8x–\cos 5x$
$f'(x)=8+5\sin 5x$, т.к. $8+5\sin 5x>0$, т.е.
$f'(x)>0$, то функция возрастает на всей области определения.

5.4.А05.
а) $f(x)=4\cos3x–13x$,
$f'(x)=–12\sin3x–13$, очевидно $f'(x)<0$ при любых x, тогда функция убывает на всей области определения;
б) $f(x)=5\sin 4x–21x$,
$f'(x)=20\cos4x–21$, очевидно $f'(x)<0$ при любом x, значит функция убывает на всей области определения.

5.4.А06.
а) $y(x) = 19x – 9\sin x + 15$. $y'(x) = 19 – 9\cos x = 0$; $\cos x = \frac{19}{9}$;
нет решений $\Rightarrow 19 – 9\cos x > 0$. Ответ: функция возрастает при $x \in R$.
б) $y(x) = –17x + \sin x – 20$. $y'(x) = –17 + \cos x = 0$; $\cos x = 17$;
нет решений $\Rightarrow –17 + \cos x < 0$. Ответ: функция убывает при $x \in R$.

Уровень B.

5.4.B01.
а) $y(x) = 7x + \frac{2}{5}\cos\frac{5x}{2}$. $y'(x) = 7 - \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2} = 7 - \sin\frac{5x}{2} = 0$;
$\sin\frac{5x}{2} = 7$; нет решений $\Rightarrow 7 – \sin\frac{5x}{2} > 0$.
Ответ: функция возрастает при $x \in R$.
б) $y(x) = 3x + \frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3}$. $y'(x) = 3 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{2x}{3} = 3 - \sin\frac{2x}{3} = 0$;
$\sin\frac{2x}{3} = 3$; нет решений $\Rightarrow 3 – \sin\frac{2x}{3} > 0$.
Ответ: функция возрастает при $x \in R$.

5.4.B02.
а) $y(x) = 10x + 7\cos x + 2\sin x + 9$.
$y'(x) = 10 – 7\sin x + 2\cos x > 0$, т.к. $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$.
Ответ: функция возрастает при $x \in R$.
б) $y(x) = 24x + 9\cos x + 14\sin x + 4$.
$y'(x) = 24 – 9\sin x + 14\cos x > 0$; т.к. $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$.
Ответ: функция возрастает при $x \in R$.

5.4.B03.
а) $g'(x) = –9 – 13 \cdot 5x^4 – 4\sin x < 0$, т.к. $x^4 \ge 0$, $|\sin x| \le 1$.
Ответ: функция убывает при $x \in R$.
б) $g'(x) = –15 – 55x^4 – 14\sin x < 0$; т.к. $x^4 \ge 0$, $|\sin x| \le 1$.
Ответ: функция убывает при $x \in R$.

5.4.B04.

а) $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+15+14\sin 14x>0$; т.к. $\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$, $|\sin 14x|\le 1$.

Ответ: функция возрастает при $x\ge 0$.

б) $g'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+14+6\sin 5x>0$ т.к. $\frac{3}{\sqrt{x}}>0$, $|\sin 6x|\le 1$

Ответ: функция возрастает при $x\ge 0$.

5.4.B05.

а) $f(x)=\cos^2 x+4x+5$

$f'(x)=2\cos x(-\sin x)+4=4-\sin 2x$

Поскольку $f'(x)>0$ при любом x, то функция возрастает;

б) $f(x)=\sin^2 x+5x+4$

$f'(x)=2\cos x\sin x+5=5+\sin 2x$

Поскольку $f'(x)>0$ при любом x, то функция $f(x)$ возрастает.

5.4.B06.

а) $f(x)=7x-2\sin 3x+1$, $x\in[0,\pi]$

$f'(x)=7-6\cos 3x$, т.к. $f'(x)>0$, то функция возрастает,

$f_{min}=f(0)=1$

$f_{max}=f(\pi)=7\pi+1$;

б) $f(x)=8x+3\cos 2x-4$, $x\in[-\pi,0]$

$f'(x)=8-6\sin 2x$, т.к. $f'(x)>0$, то функция возрастает,

$f_{min}=f(-\pi)=-8\pi-1$

$f_{max}=f(0)=-1$.

5.4.B07.

а) $f(x)=11\operatorname{tg} x-4x$, $x\in\left[-\frac{7\pi}{15},0\right]$

$f'(x)=\frac{11}{\cos^2 x}-4$

т.к. $\cos^2 x\le 1$, то $f'(x)>0$ на всей области определения, т.е. функция $f(x)$ возрастает на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$

Тогда $f_{max}=f(0)=0$;

б) $f(x)=8x-13\operatorname{tg} x$; $x\in\left[0,\frac{6\pi}{13}\right]$

$f'(x)=8-\frac{13}{\cos^2 x}$, очевидно $f'(x)<0$

т.е. $f(x)$ убывает на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$

т.к. $\left[0,\frac{6\pi}{13}\right]\subset\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$, то $f_{max}=f(0)=0$.

5.4.B08.

а) $f(x)=2\cos x+x-3$, $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)$=1–2sin x, при $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)$<0, т.е. на этом отрезке функция убывает.

Т.е. $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 1$

$f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 3$;

б) $f(x)=x-2\sin x+5$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$f'(x)$=1–2cos x, при $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $f'(x)<0$

т.е. на этом отрезке функция убывает.
Тогда $f_{max}=f(0)=5$

$f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 4$.

5.4.B09.

а) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{5}\sin 5x - x\cos 5x$

$f'(x)=6x+\cos 5x-\cos 5x+5x\sin 5x=x(6+5\sin x)$
$f'(x)=0$ при $x=0$, т.к. при $x\le 0$, $f'(x)\le 0$, при $x\ge 0$ $f(x)\ge 0$, то $x=0$ – экстремум.
Итак, (0, 0) – точка экстремума;

б) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + x\sin 3x$

$f'(x)=4x-\sin 3x+\sin 3x+3x\cos 3x=x(4+3\cos 3x)$
$f'(x)=0$ при $x=0$, т.к. при $x\le 0$, $f'(x)\le 0$, $x\ge 0$ $f'(x)\ge 0$, то $x=0$ – экстремум.

Итак, $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ – экстремум.

5.4.B10.
а) $y'(x) = 27x^2 + 5\cos x + 6 > 0$; т.к. $x^2 \ge 0$, $|\cos x| \le 1$.
Ответ: функция монотонно возрастает при $x \in R$.
б) $y'(x) = 33x^2 + 3\cos x + 8 > 0$; т.к. $x^2 \ge 0$, $|\cos x| \le 1$.
Ответ: функция монотонно возрастает при $x \in R$.
5.4.B11.
а) $y'(x) = 2\cos(2x - 9) + 12 > 0$; т.к. $|\cos\alpha| \le 1$.
Ответ: $x \in R$.
б) $y'(x) = 5\cos(5x - 13) - 17 < 0$; т.к. $|\cos\alpha| \le 1$.
Ответ: нет $x \in R$.
5.4.B12.

а) $f(x)=\cos 5x-6x$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{7}, 0\right]$

$f'(x)=-5\sin 5x-6$

Т.к. $f'(x)<0$ на $\left[-\frac{5\pi}{7}, 0\right]$, то функция убывает и $f_{\min}=f(0)=1$;

б) $f(x)=\sin 7x+8x$, $x\in\left[0, \frac{4\pi}{9}\right]$

$f'(x)=7\cos 7x+8$, т.к. $f'(x)>0$ на $\left[0, \frac{4\pi}{9}\right]$, то функция возрастает, тогда $f_{\min}=f(0)=0$.

Уровень С.

5.4.С01.

а) $f(x) = 5\sin 2x - 14x$. $f'(x) = 10\cos 2x - 14 < 0$;
всегда $\Rightarrow f(x)$ убывает на $R \Rightarrow$ у нее только один нуль (очевидно, это $x = 0$).
б) $f(x) = 2\sin 4x - 9x$. $f'(x) = 8\cos 4x - 9 < 0$;
всегда $\Rightarrow f(x)$ убывает на $R \Rightarrow$ у нее только один нуль (очевидно, это $x = 0$).

5.4.С02.

а) $f(x) = \cos 5x\cos 8x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 13x)$;

наибольшее значение функции будет при $\begin{cases}\cos 3x = 1\\ \cos 13x = 1\end{cases}$; $\begin{cases}x = \frac{2\pi n}{3}\\ x = \frac{2\pi k}{13}\end{cases}$;

на $[0; 3\pi]$ это $x = 0$, $x = 2\pi$;

а минимальное $\begin{cases}\cos 3x = -1\\ \cos 13x = -1\end{cases}$; $\begin{cases}x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\\ x = \frac{\pi}{13} + \frac{2\pi n}{13}\end{cases}$;

$[0; 3\pi]$ это $x = \pi$, $x = 3\pi$ (k = 1, n = 6) и (k = 4, n = 19).
Ответ: $f_{\max} = f(0) = f(2\pi) = 1$, $f_{\min} = f(\pi) = f(3\pi) = -1$.

б) $f(x) = \cos 7x\cos 6x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 13x)$;

наибольшее значение функции будет при $\begin{cases}\cos = -1\\ \cos 13x = 1\end{cases}$; $\begin{cases}x = 2\pi n\\ x = \frac{2\pi k}{13}\end{cases}$;

на $[0; 5\pi]$ это будет $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$,

а наименьшее $\begin{cases}\cos x = -1\\ \cos 13x = -1\end{cases}$; $\begin{cases}x = \pi + 2\pi n\\ x = \frac{\pi}{13} + \frac{2\pi k}{13}\end{cases}$;

$[0; 5\pi]$ это будет $x = \pi$, $x = 3\pi$, $x = 5\pi$.
Ответ: $f_{\max} = f(0) = f(2\pi) = f(4\pi) = 1$, $f_{\min} = f(\pi) = f(3\pi) = f(5\pi) = -1$.

5.4.С03.

а) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{12\pi}{11}\right) + 2\cos\left(x - \frac{6\pi}{11}\right)$.

$f'(x)=2\left(\cos\left(2x-\frac{12\pi}{11}\right)-\sin\left(x-\frac{6\pi}{11}\right)\right)=0;$

$2\sin^2\left(x-\frac{6\pi}{11}\right)+\sin\left(x-\frac{6\pi}{11}\right)-1=0$; $D = 1 + 8 = 9$;

$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{6\pi}{11}\right)=-1\\ \sin\left(x-\frac{6\pi}{11}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x-\frac{6\pi}{11}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k\\ x-\frac{6\pi}{4}=\frac{\pi}{6}(-1)^k+\pi k\end{array}\right.$;

в отрезок $\left[-\frac{27\pi}{11};\ -\frac{5\pi}{11}\right]$ попадет: $x_1=-\frac{21\pi}{22}$; $x_2=-\frac{85\pi}{66}$; $x_3=-\frac{41\pi}{66}$;

$f(x_1) = 0$; $f(x_2)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}$;

$f(x_3)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: max: $f\left(-\frac{85\pi}{66}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}$; min: $f\left(-\frac{41\pi}{66}\right)=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{14\pi}{9}\right)+2\cos\left(x+\frac{7\pi}{9}\right)$.

$f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{14\pi}{9}\right)-2\sin\left(x+\frac{7\pi}{9}\right)=0$; $2\sin^2\left(x+\frac{7\pi}{9}\right)+\sin\left(x+\frac{7\pi}{9}\right)-1=0$;

$D = 9$; $x\in\left[\frac{2\pi}{9};\ \frac{20\pi}{9}\right]\Rightarrow x_1=\frac{13\pi}{18}$; $x_2=\frac{25\pi}{18}$; $x_3=\frac{37\pi}{18}$;

$f(x_1) = 0$; $f(x_2)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$f(x_3)=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $f_{\max}=f(x_2)=f\left(\frac{25\pi}{18}\right)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $f_{\min}=f(x_3)=f\left(\frac{37\pi}{18}\right)=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.4.С04.

а) $f(x)=\frac{9}{4}x-6\sin\frac{3x}{4}+9$.

$f'(x)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\cos\frac{3x}{4}=0;$

$\cos\frac{3x}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $x=\pm\frac{4\pi}{9}+\frac{8\pi n}{3}$; т.к. $x\in\left[-\frac{8\pi}{3};\ \frac{16\pi}{3}\right]$.

Ответ: $-\frac{20\pi}{9}$; $-\frac{4\pi}{9}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{20\pi}{9}$; $\frac{28\pi}{9}$; $\frac{16\pi}{3}$.

б) $f(x)=\frac{15}{4}x-5\sin\frac{3x}{2}-2$. $f'(x)=\frac{15}{4}-\frac{15}{2}\cos\frac{3x}{2}=0$; $\cos\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$;

$x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi n}{3}$; т.к. $x\in\left[-\frac{4\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right]\Rightarrow$

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{9}$; $x=\pm\frac{10\pi}{9}$; $x=\frac{14\pi}{9}$; $x=\pm\frac{2\pi}{9}$.

5.4.C05.

а) $f(x)=\frac{3}{8}x-\cos\frac{3x}{4}-3\sqrt{3}$. $f'(x)=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\sin\frac{3x}{4}=0\Rightarrow\sin\frac{3x}{4}=-\frac{1}{2}$;

$\frac{3}{4}x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\ \Rightarrow x=(-1)^{k+1}\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi k}{3}$.

Ответ: при нечетном k — точка max; при нечетном — min

б) $f(x)=\frac{2}{3}x-2\cos\frac{2x}{3}-4\sqrt{3}$. $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sin\frac{2x}{3}=0$;

$\sin\frac{2x}{3}=-\frac{1}{2}$; $\frac{2x}{3}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2}$.

Ответ: k — нечетное — точка max; четное — min.

5.4.C06.

а) $f(x)=x\sin x+\cos x+2x^2+2\sin x+8x+7$

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x+4x+2\cos x+8=(x+2)\cos x+4x+8=0$

$x(\cos x+4)=-2(\cos x+4)$ $x=-2$.

Ответ: –2;

б) $f(x)=x\cos x-\sin x+x^2+3\cos x+6x-5$

$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x+2x-3\sin x+6=-x\sin x-3\sin x+2x+6=0$

$x(2-\sin x)=-3(2-\sin x)$ $x=-3$.

Ответ: –3.

5.4.C07.

а) $f(x)=x\cos x-\sin x-2\cos x-1{,}5x^2+6x+1$

$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x+2\sin x-3x+6=-x\sin x+2\sin x-3x+6=0$

$2(\sin x+3)=x(\sin x+3)$ $x=2$.

Ответ: 2;

б) $f(x)=x\sin x+\cos x-3\sin x+x^2-6x-1$

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x-3\cos x+2x-6=x\cos x-3\cos x+2x-6=$
$=(x-3)(\cos x+2)=0$

$x=3$

Ответ: 3.

5.4.C08.

а) $f(x)=(x+12)^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+24\cos x-10$

$f'(x)=2(x+12)\sin x+(x+12)^2\cos x+2\cos x-2x\sin x-2\cos x-24\sin x=$
$=(x+12)^2\cos x=0$

$x_{extr}=\frac{\pi}{2}$

Наименьшее значение достигается либо при $x=0$, либо при $x=\frac{\pi}{2}$.

$f(0)=14$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}+12\right)^2-2-10>14$

Ответ: 14;

б) $f(x)=(x-15)2\cos x-2\sin x-2\cos x+30\sin x+8$

$f'(x)=2(x-15)\cos x-(x-15)^2\sin x-2\sin x2x\cos x+2\sin x+30\cos x=$
$=-(x-15)^2\sin x=0$ $x=0$

Аналогично п. а), рассматриваем $x=0$, $-\frac{\pi}{2}$.

$f(0)=225-2+8=231$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}+15\right)^2\cdot(-1)-\pi-30+8<231$

Ответ: 231.

5.4.C09.

а) $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x+4\sin x-8x+3$

$f'(x)=2x-x\cos x-\sin x+\sin x+4\cos x-8=2(x-4)-\cos x(x-4)=$
$=(x-4)(2-\cos x)$

$x_{extr}=4$ – точка минимума.

Ответ: 4;

б) $f(x)=\sin x-x\cos x-1{,}5x^2+5\cos x+15x-2$

$f'(x)=\cos x+x\sin x-\cos x-3x-5\sin x+15=x\sin x-5\sin x-3x+15=$
$=(x-5)(\sin x-3)$

$x_{extr}=5$ – точка максимума.

Ответ: 5.

5.4.C10.

а) $f(x)=\sin x-x\cos x-x^2+3$

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x-2x=x(\sin x-2)=0$

$x_{extr}=0$ $f(0)=3$ $f(-1)=-\sin 1-\cos 1+2<3$

Ответ: 3;

б) $f(x)=\cos x+x\sin x+2x^2-3$

$f'(x)-\sin x+\sin x+x\cos x+4x=x(\cos x+4)$ $x_{extr}=0$

$f(0)=-2$ $f(-1)=\cos 1+\sin 1-1>-2$

Ответ: –2.

5.4.C11.

а) $f(x) = 2\sin 5x - 2\sqrt{3}\cos 5x + 7$.

$f'(x) = 10\cos 5x + 10\sqrt{3}\sin 5x = 0$; $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{5}\right)$.

$\operatorname{tg}5x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $5x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$; $x = \frac{-\pi+6\pi n}{30}$;

т.к. $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{11\pi}{30}$; $x = \frac{17\pi}{30}$.

б) $f(x) = 4\sin\frac{x}{3} - 4\sqrt{3}\cos\frac{x}{3} + 1$.

$f'(x)=\frac{4}{3}\cos\frac{x}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{x}{3}=0;\ x\in\left(\frac{5\pi}{2};\ 9\pi\right);$

$\cos\frac{x}{3}=-\sqrt{3}\sin\frac{x}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{x}{3}=-\frac{\pi}{6}+\pi n$; $x=-\frac{\pi}{2}+3\pi n$;

т.к. $x\in\left(\frac{5\pi}{2};\ 9\pi\right)\Rightarrow x=\frac{11\pi}{2};\ x=\frac{17\pi}{2}$.

5.4.C12.

а) $y(x)=x\sin x+\cos x-x^2-4\sin x+8x-5$

$y'(x)=x\cos x+\sin x-\sin x-2x-4\cos x+8=x\cos x-2x-4\cos x+8=$

$=(\cos x-2)(x-4)$

$y(x)$ убывает при $x\in[4;+\infty)$

$y(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;4]$;

б) $y(x)=2x^2+8x-7+\sin x-2\cos x-x\cos x$

$y'(x)=4x+8+\cos x+2\sin x+x\sin x-\cos x=4x+8+2\sin x+x\sin x=$

$=(\sin x+4)(x+2)$

$x=-2$ – точка минимума

$y(x)$ убывает при $x\in(-\infty;-2]$

$y(x)$ возрастает при $x\in[-2;+\infty)$.

Уровень D.

5.4.D01.

а) $f(x)=-1-7\cos\frac{3\pi}{x}$. $f'(x)=\left(7\sin\frac{3\pi}{x}\right)\cdot\left(-\frac{3\pi}{x^2}\right)=-\frac{21\pi}{x^2}\sin\frac{3\pi}{x}=0;$

$\frac{3\pi}{x}=\pi n$; $x=\frac{3}{n}$; $\begin{cases}\frac{3}{n}>\frac{1}{100}\\ \frac{3}{n}\le\frac{1}{10}\end{cases}$; $\begin{cases}n<300\\ n\ge 30\end{cases}$ $\Rightarrow$ 270 точек.

б) $f(x)=-5-4\cos\frac{4\pi}{x}$. $f'(x)=-\frac{16\pi}{x^2}\sin\frac{4\pi}{x}=0;$ $\frac{4\pi}{x}=\pi n$; $x=\frac{4}{n}$;

т.к. $x\in(10^{-2};10^{-1}]\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{n}>\frac{1}{100}\\ \frac{4}{n}\le\frac{1}{10}\end{cases}$; $\begin{cases}n<400\\ n\ge 40\end{cases}$ $\Rightarrow$ всего 360 точек.

5.4.D02.

а) $y(x)=\frac{20}{\cos x}-19\operatorname{tg}x-4,\ x\in\left(-\frac{7\pi}{2};-3\pi\right)$

$y'(x)=\frac{-20\sin x}{\cos^2 x}-\frac{19}{\cos^2 x}=-\frac{20\sin x+19}{\cos^2 x}$

На интервале $\left(-\frac{7\pi}{2};-3\pi\right)$, $\sin x>0$, производная $y(x)$ знакопостоянна, экстремумов нет.

б) $y(x)=\frac{23}{\cos x}-11\operatorname{tg}x+4,\ x\in\left(-\frac{11\pi}{2};-5\pi\right)$

$y'(x)=\frac{-23\sin x-11}{\cos^2 x}$, при $x\in\left(-\frac{11\pi}{2};-5\pi\right)$

$\sin x>0$, $y'(x)$ знакопостоянна, экстремумов нет.

5.4.D03.

а) $y(x)=\frac{13}{\sin x}-7\operatorname{ctg}x+13$. $y'(x)=-\frac{13\cos x}{\sin^2 x}+\frac{7}{\sin^2 x}=0$;

$\cos x=\frac{7}{13}$; т.к. $x\in(-2\pi;0)\Rightarrow$ Ответ: $x=-\arccos\frac{7}{13}$; $x=-2\pi k+\arccos\frac{7}{13}$.

б) $y(x)=\frac{12}{\sin x}-3\operatorname{ctg}x+7$. $y'(x)=-\frac{12\cos x}{\sin^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}=0$;

$\cos x=\frac{1}{4}$; x = $\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$; т.к. $x\in(-2\pi;0)\Rightarrow$

Ответ: $x=-2\pi+\arccos\frac{1}{4}$; $x=-\arccos\frac{1}{4}$.

5.4.D04.

а) $y(x)=\frac{1}{6}\operatorname{tg}19x-19x+1,\ x\in(-\infty,0)$

$y'(x)=\frac{19}{6\cos^2 19x}-19=19\left(\frac{1}{6\cos^2 19x}-1\right)$

$y'(x)=0$ при $\cos 19x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

ближе всего к началу коориннат будет точка $x=-\frac{1}{19}\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$, принадлежащая $(-\infty,0)$, очевидно, она является точкой экстремума;

б) $y(x)=\frac{1}{8}\operatorname{tg}11x-11x+6,\ x\in(-\infty,0)$

$y'(x)=\frac{11}{8\cos^2 11x}-11=11\left(\frac{1}{8\cos^2 11x}-1\right)$

$y'(x)=0$, при $8\cos^2 11x=1$, т.е.

$\cos 11x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ближе всего к началу координат будет точка $x=-\frac{1}{11}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$, принадлежащая $(-\infty,0)$, очевидно, она является точкой экстремума.

5.4.D05.

а) $y(x)=\frac{14}{3}\cos^3 x-\frac{13}{4}\cos 2x+\frac{39}{4}$. $y'(x)=-14\cos^2 x\sin x+\frac{13}{2}\sin 2x=0$;

$\cos x \sin x(13 - 14\cos x) = 0$; $\cos x = 0$, n ∈ Z; $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\sin x = 0$; $x_2 = \pi n$, n ∈ Z;

$\cos x = \frac{13}{14}$; $x_3 = \pm\arccos\frac{13}{14} + 2\pi n$; $y(x_1) = 13$;

$y(x_2) = \frac{14}{3} - \frac{13}{4} + \frac{39}{4} = \frac{67}{6}$; $x_2 = 2\pi n$, n ∈ Z;

$y(x_2) = -\frac{14}{3} - \frac{13}{4} + \frac{39}{4} = \frac{11}{6}$; $x_2 = \pi + 2\pi n$, n ∈ Z;

$y(x_3) = \frac{14}{3} \cdot \left(\frac{13}{14}\right)^3 - \frac{13}{4}\left(2\left(\frac{13}{14}\right)^2 - 1\right) + \frac{39}{4} = \frac{13091}{1176}$.

Ответ: $y_{max} = y\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 13$; $y_{min} = y(\pi + 2\pi n) = \frac{11}{6}$.

б) $y(x) = \frac{16}{3}\cos^3 x - \frac{7}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$.

$y'(x) = -16\cos^2 x + \sin x + 7\sin 2x = 0$;

$2\sin x\cos x(7 - 8\cos x) = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi n$, n ∈ Z;

$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n ∈ Z;

$\cos x = \frac{7}{8}$; $x = \pm\arccos\frac{7}{8} + 2\pi n$, n ∈ Z; $y(2\pi n) = \frac{16}{3} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$;

$y(\pi + 2\pi n) = -\frac{16}{3} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{22}{3}$; $y\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$;

$\cos x = \frac{7}{8}$; $y(x) = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 - \frac{7}{2}\left(2\left(\frac{7}{8}\right)^2 - 1\right) + \frac{3}{2} = \frac{617}{192}$.

Ответ: $y_{max} = y\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 5$; $y_{min} = y(\pi + 2\pi n) = -\frac{22}{3}$.

5.4.D06.

а) $y(x) = \frac{21}{2}\sin x - 7\sqrt{\frac{21\sin x + 29}{2}} + \frac{91}{4}$.

$y'(x) = \frac{21}{2}\cos x - \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{21\sin x + 29}} \cdot \frac{21}{2}\cos x = 0$;

$\frac{21}{2}\cos x\left(1 - \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{21\sin x + 29}}\right) = 0$; $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n ∈ Z.

$\sqrt{\frac{2}{21\sin x + 29}} = \frac{2}{7}$; $21\sin x + 29 = \frac{49}{2}$; $\sin x = -\frac{9}{42} = -\frac{3}{14}$;

$y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{21}{2} - 7 \cdot \sqrt{\frac{21 + 29}{2}} + \frac{91}{4} = -\frac{7}{4}$;

$$y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-\frac{21}{2}-7\sqrt{\frac{8}{2}}+\frac{91}{4}=\frac{49}{4}-14=-\frac{7}{4};$$

$$\sin x=-\frac{3}{14};$$

$$y(x)=-\frac{21}{2}\cdot\frac{3}{14}-7\cdot\frac{7}{2}+\frac{91}{4}=-\frac{9}{4}-\frac{49}{2}+\frac{91}{4}=-4.$$

Ответ: $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=-\frac{7}{4}$; $y_{\min}=y\left((-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{14}+\pi k\right)=-4$.

б) $y(x)=\frac{15}{2}\sin x-5\sqrt{\frac{15\sin x+17}{2}}+\frac{55}{4}$.

$$y'(x)=\frac{15}{2}\cos x-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{15\sin x+17}}\cdot\frac{15}{2}\cos x=0;$$

$$\cos x\left(\frac{2}{5}-\sqrt{\frac{2}{15\sin x+17}}\right)=0;$$

$\cos x=0$; $15\sin x+17=\frac{25}{2}$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

$\sin x=-\frac{9}{30}=-\frac{3}{10}$;

$x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{10}+\pi k$, $n\in Z$;

$$y\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\frac{15}{2}-5\cdot\sqrt{16}+\frac{55}{4}=\frac{85}{4}-20=\frac{5}{4};$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-\frac{15}{2}-5+\frac{55}{4}=\frac{25}{4}-5=\frac{5}{4};$$

$$y\left((-1)^k\arcsin\frac{3}{10}+\pi k\right)=-\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{10}-5\cdot\frac{5}{2}+\frac{55}{4}=-\frac{9}{4}-\frac{25}{2}+\frac{55}{4}=-1.$$

Ответ: $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=\frac{5}{4}$; $y_{\min}=y\left((-1)^k\arcsin\frac{3}{10}+\pi k\right)=-1$.

5.4.D07.

а) $y(x) = 18 + 15x + 24(5 - x)^3 + 13\sin(x - 5)$.

$y'(x) = 13 - 72(5 - x)^2 + 13\cos(x - 5)$;

$y''(x) = 144(5 - x) - 13\sin(x - 5) = 0$;

$144(5 - x) = 13\sin(x - 5)$;

т.к. функция $144(5 - x)$ убывает, а $13\sin(x - 5)$ возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они имеют только одну общую точку, очевидно, $x = 5$.

$y'(5) = 13 + 13 = 26$; Ответ: $y'_{\max} = y'(5) = 26$.

б) $y(x) = 22 - 3x + 20(14 - x)^3 + 9\sin(x - 14)$.

$y'(x) = -3 - 60(14 - x)^2 + 9\cos(x - 14)$;

$y''(x) = 120(14 - x) - 9\cos(x - 14) = 0$;
функция убывает на $R \Rightarrow$ одно решение, очевидно, что $x = 14$
$y'(14) = -3 + 9 = 6$; Ответ: $y'_{max} = y(14) = 6$.

5.4.D08.

а) $y(x) = 18x^3 + 7\text{tg}x - 11x + 12$. $y' = 54x^2 + \dfrac{7}{\cos^2 x} - 11$;

т.к. $x^2 \geq 0$, $\dfrac{7}{\cos^2 x} \geq 7 \Rightarrow$min значение будет при $x = 0$:

$y'(0) = -11 + 7 = -4$. Ответ: $y_{min} = -4$.

б) $y(x) = 5x^3 + 18\text{tg}x + 7x - 4$. $y'(x) = 15x^2 + \dfrac{18}{\cos^2 x} + 7$; т.к. $15x^2 \geq 0$;

$\dfrac{18}{\cos^2 x} \geq 18 \Rightarrow$ min функции будет при $x = 0$: $y'(0) = 18 + 7 = 25$.

Ответ: $y_{min} = 25$.

5.4.D09.

а) $y(x) = 14x^2 + 196x - 5x\cos x - 35\cos x + 5\sin x + 4$.
$y'(x) = 28x + 196 - 5\cos x + 5x\sin x + 35\sin x + 5\cos x = 0$;
$28x + 196 + 5\sin x(x + 7) = 0$;
$(x + 7)(28 + 5\sin x) = 0$. Ответ: $x = -7$ — точка минимума.
б) $y(x) = 13x^2 - 26x - 5x\cos x + 5\cos x + 5\sin x - 1$.
$y'(x) = 26x - 26 - 5\cos x + 5x\sin x - 5\sin x + 5\cos x = 0$;
$26(x - 1) + 5\sin x(x - 1) = 0$;
$(x - 1)(26 + 5\sin x) = 0$. Ответ: $x = 1$ — точка минимума.

5.4.D10.

а) $f(x)=3x+\cos 6x-3$
$f'(x)=3-6\sin 6x=3(1-2\sin 6x)$

$f'(x)=0$, $\sin 6x = \dfrac{1}{2}$ – максимум будет там, где $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–".

Наиболее ближняя к началу координат точка где $f'(x)=0$ это $x = \dfrac{\pi}{36}$, несложно видеть что она максимум, т.к. в окрестности этой точкпи $f'(x)$ убывает.

Итак, $x = \dfrac{\pi}{36}$;

б) $f(x)=2x+\cos 4x+2$
$f'(x)=2-4\sin 4x=2(1-2\sin 4x)$

$f'(x)=0$ при $\sin 4x = \dfrac{1}{2}$, аналогично пункту а), наиболее ближней к началу координат будет точка $x = \dfrac{\pi}{24}$, она является точкой максимума.

Итак, $x = \dfrac{\pi}{24}$.

5.4.D11.

а) $f(x) = -1 + 3\sqrt{2}x - \sin 6x$

$f'(x) = 3\sqrt{2} - 6\cos x = 3\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{2}\cos 6x\right)$

$f'(x)$=0 при $\cos 6x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Наименее удаленная от начала координат точка, где $f'(x)$=0 $x = \frac{\pi}{24}$, несложно видеть, что она является точкой минимума.

Итак, $x = \frac{\pi}{24}$;

б) $f(x) = 5 + 2\sqrt{2}x - \sin 4x$

$f'(x) = 2\sqrt{2} - 4\cos 4x = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 4x\right)$

$f'(x)$=0 при $\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, наименее удаленной от начала координат точкой с таким условием будет точка $x = \frac{\pi}{16}$, несложно видеть, что она является точкой минимума.

Итак, $x = \frac{\pi}{16}$.

5.4.D12.

а) $g(x) = 5 - \frac{11}{4}\cos 2x - 44\cos x - 8\sin x - 32x$

$g'(x) = \frac{11}{2}\sin 2x + 44\sin x - 8\cos x - 32 =$

$=11\sin x\cos x+44\sin x-8\cos x-32=(\cos x+4)(11\sin x-8)=0$

$x = (-41)^n \arcsin\frac{8}{11} + \pi n,\ n \in Z$

n=–1.

Ответ: $-\pi - \arcsin\frac{8}{11}$;

б) $g(x) = 7 - \frac{7}{2}\cos 2x - 63\cos x - 2\sin x - 9x$

$g'(x)=7\sin 2x+63\sin x-2\cos x-9=14\sin x\cos x+63\sin x-2\cos x-9=$
$=(2\cos x+9)(7\sin x-1)=0$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{7} + \pi n,\ n \in Z$ n=–1.

Ответ: $-\arcsin\frac{1}{7} - \pi$.

§ 5. Показательная функция

Уровень А.

5.5.A01.

а) $f'(x) = 6x^2 \cdot e^x + 12x \cdot e^x - 17x \cdot e^x - 17 \cdot e^x + 11e^x = e^x(6x^2 - 5x - 6) = 0$;

$6x^2 - 5x - 6 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 6 \cdot 6 = 169 = 13^2$; $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13^2}}{12}$.

Ответ: $x = \dfrac{3}{2}$; $x = -\dfrac{2}{3}$.

б) $f'(x) = 8x^2 \cdot e^x + 16x \cdot e^x - 6x \cdot e^x + 3e^x = e^x(8x^2 + 10x - 3) = 0$;

$8x^2 + 10x - 3 = 0$; $D = 100 + 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 = 14^2$; $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{14^2}}{16} = \dfrac{-10 \pm 14}{16}$.

Ответ: $x = -\dfrac{3}{2}$; $x = \dfrac{1}{4}$.

5.5.A02.

а) $f'(x) = 7x \cdot e^x + 7e^x - 9e^x = e^x(7x - 2) = 0$;

$x = \dfrac{2}{7}$;

$f\left(\dfrac{2}{7}\right) = (2 - 9)e^x = -7e^{2/7}$; $f(0) = -9e^0 = -9$;

Ответ: $f_{\min} = f\left(\dfrac{2}{7}\right) = -7e^{\frac{2}{7}}$; $f_{\max} = f(0) = -9$.

б) $f'(x) = 5xe^x + 5e^x - 11e^x = e^x(6x - 6) = 0$; $x = \dfrac{6}{5}$;

$f\left(\dfrac{6}{5}\right) = -5e^{6/5}$; $f(0) = -11e^0 = -11$.

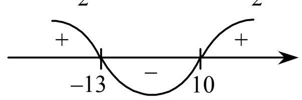
Ответ: $f_{\min} = f\left(\dfrac{6}{5}\right) = -5e^{6/5}$; $f_{\max} = f(0) = -11$.

5.5.A03.

а) $y'(x) = x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x + x \cdot e^x + e^x - 131e^x = e^x(x^2 + 3x - 130) = 0$.

$x^2 + 3x - 130 = 0$; $D = 9 + 4 \cdot 130 = 529 = 23^2$

$x_1 = \dfrac{-3 + 23}{2} = 10$, $x_2 = \dfrac{-3 - 23}{2} = -13$



Ответ: $x_{\min} = 10$.

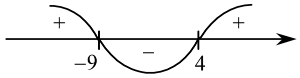
б) $y(x) = (x^2 + 3x - 39)e^x$.

$y'(x) = x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x + 3x \cdot e^x + 3e^x - 39e^x = e^x(x^2 + 5x - 36) = 0$;

$x^2 + 5x - 36 = 0$;

$D = 25 + 4 \cdot 36 = 169 = 13^2$

$x_1 = \frac{-5+13}{2} = 4$; $x_2 = \frac{-5-13}{2} = -9$



Ответ: $x_{\max} = -9$.

5.5.А04.

а) $y(x) = -8((2x-11)^2+4)e^x$.

$y(x) = -8(4x^2e^x - 44xe^x + 125e^x)$;

$y'(x) = -8(4x^2e^x + 8xe^x - 44xe^x - 44e^x + 125e^x) = -8e^x(4x^2 - 36x + 81) = 0$;

$4x^2 - 36x + 81 = 0$; $(2x-9)^2 = 0$; $y'(x) = -8e^x(2x-9) \le 0$, при $\forall$x.

Ответ: функция монотонно убывает при $x \in R$.

б) $y(x) = 6((3x-5)^2+9)e^x$.

$y(x) = 6(9x^2 - 30x + 25 + 9)e^x$;

$y(x) = 6(9x^2e^x - 30xe^x + 34e^x)$;

$y'(x) = 6(9x^2e^x + 18xe^x - 30xe^x - 30e^x + 34e^x)$;

$y'(x) = 6(9x^2 - 12x + 4)e^x$;

$y'(x) = 6e^x(3x-2)^2$;

$\Rightarrow y'(x) \ge 0$ при всех x $\in$ R.

Ответ: $y(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой.

5.5.А05.

а) $f(x) = 9^x + 6x^2 - 5$, при $x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right]$.

$f'(x) = 9^x\ln 9 + 12x > 0$, при $x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right]$;

т.к. функция монотонно возрастает на данном отрезке, наибольшее значение она принимает в точке $x = 1$;

$f(1) = 10$;

наименьшее значение в точке $x = \frac{1}{2}$;

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 1{,}5 - 5 = -0{,}5$.

Т.к. функция на этом отрезке меняет знак, значит, имеет 1 нуль.

Ответ: $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x) = -\frac{1}{2}$; $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x) = 10$; один нуль.

б) $f(x) = 8^x + 3x^2 - 8$, при $x \in \left[\frac{1}{3};\ 1\right]$. $f'(x) = 8^x\ln 8 + 6x > 0$, при $x \in \left[\frac{1}{3};\ 1\right]$;

т.к. функция монотонно возрастает на данном отрезке, наибольшее значение она принимает в точке $x = 1$;

$f(1) = 3$;

наименьшее значение в точке $x = \frac{1}{3}$;

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + \frac{1}{3} - 8 = -5\frac{2}{3}$.

Т.к. функция на этом отрезке меняет знак, значит, имеет 1 нуль.

Ответ: $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};\,1\right]} f(x) = -5\frac{2}{3}$; $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};\,1\right]} f(x) = 3$; один нуль.

5.5.А06.

а) $f(x)=3^x+2x+2$

$f(x)$ – возрастает, т.к. $f'(x)=3^x\ln 3+2>0$

$f_{\min} = f(-1) = \frac{1}{3}$ $f_{max}=f(1)=7$.

б) $f(x) = 2^x + 5x + 1$, при $x \in [-3; -1]$.

$f'(x) = 2^x\ln 2 + 5 > 0$.

Т.к. функция монотонно возрастает, наибольшее значение она принимает в точке $x = -1$;

$f(-1) = \frac{1}{2} - 5 + 1 = -3\frac{1}{2}$;

наименьшее значение в точке $x = -3$;

$f(-3) = \frac{1}{8} - 15 + 1 = -13\frac{7}{8}$.

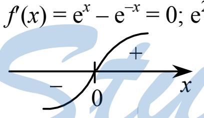
Ответ: $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x) = -13\frac{7}{8}$; $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x) = -3\frac{1}{2}$.

Уровень В.

5.5.В01.

а) $f(x) = e^x + e^{-x}$, при $x \in [-\ln 4; \ln 2]$.

$f'(x) = e^x - e^{-x} = 0$; $e^{2x} = 1$; $x = 0$;



$f(0) = 1 + 1 = 2$; $f(-\ln 4) = e^{-\ln 4} + e^{\ln 4} = \frac{1}{4} + 4 = 4\frac{1}{4}$;

$f(\ln 2) = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} = 2 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$. Ответ: $f_{\max} = 4\frac{1}{4}$; $f_{\min} = 2$.

б) $f(x) = e^x + e^{-x}$, при $x \in [-\ln 6; \ln 4]$. $f'(x) = e^x - e^{-x} = 0$; $x = 0$; $f(0) = 2$;

$f(-\ln 6) = e^{-\ln 6} + e^{\ln 6} = \frac{1}{6} + 6 = 6\frac{1}{6}$; $f(\ln 4) = e^{\ln 4} + e^{-\ln 4} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$.

Ответ: $f_{\max} = 6\frac{1}{6}$; $f_{\min} = 2$.

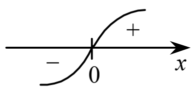
5.5.В02.

а) $f(x)=4^{x+4}+24\cdot 2^{x+4}-28x\ln 4+7$

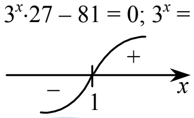
$f'(x)=4^{x+4}\ln4+24\cdot2^{x+4}\ln2-28\ln4=0$
$4^{x+4}+12\cdot2^{x+4}-28=0$
$(2^{x+4})^2+12\cdot2^{x+4}-28=0$
$(2^{x+4}+14)(2^{x+4}-2)=0$
$x=-3$.
Ответ: –3;
б) $f(x)=9^{x+3}+16\cdot3^{x+3}-33x\ln9-8$
$f'(x)=9^{x+3}\ln9+16\cdot3^{x+3}\ln3-33\ln9=0$
$9^{x+3}+8\cdot3^{x+3}-33=0$
$(3^{x+3})^2+11\cdot3^{x+3}-3\cdot3^{x+3}-33=0$
$(3^{x+3}+11)(3^{x+3}-3)=0$
$x=-2$.
Ответ: –2.

5.5.В03.

а) $f(x) = 7\cdot6^{x+1} - 9\cdot6^x - 33x\ln6$.
$f'(x) = 7\cdot6^{x+1}\ln6 - 9\cdot6^x\cdot\ln6 - 33\ln6 = 0$;
$\ln6(42\cdot6^x - 9\cdot6^x - 33) = 0$;
$6^x(42 - 9) - 33 = 0$; $33\cdot6^x - 33 = 0$; $6^x = 1$; $x = 0$;



Ответ: при $x \in (-\infty; 0]$ функция убывает;
при $x \in [0; +\infty)$ функция возрастает.
б) $f(x) = 11\cdot3^{x+1} - 6\cdot3^x - 81x\ln3$.
$f'(x) = 11\cdot3^{x+1}\ln3 - 6\cdot3^x\cdot\ln3 - 81\ln3 = 0$;
$\ln3(33\cdot3^x - 6\cdot3^x - 81) = 0$;
$3^x\cdot27 - 81 = 0$; $3^x = 3$; $x = 1$;



Ответ: при $x \in (-\infty; 1]$ функция убывает;
при $x \in [1; +\infty)$ функция возрастает.

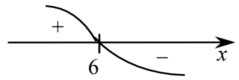
5.5.В04.

а) $f(x)=-5(x-3)e^{x-3}+8$
$f'(x)=-5e^{x-3}-5(x-3)e^{x-3}=-5e^{x-3}(x-2)=0$, $x=2$.
Ответ: 2;
б) $f(x)=4(x-5)e^{x-5}$
$f'(x)=4e^{x-5}+4(x-5)e^{x-5}=4(x-4)e^{x-5}$, $x=4$
Ответ: 4.

5.5.В05.

а) $f(x) = 11 + 10x - \dfrac{10^{x-5}}{\ln10}$.

$f'(x) = 10 - \dfrac{10^{x-5}}{\ln 10} \cdot \ln 10 = 0$; $10 = 10^{x-5}$; $x - 5 = 1$; $x = 6$;

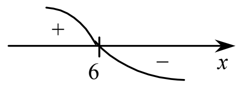


Ответ: $x = 6$ — точка максимума.

б) $f(x) = 17 + 3x - \dfrac{3^{x-5}}{\ln 3}$.

$f'(x) = 3 - \dfrac{3^{x-5}}{\ln 3} \cdot \ln 3 = 0$;

$3 = 3^{x-5}$; $x - 5 = 1$; $x = 6$;



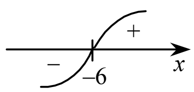
Ответ: $x = 6$ — точка максимума.

5.5.В06.

а) $f(x) = \dfrac{5^{x+7}}{\ln 5} - 5x - 16$.

$f'(x) = \dfrac{5^{x+7}}{\ln 5} \cdot \ln 5 - 5 = 0$;

$5^{x+7} = 5$; $x + 7 = 1$; $x = -6$;

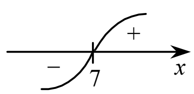


Ответ: $x = -6$ — точка минимума.

б) $f(x) = \dfrac{11^{x-6}}{\ln 11} - 11x - 6$.

$f'(x) = \dfrac{11^{x-6}}{\ln 11} \cdot \ln 11 - 11 = 0$;

$11^{x-6} = 11$; $x - 6 = 1$; $x = 7$;



Ответ: $x = 7$ — точка минимума.

5.5.В07.

а) $f(x) = (4\sin x - 4\cos x + 9)e^x$

$f'(x) = e^x(4\sin x - 4\cos x + 9 + 4\cos x + 4\sin x) = e^x(8\sin x + 9) > 0 \ \forall x \in R$

Ответ: f возрастает на R;

б) $f(x) = (9\sin x - 9\cos x - 19)e^x$

$f'(x)$=(9sin x–9cos x–19+9cos x+9sin x)e^x=(18sin x–19)e^x<0 $\forall x \in$ R

Ответ: f возрастает на R.

5.5.B08.

а) f(x) = (2sinx + 2cosx – 11)e^x + 7.

$f'(x)$ = 2sin$x$·e^x + 2cos$x$·e^x + 2cos$x$·e^x – 2sin$x$·e^x – 11e^x = 0;

(4cos$x$ – 11)e^x = 0;

$\cos x = \frac{11}{4}$;

нет решений.

$f'(x)$ < 0, при всех x, т.к. 4cosx – 11 < 0, при всех x.

Ответ: функция монотонно убывает при $x \in R$.

б) f(x) = (2sinx + 2cosx + 23)e^x – 12.

$f'(x)$ = 2sin$x$·e^x + 2cos$x$·e^x + 2cos$x$·e^x – 2sin$x$·e^x + 23e^x = 0;

(4cos$x$ + 23)e^x = 0;

$\cos x = -\frac{23}{4}$;

нет решений.

$f'(x)$ > 0, при всех x.

Ответ: функция монотонно возрастает при $x \in R$.

5.5.B09.

а) $f(x)=(x-3)^2e^x$

$f'(x)$=(2x–6+x2–6x+9)e^x=(x2–4x+3)e^x=(x–3)(x–1)e^x x=1, x=3.

Ответ: (–∞; 1], [3; +∞);

б) $f(x)=(x+2)^2e^x$

$f'(x)=(2x+4+x^2+4x+4)e^x=(x^2+6x+8)e^x=(x+2)(x+4)e^x$ x=–4, x=–2.

Ответ: [4; –2].

5.5.B10.

а) $f(x)=16\cdot 3^{x+6}\ln 16-3\cdot 16^{x+6}\ln 3$

$f'(x)=16\cdot 3^{x+6}\ln 3\ln 16-3\cdot 16^{x+6}\ln 16\ln 3=48\ln 3\ln 16(3^{x+5}-16^{x+5})=0$

$3^{x+5}=16^{x+5}$

$3^{x+5}=3^{(x+5)\log_3 16}$

x+5=(x+5)$\log_3 16$ x=–5 – точка максимума

$f(-5)=16\cdot 3\cdot\ln 16-3\cdot 16\ln 3=48(\ln 16-\ln 3)=48\ln\frac{16}{3}$

Ответ: $48\ln\frac{16}{3}$;

б) $f(x)=5\cdot 17^{x+9}\ln 5-17\cdot 5^{x+9}\ln 17$

$f'(x)=5\cdot 17^{x+9}\ln 17\ln 5-17\cdot 5^{x+9}\ln 17\ln 5=85\ln 17\ln 5(17^{x+8}-5^{x+8})=0$

$17^{x+8}-5^{x+8}=0$

$5^{(x+8)\log_5 17}=5^{x+8}$

$(x+8)(\log_5 17-1)=0$ x=–8 – точка минимума

$f(-8)=5\cdot 17\ln 5-17\cdot 5\ln 17=85\ln\frac{5}{17}$

Ответ: $85\ln\frac{5}{17}$.

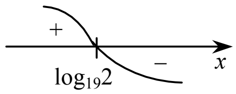
Примечание: вероятно, в условии задачи 5.5.B10 б) опечатка, т.е. требуется найти значение f в точке минимума, а не максимума.

5.5.B11.

а) $y(x) = -9\cdot 19^x + 18x\ln 19 + 7$.

$y'(x) = -9\cdot 19^x\ln 19 + 18\cdot\ln 19 = 0$;

$19^x = 2$; $x = \log_{19}2$;

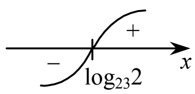


Ответ: $x = \log_{19}2$ — точка максимума.

б) $y(x) = 7\cdot 23^x - 14x\ln 23 - 12$.

$y'(x) = 7\cdot 23^x\cdot\ln 23 - 14\cdot\ln 23 = 0$;

$7\cdot 23^x = 14$; $x = \log_{23}2$;



Ответ: $x = \log_{23}2$ — точка минимума.

5.5.B12.

а) $f(x) = e^{4x} - e^{-4x} + 4x - 5$; $x \in [-3; 5]$.

$f'(x) = 4e^{4x} + 4e^{-4x} + 4 = 0$; Пусть $e^{4x} = a$, $e^{-4x} = \frac{1}{a}$;

$4a + \frac{4}{a} + 4 = 0 \mid \times a$; $4a^2 + 4a + 4 = 0$; $D = 16 - 4\cdot 4\cdot 4 < 0$;

нет решений $\Rightarrow f'(x) > 0$.

Т.к. функция монотонно возрастает, то наибольшее значение она принимает на данном отрезке в точке $x = 5$;

$f(5) = e^{20} - e^{-20} + 20 - 5 = e^{20} - e^{-20} + 15$.

Наименьшее значение в точке $x = -3$;

$f(-3) = e^{-12} - e^{12} - 12 - 5 = e^{-12} - e^{12} - 17$;

функция имеет один нуль на $[-3; 5]$.

Ответ: $\max\limits_{[-3;5]} f(x) = e^{20} - e^{-20} + 5$; $\min\limits_{[-3;5]} f(x) = e^{-12} - e^{12} - 17$,

на промежутке $[-3; 5]$ функция имеет один нуль.

б) $f(x) = e^{5x} - e^{-5x} + 2 + 1$, $x \in [-1; 3]$.

$f'(x) = 5e^{5x} + 5e^{-5x} + 2 > 0$;

Т.к. функция монотонно возрастает, то наибольшее значение на данном отрезке она принимает в точке $x = 3$; $f(3) = e^{15} + 7 - e^{15}$.

Наименьшее значение в точке $x = -1$; $f(-1) = e^{-5} - e^{5} - 1$, один нуль.

Ответ: $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = e^{-5} - e^{5} - 1$; $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = e^{15} - e^{15} + 7$;

на промежутке [-1; 3] функция имеет один нуль.

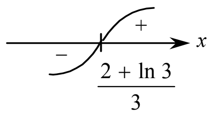
Уровень С.

5.5.С01.

а) $f(x) = x - e^{-3x+2}$.

$f'(x) = 1 + e^{-3x+2}(-3) = 0$;

$3e^{-3x+2} = 1$; $e^{-3x+2+\ln 3} = e^{0}$; $x = \dfrac{2+\ln 3}{3}$;

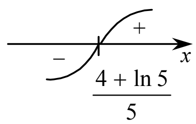


Ответ: функция возрастает при $x \in \left[\dfrac{2+\ln 3}{3};\ +\infty\right)$;

функция убывает при $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{2+\ln 3}{3}\right]$.

б) $f(x) = x + e^{-5x+4}$. $f'(x) = 1 - 5e^{-5x+4} = 0$;

$e^{-5x+4+\ln 5} = e^{0}$; $x = \dfrac{4+\ln 5}{5}$;



Ответ: функция возрастает при $x \in \left[\dfrac{4+\ln 5}{5};\ +\infty\right)$;

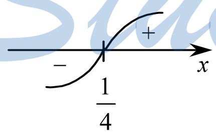
функция убывает при $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{4+\ln 5}{5}\right]$.

5.5.С02.

а) $f(x) = e^{3-4x} + (4x + 3)e^{2}$.

$f'(x) = -4e^{3-4x} + 4e^{2} = 0$;

$4e^{3-4x} = 4e^{2}$; $3 - 4x = 2$; $x = \dfrac{1}{4}$;

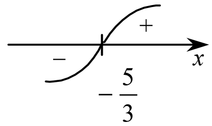


Ответ: функция возрастает при $x \in \left[\dfrac{1}{4};\ +\infty\right)$;

функция убывает при $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{4}\right]$.

б) $f(x) = e^{-2-3x} + (3x - 2)e^{3}$.

$f'(x) = -3e^{-2-3x} + 3e^{3} = 0$; $-2 - 3x = 3$; $x = -\dfrac{5}{3}$;



Ответ: функция возрастает при $x \in \left[-\frac{5}{3};\ +\infty\right)$;

функция убывает при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right]$.

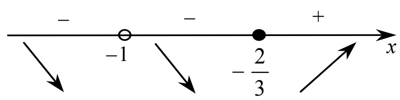
5.5.C03.

а) $y(x) = \frac{e^{3x+2} + 3x + 3}{x+1}$.

$y'(x) = \frac{(3e^{3x+2} + 3)(x+1) - (e^{3x+2} + 3x + 3)}{(x+1)^2} = 0;$

$3x \cdot e^{3x+2} + 3e^{3x+2} + 3x + 3 - e^{3x+2} - 3x - 3 = 0;$

$e^{3x+2}(3x + 2) = 0;\ x = -\frac{2}{3};$



$y'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{2}{3}\right]$.

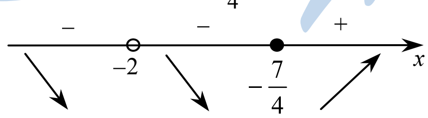
Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{2}{3}\right]$.

б) $y(x) = \frac{e^{4x+3} - 3x - 6}{x+2}$.

$y'(x) = \frac{(4e^{4x+3} - 3)(x+2) - (e^{4x+3} - 3x - 6)}{(x+2)^2} = 0;$

$4x \cdot e^{4x+3} + 8e^{4x+3} - 3x - 6 - e^{4x+3} + 3x + 6 = 0;$

$e^{4x+3}(4x + 7) = 0;\ x = -\frac{7}{4};$



$y'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{7}{4}\right]$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{7}{4}\right]$.

5.5.C04.

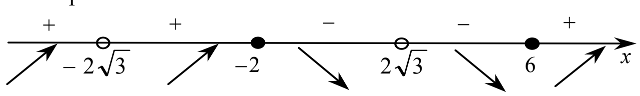
а) $f(x)=\dfrac{e^{x/2}}{x^2-12}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2-12)-e^{\frac{x}{2}}\cdot 2x}{(x^2-12)^2}=0;$$

$\dfrac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}-2xe^{\frac{x}{2}}-6e^{\frac{x}{2}}=0$; $e^{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{x^2}{2}-2x-6\right)=0$; $D=4+4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 6=16;$

$x_1=\dfrac{2-4}{1}=-2;$ $x^2-12\neq 0;$ $x\neq 2\sqrt{3}$; $x\neq -2\sqrt{3}$.

$x_2=\dfrac{2+4}{1}=6;$



Ответ: функция возрастает при $x\in(-\infty;\,-2\sqrt{3}\,)\cup(\,-2\sqrt{3}\,;-2]\cup[6;\,+\infty)$;
функция убывает при $x\in[-2;\;2\sqrt{3}\,)\cup(\,2\sqrt{3}\,;\,6]$.

б) $f(x)=\dfrac{e^{x/3}}{x^2-27}$.

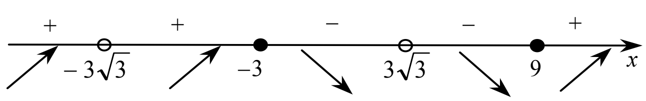
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}(x^2-27)-e^{\frac{x}{3}}\cdot 2x}{(x^2-27)^2}=0;$$

$e^{\frac{x}{3}}\left(\dfrac{x^2}{3}-2x-9\right)=0$;

$D=4+4\cdot 9\cdot\dfrac{1}{3}=16;$

$x_1=\dfrac{2+4}{\frac{2}{3}}=9;$ $x^2-27\neq 0;$ $x\neq\pm 3\sqrt{3}$.

$x_2=\dfrac{2-4}{\frac{2}{3}}=-3;$



Ответ: функция возрастает при $x\in(-\infty;\,-3\sqrt{3}\,]\cup(\,3\sqrt{3}\,;-3]\cup[9;\,+\infty)$;
функция убывает при $x\in[-3;\;3\sqrt{3}\,)\cup(\,3\sqrt{3}\,;\,9]$.

5.5.С05. а) $f(x)=3e^{x+9}(\cos(x-\pi)+\sin(x-\pi))$.

$f'(x)=3e^{x+9}(\cos(x-\pi)-\sin(x-\pi)+\cos(x-\pi)+\sin(x-\pi))=-6e^{x+9}\cos x=0;$

$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ — точки максимума.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ — точки максимума.

б) $f(x) = 5e^{x-2}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

$f'(x) = 5e^{x-2}(\sin x - \cos x + \cos x + \sin x) = 0$; $\sin x = 0$;
$x = \pi n$, $n \in Z$; $x = \pi + 2\pi n$ — точки максимума. Ответ: $x = \pi + 2\pi n$.

5.5.C06.

а) $f(x) = 5e^{2-x}\left(\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) + 5e^{2-x}\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

$f'(x) = 5e^{2-x}\left(-\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = 0$;

$\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ — точки минимума.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

б) $f(x) = 5e^{-x-4}(\cos(x - \pi) + 5e^{-x-4}(\sin(x - \pi))$.
$f'(x) = 5e^{-x-4}(-\cos(x - \pi) - \sin(x - \pi) - \sin(x - \pi + \cos(x - \pi)) = 0$;
$\sin(x - \pi) = 0$; $x = \pi n$, $n \in Z$; $x = 2\pi n$ — точки минимума.
Ответ: $x = 2\pi n$.

5.5.C07.

а) $f(x) = 7e^{3x-2}(\cos 2x + \sin 2x)$.
$f'(x) = 7e^{3x-2}(3\cos 2x + 3\sin 2x + 2\cos 2x - 2\sin 2x) = 0$;
$5\cos 2x = -\sin 2x$;
$2x = \operatorname{arctg}(-5) + \pi n$, $n \in Z$;
$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-5) + \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $\frac{\operatorname{arctg}(-5)}{2} + \frac{\pi n}{2}$.

б) $f(x) = 3e^{5x+2}(\cos 3x + \sin 3x)$.
$f'(x) = 3e^{5x+2}(5\cos 3x + 5\sin 3x - 3\sin 3x + 3\cos 3x) = 0$;
$8\cos 3x = -2\sin 3x$;

$3x = -\operatorname{arctg}4 + \pi n$, $n \in Z$; $x = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}4 + \frac{\pi n}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}4 + \frac{\pi n}{3}$.

5.5.C08.

а) $f(x)=\frac{2e^{8x-15}}{8x-16}$, ОДЗ: $x\neq\frac{15}{8}$

$f'(x)=e^{8x-15}\left(\frac{16(8x-15)-16}{(8x-15)^2}\right)=8\cdot 16e^{8x-15}\left(\frac{x-2}{(8x-15)^2}\right)$

Итак, $f'(x)\leq 0$ при $x\in(-\infty,2]\setminus\left\{\frac{15}{8}\right\}$

$f'(x)\geq 0$ при $x\in[2,+\infty)$.

б) $f(x)=\frac{5e^{9x-26}}{9x-26}$, ОДЗ $x\neq\frac{26}{9}$

$f'(x)=5e^{9x-26}\left(\frac{9(9x-26)-9}{(9x-26)^2}\right)=45e^{9x-26}\left(\frac{9(x-3)}{(9x-26)^2}\right)$

Итак, $f'(x)\geq 0$ при $x\in[3,+\infty)$

$f'(x)\leq 0$ при $x\in\left(-\infty,\frac{26}{9}\right)\cup\left(\frac{26}{9},3\right]$

т.е. $f(x)$ убывает на $\left(-\infty,\frac{26}{9}\right)$ и на $\left(\frac{26}{9},3\right]$, возрастает на $[3,+\infty)$.

5.5.C09.

а) $f(x)=\frac{e^x}{15+14x}-5$, ОДЗ $x\neq-\frac{15}{14}$

$f'(x)=e^x\left(\frac{15+14x-14}{(15+14x)^2}\right)=\frac{14x+1}{(15+14x)^2}e^x$

$f'(x)=0$ при $x=-\frac{1}{14}$, в этой точке производная меняет знак с "–" на "+", значит, это точка минимума;

б) $f(x)=\frac{e^x}{7-20x}-3$, ОДЗ $x\neq\frac{7}{20}$

$f'(x)=\frac{7-20x+20}{(7-20x)^2}e^x=\frac{27-20x}{(7-20x)^2}e^x$

$f'(x)=0$ при $x=\frac{27}{20}$, $f'(x)$ в этой точке меняет знак с "+" на "–", значит, это точка максимума.

5.5.C10.

а) $f(x)=\frac{4e^x+5}{5e^x+4}$. $f'(x)=\frac{4e^x(5e^x+4)-(4e^x+5)\cdot 5e^x}{(5e^x+4)^2}=0;$

$20e^{2x}+16e^x-20e^{2x}-25e^x=-9e^x<0.$

Ответ: функция убывает при $x\in R$.

б) $f(x)=\frac{11e^x+6}{6e^x+11}$. $f'(x)=\frac{11e^x(6e^x+11)-(11e^x+6)\cdot 6e^x}{(6e^x+11)^2}=0;$

$66e^{2x}+121e^x-66e^{2x}-36e^x=85e^x>0.$

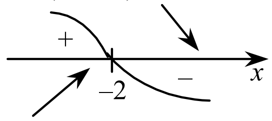
Ответ: возрастает при $x \in R$.

5.5.C11.

а) $f(x) = (-2x - 1)e^{2x-7} + e^{-1}$.

$f'(x) = -2\cdot e^{2x-7} - 2x\cdot 2e^{2x-7} - 2e^{2x-7} = 0$;

$e^{2x-7}(-4 - 4x) = 0$; $x = -1$;

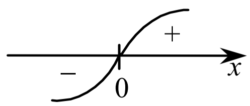


Ответ: при $x \in (-\infty; -1]$ функция возрастает;

при $x \in [-1; +\infty)$ функция убывает.

б) $f(x) = (3x - 1)\, e^{3x-5} + e^{4}$. $f'(x) = 3\cdot e^{3x-5} + 3x\cdot 3\cdot e^{3x-5} - 3e^{3x-5} = 0$;

$9x\cdot e^{3x-5} = 0$; $x = 0$;



Ответ: при $x \in (-\infty; 0]$ функция убывает;

при $x \in [0; +\infty]$ функция возрастает.

5.5.C12.

а) $f(x) = (4x^2 - 5x)e^{-5x-2}$. $f'(x) = e^{-5x-2}(-20x^2 + 25x + 8x - 5) \geq 0$;

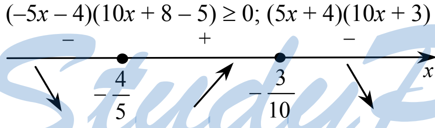
$20x^2 - 33x + 5 \leq 0$;

$x \in \left[\frac{33-\sqrt{689}}{40}; \frac{33+\sqrt{689}}{40}\right]$ — промежуток возрастания.

Ответ: $\left[\frac{33-\sqrt{689}}{40}; \frac{33+\sqrt{689}}{40}\right]$.

б) $f(x) = (-5x - 4)^2 e^{-4x-5}$. $f'(x) = (-10(-5x - 4) - 4(-5x - 4)^2)e^{-4x-5} \geq 0$;

$(-5x - 4)(10x + 8 - 5) \geq 0$; $(5x + 4)(10x + 3) \leq 0$;



Ответ: возрастает $x \in [-0{,}8; -0{,}3]$; убывает: $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right] \cup \left[-\frac{3}{10}; +\infty\right)$.

Уровень D.

5.5.D01.

а) $y(x) = 2^{\frac{1}{3}x^3 - 4x + 5}$. $y'(x) = (x^2 - 4)\cdot 2^{\frac{1}{3}x^3 - 4x + 5}\cdot \ln 2 = 0$;

$x = \pm 2$; среднее геометрическое брать нельзя.

б) $y(x) = 2^{\frac{2}{3}x^3 - 8x + 2}$; $y'(x) = (2x^2 - 8)\, 2^{\frac{2}{3}x^3 - 8x + 2}\cdot \ln 2 = 0$

$x = \pm 2$ среднее геометрическое брать нельзя.

5.5.D02.

а) $f(x) = -3 - \sqrt[5]{(x+3)^4}\,e^{x-1}$.

$f'(x) = \left(-\dfrac{4}{5}(x+3)^{-\frac{1}{5}} - \sqrt[5]{(x+3)^4}\right)e^{x-1} = 0;$

$\dfrac{4}{\sqrt[5]{x+3}} + 5\ \sqrt[5]{(x+3)^4} = 0$;

$4 + 5(x + 3) = 0$; $x = -3\dfrac{4}{5}$ — экстремум.

Производная не определена при x =–3, значит, x =–3 — критическая точка.

Длина отрезка равна $\left|3\dfrac{4}{5} - 3\right| = \dfrac{4}{5}$. Ответ: $\dfrac{4}{5}$.

б) $f(x) = -7 - 2(x-3)^{\frac{6}{7}}e^{x-5}$. $f'(x) = e^{x-5}\left(-2(x-3)^{\frac{6}{7}} - \dfrac{12}{7}(x-3)^{-\frac{1}{7}}\right) = 0;$

$(x-3)^{\frac{6}{7}} + \dfrac{6}{7}(x-3)^{-\frac{1}{7}} = 0$; $x - 3 + \dfrac{6}{7} = 0$;

$x = 2\dfrac{1}{7}$ — экстремум.

Производная не определена при x =3, значит, эта точка критическая.

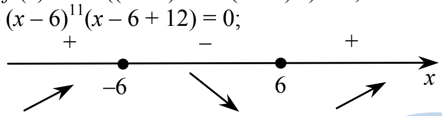
Длина отрезка равна: $\left|2\dfrac{1}{7} - 3\right| = \dfrac{6}{7}$. Ответ: $\dfrac{6}{7}$.

5.5.D03.

а) $f(x) = (x-6)^{12}e^{x+5} - 4$.

$f'(x) = e^{x+4}((x-6)^{12} + 12(x-6)^{11}) = 0;$

$(x-6)^{11}(x - 6 + 12) = 0;$



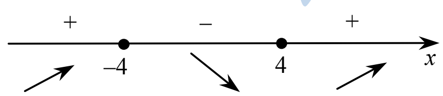
$x = \pm 6$.

Ответ: $x = \pm 6$; $x = 6$ — min; $x = -6$ — max.

б) $f(x) = (x-4)^8e^{x+3} - 5$.

$f'(x) = e^{x+3}((x-4)^8 + 8(x-4)^7) = 0;$

$(x-4)^7((x-4) + 8) = 0;$



$x = \pm 4$.

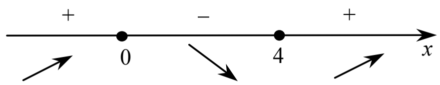
Ответ: $x = 4$ — min; $x = -4$ — max.

5.5.D04.

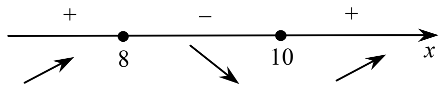
а) $f(x) = (x-4)^{12}e^{3x+2} - 5$.

$f'(x) = e^{3x+2}(3(x-4)^{12} + 12(x-4)^{11}) \geq 0;$

$(x-4)^{11}(3x-4+4) \geq 0;$



при $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ — возрастает, $x \in [0; 4]$ — убывает.
Ответ: возрастает: $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; убывает: $x \in [0; 4)$.
б) $f(x) = (x-10)^{10}e^{5x-6} + 1$.
$f'(x) = e^{5x-6}(5(x-10)^{10} + 10(x-10)^9) \geq 0;$
$(x-10)^9(x-10+2) \geq 0;$



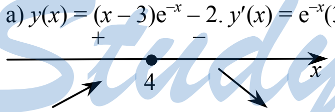
при $x \in (-\infty; 8] \cup [10; +\infty)$ — возрастает, $x \in [8; 10]$ — убывает.
Ответ: возрастает: $x \in (-\infty; 8] \cup [10; +\infty)$; убывает: $x \in [8; 10]$.

5.5.D05.

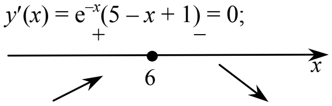
а) $f(x)=(x-5)^5(x-10)^{10}e^x$
$f'(x)=5(x-5)^4(x-10)^{10}e^x+10(x-5)^5(x-10)^9e^x+e^x(x-5)^5(x-10)^{10}=$
$=ex(x-5)^4(x-10)^9(5(x-10)+10(x-5)+(x-5)(x-10))=$
$=e^x(x-5)^4(x-10)^9(15x-100+x^2-15x+50)=e^x(x-5)^4(x-10)^9(x^2-50)$
$f'(x)$ меняет знаки в точках $x=10$, $x=\pm\sqrt{50}$.
Они и будут точками экстремума;
б) $f(x)=(x-10)^{10}(x-8)8e^x$
$f'(x)=10(x-10)^9(x-8)^8e^x+8(x-8)^7(x-10)^{10}e^x+e^x(x-10)^{10}(x-8)^8=$
$=(x-10)^9(x-8)^7e^x(10(x-8)+8(x-10)+(x-10)(x-8))=$
$=(x-10)^9(x-8)^7e^x(18x-160+x^2-18x+80)=(x-10)^9(x-8)^7e^x(x^2-80)$
$f'(x)$ меняет знаки в точках $x=8$, $x=10$, $x=\pm\sqrt{80}$.
Они и будут точками экстремума.

5.5.D06.

а) $y(x) = (x-3)e^{-x} - 2$. $y'(x) = e^{-x}(3-x+1) = 0;$



$4 - x = 0$; $x = 4$.
Ответ: возрастает: $x \leq 4$; убывает: $x \geq 4 \Rightarrow$
$x = 4$ — точка максимума; $f(4) = e^{-4} - 2$;
область определения = R.
б) $y(x) = (x-5)e^{-x} - 4$.
$y'(x) = e^{-x}(5-x+1) = 0;$



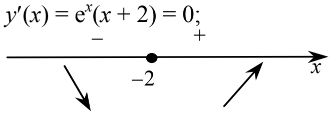
$6 - x = 0$; $x = 6$.
Ответ: область определения = R; возрастает: $x \leq 6$; убывает: $x \geq 6$;

$x = 6$ — точка максимума, $f(6) = e^{-6} - 4$.

5.5.D07.

а) $y(x) = (x + 1)e^x - 2$.

$y'(x) = e^x(x + 2) = 0$;



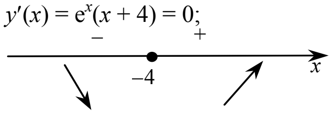
$x + 2 = 0$; $x = -2$.

Ответ: область определения = R; возрастает: $x \geq -2$; убывает: $x \leq -2 \Rightarrow$

$x = -2$ — минимум, $f(-2) = -e^{-2} - 2$.

б) $y(x) = (x + 3)e^x + 4$.

$y'(x) = e^x(x + 4) = 0$;



$x + 4 = 0$; $x = -4$.

Ответ: область определения = R; возрастает: $x \geq 4$; убывает: $x \leq -4 \Rightarrow$

$x = -4$ — точка минимума, $f(-4) = -e^{-4} + 4$.

5.5.D08.

а) $y(x) = (x^2 + 4x + 5)e^{-x} - 3$.

$y'(x) = e^{-x}(2x + 4 - x^2 - 4x - 5) \geq 0$;

$-x^2 - 2x - 1 \geq 0$; $(x + 1)^2 \leq 0$;

$x = -1$ — корень второй кратности $\Rightarrow y(x)$ всегда убывает.

Область определения = R.

Экстремумов нет; $x = -1$ — критическая точка.

Ответ: $D(y) = (-\infty; \infty)$, $x = -1$ — критическая точка, экстремумов нет, убывает на всей числовой оси.

б) $y(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x} - 1$. $y'(x) = e^{-x}(2x - 2 - x^2 + 2x - 2) \geq 0$;

$x^2 - 4x + 4 \leq 0$;

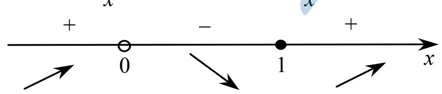
$x = 2$ — критическая точка кратности $2 \Rightarrow$

$y(x)$ убывает на области определения, равной R, экстремумов нет.

Ответ: $D(y) = (-\infty; \infty)$, $x = 2$ — критическая точка, экстремумов нет, убывает на всей числовой оси.

5.5.D09.

а) $y(x) = \frac{2e^{2x}}{x^2} - 1$. $y'(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x)}{x^4} \geq 0$; $\frac{x(x-1)}{x^4} \geq 0$;

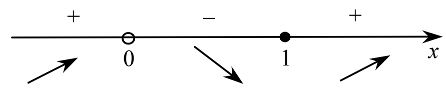


Ответ: при $x \in (0; 1]$ — убывает; при $x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ — возрастает;

$x = 1$ — точка минимума, $y(1) = 2e^2 - 1$;

область определения $R \setminus \{0\}$.

б) $y(x) = \frac{4e^{2x}}{x^2} - 3$. $y'(x) = \frac{4e^{2x}(2x^2 - 2x)}{x^4} \geq 0$; $\frac{x(x-1)}{x^4} \geq 0$;



Ответ: при $x \in (0;\ 1]$ — убывает; $x \in (-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$ — возрастает;
область определения = $R \setminus \{0\}$;
$x = 1$ — точка минимума, $y(1) = 4e^2 - 3$.

5.5.D10.

а) $f(x) = e^{-3x+2} - 3x$.
$f'(x) = -3e^{-3x+2} - 3 \geq 0$;
$e^{-3x+2} + 1 \leq 0$ — решений нет $\Rightarrow$ убывает на R.
$f(x) = e^{-3x+2} - 3x = e^{-3\sqrt{17}+2} - 3\sqrt{17} = f\left(\sqrt{17}\right)$; Очевидно, $x = \sqrt{17}$.

Ответ: функция убывает на R; $x = \sqrt{17}$.
б) $f(x) = e^{5x+3} + 4x$.
Сумма двух возрастающих функций $\Rightarrow f(x)$ возрастает на R.
$f(x) = e^{5x+3} + 4x = e^{5\sqrt{5}+3} + 4\sqrt{5} = f\left(\sqrt{5}\right)$; Очевидно, $x = \sqrt{5}$.

Ответ: функция возрастает на R, $x = \sqrt{5}$.

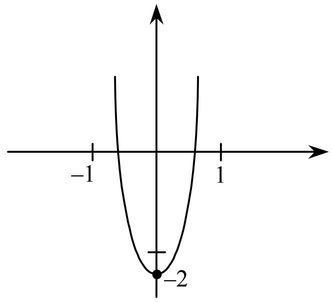
5.5.D11.

а) $f(x) = e^{-4x+5} - 4x^3$.
Сумма двух убывающих функций $\Rightarrow f(x)$ убывает на R.
$f(x) = y^{-4x+5} - 4x^3 > e^{-4\ln 2+5} - 4\ln^3 2 = f(\ln 2)$.
Очевидно, $x < \ln 2$.
Ответ: функция убывает на R; $x < \ln 2$.
б) $f(x) = e^{2x+3} + 4x^3$.
Сумма двух возрастающих функций $\Rightarrow f(x)$ — возрастает на R.
$f(x) = e^{2x+3} + 4x^3 < e^{2\ln 3+3} + 4\ln^3 3 = f(\ln 3)$.
Очевидно, $x < \ln 3$.
Ответ: функция возрастает на R; $x < \ln 3$.

5.5.D12.

а) $y(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - 3$.
Область определения равна R.
$y'(x) = \dfrac{1}{2}(2e^{2x} - 2e^{-2x}) = e^{2x} - e^{-2x} \geq 0$; $e^{2x} = e^{-2x}$; $2x = -2x \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: возрастает: $x \geq 0$; убывает: $x \leq 0$; $x = 0$ — экстремум (min), $f(0) = -2$.
Множество значений $y(x) \geq -2$.



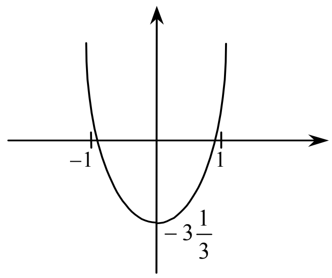
б) $y(x)=\dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{3}-4$.

Область определения равна R.

$y'(x)=\dfrac{1}{3}(4e^{4x}-4e^{-4x})=e^{4x}-e^{-4x}\ge 0$

Ответ: возрастает: $x\ge 0$; убывает: $x\le 0$; D(y) = $(-\infty;+\infty)$;

$x=0$ — минимум, $f(0)=-3\dfrac{1}{3}$; $E(f)=\left[-3\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.



§ 6. Логарифмическая функция

Уровень А.

5.6.А01.

а) $y(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3-5x^2+25x\right)\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-25x-2$

$y'(x)=(x^2-10x+25)\ln x+\dfrac{1}{3}x^2-5x+25-\dfrac{1}{3}x^2+5x-25=(x-5)^2\ln x$

$y'(x)=0$ при $x=1$, $x=5$.

$y'(x)$ меняет знак с "–" на "+" в точке $x=1$, это точка минимума;

б) $y(x)=\left(\dfrac{4}{3}x^3-6x^2+9x\right)\ln x-\dfrac{4}{9}x^3+3x^2-9x+9$

$y'(x)=(4x^2-12x+9)\ln x+\dfrac{4}{3}x^2-6x+9-\dfrac{4}{3}x^2+6x-9=(2x-3)^2\ln x$

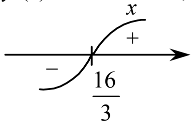
$y'(x)=0$ при $x=\dfrac{3}{2}$, 1.

$y'(x)$ меняет знак с "–" на "+" в точке x=1 это точка минимума.

5.6.А02.

а) $y(x) = 13x - 16\ln x - 7$, $\left[1; \frac{16}{13}\right]$.

$y'(x) = 13 - \frac{16}{x} = 0$; $x > 0$; $13x = 16$; $x = \frac{16}{3}$;



На $\left[1; \frac{16}{13}\right]$ y(x) убывает, т.е. max y(x) = y(1); min y(x) = $y\left(\frac{16}{3}\right)$.

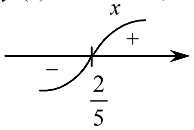
$y(1) = 13 - 16\ln 1 - 7 = 6$;

$y\left(\frac{16}{13}\right) = 16 - 16\ln\frac{16}{13} - 7 = 9 - 16\ln\frac{16}{13}$.

Ответ: $y_{\max} = y(1) = 6$; $y_{\min} = y\left(\frac{16}{13}\right) = 9 - 16\ln\frac{16}{13}$.

б) $y(x) = 5x - 2\ln x + 23$, $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$.

$y'(x) = 5 - \frac{2}{x} = 0$; $x>0$; $x = \frac{2}{5}$



На $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$ y(x) возрастает, т.е. max y(x) = y(1);

min y(x) = $y\left(\frac{2}{5}\right)$.

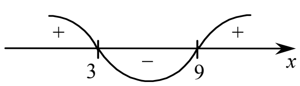
$y\left(\frac{2}{5}\right) = 2 - 2\ln\frac{2}{5} + 13 = 15 - 2\ln\frac{2}{5}$; $y(1) = 5 - 2\ln 1 + 13 = 18$.

Ответ: $y_{\max} = y(1) = 18$; $y_{\min} = y\left(\frac{2}{5}\right) = 15 - 2\ln\frac{2}{5}$.

5.6.А03.

а) $y(x) = \frac{x^2}{2} - 12x + 27\ln x + 15$. $y'(x) = x - 12 + \frac{27}{x} = 0$;

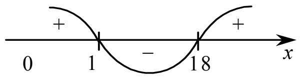
$x^2 - 12x + 27 = 0$; $D = 144 - 4\cdot 27 = 36$; $x_1 = \frac{12+6}{2} = 9$; $x_2 = \frac{12-6}{2} = 3$;



Ответ: [3; 9] — промежуток убывания.

б) $y(x)=\frac{x^2}{2}-19x+18\ln x-8$. $y'(x)=x-19+\frac{18}{x}=0$;

$x^2-19x+18=0$; $x>0$; $x_1=1$; $x_2=18$;



Ответ: промежуток возрастания: $(0;\ 1]\cup[18;\ \infty]$.

5.6.А04.

а) $y(x)=\left(-\frac{2}{3}x^3+14x^2-98x\right)\ln x+\frac{2}{9}x^3-7x^2+98x-6$.

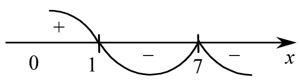
$y'(x)=-2x^2\ln x-\frac{2}{3}x^3\frac{1}{x}+28x\ln x+14x^2\frac{1}{x}-98\ln x-98x\frac{1}{x}+\frac{2}{3}x^2-14x+98=-$

$2x^2\ln x+28x\ln x-98\ln x=\ln x(-2x^2+28x-98)=0$;

$\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ -2x^2+28x-98=0\end{array}\right.$; $x>0$;

$x=1$;

$D=28^2-4\cdot2\cdot98=784-784=0$; $x=\frac{-28}{-4}=7$;



Ответ: функция возрастает при $x\in(0;\ 1]$; функция убывает при $x\in[1;\ +\infty)$.

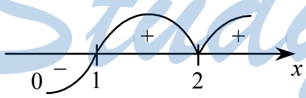
б) $y(x)=(4x^3-24x^2+48x)\ln x-\frac{4}{3}x^3+12x^2-48x-15$.

$y'(x)=12x^2\ln x+4x^2-48x\ln x-24x+48\ln x+48-\frac{4}{3}3x^2+24x-48=$

$=(12x^2-48x+48)\ln x=0$;

$\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ 12x^2-48x+48=0\end{array}\right.$; $x>0$;

$x=1$; $x=2$



Ответ: функция возрастает при $x\in[1;\ +\infty)$;

функция убывает при $x\in(0;\ 1]$.

5.6.А05.

а) $y(x)=5x-2\ln x$

$y'(x)=5-\frac{2}{x}$, $y(x)$ возрастает при $y'(x)\geq0$

т.е. $5-\frac{2}{x}\geq0$, $\frac{5}{2}\geq\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

т.е. $y(x)$ возрастает на $x \in (-\infty, 0)$ и на $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$;

б) $y(x)=4x-3\ln x$

$y'(x) = 4 - \frac{3}{x}$, $y(x)$

при $y'(x) \le 0$ т.е. $4 - \frac{3}{x} \le 0$, $4 \le \frac{3}{x}$

$\frac{4}{3} \le \frac{1}{3}$, $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$

т.е. $y(x)$ убывает на $\left(0, \frac{3}{4}\right]$.

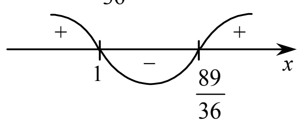
5.6.A06.

а) $y(x) = (18x^2 - 89x)\ln x - 9x^2 + 89x + 14$.

$y'(x) = 18x^2 \frac{1}{x} + 36\ln x - 89x \frac{1}{x} - 89\ln x - 18x + 89 = (36x - 89)\ln x = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ 36x - 89 = 0 \end{array}\right.$;

$x = 1$; $x = \frac{89}{36}$;



Ответ: $x_{\min} = \frac{89}{36}$; $x_{\max} = 1$.

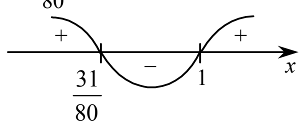
б) $y(x) = (40x^2 - 31x)\ln x - 20x^2 + 31x + 13$.

$y'(x) = 40x^2 \frac{1}{x} + 80x\ln x - 31x \frac{1}{x} - 31\ln x - 40x + 31 = \ln x(80x - 31) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ 80x - 31 = 0 \end{array}\right.$;

$x = 1$;

$x = \frac{31}{80}$;



Ответ: $x_{\min} = 1$; $x_{\max} = \frac{31}{80}$.

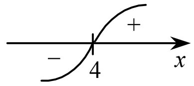
Уровень B.

5.6.B01.

а) $f(x) = x - 5\ln(x + 1)$, $[0; 8]$.

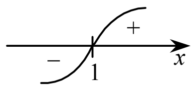
$f'(x) = 1 - 5\frac{1}{x+1} = 0;$

$x + 1 = 5; x = 4;$



$f(4) = 4 - 5\ln5;$
$f(0) = 0;$
$f(8) = 8 - 5\ln9.$
Ответ: $f_{\min} = f(4) = 4 - 5\ln5;$
$f_{\max} = f(0) = 0.$
б) f(x) = x – 4ln(x + 3), [–2; 6].

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x+3} = 0; x + 3 = 4; x = 1;$



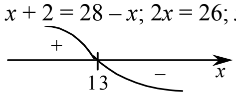
$f(1) = 1 - 4\ln4;$
$f(-2) = -2;$
$f(6) = 6 - 4\ln9.$
Ответ: $f_{\min} = f(1) = 1 - 4\ln4; f_{\max} = f(-2) = -2.$

5.6.В02.

а) f(x) = ln(x + 2) + ln(28 – x).

$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{28-x} = 0;$ D(f) = (–2; 28);

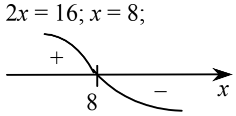
$x + 2 = 28 - x; 2x = 26; x = 13;$



$f_{\max} = f(13) = \ln(15) + \ln(15) = 2\ln15.$
Ответ: 2ln15.
б) f(x) = ln(x + 4) + ln(20 – x).

$f'(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{20-x} = 0;$

$x + 4 = 20 - x;$ D(f)=(-4;20).
$2x = 16; x = 8;$



$f_{\max} = f(8) = \ln12 + \ln12 = 2\ln12.$
Ответ: 2ln12.

5.6.В03.

а) $y(x)=4x^2\ln x+3x\ln x-2x^2-3x+4$, ОДЗ $x>0$
$y'(x)=8x\ln x+4x+3\ln x+3-4x-3=8x\ln x+3\ln x=\ln x(8x+3)$

Точки экстремума $x=1$, $x=-\frac{3}{8}$, но $y(x)$ определена при $x>0$.

$y(1)=-1$;

б) $y(x)=2x^2\ln x+5x\ln x-x^2-5x+7$, ОДЗ $x>0$

$y'(x)=4x\ln x+2x+5\ln x+5-2x-5=\ln x(4x+5)$

$y'(x)=0$ при $x=1$, $x=-\frac{5}{4}$, но $y(x)$ определена при $x>0$

$x=1$ – экстремум

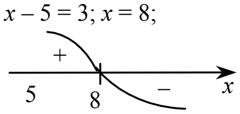
$y(1)=1$.

5.6.В04.

а) $y(x)=\ln(x-5)-\frac{x}{3}-4$.

$y'(x)=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{3}=0$; $x>5$;

$x-5=3$; $x=8$;

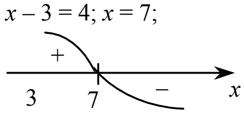


Ответ: функция возрастает при $x\in(5;8]$; функция убывает при $x\in[8;+\infty)$.

б) $y(x)=\ln(x-3)-\frac{x}{4}-2$.

$y'(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{4}=0$;

$x-3=4$; $x=7$;



Ответ: функция возрастает при $x\in(3;7]$;

функция убывает при $x\in[7;+\infty)$

5.6.В05.

а) $f(x)=\ln(x+2)+\ln(x+3)-1{,}5x-3$, ОДЗ $x>-2$

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{2}=\frac{2(x+2+x+3)-3(x+2)(x+3)}{2(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{4x+10-3x^2-15x-18}{2(x+2)(x+3)}=-\frac{3x^2+11x+8}{2(x+2)(x+3)}=-\frac{(3x+8)(x+1)}{2(x+2)(x+3)}$$

Учитывая, что $x>-2$ имеем одну точку экструмума $x=-1$;

б) $f(x)=\ln(x-3)+\ln(x-2)-1{,}5x+10$, ОДЗ $x>2$

$$f'(x)=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{2}=\frac{2(x-3+x-2)-3(x-3)(x-2)}{2(x-3)(x-2)}=$$

$$=\frac{2x-10-3x^2+15x-18}{2(x-3)(x-2)}=-\frac{3x^2-17x+28}{2(x-3)(x-2)}=-\frac{(3x+4)(x-7)}{2(x-3)(x-2)}$$

учитывая, что $x>2$, получим одну точку экструмума $x=7$.

5.6.В06.

а) $f(x)=\ln(19x+2)+\ln(11-19x)$, ОДЗ $x \in \left(-\frac{19}{2}, \frac{11}{19}\right)$

$$f'(x) = \frac{19}{19x+2} - \frac{19}{11-19x} = 19\left(\frac{11-19x-19x-2}{(19x+2)(11-19x)}\right) =$$

$$= -19\left(\frac{38x-9}{(19x+2)(11-19x)}\right)$$

точка экстремума $x = \frac{9}{38}$

т.к. проходя через нее $y'(x)$ меняет знак с "+" на "–", то это точка максимума;

б) $f(x)=\ln(13x+9)+\ln(16-13x)$, ОДЗ $x \in \left(-\frac{9}{13}, \frac{16}{13}\right)$

$$f'(x) = \frac{13}{13x+9} - \frac{13}{16-13x} = -13\left(\frac{13x-16+13x+9}{(13x+9)(16-13x)}\right) = -13\left(\frac{(26x-7)}{(13x+9)(16-13x)}\right)$$

точка экстремума $x = \frac{7}{26}$

т.к. $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", то это точка максимума.

5.6.В07.

а) $f(x)=-5+(x-23)(\ln(x-23)$

$f'(x)=\ln(x-23)+1=\ln(e(x-23))$

$f'(x)=0$ при $x-23=\frac{1}{e} \Rightarrow x=23+\frac{1}{e}$

Итак, $x=23+e$ – точка экстремума;

б) $f(x)=13+(x+22)\ln(x+22)$

$f'(x)=\ln(x+22)+1=\ln(e(x+22))$

$f'(x)=0$, при $x+22=\frac{1}{e} \Rightarrow x=\frac{1}{e}-22$

Итак, $x=\frac{1}{e}-22$ – точка экстремума.

5.6.В08.

а) $y(x) = \ln(x + 21) - \ln(x + 14) - 9$.

$y'(x) = \frac{1}{x+21} - \frac{1}{x+14} = 0;$

$x + 14 = x + 21;$

нет решений;

$y'(x) < 0$.

Ответ: функция монотонно убывает при $x \in (-14; +\infty)$.

б) $y(x) = \ln(x + 7) - \ln(x + 23) + 12$.

$y'(x) = \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+23} = 0;$

$x + 7 = x + 23;$

нет решений;

$y'(x) > 0$

Ответ: функция монотонно возрастает при $x \in (-7; +\infty)$.

5.6.B09.

а) $f(x)=\ln(x-8)^{-21}+21x+3$, ОДЗ: $x>8$

$$f'(x) = \frac{21}{x-8} + 21 = -21\left(\frac{1}{x-8} - 1\right) = 21\left(\frac{x-9}{x-8}\right)$$

точка экстремума $x=9$, это точка минимума.

б) $f(x)=\ln(x-13)^{13}-13x+5$, ОДЗ: $x>13$

$$f'(x) = \frac{13}{x-13} - 13 = 13\left(\frac{1}{x-15} - 1\right) = -13\left(\frac{x-14}{x-13}\right)$$

точка экстремума $x=14$, это точка максимума.

5.6.B10.

а) $y(x) = \ln(11x - 10) - \ln(10x - 11) + 11$.

$y'(x) = \dfrac{11}{11x-10} - \dfrac{10}{10x-11} = 0$; $D(y)=\left(\dfrac{11}{10};\ +\infty\right)$

$11(10x - 11) - 10(11x - 10) = 0$;

нет решений;

$y'(x) > 0$;

Ответ: функция убывает при $x \in \left(\dfrac{11}{10};\ +\infty\right)$.

б) $y(x) = \ln(9x - 13) - \ln(13x - 9) - 2$.

$y'(x) = \dfrac{9}{9x-13} - \dfrac{13}{13x-9} = 0$;

$9(13x - 9) - 13(9x - 13) = 0$; $D(y) = \left(\dfrac{13}{9};+\infty\right)$;

нет решений;

$y'(x) > 0$.

Ответ: функция возрастает при $x \in \left(\dfrac{13}{9};\ +\infty\right)$.

5.6.B11.

а) $f(x) = x^2 - 16x + 14\ln x - 3$. $f'(x) = 2x - 16 + \dfrac{14}{x} = 0$;

$x^2 - 8x + 7 = 0$; $x = 7$; $x = 1$;

$f(7) = 49 - 112 + 14\ln 7 - 3 = -66 + 14\ln 7$;

$f(1) = 1 - 16 - 3 = -18$;

$f(1)$ — максимум.

Искомое число: –17. Ответ: –17.

б) $f(x) = x^2 - 13x + 11 \ln x - 8$. $f'(x) = 2x - 13 + \dfrac{11}{x} = 0$;

$2x^2 - 13x + 11 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{11}{2}$;

$f(1) = 1 - 13 - 8 = -20$;

$$f\left(\frac{11}{2}\right)=\frac{121}{4}-\frac{13\cdot 11}{2}+11\ln\frac{11}{2}-8=-\frac{197}{4}+11\ln\frac{11}{2}$$

$f(1)$ — максимум $\Rightarrow$

наименьшее целое число, большее –20 — это –19.

Ответ: –19.

5.6.B12.

а) $f(x) = 4x^2 - 12\ln(x + 0,5) + 2$, $\left[-\frac{1}{4};\ 1\right]$.

$f'(x) = 8x - \frac{12}{x+0,5} = 0;$

$8x^2 + 4x - 12 = 0;\ 2x^2 + x - 3 = 0;$

$D = 1 + 24 = 25;\ x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = 1;$

$f(1) = 4 - 12\ln\frac{3}{2} + 2 = 6 - 12\ln\frac{3}{2};$

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-12\ln\frac{1}{4}+2=2\frac{1}{4}-12\ln\frac{1}{4}.$

Ответ: $f_{\max} = f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}-12\ln\frac{1}{4};$

$f_{\min} = f(1) = 6 - 12\ln\frac{3}{2}.$

б) $f(x) = 7x^2 - 21\ln(x + 0,5) - 2$, $\left[-\frac{1}{4};\ 1\right]$.

$f'(x) = 14x - \frac{21}{x+0,5} = 0;$

$14x^2 + 7x - 21 = 0;\ 2x^2 + x - 3 = 0;\ x = -\frac{3}{2};\ x = 1;$

$f(1) = 7 - 21\ln\frac{3}{2} - 2 = 5 - 21\ln\frac{3}{2};$

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{16}-21\ln\frac{1}{4}-2=-1\frac{9}{16}-21\ln\frac{1}{4};$

Ответ: $f_{\max} = f\left(-\frac{1}{4}\right)=-1\frac{9}{16}-21\ln\frac{1}{4};\ f_{\min} = f(1) = 5 - 21\ln\frac{3}{2}.$

Уровень C.

5.6.C01. а) $f(x) = 2(x - 3)\ln(x - 3)$ $[3 + e^{-2};\ 3 + e^3]$.

$f'(x) = 2\ln(x - 3) + 2 = 0;$

$x - 3 = e^{-1};$

$x = 3 + e^{-1};$

$f(3 + e^{-1}) = 2(e^{-1})\ln e^{-1} = -2e^{-1};$

$f(3 + e^{-2}) = -4e^{-2};$

$f(3 + e^3) = 6 \cdot e^3$;

Ответ: $f_{max} = f(3 + e^3) = 6e^3$; $f_{min} = f(3 + e^{-1}) = -2e^{-1}$.

б) $f(x) = 3(x - 3)\ln(x - 3)$ $[3 - e^{-2}; 3 - e^5]$.

$f'(x) = 3\ln(x - 3) + 3 = 0$;

$x = 3 + e^{-1}$;

$f(3 + e^{-1}) = -3e^{-1}$;

$f(3 + e^{-2}) = -6e^{-2}$;

$f(3 + e^5) = 15e^5$; Ответ: $f_{max} = f(3 + e^5) = 15e^5$; $f_{min} = f(3 + e^{-1}) = -3e^{-1}$.

5.6.С02. а) $f(x) = (8x + 5)\ln(8x + 5) + \frac{8}{5}$.

ОДЗ: $x > -\frac{5}{8}$

$f'(x) = 8\ln(8x + 5) + 8 \geq 0$;

$\ln(8x + 5) \geq -1$;

$8x \geq e^{-1} - 5$

$x \geq \frac{1}{8}e^{-1} - \frac{5}{8}$.

Ответ: при $x \geq \frac{1}{8}e^{-1} - \frac{5}{8}$ — возрастает; при $x \in \left(-\frac{5}{8}; \frac{1}{8}e^{-1} - \frac{5}{8}\right]$ — убывает.

б) $f(x) = (5x - 6)\ln(5x - 6) - \frac{5}{6}$.

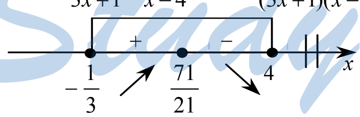
$f'(x) = 5\ln(5x - 6) + 5 \geq 0$;

ОДЗ: $x > \frac{6}{5}$; $5x - 6 \geq e^{-1}$; $x \geq \frac{1}{5}e^{-1} + \frac{6}{5}$.

Ответ: при $x \geq \frac{1}{5}e^{-1} + \frac{6}{5}$ — возрастает; при $x \in \left(\frac{6}{5}; \frac{1}{5}e^{-1} + \frac{6}{5}\right]$ — убывает.

5.6.С03. а) $f(x) = 6\ln(3x + 1) + \ln(4 - x)$. ОДЗ: $x \in \left(-\frac{1}{3};\ 4\right)$;

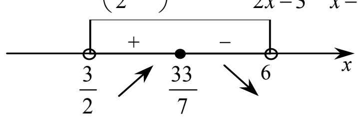
$f'(x) = \frac{18}{3x+1} + \frac{1}{x-4} \geq 0$; $\frac{18x - 72 + 3x + 1}{(3x+1)(x-4)} \geq 0$; $\frac{21x - 71}{(3x+1)(x-4)} \geq 0$;



Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{3};\ \frac{71}{21}\right]$ — возрастает; $x \in \left[\frac{71}{21};\ 4\right)$ — убывает.

б) $f(x) = 5\ln(2x - 3) + 2\ln(6 - x)$.

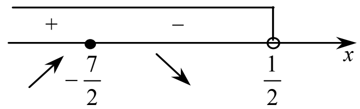
ОДЗ: $x \in \left(\frac{3}{2};\ 6\right)$; $f'(x) = \frac{10}{2x-3} + \frac{2}{x-6} = \frac{10x - 60 + 4x - 6}{(2x-3)(x-6)} \geq 0$; $\frac{14x - 66}{(2x-3)(x-6)}$;



Ответ: при $x \in \left(\frac{3}{2};\ \frac{33}{7}\right]$ — возрастает; при $x \in \left[\frac{33}{7};\ 6\right)$ — убывает.

5.6.C04. а) $f(x) = \frac{1}{4}x + \ln(1 - 2x) + \ln 5$. $f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{2x-1} \geq 0$; ОДЗ: $1 - 2x > 0$;

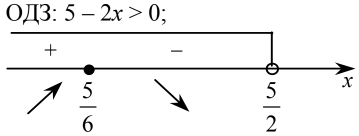
$\frac{2x-1+8}{(2x-1)} \geq 0$; $\frac{2x+7}{2x-1} \geq 0$;



Ответ: при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{7}{2}\right]$ — возрастает; $x \in \left[-\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ — убывает.

б) $f(x) = \frac{3}{5}x + \ln(5 - 2x) - \ln 8$. $f'(x) = \frac{3}{5} + \frac{2}{2x-5} = \frac{6x-15+10}{5(2x-5)} \geq 0$; $\frac{6x-5}{2x-5} \geq 0$;

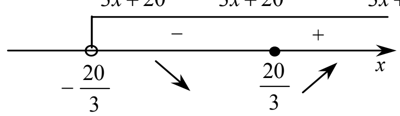
ОДЗ: $5 - 2x > 0$;



Ответ: при $x \in \left(-\infty;\ \frac{5}{6}\right]$ — возрастает; при $x \in \left[\frac{5}{6};\ \frac{5}{2}\right)$ — убывает.

5.6.C05. а) $f(x) = 3x - 40\ln(3x + 20) + 8$. ОДЗ: $3x + 20 > 0$;

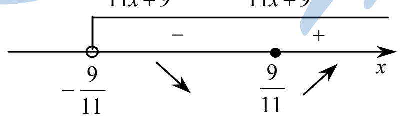
$f'(x) = 3 - \frac{120}{3x+20} = \frac{9x+60-120}{3x+20} \geq 0$; $\frac{3x-20}{3x+20} \geq 0$;



Ответ: при $x \geq \frac{20}{3}$ — возрастает; $x \in \left(-\frac{20}{3};\ \frac{20}{3}\right]$ — убывает.

б) $f(x) = 11x - 18\ln(11x + 9) + 10$. ОДЗ: $11x + 9 > 0$;

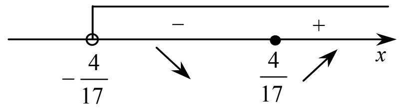
$f'(x) = 11 - \frac{18 \cdot 11}{11x+9} = \frac{11(11x+9) - 18 \cdot 11}{11x+9} \geq 0$; $\frac{11x-9}{11x+9} \geq 0$;



Ответ: $x \geq \frac{9}{11}$ — возрастает; $x \in \left(-\frac{9}{11};\ \frac{9}{11}\right]$ — убывает.

5.6.C06. а) $f(x) = 17x - 8\ln(17x + 4) - 8$. ОДЗ: $17x + 14 > 0$;

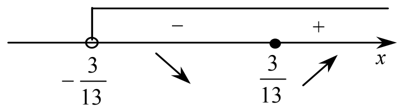
$f'(x) = 17 - \frac{8 \cdot 17}{17x+4} = \frac{17(17x+4) - 8 \cdot 17}{17x+4} \geq 0$; $\frac{17x-4}{17x+4} \geq 0$;



Ответ: при $x \geq \frac{4}{17}$ — возрастает; при $x \in \left(-\frac{4}{17};\ \frac{4}{17}\right]$ — убывает.

б) $f(x) = 13x - 6\ln(13x + 3) - 2$; ОДЗ: $13x + 3 > 0$;

$f'(x) = 13 - \frac{6 \cdot 13}{13x+3} \geq 0$; $\frac{13x-3}{13x+3} \geq 0$;

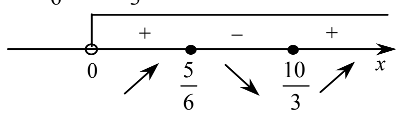


Ответ: при $x \in \left(-\frac{3}{13}; \frac{3}{13}\right]$ — убывает, при $x \in \left[\frac{3}{13}; +\infty\right)$ — возрастает.

5.6.С07. а) $f(x) = 9x^2 - 75x + 50\ln x + 8$. ОДЗ: $x > 0$;

$f'(x) = 18x - 75 + \frac{50}{x} \geq 0$; $18x^2 - 75x + 50 \geq 0$; $D = 5625 - 3600 = 45^2$;

$x_1 = \frac{5}{6}$; $x_2 = \frac{10}{3}$;



Ответ: при $x \in \left(0;\ \frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{10}{3};\ +\infty\right)$ — возрастает;

$x \in \left[\frac{5}{6};\ \frac{10}{3}\right]$ — убывает.

б) $f(x) = x^2 - 25x + 33\ln x - 5$. ОДЗ: $x > 0$;

$f'(x) = 2x - 25 + \frac{33}{x} \geq 0$;

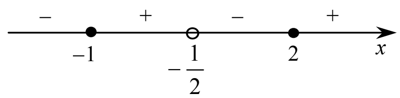
$2x^2 - 25x + 33 \geq 0$; $D = 625 - 264 = 19^2$; $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = 11$

Ответ: при $x \in \left(0;\ \frac{3}{2}\right] \cup [11;\ +\infty)$ — возрастает;

$x \in \left[\frac{3}{2};\ 11\right]$ — убывает.

5.6.С08. а) $f(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{2}\ln(2x + 1)^5 + \ln 3$. ОДЗ: $2x + 1 > 0$; $x > -\frac{1}{2}$;

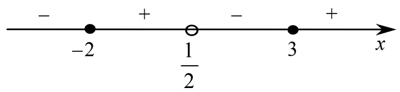
$f'(x) = 2x - 3 - \frac{5}{2x+1} = \frac{4x^2-4x-8}{2x+1} = 0$; $\frac{(x-2)(x+1)}{2x+1} = 0$;



Ответ: при $x \geq 2$ — возрастает; $x \in \left(-\frac{1}{2};\ 2\right]$ — убывает.

б) $f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{2}\ln(2x-1)^7 + \ln 7$. ОДЗ: $x > \frac{1}{2}$; $x > \frac{1}{3}$;

$f'(x) = 2x + 3 - \frac{21}{2x-1} = \frac{4x^2+4x-24}{2x-1} = 0$; $\frac{(x-3)(x+2)}{2x-1} = 0$;

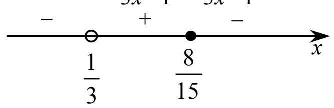


Ответ: при $x \geq 3$ — возрастает; при $x \in \left(\frac{1}{2};\ 3\right]$ — убывает.

5.6.C09. а) $f(x) = -5x - \ln\frac{1}{3x-1}$. ОДЗ: $3x - 1 > 0$;

$x > \frac{1}{3}$;

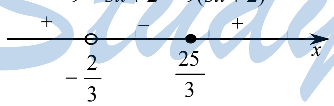
$f'(x) = -5 + \frac{3}{3x-1} = \frac{8-15x}{3x-1} = 0$;



Ответ: возрастает при $x \in \left(\frac{1}{3};\ \frac{8}{15}\right]$; убывает при $x \geq \frac{8}{15}$.

б) $f(x) = \frac{1}{9}x - \ln(3x+2)$. ОДЗ: $3x + 2 > 0$; $x > -\frac{2}{3}$;

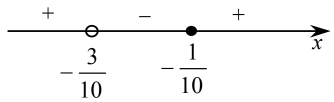
$f'(x) = \frac{1}{9} - \frac{3}{3x+2} = \frac{3x-25}{9(3x+2)} = 0$;



Ответ: возрастает при $x \geq \frac{25}{3}$; убывает при $x \in \left(-\frac{2}{3};\ \frac{25}{3}\right]$.

5.6.C10. а) $f(x) = 5x - \ln\left(4x + \frac{6}{5}\right) + \ln 4$. ОДЗ: $4x + \frac{6}{5} > 0$; $x > -\frac{3}{10}$;

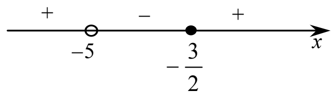
$f'(x) = 5 - \frac{4}{4x+\frac{6}{5}} = \frac{20x+2}{4x+\frac{6}{5}} = 0$;



Ответ: возрастает при $x \geq -\frac{1}{10}$; убывает при $x \in \left(-\frac{3}{10}; -\frac{1}{10}\right]$.

б) $f(x) = \frac{2}{7}x - \ln(x+5) + \ln 7$. ОДЗ: $x > -5$;

$f'(x) = \frac{2}{7} - \frac{1}{x+5} = \frac{2x+3}{7(x+5)} = 0$;



Ответ: возрастает при $x \geq -\frac{3}{2}$; убывает при $x \in \left(-5; -\frac{3}{2}\right]$.

5.6.С11. а) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 16x + 207\ln(x+16) + 10$.

$f'(x) = x - 16 + \frac{207}{x+16} = 0$;

$f'(x) = \frac{x^2 - 49}{x+16}$;

$x^2 = 49$; $x = \pm 7$ — критические точки.

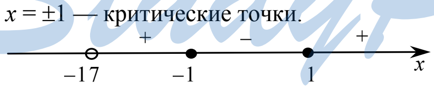
Ответ: $x = 7$ — точка min; $x = -7$ — max.

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 17x + 288\ln(x+17) + 10$. $f'(x) = x - 17 + \frac{288}{x+17}$;

$f'(x) = \frac{x^2 - 17^2 + 288}{x+17} = \frac{x^2 - 1}{x+17} = 0$;

$x^2 = 1$;

$x = \pm 1$ — критические точки.



Ответ: $x = -1$ — точка max; $x = 1$ — min.

5.6.С12. а) $f(x) = 20\sqrt{x} - \ln x^7 + 1$. $f'(x) = \frac{10}{\sqrt{x}} - \frac{7}{x} = 0$; ОДЗ: $x > 0$;

$10x - 7\sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x}(10\sqrt{x} - 7) = 0$;

$\sqrt{x} = \frac{7}{10}$;

$x = \frac{49}{100}$. Ответ: $x = \frac{49}{100}$.

б) $f(x) = 18\sqrt{x} - \ln x^5 + 7$. $f'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} = 0$; $\sqrt{x}\left(9\sqrt{x} - 5\right) = 0$;

$\sqrt{x} = \frac{5}{9}$; $x = \frac{25}{81}$. Ответ: $x = \frac{25}{81}$.

Уровень D.

5.6.D01. а) $f(x)=2(x-12)^2\ln(x-12)-28(x-12)\ln(x-12)+(x-12)^2$

$f'(x)=4(x-12)\ln(x-12)+2(x-12)-28\ln(x-12)-28+2(x-12)=4x\ln(x-12)-76\ln(x-12)+4(x-12)-28=4x\ln(x-12)-76\ln(x-12)+4x-76=(4x-76)(\ln(x12)+1)=0$

$x_1=19$, $x_2 = 12 + \frac{1}{e}$ Ответ: 19;

б) $f(x)=2(x-10)^2\ln(x-10)-24(x-10)\ln(x-10)+(x-10)^2$

$f'(x)=4(x-10)\ln(x-10)+2(x-10)-24\ln(x-10)-24+2(x-10)=$
$=4x\ln(x-10)-64\ln(x-10)+4x-64=(4x-64)(\ln(x-10)+1)=0$

$x_1=16$ $x_2=10+e$. Ответ: 16.

5.6.D02. а) $f(x)=(x-2)^4\ln(x-2)^5+7=5(x-2)^4\ln(x-2)+7$

$f'(x)=20(x-2)^3\ln(x-2)+5(x-2)^3=(x-2)^3(20\ln(x-2)+5)=0$

$(x-2)^3\left(\ln(x-2) + \frac{1}{4}\right) = 0$

$x_1=2$ $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ Ответ: 2; $2 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$;

б) $f(x)=(x-9)^{10}\ln(x-9)^{21}-5=21(x-9)^{10}\ln(x-9)$

$f'(x)=210(x-9)^9\ln(x-9)+21(x-9)^9=21(x-9)^9(10\ln(x-9)+1)=0$

$(x-9)^9\left(\ln(x-9) + \frac{1}{10}\right) = 0$

$x_1=9$ $x_2 = 9 + \frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ Ответ: 9, $9 + \frac{1}{\sqrt[10]{e}}$.

5.6.D03. а) $f(x) = 7 + 20\ln^2(3x + 2)$. ОДЗ: $x > -\frac{2}{3}$;

$f'(x) = 40\ln(3x + 2) \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot 3 = 0$;

$\ln(3x + 2) = 0$; $3x + 2 = 1$; $x = -\frac{1}{3}$; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 7 = f_{\min}$.

Ответ: $\min\limits_{\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)} f(x) = 7$.

б) $f(x) = -3 + 7\ln^2(7x + 8)$. ОДЗ: $x > -\frac{8}{7}$;

т.к. $7\ln^2(7x + 8) \geq 0 \Rightarrow f_{\min} = -3$. Ответ: $\min\limits_{\left(-\frac{8}{7};+\infty\right)} f(x) = -3$.

5.6.D04. а) $f(x) = -8 - 9\ln^2(x + 9)$. ОДЗ: $x > -9$;

т.к. $-9\ln^2(x + 9) \leq 0 \Rightarrow f_{\max} = -8$. Ответ: $\max\limits_{(-9;+\infty)} f(x) = -9$.

б) $f(x) = 9 - 8\ln^2(x + 8)$.

т.к. $-8\ln^2(x + 8) \le 0$, то max будет достигаться при $\ln^2(x + 8) = 0 \Rightarrow f_{max} = 9$.

5.6.D05. а) $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 35x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 + 3x^2 - 35x - 4$.

$f'(x) = (x^2 + 12x + 35)\ln x + \frac{1}{3}x^2 + 6x + 35 - \frac{1}{3}x^2 + 6x - 35 = 0;$

$(x + 7)(x + 5)\ln x + 12x = 0;$

Это уравнение не решается школьными методами.

Из графика видно, что $x_1 \approx \frac{3}{4}$ — экстремум.

$x \in (0; x_1]$ — убывает, $x \ge x_1$ — возрастает.

б) $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 9x^2 + 80x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 80x + 8$.

Аналогично предыдущей задаче $x_1 \approx 0{,}85$ (из графика) — экстремум.

$x \in (0; x_1]$ — убывает, $x \ge x_1$ — возрастает.

5.6.D06. а) $y(x) = 2x\ln^2(3x) - 3$.

Область определения: $x > 0$.

$y'(x) = 2\ln^2 3x + 12x\ln 3x\frac{1}{3x} \ge 0;$

$\ln^2 3x + 2\ln 3x \ge 0;$

$\ln 3x(\ln 3x + 2) \ge 0;$

$\left[\begin{array}{l}\ln 3x \ge 0\\ \ln 3x \le -2\end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l}x \ge \frac{1}{3}\\ x \le \frac{1}{3}e^{-2}\end{array}\right.;$

Ответ: возрастает при $x \in \left(0;\ \frac{1}{3}e^{-2}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; убывает при $x \in \left[\frac{1}{3}e^{-2};\ \frac{1}{3}\right]$.

$x = \frac{1}{3}e^{-2}$ — max; $f\left(\frac{1}{3}e^{-2}\right) = \frac{2}{3}e^{-2}\cdot 4 - 3 = \frac{8}{3}e^{-2} - 3$;

$x = \frac{1}{3}$ — min; $f\left(\frac{1}{3}\right) = -3$.

б) $y(x) = 4x\ln^2 4x - 1$.

Область определения: $x > 0$;

$y'(x) = 4\ln^2 4x + 8x\ln 4x\frac{4}{4x} = 4\ln^2 4x + 8x\ln 4x \ge 0;$

$\left[\begin{array}{l}\ln 4x \le -2\\ \ln 4x \ge 0\end{array}\right.;$ $\left[\begin{array}{l}x \le \frac{1}{4}e^{-2}\\ x \ge \frac{1}{4}\end{array}\right.;$

Ответ: возрастает: $x \in \left(0;\ \frac{1}{4}e^{-2}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; убывает: $x \in \left[\frac{1}{4}e^{-2};\ \frac{1}{4}\right]$;

$x = \frac{1}{4}e^{-2}$ — max; $f\left(\frac{1}{4}e^{-2}\right) = e^{-2} \cdot 4 - 1$

$x = \frac{1}{4}$ — min; $f\left(\frac{1}{4}\right) = -1$.

5.6.D07. а) $y(x) = x^2\ln 2x + 4$. Область определения: $x > 0$;
$y'(x) = 2x\ln 2x + x \ge 0$;
$x(2\ln 2x + 1) \ge 0$;
$2\ln 2x + 1 = 0$;

$x = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: возрастает: $x \ge \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$; убывает: $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right]$;

$x = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ — min; $f\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = -\frac{1}{8}e^{-1} + 4$.

б) $y(x) = 2x^2\ln 4x - 2$. Область определения: $x > 0$;
$y'(x) = 4x\ln 4x + 2x \ge 0$;
$x(2\ln 4x + 1) \ge 0$;
$2\ln 4x + 1 = 0$;

$x = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: возрастает: $x \ge \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$;

убывает: $x \in \left(0;\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}\right]$;

$x = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$ — точка минимума;

$f\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8}e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{1}{16}e^{-1} - 2$.

5.6.D08. а) $y(x) = 2\sqrt{x}\ln 4x - 4$. Область определения: $x > 0$;

$y'(x) = \frac{\ln 4x}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln 4x + 2}{\sqrt{x}} \ge 0$; $\ln 4x \ge -2$; $x \ge \frac{1}{4}e^{-2}$.

Ответ: при $x \ge \frac{1}{4}e^{-2}$ — возрастает; при $x \in \left(0;\ \frac{1}{4}e^{-2}\right]$ — убывает;

$x = \frac{1}{4}e^{-2}$ — точка минимума; $f\left(\frac{1}{4}e^{-2}\right) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = -2e^{-1} - 4$.

б) $y(x) = 2\sqrt{x}\ln 2x + 2$. Область определения: $x > 0$;

$$y'(x) = \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ge 0 \text{ ;}$$

$\ln 2x \ge -2$; $x \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}$.

Ответ: возрастает: $x \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}$; убывает: $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}e^{-2}\right]$;

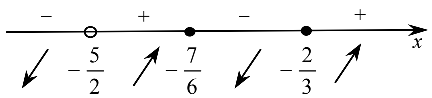
$x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}$ — точка минимума; $f\left(\frac{1}{2}e^{-2}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}\cdot(-2) + 2 = -2\sqrt{2}e^{-1} + 2$.

5.6.D09. а) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{11}{6}\ln(2x+5)^4$.

$$\mathrm{D(f)} = \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right) \text{ ;}$$

$$f'(x) = 3x - 2 + \frac{11}{6}\cdot\frac{4(2x+5)^3\cdot 2}{(2x+5)^4} = 3x - 2 + \frac{44}{3(2x+5)} \ge 0 \text{ ;}$$

$$\frac{18x^2 + 33x + 14}{2x+5} \ge 0 \text{ ; } \frac{\left(x+\frac{7}{6}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{2x+5} \ge 0 \text{ ;}$$



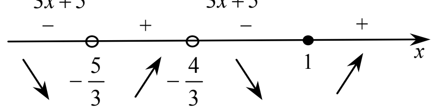
Ответ: возрастает: $x \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{6}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

убывает: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left[-\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right]$.

б) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{4}{3}\ln(3x+5)^2$.

$$f'(x) = 3x - 4 + \frac{4}{3}\cdot\frac{2(3x+5)\cdot 2}{(3x+5)^2} = 3x - 4 + \frac{8}{(3x+5)} \ge 0 \text{ ;}$$

$$\frac{3x^2 + x - 4}{3x+5} \ge 0 \text{ ; } \frac{\left(x+\frac{8}{6}\right)(x-1)}{3x+5} \ge 0 \text{ ;}$$



Ответ: возрастает: $x \in \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right] \cup [1;\ +\infty)$;

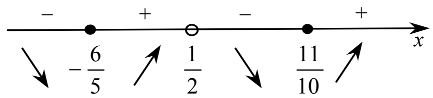
убывает: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left[-\frac{4}{3};\ 1\right]$.

5.6.D10.

а) $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{51}{20}\ln(2x-1)^2$. $D(f) = \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$f'(x) = 5x + 3 - \frac{51}{20} \cdot \frac{2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = 5x + 3 - \frac{51}{5(2x-1)} = \frac{5(5x+3)(2x-1) - 51}{5(2x-1)} =$

$\frac{50x^2 + 5x - 66}{10x - 5} = \frac{(5x+6)(10x-11)}{10x-5} = 0$. $x = -\frac{6}{5}$; $x = \frac{11}{10}$.



Ответ: f(x) возрастает на $\left[-\frac{6}{5};\ \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{11}{10}; +\infty\right)$;

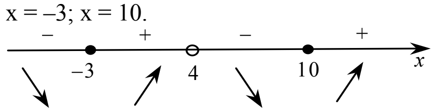
f(x) убывает на $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{2};\ \frac{11}{10}\right]$.

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 7\ln(x-4)^6$.

$D(f) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

$f'(x) = \frac{x^2 - 30 - 7x}{x-4} = \frac{(x+3)(x-10)}{x-4}$.

$x = -3$; $x = 10$.



Ответ: f(x) возрастает на $[-3; 4) \cup [10; +\infty)$;
f(x) убывает на $(-\infty; -3] \cup (4; 10]$.

5.6.D11.

а) $f(x) = 5\ln(3 + 4x^2) - 0{,}5x^2$.

$f'(x) = -\frac{1}{a} = -a^2 - x = 0;$

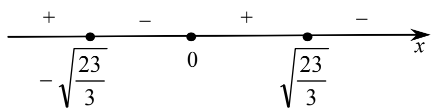
$40x - 3x - 4x^3 = 0$; $4x^3 - 37x = 0$; $x = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$; $x = 0$;

$x = 0$ — точка минимума;

$x = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$ — точка максимума.

б) $f(x) = 8\ln(1 + 3x^2) - x^2$. $f'(x) = \frac{48x}{1+3x^2} - 2x = 0$;

$48x - 2x - 6x^3 = 0$; $x(46 - 6x^2) = 0$; $x = 0$; $x = \pm\sqrt{\frac{23}{3}}$;



Ответ: $x = 0$ — точка минимума;

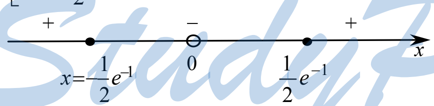
$x = \pm\sqrt{\frac{23}{3}}$ — точки максимума.

5.6.D12. а) $y(x) = 4x\ln 4x^2 - 1$.

Область определения: $x \neq 0$;

$y'(x) = 4\ln 4x^2 + \frac{4x\cdot 8x}{4x^2} = 4\ln 4x^2 + 8 \geq 0$; $\ln 4x^2 = -2$;

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}e^{-1}; \\ x = -\frac{1}{2}e^{-1}. \end{array}\right.$$



функция возрастает при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}e^{-1}\right] \cup \left[\frac{1}{2}e^{-1}; +\infty\right)$;

убывает при $x \in \left[-\frac{1}{2}e^{-1}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}e^{-1}\right]$.

$x = -\frac{1}{2}e^{-1}$ — максимум; $y\left(-\frac{1}{2}e^{-1}\right) = -2\cdot e^{-1}(-2) - 1 = 4e^{-1} - 1$.

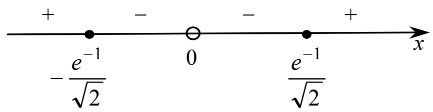
$x = \frac{1}{2}e^{-1}$ — минимум; $y\left(\frac{1}{2}e^{-1}\right) = 2\cdot e^{-1}(-2) - 1 = -4e^{-1} - 1$.

б) $y(x) = 3x\ln 2x^2 + 2$. ОДЗ: $x \neq 0$

$y'(x) = 3\ln 2x^2 + 3x \cdot \dfrac{4x}{2x^2} = 3\ln 2x^2 + 6 = 0;$

$\ln 2x^2 = 0$

$x^2 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2};$



функция возрастает при $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1};\ +\infty\right);$

функция убывает при $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}\right]$.

$x = -\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{2}}$ — точка максимума; $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}e}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{2}e} \cdot \ln\left(2 \cdot \dfrac{1}{2e^2}\right) + 2 = \dfrac{6}{\sqrt{2} \cdot e} + 2$.

$x = \dfrac{e^{-1}}{\sqrt{2}}$ — точка максимума; $f\left(\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}e} \cdot \ln\left(2 \cdot \dfrac{1}{2e^2}\right) + 2 = -\dfrac{6}{\sqrt{2}e} + 2$.

Глава 6. Задачи с параметром

§ 1. Многочлены

6.1.D01. а) $\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 3x + y = a \\ 5x + 11y = a^2 + 3a \end{cases}$. $\begin{cases} x = 2 - 7y \\ 6 - 20y = a \\ 10 - 24y = a^2 + 3a \end{cases}$; $\begin{cases} y = \dfrac{6-a}{20} \\ x = 2 - 7y \\ 10 - 6 \cdot \dfrac{6-a}{5} = a^2 + 3a \end{cases}$;

$50 - 36 + 6a = 5a^2 + 15a$; $5a^2 + 9a - 14 = 0$; $D = 81 + 20 \cdot 14 = 361 = (19)^2$;

$a_{1,2} = \dfrac{-9 \pm 19}{10}$; $a_1 = 1$; $a_2 = -2{,}8$; $y_1 = \dfrac{1}{4}$; $x_1 = \dfrac{1}{4}$; ;

$y_2 = \dfrac{11}{25}$; $x_1 = -\dfrac{27}{25}$; Ответ: при $a_1 = 1$ $x = y = \dfrac{1}{4}$; при $a = -2{,}8$ $x = -\dfrac{27}{27}$; $y = \dfrac{11}{25}$.

б) $\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 2x + y = a \\ 5x + 16y = a^2 + 6a \end{cases}$. $\begin{cases} x = 3 - 8y \\ 6 - 15y = a \\ 15 - 24y = a^2 + 6a \end{cases}$; $\begin{cases} y = \dfrac{6-a}{15} \\ x = 3 - 8y \\ 15 - 8 \cdot \dfrac{6-a}{5} = a^2 + 6a \end{cases}$;

$75 - 48 + 8a = 5a^2 + 30a$; $5a^2 + 22a - 27 = 0$; $\dfrac{D}{4} = 121 + 27 \cdot 5 = 256$;

$a_{1,2} = \dfrac{-11 \pm 16}{5}$; $a_1 = 1$; $a_2 = -\dfrac{27}{5}$;

$y_1 = \frac{1}{3}$; $x_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = \frac{19}{25}$; $x_2 = 3 - \frac{152}{25} = -\frac{77}{25}$;

Ответ: $a = 1$, $y = \frac{1}{3} = x$; $a = -\frac{27}{25}$, $x = -\frac{77}{25}$, $y = \frac{19}{25}$.

6.1.D02. а) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \le 36 - a^2 \\ (x+2)^2 \le 36 \end{cases}$. $\begin{cases} y^2 + (x-a)^2 \le 36 \\ x \in [-8;\ 4] \end{cases}$;

$y^2 + (x - a)^2 \le 36$ — окружность с центром в $(a; 0)$ и радиусом 6.
Т.о. $S = 36\pi$, а нам необходимо, чтобы $S = 18\pi$. Т.о. нам надо взять полуокружности, а т.к. $x \in [-8; 4]$, то $a = 4$, $a = -8$.
Ответ: $a = 4$; $a = -8$.

б) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \le 4 - a^2 \\ (x+1)^2 \le 25 \end{cases}$. $\begin{cases} y^2 + (x-a)^2 \le 4 \\ x \in [-6;\ 4] \end{cases}$;

$y^2 + (x - a)^2 \le 4$ — окружность с центром в $(a; 0)$ и радиусом 2, т.о. $S=4\pi$, а нам надо, чтобы $S = 2\pi \Rightarrow$ надо взять полуокружности, а т.к. $x \in [-6; 4]$, то $a = -6$, $a = 4$.
Ответ: $a = -6$, $a = 4$.

6.1.D03. а) $(x - 6a)^2 + (x - 2a)^2 = 128$,

$x^2 - 8ax + 20a^2 - 64 = 0$; $\frac{D}{4} = 16a^2 - 20a^2 + 64 = 64 - 4a^2$; $x_{1,2} = 4a \pm 2\sqrt{16 - a^2}$;

$x_{1,2}$ должны быть симметричны относительно $x = 12 \Rightarrow$
$a = 3$, $x_1 = 12 - 2\sqrt{7}$, $x_2 = 12 + 2\sqrt{7}$.
Ответ: $a = 3$.
б) $(x - 2a)^2 + (x - 4a)^2 = 242$.

$x^2 - 6ax + 10a^2 - 121 = 0$; $\frac{D}{4} = 9a^2 - 10a^2 + 121 = 121 - a^2$;

$x_{1,2} = 3a \pm \sqrt{121 - a^2}$;
$x_{1,2}$ должны быть симметричны относительно $x = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -1$, $x_1 = -3 - \sqrt{120}$, $x_2 = -3 + \sqrt{120}$. Ответ: $a = -1$.

6.1.D04. а) $bx^2 - 3x + 1 = 0$. $D = 9 - 4b$.

Условия для существования двух корней: $D > 0$, $9 - 4b > 0$, $b < \frac{9}{4}$;

по теореме Виета: $(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2$; $x_1x_2 = \frac{1}{6}$;

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{9}{b^2} - \frac{4}{b}$, т.о.

$\frac{9 - 4b}{9 - 4b} \cdot b^2 = 8b - 7$;

$b^2 - 8b + 7 = 0$; $b_1 = 7$; $b_2 = 1$.

Условию $b < \frac{9}{4}$ удовлетворяет только $b = 1$. Ответ: $b = 1$.

б) $bx^2 + 3x + 5 = 0$. $D = 9 - 20b$;
по теореме Виета:

$(x_1 + x_2)^2 = \frac{9}{b^2}$; $x_1x_2 = \frac{5}{b}$;

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{9}{b^2} - \frac{20}{b}$;

$\frac{9-20b}{9-20b} \cdot b^2 = 5b + 6$;

$b^2 - 5b - 6 = 0$; $b_1 = 6$; $b_2 = -1$; Ответ: $b_1 = -1$; $b_2 = 6$.

6.1.D05. а) $x^2 - (14a - 9)x + 49a^2 - 63a + 20 = 0$.

$D = 196a^2 - 252a + 81 - 80 - 196a^2 + 252a = 1$; $x_{1,2} = \frac{14a - 9 \pm 1}{2}$;

больший корень: $x_2 = 7a - 4 < 9$; $a < \frac{13}{7}$; Ответ: $a < \frac{13}{7}$.

б) $x^2 - (14a - 3)x + 49a^2 - 21a + 2 = 0$.
$D = 196a^2 - 84a + 9 - 196a^2 + 84a - 8 = 1$;

больший корень: $x_2 = \frac{14a - 3 + 1}{2} = 7a - 1 < -8$;

$7a < -7$, $a < -1$. Ответ: $a < -1$.

6.1.D06.

а) $x^2 - (20a - 3)x + 100a^2 - 30a = 0$.
$D = 400a^2 + 9 - 120a - 400a^2 + 120a = 9$;

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{20a - 3 + 3}{20a - 3 - 3} = 6$;

$20a = 120a - 36$; $100a = 36$; $a = 0{,}36$.
Ответ: a= 0,36.

б) $x^2 - (8a - 7)x + 16a^2 - 28a = 0$.
$D = 64a^2 - 112a + 49 - 64a^2 + 112a = 49$;

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{8a - 7 + 7}{8a - 7 - 7} = 10$;

$8a = 80a - 140$; $72a = 140$; $a = \frac{35}{18}$.

Ответ: $a = \frac{35}{18}$.

6.1.D07.

а) $9(3x - 1)a^2 - (21x - 19)a + 2(x - 1) = 0$.
$x(27a^2 - 21a + 2) = 2 - 19a + 9a^2$;
$27a^2 - 21a + 2 = 0$;
$D = 441 - 216 = 225$;

$a_{1,2} = \frac{21 \pm 15}{54}$; $a_1 = \frac{1}{9}$; $a_2 = \frac{2}{3}$;

$9a^2 - 19a + 2 = 0$;
$D = 361 - 72 = 289$;

$a_{1,2} = \frac{19 \pm 17}{18}$; $a_1 = \frac{1}{9}$; $a_2 = 2$;

Ответ: $a = \frac{1}{9}$ — бесконечно много решений;

$a = \frac{2}{3}$ — решений нет;

$a \neq \frac{1}{9}$, $a \neq \frac{2}{3}$ — одно решение.

б) $2(4x - 1)a^2 - (14x - 11)a + 5(x - 1) = 0$.
$x(8a^2 - 14a + 5) = 2a^2 - 11a + 5$;
$8a^2 - 14a + 5 = 0$;

$\frac{D}{4} = 49 - 40 = 9$; $a_1 = \frac{5}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$;

$2a^2 - 11a + 5 = 0$; $D = 121 - 40 = 81$; $a_1 = 5$, $a_2 = \frac{1}{2}$;

Ответ: $a = \frac{1}{2}$ — бесконечно много решений;

$a = \frac{5}{4}$ — нет решений;

$a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq \frac{5}{4}$ — одно решение.

6.1.D08.

а) $|4x + 9a + 5| = |10x + 8a - 3|$.

1) $4x + 9a + 5 = 10x + 8a - 3$; $6x = a + 8$; $x = \frac{a}{6} + \frac{4}{3}$;

2) $4x + 9a + 5 = -10x - 8a + 3$; $14x = -2 - 17a$; $x = -\frac{1}{7} - \frac{17a}{14}$.

Корни равноудалены от точки x = 5, если их среднее арифметическое равно 5.

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{6} + \frac{4}{3} - \frac{1}{7} - \frac{17a}{14}\right) = 5$;

$\frac{a}{6} - \frac{17a}{14} + \frac{25}{21} = 10$;

$-22a + 25 = 210$;

$a = -\frac{185}{22}$;

Ответ: $a = -\frac{185}{22}$.

б) $|10x + 7a - 5| = |3x + 2a - 1|$.
1) $10x + 7a - 5 = 3x + 2a - 1$;
$7x = 4 - 5a$;

$x = \frac{4 - 5a}{7}$;

2) $10x + 7a - 5 = 1 - 2a - 3x$;
$13x = -9a + 6$;
$x = \frac{-9a+6}{13}$;
Корни равноудалены от точки x = –7, если их среднее аоифметическое равно –7.
$\frac{1}{2}\left(\frac{-9a+6}{13}+\frac{4-5a}{7}\right)=-7$;
$\frac{-63a+42+52-65a}{91}=-14$;
$-128a = -1368$;
$a = \frac{171}{16}$.
Ответ: $a = \frac{171}{16}$.

6.1.D09.

а) $\begin{cases}(2a^2-7a)x-25y=2a^2-9a-50\\6x-5y+3=0\end{cases}$.

$\begin{cases}5y=6x+3\\x(2a^2-7a)-30x-15=2a^2-9a-50\end{cases}$;
$x(2a^2 - 7a - 30) = 2a^2 - 9a - 35$;
$2a^2 - 7a - 30 = 0$;
$D = 49 + 240 = 289$; $a_1 = -\frac{5}{2}$; $a_2 = 6$;
$2a^2 - 9a - 35 = 0$;
$D = 81 + 280 = 361$; $a_1 = -\frac{5}{2}$; $a_2 = \frac{28}{4}$;
Итого: при $a = -\frac{5}{2}$ система имеет бесконечное множество решений.
Ответ: $a = -\frac{5}{2}$.

б)
$\begin{cases}(5a^2-27a)x+16y=5a^2-32a+6\\5x-8y-3=0\end{cases}$.
$x(5a^2 - 27a + 10) = 5a^2 - 32a + 12$;
$5a^2 - 27a + 10 = 0$;
$D = 729 - 200 = 529$; $a_1 = 0{,}6$; $a_2 = 5$;
$5a^2 - 32a + 12 = 0$;
$D = 1024 - 240 = 784$; $a_1 = 0{,}4$; $a_2 = 6$;
Итого: при $a = 0{,}4$ система имеет бесконечное множество решений.
Ответ: a = 0,4.

6.1.D10. а) $x^2 + 3x + 7a - 21 = 0$ и $x^2 + 6x + 5a - 6 = 0$.
$D = 93 - 28a$;
$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{93 - 28a}}{2}$;
$x^2 + 6x + 5a - 6 = 0$;
$\frac{D}{4} = 15 - 5a$; $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{15 - 5a}$;
1) $-3 - \sqrt{93 - 28a} = -6 - \left(\sqrt{15 - 5a}\right) \cdot 2$;
$2\sqrt{15 - 5a} + 3 = \sqrt{93 - 28a}$;
$3\sqrt{15 - 5a} = 6 - 2a$; $4a^2 + 21a - 99 = 0$;
$a_1 = 3$; $a_2 = -\frac{33}{4}$.
2) $-3 - \sqrt{93 - 28a} = -6 + \left(\sqrt{15 - 5a}\right) \cdot 2$;
$2\sqrt{15 - 5a} - 3 = -\sqrt{93 - 28a}$;
$3\sqrt{15 - 5a} = 2a - 6$;
$a_1 = 3$; $a_2 = -\frac{33}{4}$.
3) $-3 + \sqrt{93 - 28a} = -6 + \left(\sqrt{15 - 5a}\right) \cdot 2$;
$102 - 28a + 6\sqrt{93 - 28a} = (15 - 5a) \cdot 4$;
$6\sqrt{93 - 28a} = -42 + 8a$;
нет решений, т.к. $a \le 3$;
4) $-3 + \sqrt{93 - 28a} = -6 - \left(\sqrt{15 - 5a}\right) \cdot 2$;
$3 + \sqrt{93 - 28a} = -\left(\sqrt{15 - 5a}\right) \cdot 2$;
нет решений.
Ответ: $a_1 = -\frac{33}{4}$; $a_2 = 3$.
б) $x^2 + 4x - 3a + 7 = 0$ и $x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$.
$\frac{D}{4} = 4 + 3a - 7 = 3a - 3$;
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3a - 3}$;
$x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$;
$D = 49 - 60 + 20a = 20a - 11$;
$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{20a - 11}}{2}$;
1) $-4 - 2\sqrt{3a - 3} = -7 - \sqrt{20a - 11}$.
$3 + \sqrt{20a - 11} = 2\sqrt{3a - 3}$;

$9+20a-11+6\sqrt{20a-11}=12a-12$;

$6\sqrt{20a-11}=-8a-10$;

нет решений, т.к. $a \ge \frac{11}{20}$.

2) $-4-2\sqrt{3a-3}=-7+\sqrt{20a-11}$.

$9=12a-12+20a-11+4\sqrt{3a-3}\sqrt{20a-11}$;

$32-32a=4\sqrt{60a^2-93a+33}=12a-12$;

$4a^2-35a+31=0$;

$D=1225-496=729$; $a=\frac{35\pm27}{8}$; $a_1=1$; $a_2=\frac{31}{4}$;

3) $-4+2\sqrt{3a-3}=-7+\sqrt{20a-11}$.

$9+12a-12+12\sqrt{3a-3}=20a-11$;

$12\sqrt{3a-3}=8a-8$;

$27a-27=4a^2-8a+4$;

$4a^2-35a+31=0$;

то же самое.

4) $-4+2\sqrt{3a-3}=-7-\sqrt{20a-11}$;

нет решений, т.к. корень ≥ 0.

Ответ: $a_1=1$, $a_2=\frac{31}{4}$.

6.1.D11. а) $\begin{cases} x+5y=-5 \\ (x+8y)^2-12ax-96ay+45a^2+66a+121=0 \end{cases}$.

$x=-5y-5$;

$9y^2-30y+25+60ay+60a-96ay+45a^2+66a+121=0$;

$9y^2-6y(5+6a)+45a^2+126a+146=0$;

$(3y-5-6a)^2+9a^2+66a+121=0$;

$9a^2+66a+181=0$; $\frac{D}{4}=1089-1089=0$; $a=\frac{-33}{9}=-\frac{11}{3}$;

Ответ: $a=-\frac{11}{3}$.

б) $\begin{cases} x-2y=5 \\ (x+2y)^2-18ax-36ay+85a^2+20a+25=0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x=5+2y \\ 16y^2+40y+25-90a-36ay-36ay+85a^2+20a+25=0 \end{cases}$;

$16y^2+8y(5-9a)+85a^2-70a+50=0$;

$\frac{D}{4}=4a^2+20a+25$; $\frac{D}{4}=0$;

$4a^2+20a+25=0$; $a=\frac{-5}{2}$. Ответ: $a=-\frac{5}{2}$.

6.1.D12. а) $x^2 + 6x + a^2 = x^2 - ax + 36$.
$x(6 + a) = 36 - a^2$, т.е. $a \neq -6$;
$x = 6 - a > a^2$;
$a^2 + a - 6 < 0$;
$a \in (-3; 2)$. Ответ: $a \in (-3; 2)$.
б) $x^2 + 8x + 4a^2 = x^2 + 2ax + 64$.
$x(8 - 2a) = 64 - 4a^2$, т.к. $a \neq 4$;
$x = 8 + 2a \leq a^2$;
$a^2 - 2a - 8 \geq 0$;
$a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$;
но $a \neq 4 \Rightarrow a \in (-\infty; -2] \cup (4; +\infty)$. Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup (4; +\infty)$.

§ 2. Рациональные функции

6.2.D01. а) $\dfrac{7}{x^2+8x} = \dfrac{7a}{x}$. ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -8$;
$7x = 7ax^2 + 56xa$;
$ax^2 + 8xa - x = 0$;
$x = \dfrac{1-8a}{a} > 0$;
$a \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.
Ответ: $a \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.
б) $\dfrac{8}{x^2+3x} = \dfrac{4a}{x}$.
ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -3$;
$2x = ax^2 + 3ax$, т.к. $x \neq 0$, $a \neq 0$;
$x = \dfrac{2-3a}{a} > 0$;
$a \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$.
Ответ: $a \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$.

6.2.D02. а) $\dfrac{2x}{x+5a} = 5a$
$\dfrac{10a}{x+5a} = x$. ОДЗ: $x \neq -5a$;
$x(2 - 5a) = 25a^2$;
$a \neq \dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \dfrac{25a^2}{2-5a}$;
$\dfrac{10a(2-5a)}{25a^2+10a-25a^2} = \dfrac{25a^2}{2-5a}$;

$(2-5a)^2=(5a)^2$; $a=0{,}2$;
Ответ: $a=0{,}2$.

б) $\frac{3x}{x+2a}=2a$

$\frac{6a}{x+2a}=x$. ОДЗ: $x\neq -2a$;

$3x=2ax+4a^2$;

$x(3-2a)=4a^2$;

$a\neq\frac{3}{2}$;

$x=\frac{4a^2}{3-2a}$;

$\frac{6a(3-2a)}{4a^2+6a-4a^2}=\frac{4a^2}{3-2a}$;

$(2a)^2=(3-2a)^2$; $a=\frac{3}{4}=0{,}75$;

Ответ: $a=0{,}75$.

6.2.D03.

а) $\frac{6}{x}=\frac{1}{6}ax$

$\frac{7}{x-a}=\frac{1}{6}ax$. ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq a$;

$\frac{6}{x}=\frac{7}{x-a}$;

$6x-6a=7x$;

$x=-6a$;

$\frac{6}{-6a}=\frac{1}{6}\cdot a\cdot(-6a)$;

$-\frac{1}{a}=-a^2$; $a=1$; Ответ: $a=1$.

б) $\frac{7}{x}=-\frac{3}{7}ax$

$\frac{8}{x+3a}=-\frac{3}{7}ax$. ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq -3a$;

$\frac{7}{x}=\frac{8}{x+3a}$;

$7x+21a=8x$;

$x=21a$;

$\frac{1}{3a}=-\frac{3}{7}\cdot a\cdot 21a$;

$\frac{1}{3a}=-9a^2$, т.к. $a\neq 0$;

$27a^3 = -1,\ a = -\frac{1}{3}$;

Ответ: $a = -\frac{1}{3}$.

6.2.D04. а) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - (a-4)x - 4a} < 0$.

$x^2 + x - 12 = 0$;
$x = -4, x = 3$;
$x^2 - (a - 4)x - 4a = 0$;
$D = a^2 - 8x + 16 + 16a$;

$x_{1,2} = \frac{a - 4 \pm (a+4)}{2}$; $x_1 = a, x_2 = -4$;

$\frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-a)} < 0$ при $a < -4$, $x \in (a; -4) \cup (-4; 3)$;

Ответ: а < –4.

б) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - (a-1)x - a} < 0$.

$x^2 - (a - 1)x - a = 0$;
$D = (a + 1)^3$, $x_1 = a$, $x_2 = -1$;

$\frac{(x-6)(x+1)}{(x-a)(x+1)} < 0$ при $a < -1$, $x \in (a; -1) \cup (-1; 6)$;

Ответ: $a < -1$.

6.2.D05. а) $\frac{x^2 - (a+6)x + 6a}{x^2 - (a-3)x - 3a} < 0$.

По теореме Виета получаем:

$\frac{(x-a)(x-6)}{(x-a)(x+3)} < 0$, при $a \in (-3; 6)$ $x \in (-3; a) \cup (a; 6)$;

Ответ: $a \in (-3; 6)$.

б) $\frac{x^2 - (a-1)x - a}{x^2 - (a-5)x - 5a} < 0$.

По теореме Виета получаем:

$\frac{(x-a)(x+1)}{(x-a)(x+5)} < 0$, при $a \in (-5; 21)$ $x \in (-5; a) \cup (a; -1)$;

Ответ: $a \in (-5; -1)$.

6.2.D06. а) $\frac{6}{x-a} > a$.

$\frac{6 - ax + a^2}{x-a} > 0$;

$\frac{ax - a^2 - a}{x-a} < 0$;

$a = 0$, $\frac{6}{x} > 0$, $x > 0$;

$a \neq 0$, $a > 0$, т.к. $\frac{a^2+6}{a} > a$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{a^2+6}{a}\right) \cup (a;\ +\infty)$;

Ответ: $a = 0$, $x > 0$;

$a > 0$, $x \in \left(a;\ \frac{a^2+6}{a}\right)$; $a < 0$, $x \in \left(-\infty;\ \frac{a^2+6}{a}\right) \cup (a;\ +\infty)$.

б) $\frac{5}{x-4a} > 4a$.

$\frac{4ax-16a^2-5}{x-4a} < 0$;

$a = 0$: $-\frac{5}{x} < 0$, $x > 0$;

$a \neq 0$: $a > 0$, т.к. $\frac{16a^2+5}{4a} > 4a$, то $x \in \left(4a;\ \frac{16a^2+5}{4a}\right)$;

$a < 0$, т.к. $\frac{16a^2+5}{4a} < 4a$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{16a^2+5}{4a}\right) \cup (4a;\ +\infty)$;

Ответ: $a = 0$, $x > 0$;

$a > 0$, $x \in \left(4a;\ \frac{16a^2+5}{4a}\right)$; $a < 0$, $x \in \left(-\infty;\ \frac{16a^2+5}{4a}\right) \cup (4a;\ +\infty)$.

6.2.D07.

а) $\frac{3}{ax+a} > \frac{1}{5}$.

$\frac{15-ax-a}{(ax+a)5} > 0$;

$\frac{ax+a-15}{5(ax+a)} < 0$;

При $a = 0$ решений нет.

При $a < 0$, $x \in \left(-1+\frac{15}{a};\ -1\right)$.

При $a > 0$, $x \in \left(-1;-1+\frac{15}{a}\right)$.

Ответ: а = 0 — решений нет; $a < 0$ $x \in \left(-1+\frac{15}{a};\ -1\right)$; $a > 0$ $x \in \left(-1;-1+\frac{15}{a}\right)$.

б) $\frac{1}{ax-a} > \frac{3}{4}$.

$\frac{4-3ax+3a}{(ax-a)}>0$; ОДЗ: $a \neq 0$, $x \neq 1$;

$\frac{x-\frac{3a+4}{3a}}{x-1}<0$;

$a > 0$, $x \in \left(1;\ \frac{3a+4}{3a}\right)$; $a< 0$, $x \in \left(\frac{3a+4}{3a};\ 1\right)$;

Ответ: $a = 0$ — решений нет;

$a > 0$ $x \in \left(1;\ \frac{3a+4}{3a}\right)$; $a < 0$ $x \in \left(\frac{3a+4}{3a};\ 1\right)$.

6.2.D08.

а) $g(x)=\frac{2x^2+7x+7}{12x^2-(9b-8)x+12}>0$.

$12x^2 - (9b - 8)x + 12 = 0$;

$D = 81b^2 - 144b + 64 - 576 < 0$;

$81b^2 - 144b - 512 < 0$;

$\frac{D}{4} = 5184 + 41472 = 46656$;

$b \in \left(\frac{72-216}{81};\ \frac{72+216}{81}\right)$; $b \in \left(-\frac{16}{9};\ \frac{32}{9}\right)$;

Т.к. числитель всегда > 0, то при $b \in \left(-\frac{16}{9};\ \frac{32}{9}\right)$ $g(x) > 0$.

Ответ: $b \in \left(-\frac{16}{9};\ \frac{32}{9}\right)$.

б) $g(x)=\frac{12x^2+3x+5}{2x^2-(10b-9)x+2}>0$.

Т.к. числитель > 0 всегда, то $g(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - (10b - 9)x + 2$;

$D = 100b^2 - 180b + 81 - 16 < 0$;

$100b - 180b + 65 < 0$;

$\frac{D}{4} = 8100 - 6500 = 1600$;

$b \in \left(\frac{1}{2};\ 1{,}3\right)$.

Ответ: $b \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{13}{10}\right)$.

6.2.D09.

а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2a \\ \frac{5}{x}+\frac{12}{y}=1-3a \end{cases}$. Пусть $\begin{cases} \frac{1}{x}=m \\ \frac{2}{y}=n \end{cases}$;

$\begin{cases} m+n=2a \\ 5m+6n=1-3a \end{cases}$;

$\begin{cases} n=1-13a \\ m=15a-1 \end{cases}$;

$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=15a-1 \\ \dfrac{2}{y}=1-13a \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{15a-1} \\ y=\dfrac{2}{1-13a} \end{cases}$; $a \neq \dfrac{1}{15}$; $a \neq \dfrac{1}{13}$;

Ответ: $a \neq \dfrac{1}{15}$, $a \neq \dfrac{1}{13}$.

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{cases}$.

$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=m \\ \dfrac{1}{y}=n \end{cases}$;

$\begin{cases} m+n=4a \\ 4m+5n=1-a \end{cases}$;

$\begin{cases} n=1-17a \\ m=21a-1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1-17a} \\ y=\dfrac{1}{21a-1} \end{cases}$; $a \neq \dfrac{1}{17}$; $a \neq \dfrac{1}{21}$.

Ответ: $a \neq \dfrac{1}{17}$, $a \neq \dfrac{1}{21}$.

6.2.D10. а) $\dfrac{(x-a-4)(x-4a-16)}{(x+a)(5x+2a)} \leq 0$.

нули: $x_1 = a + 4$, $x_2 = 4a + 16$;

$x_3 = -a$, $x_4 = -\dfrac{2a}{5}$.

Чтобы в решение входила изолированная точка, нули числителя должны совпадать.

$a + 4 = 4a + 16 \Leftrightarrow a = -4$;

Получаем неравенство: $\dfrac{x^2}{(x-4)(5x-8)} \leq 0$.

$x \in \{0\} \cup \left(\frac{8}{5};\ 4\right)$.

Ответ: $a = -4$.

б) $\frac{(x-a-1)(x-2a-2)}{(x+2a)(3x+2a)} \le 0$.

нули: $x_1 = a + 1$, $x_2 = 2a + 2$, $x_3 = -2a$, $x_4 = -\frac{2a}{3}$;

Чтобы в решение входила изолированная точка, нули числителя должны совпадать.

$a + 1 = 2a + 2 \Leftrightarrow a = -1$;

Получаем неравенство: $\frac{x^2}{(x-2)(3x-2)} \le 0$.

$x \in \{0\} \cup \left(\frac{2}{3};\ 2\right)$. Ответ: $a = -1$.

6.2.D11. а) $\begin{cases} x-3y=a \\ x-2y=-1+a \end{cases}$ и $\begin{cases} \frac{1}{x+3y} = -\frac{1}{4} \\ x-3y=a^2-a \end{cases}$.

$\begin{cases} y=-1 \\ x=a-3 \end{cases}$;

$\begin{cases} \frac{1}{a-3-3} = -\frac{1}{4} \\ a-3+3=a^2-a \end{cases}$;

$\begin{cases} \frac{1}{a-6} = -\frac{1}{4} \\ a^2-2a=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} a-6=-4 \\ a=0,\ a=2 \end{cases}$; Решения совпадают при $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

б) $\begin{cases} 4x+y=2a \\ \frac{1}{x-4y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$ и $\begin{cases} (x-6y)^{-1} = -\frac{1}{10} \\ 7x-2y=2a \end{cases}$.

$\begin{cases} 4x+y=2a \\ x-4y=-6 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=\frac{8a-6}{17} \\ y=\frac{2a+24}{17} \end{cases}$;

$$\begin{cases}\frac{8a-6}{17}-\frac{12a+144}{17}=-10\\ \frac{56a-42}{17}-\frac{4a+48}{17}=2a\end{cases};$$

$$\begin{cases}-4a-150=-170\\ 52a-90=34a\end{cases};$$

$\begin{cases}4a=20\\ 18a=90\end{cases}$; Решения совпадают при $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

6.2.D12. а) $\frac{x^2+4x+9}{x^2+5x+9}=a$.

$x^2 - ax^2 + 4x - 5ax + 9 - 9a = 0$;
$x^2(1 - a) + x(4 - 5a) + 9 - 9a = 0$;
1) $a = 1$; $-x = 0$; $x = 0$;
2) $a \neq 1$;
$D = 25a^2 - 40a + 16 - (9 - 9a)(1 - a)4 =$
$25a^2 - 40a + 16 - 36(1 - a)^2 \geq 0$;
$(5a - 4)^2 \geq 36(a - 1)^2$;
$11a^2 - 32a + 20 \leq 0$;

$a\in\left[\frac{10}{11};\ 2\right]$;

Ответ: $a\in\left[\frac{10}{11};\ 2\right]$.

б) $\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+2}=a$.

$x^2(1 - a) - 2x(1 - a) - 1 - 2a = 0$;
При $a = 1$ решений нет;
$\frac{D}{4}=1 - 2a + a^2 + (1 - a)(2a + 1) \geq 0$;
$-a^2 - a + 2 \geq 0$;
$a^2 + a - 2 \leq 0$;
$a \in [-2; 1]$, но при $a = 1$ решений нет, значит, $a \in [-2; 1)$.
Ответ: $a \in [-2; 1)$.

§ 3. Иррациональные функции

6.3.D01. а) $\sqrt{5ax+3a}=5x+3$.

$x\geq-\frac{3}{5}$;

$25x^2 + x(-5a + 30) + 9 - 3a = 0$;
$D = 900 + 25a^2 - 300a - 900 + 300a = 0$;
$a = 0$.
Ответ: $a = 0$.

б) $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$.

$x\ge -\frac{5}{3}$;

$9x^2 + x(30 - 3a) + 25 - 5a = 0$;

$D = 900 - 180a + 9a^2 - 900 + 180a = 9a^2 = 0$;

$a = 0 \Rightarrow$ при $a = 0$ одно решение.

Ответ: $a = 0$.

6.3.D02. а) $(x-a+4)\sqrt{x+3a-2}\le 0$. ОДЗ: $x \ge 2 - 3a$;

$\begin{cases} x\le a-4 \\ x\ge 2-3a \end{cases}$;

$a - 4 \ge 2 - 3a$;

$a\ge \frac{3}{2}$;

$a - 4 - 2 + 3a = |a|$;

$4a - 6 = a$, т.к. $a > 0$;

$a = 2$; Ответ: $a = 2$.

б) $(x-3a-2)\sqrt{x+3a-5}\le 0$.

$\begin{cases} x\ge 5-3a \\ x\le 3a+2 \end{cases}$;

$3a + 2 \ge 5 - 3a$;

$a\ge \frac{3}{7}$;

$3a - 2 - 5 + 3a = |a|$;

$6a - 3 = a$, т.к. $a > 0$;

$a=\frac{3}{5}$;

Ответ: $a=\frac{3}{5}$.

6.3.D03. а) $\sqrt{4a^2-x^2}\ge |x-2a|$.

$4a^2 - x^2 \ge (x - 2a)^2$; $(x - 2a)^2 + (x - 2a)(x + 2a) \le 0$;

$(x - 2a)(x + 2a + x - 2a) \le 0$;

$2a(x - 2a) \le 0$;

$a = 0$;

Ответ: $a = 0$.

б) $\sqrt{3a^2-x^2}\ge |x+a|$.

$3a^2 - x^2 \ge (x + a)^2$;

$2x^2 + 2ax - 2a^2 \le 0$;

$x^2 + ax - a^2 \le 0$;

$D = a^2 + 4a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$;

Ответ: $a = 0$.

6.3.D04.

а) $(x+4a)\sqrt{x-4a-32}=0$.

$\begin{cases} x=-4a \\ x=4a+32 \end{cases}$;

Нам необходимо, чтобы получилось одно решение, чтобы
$4a + 32 \geq -4a \Rightarrow a \geq -4$.
Ответ: $a \geq -4$.

б) $(x+3a)\sqrt{x-2a-25}=0$.

$\begin{cases} x=-3a \\ x=2a+25 \end{cases}$;

Чтобы был один корень, необходимо, чтобы
$2a + 25 \geq -3a$;
$a \geq -5$;
Ответ: $a \geq -5$.

6.3.D05. а) $(ax^2 - (a^2 + 1)x + a)\sqrt{x+4} = 0$.

1) $a = 0$; $-x\sqrt{x+4}=0$ — подходит;
2) $a \neq 0$;
Необходимо, чтобы меньший корень квадратного уравнения был
≤ -4, т.о.:
$ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$;
$D = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 = (a^2 - 1)^2$;

$x_{1,2}=\dfrac{a^2+1\pm(a^2-1)}{2a}$; $x_1 = a$; $x_2=\dfrac{1}{a}$;

$a = \pm 1$ — подходит.

$a \leq -4$; $\dfrac{1}{a}\leq -4$; $a\in\left[-\dfrac{1}{4};\ 0\right)$;

Ответ: $a = 0$; $a = \pm 1$; $a \leq -4$; $a\in\left[-\dfrac{1}{4};\ 0\right)$.

б) $(ax^2 - (a^2 + 12)x + 12a)\sqrt{x+5} = 0$.

1) $a = 0$; $-12x\sqrt{x+5}$ — подходит;
2) $a \neq 0$;
Необходимо, чтобы меньший корень квадратного уравнения был ≤ -5.
$ax^2 - (a^2 + 12)x + 12a = 0$;
$D = a^4 + 24a^2 + 144 - 48a^2 = (a^2 - 12)^2$;

$x_1 = a$; $x_2=\dfrac{12}{a}$;

$a=\pm 2\sqrt{3}$ — подходит.

$a \leq -5$; $\dfrac{12}{a}\leq -5$;

$\frac{12+5a}{a}$; $a \in \left[-\frac{12}{15};\ 0\right)$;

Ответ: $a \le -5$; $a = \pm 2\sqrt{3}$; $a \in \left[-\frac{12}{15};\ 0\right)$.

6.3.D06.

а) $\sqrt{x^2+7x} - x = \frac{a}{4}$.

$x^2 + 7x = x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{16}$;

$x\left(7-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{16}$;

$a \ne 14$;

$x = \frac{a^2}{8(14-a)} \ge 0$;

$a \in [0;\ 14)$;

$\frac{a^2}{8(14-a)} \le -7$;

$\frac{a^2-56a+784}{14-a} \le 0$;

$\frac{(a-28)^2}{14-a} \le 0$;

$a \in (14;\ +\infty)$;

Ответ: $a \in [0;\ 14) \cup (14;\ +\infty)$.

б) $\sqrt{x^2+8x} = x + \frac{a}{2}$.

$x^2 + 8x = x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}$;

$x\left(8-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$;

$a \ne 16$;

$x = \frac{a^2}{2(16-a)} \ge 0$;

$a \in [0;\ 16)$;

$\frac{a^2}{16-a} \le -4$;

$\frac{a^2-4a+64}{16-a} \le 0$; $a > 16$;

Ответ: $a \in [0;\ 16) \cup (16;\ +\infty)$.

6.3.D07. а) $(x+a-1)\sqrt{x-3a} \le 0$.

$$\begin{cases} x = 1-a \\ x = 3a \\ x \ge 3a \end{cases};$$

Чтобы был один корень, необходимо, чтобы $1 - a < 3a$; $a > \frac{1}{4}$.

Ответ: $a > \frac{1}{4}$.

б) $(x-a-4)\sqrt{x-4a} \le 0$.

$$\begin{cases} x = a+4 \\ x = 4a \\ x \ge 4a \end{cases};$$

Чтобы был один корень, необходимо, чтобы $a + 4 < 4a \Rightarrow a > \frac{4}{3}$.

Ответ: $a > \frac{4}{3}$.

6.3.D08. а) $(x+a+1)\sqrt{x-4a+3} \le 0$.

Чтобы решением был отрезок, необходимо, чтобы $x + a + 1 = 0$ при $x \ge -3 + 4a \Rightarrow x = -a - 1 \ge -3 + 4a \Rightarrow a \le \frac{2}{5}$.

При $a = \frac{2}{5}$ отрезок превращается в точку.

Ответ: $a < \frac{2}{5}$.

б) $(x+a+2)\sqrt{x-a-1} \le 0$.

Чтобы решением был отрезок, необходимо, чтобы $x + a + 2 = 0$ при $x \ge a + 1 \Rightarrow x = -a - 2 \ge a + 1 \Rightarrow a \le -\frac{3}{2}$.

При $a = -\frac{3}{2}$ отрезок превращается в точку. Ответ: $a < -\frac{3}{2}$.

6.3.D09. а) $(x-14a-5)\sqrt{x^2-4a^2} \ge 0$

Решение этого неравенства можно записать в виде

$$\begin{cases} x \ge 14a+5 - \text{луч} \\ x \notin (-2|a|, 2|a|) \end{cases}$$

Решением будет объединение луча и точки, не принадлежащей лучу, если $14a+5=-2|a|$

т.е. $a = -\frac{5}{12}$;

б) $(x-6a-1)\sqrt{x^2-a^2} \geq 0$

Аналогично, решение этого неравенства выглядит так:

$\begin{cases} x \geq 6a+1 \\ x \in (-\infty, -|a|] \cup [|a|, +\infty) \end{cases}$

Оно будет объединением луча и точки, не лежащей на этом луче: если
$6a+1=-|a|$

Итак, $a = -\frac{1}{5}$.

6.3.D10. а) $\sqrt{7x^2+2ax-5a^2} = x+a$.
$7x^2 + 2ax - 5a^2 = x^2 + 2ax + a^2$;
$x \geq -a$;
$6x^2 - 6a^2 = 0$;
$x = \pm a$;

$\begin{cases} x = \pm a \\ x \geq -a \end{cases}$; $a \geq -a \Leftrightarrow a \geq 0$.

Если $a = 0$, то решения совпадают, значит, $a > 0$.
Ответ: $a > 0$.

б) $\sqrt{5x^2+6ax-27a^2} = x+3a$.
$x \geq -3a$;
$4x^2 = 36a^2$;
$x = \pm 3a$;

$\begin{cases} x = \pm 3a \\ x \geq -3a \end{cases}$; $3a \geq -3a \Leftrightarrow a \geq 0$.

Если $a = 0$, то решения совпадают, значит, $a > 0$.
Ответ: $a > 0$.

6.3.D11. а) $\sqrt{x^2-4ax-7a} = 3-x$.
$x \leq 3$;
$x^2 - 4ax - 7a = x^2 + 9 - 6x$;
$x(6 - 4a) = 9 + 7a$;

При $a = \frac{3}{2}$ — нет решений.

Если $a \neq \frac{3}{2}$, то $x = \frac{7a+9}{6-4a}$. При $x = \frac{7a+9}{6-4a} < 3$ — нет решений.

$a \in \left(\frac{9}{19}; \frac{3}{2}\right)$ Ответ: $a \in \left(\frac{9}{19}; \frac{3}{2}\right]$.

б) $\sqrt{x^2-5ax-7a} = 2-x$.
$x \leq 2$;
$x(4 - 5a) = 7a + 4$;

$a = \frac{4}{5}$ — нет решений;

$a \neq \frac{4}{5}$;

$x = \frac{7a+4}{4-5a} > 2$;

$\frac{17a-4}{5a-4} < 0$;

$a \in \left(\frac{4}{17}; \frac{4}{5}\right)$ — нет решений.

Ответ: $a \in \left(\frac{4}{17}; \frac{4}{5}\right]$.

6.3.D12.

а) $\sqrt{25-x^2} = x - a$.

$x \geq a$;

$2x^2 - 2ax + a^2 - 25 = 0$;

$\frac{D}{4} = a^2 - 2a^2 + 50 = 0$

$a = \pm 5\sqrt{2}$

Т.к. функция $y = \sqrt{25-x^2}$ и прямая $y = x + 5$ имеют 2 точки пересечения, то из рисунка видно, что одно решение будет при $a = -5\sqrt{2}$, $a \in (-5; 5]$.

Ответ: $a = -5\sqrt{2}$, $a \in (-5; 5]$.

б) $\sqrt{9-x^2} = x - 2a$.

$x \geq 2a$.

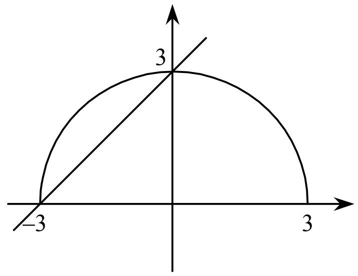
$2x^2 - 4ax + 4a^2 - 9 = 0$;

$\frac{D}{4} = 4a^2 - 8a^2 + 18 = 18 - 4a^2 = 0$;

$a = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$;

$a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ отпадает при подстановке.

Т.к. функция $y=\sqrt{9-x^2}$ и $y = x + 3$ имеют 2 точки пересечения, то из рисунка видно, что одно решение будет при $a\in\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.



Ответ: $a=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $a\in\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

§ 4. Тригонометрические функции.

6.4.D01. а) $\cos^4 2x - 2(a + 2)\cos^2 2x - (2a + 5) = 0$.

$\frac{D}{4} = a^2 + 4a + 4 + 2a + 5 = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$;

$\cos^2 2x = a + 2 \pm (a + 3)$;

$\cos^2 2x = 2a + 5$;

$0 \le 2a + 5 \le 1$;

$-5 \le 2a \le -4$;

$-2{,}5 \le a \le -2$;

$\cos^2 2x = -1$ — решений нет;

Ответ: $a \in [-2{,}5; -2]$.

б) $\cos^4 3x - 2(a + 1)\cos^2 3x - (2a + 3) = 0$;

$\frac{D}{4} = a^2 + 2a + 1 + 2a + 3 = (a + 2)^2$;

$\cos^2 3x = a + 1 + a + 2$;

$0 \le 2a + 3 \le 1$;

$-3 \le 2a \le -2$;

$\cos^2 3x = -1$ — решений нет;

Ответ: $a\in\left[-\frac{3}{2};\ -1\right]$.

6.4.D02. а) $(15\sin x - a - 5)(15\sin x + 2a - 5) = 0$.

$\sin x=\frac{a+5}{15}$;

$-1\le\frac{a+5}{15}\le 1$;

$-15 \le a + 5 \le 15$;

$-20 \le a \le 10$;

$\sin x = \frac{5-2a}{15}$;

$-1 \le \frac{5-2a}{15} \le 1$;

$-15 \le 5 - 2a \le 15$;
$-10 \le 2a \le 20$;
$-5 \le a \le 10$;
Ответ: $a \in [-5; 10]$ — 2 решения на $[0; 2\pi]$.

б) $(11\sin x - 3a - 5)(11\sin x + 4a + 3) = 0$.

$\sin x = \frac{3a+5}{11}$;

$-11 \le 3a + 5 \le 11$;
$-16 \le 3a \le 6$;

$-\frac{16}{3} \le a \le 2$;

$\sin x = \frac{-3-4a}{11}$;

$-11 \le 3 + 4a \le 11$;
$-14 \le 4a \le 8$;

$-\frac{7}{2} \le a \le 2$;

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{2};\ 2\right]$ — 2 решения на $[0; 2\pi]$.

6.4.D03.

а) $\frac{\mathrm{tg}^2 x + 7}{3\mathrm{tg}x + 1} = a$.

$\mathrm{tg}^2 x - 3a\mathrm{tg}x - a + 7 = 0$;
$D = 9a^2 + 4a - 28 \ge 0$;

$\frac{D}{4} = 4 + 252 = 256$;

$a \in (-\infty;\ -2] \cup \left[\frac{14}{9};\ +\infty\right)$;

Ответ: $a \in (-\infty;\ -2] \cup \left[\frac{14}{9};\ +\infty\right)$.

б) $\frac{\mathrm{tg}^2 x + 45}{7\mathrm{tg}x + 2} = a$.

$\mathrm{tg}^2 x - 7a\mathrm{tg}x + 45 - 2a = 0$;
$D = 49a^2 + 8a - 180 \ge 0$;

$\frac{D}{4} = 16 + 8820$;

$a \in (-\infty;\ -2) \cup \left(\frac{90}{49};\ +\infty\right)$;

Ответ: $a \in (-\infty;\ -2) \cup \left(\frac{90}{49};\ +\infty\right)$.

6.4.D04. а) $3\cos^2 x - (3a + 10)\cos x + 10a = 0$.
$D = 9a^2 + 60a + 100 - 120a = (3a - 10)^2$;

$\cos x = \frac{3a + 10 + 3a - 10}{6} = a$;

$\cos x = \frac{20}{3}$ — решений нет;

$a > 1$ или $a < -1$;
Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
б) $2\cos^2 x - (2a + 9)\cos x + 9a = 0$.
$D = 4a^2 + 36a + 81 - 72a = (2a - 9)^2$;
$\cos x = a$;

$\cos x = -\frac{9}{2}$;

при $a < -1$ или $a > 1$ — решений нет.
Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
6.4.D05. а) $-2\sin^2 x = (a^2 + 5a + 2)\sin x$.
$\sin x(a^2 + 5a + 2 + 2\sin x) = 0$;
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in Z$.
На отрезке $[0; 2\pi]$ лежат $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

$\sin x = \frac{-(a^2 + 5a + 2)}{2}$.

Значения, которые функция $y = \sin x$ принимает на отрезке $[0; 2\pi]$ единственный раз, равны -1 и 1.

Если $-\frac{a^2 + 5a + 2}{2} = -1$, то $a^2 + 5a = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -5 \end{array}\right.$.

Если $-\frac{a^2 + 5a + 2}{2} = 1$, то $a^2 + 5a + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -4 \end{array}\right.$.

Ответ: $0; -1; -4; -5$.
б) $-20\sin^2 x = (a^2 + 13a + 20)\sin x$.
$\sin x(a^2 + 13a + 20 + 20\sin x) = 0$;
$\sin x = 0$ — на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет 3 корня.

Тогда уравнение $\sin x = -\frac{a^2 + 13a + 20}{20}$ должно иметь 1 корень на отрезке $[0; 2\pi]$. Значения, которые функция $y = \sin x$ принимает на отрезке $[0; 2\pi]$ единственный раз, равно 1 и -1.

Если $-\frac{a^2 + 13a + 20}{20} = -1$, то $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -13 \end{array}\right.$.

Если $-\frac{a^2+13a+20}{20}=1$, то $\left[\begin{array}{l} a=-5 \\ a=-8 \end{array}\right.$.

Ответ: 0; –5; –8; –13.

6.4.D06. а) $4\sin^2(3x+8) \geq 49a^2 + 84a + 40$.

$0 \leq 49a^2 + 84a + 40 \leq 4$;

$49a^2 + 84a + 36 \leq 0$; $\frac{D}{4} = 1764 - 1764 = 0$; $a=-\frac{42}{49}=-\frac{6}{7}$;

Ответ: $a=-\frac{42}{49}=-\frac{6}{7}$.

б) $8\sin^2(13x-2) \geq 25a^2 + 10a + 9$.

$25a^2 + 10a + 9 \leq 8$; $25a^2 + 10a + 1 \leq 0$; $(5a+1)^2 \leq 0$;

$a=-\frac{1}{5}$; Ответ: $a=-\frac{1}{5}$.

6.4.D07. а) $\sqrt{7\cos(6x+7)+32}=-20+10a-a^2=-(a-5)^2+5$.

т.к. $\sqrt{7\cos(6x+7)+32} \geq 5$, а $-(a-5)^2 + 5 \leq 5 \Rightarrow a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

б) $\sqrt{10\cos(5x+1)+19}=-13+8a-a^2=-(a-4)^2+3$.

т.к. $\sqrt{10\cos(5x+1)+19} \geq 3$, а $3-(a-4)^2 \leq 3 \Rightarrow a = 4$.

Ответ: $a = 4$.

6.4.D08. а) $\left(x-\frac{5\pi}{8}\right)(x-10\pi)\sqrt{a^2+23a+131+\cos\frac{8x}{5}}=0$.

Подставим $x=\frac{5\pi}{8}$ в корень (подкоренное выражение должно быть меньше 0):

$a^2 + 23 + 130 < 0$;

$a \in (-13; -10)$.

Теперь подставим 10π

$a^2 + 23a + 132 \geq 0$;

$(a + 11)(a + 12) \geq 0$;

$\left[\begin{array}{l} a \geq -11 \\ a \leq -12 \end{array}\right.$. Ответ: $a \in (-13; -12] \cup [-11; -10)$.

б) $\left(x-\frac{2\pi}{11}\right)(x-4\pi)\sqrt{a^2-a-81+9\cos\frac{11x}{2}}=0$.

Необходимо, чтобы при $x=\frac{2\pi}{11}$ подкоренное выражение было меньше 0 $\Rightarrow$

$a^2 - a - 90 < 0$;

$a \in (-9; 10)$.

При $x = 4\pi$

$a^2 - a - 81 + 9 = a^2 - a - 72 \geq 0$;

$(a-9)(a+8) \geq 0$;

$\left[\begin{array}{l} a \leq -8 \\ a \geq 9 \end{array}\right.$. Ответ: $a \in (-9; -8] \cup [9; 10)$.

6.4.D09. а) $(4x-5\pi)\sqrt{a^2\cos\frac{8x}{5}+12a+20} \leq 0$.

Т.о. необходимо, чтобы при $x = \frac{5\pi}{4}$ подкоренное выражение было меньше 0

$\Rightarrow a^2 + 12a + 20 < 0$;

$a \in (-10; -2)$.

Ответ: $a \in (-10; -2)$.

б) $(13x-3\pi)\sqrt{a^2\cos\frac{26x}{3}-a-42} \leq 0$.

Т.о. необходимо, чтобы при $x = \frac{3\pi}{13}$ подкоренное выражение было меньше 0

$\Rightarrow a^2 - a - 42 < 0 \Rightarrow a \in (-6; 7)$.

Ответ: $a \in (-6; 7)$.

6.4.D10. а) $\cos 24x + 2(8+5a)\sin 12x - 110a + 65 = 0$.

$\sin^2 12x - (8+5a)\sin 12x + 55a - 33 = 0$;

$D = 64 + 80a + 25a^2 - 220a + 132 = 25a^2 - 140a + 196 = (5a-14)^2$;

$\sin 12x = 11$ — нет решений;

$\sin 12x = 5a - 3 \in [-1; 1]$;

$2 \leq 5a \leq 4$;

$a \in [0{,}4; 0{,}8]$.

Ответ: $a \in [0{,}4; 0{,}8]$.

б) $\cos 26x + 2(4+11a)\sin 13x - 154a + 41 = 0$.

$2\sin^2 13x - 2(4+11a)\sin 13x + 154a - 42 = 0$;

$\frac{D}{4} = 121a^2 + 88a + 16 - 308a + 84 = 121a^2 - 220a + 100 = (11a-10)^2$;

$\sin 13x = 11a - 3 \in [-1; 1]$;

$\sin 13x = 7$ — нет решений;

$2 \leq 11a \leq 4$;

$\frac{2}{11} \leq a \leq \frac{4}{11}$.

Ответ: $a \in \left[\frac{2}{11}; \frac{4}{11}\right]$.

6.4.D11. а) $\frac{19\sin x + 17}{7\sin x + 9} = a$.

$\sin x(19-7a) = 9a - 17$; $a = \frac{19}{7}$ — решений нет; $a = \frac{19}{7}$;

$\sin x = \frac{9a-17}{19-7a}$;

$$\begin{cases}\dfrac{9a-17}{19-7a}\le 1\\ \dfrac{9a-17}{19-7a}\ge -1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{16a-36}{7a-19}\ge 0\\ \dfrac{2a+2}{7a-19}\le 0\end{cases};\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\le \dfrac{9}{4}\\ a>\dfrac{19}{7}\end{array}\right.\\ a\in\left[-1;\ \dfrac{19}{7}\right)\end{cases};$$

Ответ: $a\in\left[-1;\ \dfrac{9}{4}\right]$.

б) $\dfrac{18\sin x+17}{17\sin x+18}=a$.

$\sin x(18-17a)=18a-17$;

$a=\dfrac{18}{17}$ — решений нет; $a\ne\dfrac{18}{17}$;

$\sin x=\dfrac{18a-17}{18-17a}\in[-1;\ 1]$;

$$\begin{cases}\dfrac{18a-17}{18-17a}\ge -1\\ \dfrac{18a-17}{18-17a}\le 1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{a+1}{17a-18}\le 0\\ \dfrac{35a-35}{18-17a}\le 0\end{cases};\quad \begin{cases}a\in\left[-1;\ \dfrac{18}{17}\right)\\ a\in(-\infty;\ 1]\cup\left(\dfrac{18}{17};\ +\infty\right)\end{cases};$$

Ответ: $a\in[-1;\ 1]$.

6.4.D12.

а) $\begin{cases}24\cos^2 x+11\cos^2 y=10a-17\\ 33\cos^2 x+8\cos^2 y=28a-59\end{cases}$.

$$\begin{cases}57\cos^2 y=-114a+285\\ 171\cos^2 x=228a-513\end{cases};\quad \begin{cases}\cos^2 x=\dfrac{4}{3}a-3\\ \cos^2 y=-2a+5\end{cases};$$

Система имеет хотя бы одно решение, если: $\begin{cases}0\le\dfrac{4}{3}a-3\le 1\\ 0\le -2a+5\le 1\end{cases}$; $\dfrac{9}{4}\le a\le\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $\dfrac{9}{4}\le a\le\dfrac{5}{2}$.

б) $\begin{cases}21\cos^2 x+11\cos^2 y=9a-8\\ 33\cos^2 x+7\cos^2 y=45a-64\end{cases}$.

$$\begin{cases}72\cos^2 y=-216a+360\\ 216\cos^2 x=432a-648\end{cases};$$

$$\begin{cases}0<-216a+360\le 72\\ 0<432a-648\le 216\end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \le a \le \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \le a \le 2 \end{cases}; \ \frac{3}{2} \le a \le \frac{5}{3}.$$

Ответ: $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right]$.

§ 5. Показательная функция

6.5.D01. а) $5^{2x} + (5a^2 + a + 4)5^x - (a + 2) = 0$.

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -a - 2$.

Чтобы было одно решение, необходимо, чтобы один корень был меньше 0 $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -a - 2 < 0$; $a > -2$, при данном a $D > 0 \Rightarrow$ корни $\exists$. Ответ: $a > -2$.

б) $81^x + (4a^2 + 3a + 4)9^x - 2a + 3 = 0$.

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -2a + 3$, чтобы было одно решение, необходимо, чтобы один корень был меньше 0 $\Rightarrow x_1x_2 = -2a + 3 < 0$, $a > \frac{3}{2}$ при данном a $D > 0 \Rightarrow$ корни $\exists$.

Ответ: $a > \frac{3}{2}$.

6.5.D02. а) $49^x - (8a - 1)7^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$.

$D = 64a^2 - 16a + 1 - 64a^2 + 16a + 8 = 9$;

$7^x = 4a - 2$; $7^x = 4a + 1$;

$$\begin{cases} 4a - 2 \le 0 \\ 4a + 1 > 0 \end{cases}; \ \begin{cases} a \le \frac{1}{2} \\ a > -\frac{1}{4} \end{cases};$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

б) $36^x - (8a + 5)6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$.

$D = 64a^2 + 80a + 25 - 64a^2 - 80a + 56 = 81$;

$6^x = 4a + 7$; $6^x = 4a - 2$;

$$\begin{cases} 4a + 7 > 0 \\ 4a - 2 \le 0 \end{cases}; \ \begin{cases} a > -\frac{7}{4} \\ a \le \frac{1}{2} \end{cases};$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

6.5.D03. а) $\begin{cases} 6^{x-a-3} \le 36^{x-a+4} \\ 4^{x-2a-2} \ge 16^{x-3a+3} \end{cases}$.

$$\begin{cases} x - a + 11 \ge 0 \\ x - 4a + 8 \le 0 \end{cases};$$

$x \in [a - 11; 4a - 8]$;
$4a - 8 - a + 11 = 3$;
$a = 0$.
Ответ: $a = 0$.

б) $\begin{cases} 2^{x+4a+2} \le 4^{x+a+4} \\ 3^{x-a-3} \ge 9^{x+3a-1} \end{cases}$.

$\begin{cases} x+6-2a \ge 0 \\ x+7a+1 \le 0 \end{cases}$;

$x \in [2a - 6; -7a - 1]$;
$-7a - 1 - 2a + 6 = 1$;
$9a = 4$; $a = \frac{4}{9}$.

Ответ: $a = \frac{4}{9}$.

6.5.D04

а) $9^x - (7a - 1)3^x + 12a^2 - a - 6 \le 0$.
$D = 49a^2 - 14a + 1 - 48a^2 + 4a + 24 = a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$, чтобы неравенство превратилось в равенство, необходимо, чтобы $D = 0 \Rightarrow a = 5$.
Ответ: a = 5.

б) $4^x - (5a - 1)2^x + 6a^2 - a - 2 \le 0$.
$D = 25a^2 - 10a + 1 - 24a^2 + 4a + 8 = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$, чтобы неравенство превратилось в равенство, необходимо, чтобы $D = 0 \Rightarrow a = 3$.
Ответ: a = 3.

6.5.D05. а) $64^x - 8^x(8^{5a-2} + 8^{4a-3}) + 8^{9a-5} = 0$.
Пусть $y = 8^x$. $y^2 - y(8^{5a-2} + 8^{4a-3}) + 8^{9a-5} = 0$.
По теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} y = 8^{5a-2} \\ y = 8^{4a-3} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = 5a-2 \\ x = 4a-3 \end{array}\right.$;

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5a-2}{4a-3} = 3$; $7a = 7$; $a = 1$;

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4a-3}{5a-2} = 3$; $11a = 3$; $a = \frac{3}{11}$.

Ответ: $a = 3$; $a = \frac{3}{11}$.

б) $49^x - 7^x(7^{3a+2} + 7^{2a+4}) + 7^{5a+6} = 0$.
По теореме Виета $7^{x_1} = 7^{3a+2}$; $7^{x_2} = 7^{2a+4}$;

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3a+2}{2a+4} = 4$; $5a = -14$; $a = -\frac{14}{5}$;

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2a+4}{3a+2} = 4$; $10a = -4$; $a = -0{,}4$.

Ответ: $a = -2{,}8$; $a = -0{,}4$.

6.5.D06. а) $\frac{12\cdot 16^x+11}{2-13\cdot 16^x}=a$.

$16^x(12 + 13a) = 2a - 11$;

$a=-\frac{12}{13}$ — решений нет, $a\neq-\frac{12}{13}$;

$16^x=\frac{2a-11}{12+13a}\leq 0$;

$a\in\left(-\frac{12}{13};\ \frac{11}{2}\right]$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{12}{13};\ \frac{11}{2}\right]$.

б) $\frac{3\cdot 15^{x+1}+8}{3-10\cdot 15^x}=a$.

$15^x(45 + 10a) = 3a - 8$;

$a = -4,5$ — решений нет,

$a \neq -4,5$;

$15^x=\frac{3a-8}{45a+10}\leq 0$;

$a\in\left(-\frac{9}{2};\ \frac{8}{3}\right]$;

Ответ: $a\in\left(-\frac{9}{2};\ \frac{8}{3}\right]$.

6.5.D07.

а) $(x^2+2x-3)\sqrt{6^{x^2+2x-3}-14a+a^2+44}=0$.

Чтобы $x = 1$ и $x = -3$ не являлись решениями, необходимо, чтобы при них подкоренное выражение было меньше 0.

$a^2 - 14a + 45 < 0$;

$a \in (5; 9)$.

Ответ: a ∈ (5; 9).

б) $(x^2-2x-3)\sqrt{5^{x^2-2x-3}+a^2+4a-33}=0$.

Чтобы $x = 3$ и $x = -1$ не являлись решениями, необходимо, чтобы при них подкоренное выражение было меньше 0.

$a^2 + 4a - 32 < 0$;

$a \in (-8; 4)$.

Ответ: a ∈ (–8; 4).

6.5.D08.

а) $\begin{cases}3^x+2^y=3^{49a^2+1}+2^{1-14a}\\3^x-2^y=3^{49a^2+1}-2^{1-14a}\end{cases}$. $\begin{cases}x=49a^2+1\\y=1-14a\end{cases}$;

$z = x + y = 49a^2 - 14a + 2$ — это парабола, ветви направлены вверх

$\Rightarrow a_{\min} = a_b = \dfrac{1}{7}$;

$z(a_{\min}) = 1 - 2 + 2 = 1$.

Ответ : $a = \dfrac{1}{7}$.

б) $\begin{cases} 5^x + 9^y = 5^{a^2+25} + 9^{-14-10a} \\ 5^x - 9^y = 5^{a^2+25} - 9^{-14-10a} \end{cases}$. $\begin{cases} x = a^2 + 25 \\ y = -14 - 10a \end{cases}$;

$z = x + y = a^2 - 10a + 11$ — это парабола, ветви направлены вверх

$\Rightarrow a_{\min} = a_b = 5$. Ответ: $a = 5$.

6.5. D09. а) $(4^x - 64)(2^x - 128)(8^x - 8^{2a})(7^x - 7^{2a+4}) \le 0$.

Нули: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 2a \\ x_4 = 2a + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x_1 = 2a = 3 \\ x_4 = x_2 = 2a + 4 = 7 \end{cases}$; $a = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $a = \dfrac{3}{2}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

б) $(7^x - 49)(5^x - 1)(2^x - 2^{5a})(4^x - 4^{5a-2}) \le 0$.

Нули: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5a \\ x_4 = 5a - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x_1 = 5a = 2 \\ x_4 = x_2 = 5a - 2 = 0 \end{cases}$; $a = \dfrac{2}{5}$. Ответ: $a = \dfrac{2}{5}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

6.5. D10. а) $4^{49x^2 - 70x + 26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$.

Левая часть уравнения ≥ 4 (т. к. $49x^2 - 70x + 26 \ge 1$).

Правая часть уравнения ≤ 4 (т. к. $-(81a^2 + 72a + 13) \le 3$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} 4^{(7x-5)^2+1} = 4 \\ 3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7x-5)^2 = 0 \\ \cos 14\pi x = 1 \\ (9a+4)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ равенство достигается при $a = -\dfrac{4}{9}$, $x = \dfrac{5}{7}$. Ответ: $a = -\dfrac{4}{9}$, $x = \dfrac{5}{7}$.

б) $14^{25x^2 - 10x + 2} = \cos 10\pi x - 36a^2 - 60 - 12$.

Левая часть уравнения ≥ 14 (т. к. $25x^2 - 10x + 2 \ge 1$),

правая часть уравнения ≤ 14 (т. к. $-(36a^2 + 60a + 12) \le 13$

$\Rightarrow$ равенство достигается при $a = -\dfrac{5}{6}$, $x = \dfrac{1}{5}$. Ответ: $a = -\dfrac{5}{6}$, $x = \dfrac{1}{5}$.

6.5. D11. а) $\left(3a^2 - 10a + 3\right)^2 + \left(3^{x^2+x} - 243a\right)^2 = 0$.

Сумма квадратов равна 0 $\Leftrightarrow$ каждый из них = 0 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3a^2-10a+3=0 \\ 3^{x^2+x}=3^5a \end{cases};$$

При $a = 3$: $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

При $a=\frac{1}{3}$: $x^2 + x - 4 = 0$, $D = 1 + 16 = 17$; $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: при $a = 3$, $x = 2$, $x = -3$, при $a=\frac{1}{3}$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

б) $(2a^2 - 5a + 2)^2 + (2^{x^2+2x} - 128a)^2 = 0$.

Сумма квадратов равна 0 $\Leftrightarrow$ каждый из них равен 0 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2a^2-5a+2=0 \\ 2^{x^2+2x}=2^7a \end{cases};$$

При $a = 2$: $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 2$.

При $a=\frac{1}{2}$: $x^2 + 2x - 6 = 0$; $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{7}$.

Ответ: при $a = 2$ $x = 2$ $x = -4$; при $a=\frac{1}{2}$ $x=-1\pm\sqrt{7}$.

6.5.D12. а) $\begin{cases} 81^{x-2}\le 9^{8b+13} \\ 36^{x+2}\ge 6^{8b+15} \end{cases}$. $\begin{cases} 2x\le 8b+17 \\ 2x\ge 8b+11 \end{cases}$;

$x\in\left[4b+\frac{11}{2};\ 4b+\frac{17}{2}\right]$;

т.к. корни симметричны относительно 1 $\Rightarrow$ $\begin{cases} 1+k=4b+\frac{17}{2} \\ 1-k=4b+\frac{11}{2} \end{cases}$;

$2 = 8b + 14$; $b=-\frac{3}{2}$.

Ответ: $b=-\frac{3}{2}$.

б) $\begin{cases} 36^{x-1}\le 6^{11b+6} \\ 81^{x+1}\ge 9^{11b+7} \end{cases}$. $\begin{cases} 2x\le 11b+8 \\ 2x\ge 11b+5 \end{cases}$;

$x\in\left[\frac{11b}{2}+\frac{5}{2};\ \frac{11b}{2}+4\right]$;

т.к. корни симметричны относительно 7 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 7+k=\frac{11b}{2}+4 \\ 7-k=\frac{11b}{2}+\frac{5}{2} \end{cases};$$

$14 = 11b + 6\frac{1}{2}$;

28 = 22b + 13;

$b = \frac{15}{22}$. Ответ: $b = \frac{15}{22}$.

§ 6. Логарифмическая функция

6.6.D01. а) $\log_{0,5}(ax^2 - (a+1)x + 6) = \log_{0,5}(3x^2 - (a+1)x + 2a)$.

$x^2(a-3) = 2a - 6$;

т.к. при $a = 3$ бесконечно много решений, а при остальных a их $\le 2 \Rightarrow$

Ответ: $a = 3$.

б) $\log_{0,1}(ax^2 - (a-4)x + 4) = \log_{0,1}(4x^2 - (a-4)x + a)$.

$x^2(a-4) = a - 4$;

т.к. при $a = 4$ бесконечно много решений, а при остальных a их $\le 2 \Rightarrow$

Ответ: $a = 4$.

6.6.D02. а) $2 + \log_2(x - 3a - 4) \le \log_2(-x - 2a - 21)$.

Сначала решим при всех a: $4x - 12a - 16 \le -x - 2a - 21$; $5x \le 10a - 5$;

$\begin{cases} x \le 2a - 1 \\ x > 3a + 4 \\ x < -2a - 21 \end{cases}$;

$3a + 4 < -2a - 21$;

$a < -5$ — ОДЗ;

$2a - 1 > 3a + 4$;

$a < -5$;

т.о. решения нет при $a \ge -5$. Ответ: $a \ge -5$.

б) $1 + \log_3(x - a + 2) \le \log_3(-x - 7a + 22)$.

Сначала решим при всех a: $3x - 3a + 6 \le -x - 7a + 22$; $4x \le -4a + 16$;

$\begin{cases} x \le 4 - a \\ x > a - 2 \\ x < 22 - 7a \end{cases}$; $\begin{cases} a - 2 < 22 - 7a \\ 4 - a > a - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a < 3 \\ a < 3 \end{cases}$.

Т.о. решений нет при $a \ge 3$.

Ответ: $a \ge 3$.

6.6.D03. а) $(4x + 2a - 3)(x - 2a + 3)\log_4 x = 0$.

нули: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2a - 3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4} \end{cases}$;

$x > 0$;

1) $\begin{cases} 2a - 3 > 0 \\ -\frac{a}{2} + \frac{3}{4} \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a > \frac{3}{2} \\ a \ge \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a > \frac{3}{2}$;

2) $\begin{cases} 2a-3 \le 0 \\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{4} > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a \le \frac{3}{2} \\ a < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a < \frac{3}{2}$;

но т.к. должны быть 2 различных решения $\Rightarrow$ при $a = 1$ $x_1 = x_2 = 1$,
$x_3 < 0 \Rightarrow$ не подходит $\Rightarrow$

Ответ: $a \ne 2$, $a \ne -\frac{1}{2}$, $a \ne \frac{3}{2}$.

б) $(7x + a + 2)(x - a - 2)\log_7 x = 0$.

нули: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = a+2 \\ x_3 = \frac{-a-2}{7} \end{cases}$;

$x > 0$;

1) $\begin{cases} a+2 > 0 \\ -a-2 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a > -2 \\ a \ge -2 \end{cases} \Rightarrow a > -2$;

2) $\begin{cases} -a+2 \le 0 \\ -a-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a < -2$;

но т.к. должны быть 2 различных решения $\Rightarrow x_2 = 1$ $x_3 = 1$ не подходит $\Rightarrow$
Ответ: $a \ne 2$, $a \ne -1$, $a \ne -9$.

6.6.D04. а) $a\log_4^2 x - (2a + 3)\log_4 x + 6 \le 0$.
$x > 0$;
1) $a = 0$; $-3\log_4 x + 6 \le 0$, не одно решение;
2) $a \ne 0$;
$D = 4a^2 + 12a + 9 - 24a = (2a - 3)^2 = 0 \Rightarrow$

одно решение при $a = \frac{3}{2}$. Ответ: $a = \frac{3}{2}$.

б) $a\log_2^2 x - (3a - 2)\log_2 x - 6 \le 0$.
1) $a = 0$; $2\log_2 x - 6 \le 0$, много решений;
2) $a \ne 0$;
$D = 9a^2 + 4 - 12a + 24a = (3a + 2)^2 = 0 \Rightarrow$

одно решение будет при $a = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$.

6.6.D05. а) $(\lg^2 x - 4a\lg x + 3a^2)^2 + (a^2 - a - 6)^2 = 0$.
сумма квадратов равна 0 $\Leftrightarrow$ каждый член из этой суммы равен 0 $\Rightarrow$

$\begin{cases} \lg^2 x - 4a\lg x + 3a^2 = 0 \\ a^2 - a - 6 = 0 \end{cases}$;

При $a = 3$: $\lg^2 x - 12\lg x + 27 = 0$; $\lg x = 3$; $\lg x = 9$.
При $a = -2$: $\lg^2 x + 8\lg x + 12 = 0$; $\lg x = -6$; $\lg x = -2$ю

Ответ: При а = 3, $x = 1000$; $x = 10^9$; при а = –2, $x = \frac{1}{10^2}$; $x = \frac{1}{10^6}$; при других а — решений нет.

б) $(\lg^2 x + 3a\lg x + 2a^2)^2 + (a^2 - 2a - 3) = 0$.
сумма квадратов равна 0 $\Leftrightarrow$ каждый из членов этой суммы равен 0 $\Rightarrow$

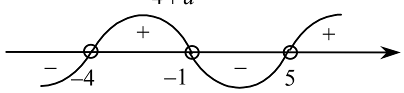
$$\begin{cases} \lg^2 x + 3a\lg x + 2a^2 = 0 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases};$$

При $a = 3$: $\lg^2 x + 9\lg x + 18 = 0$; $\lg x = -3$; $\lg x = -6$.
При $a = -1$: $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$; $\lg x = 2$; $\lg x = 1$.
Ответ: если а = –1, то х = 100; х = 10;
если а = 3, то х = 10^{-6}; х = 10^{-3};
при других а решений нет.

6.6.D06.

а) $4\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x - (a^2 - 4a - 5) = 0$.
1) $a = -4$ — нет решений.
2) $a \neq -4$

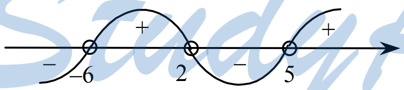
$$\log_7 \sin x = \frac{(a-5)(a+1)}{4+a} \le 0 \ \text{(если } \sin x \in (0;\,1]$$



$a \in (-\infty; -4) \cup [-1; 5]$
Ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 5]$.

б) $6\log_4 \sin x + a\log_4 \sin x - a^2 + 7a - 10 = 0$.
1) $a = -6$ — нет решений.
2) $a \neq -6$

$$\log_4 \sin x = \frac{(a-2)(a-5)}{6+a} \le 0 \ \text{(т.к. } \sin x \in (0;\,1])$$



$a \in (-\infty; -6) \cup [2; 5]$
Ответ: $a \in (-\infty; -6) \cup [2; 5]$.

6.6.D07.

а) $(x - 14)(x - 26)\sqrt{a^2 - 24a\log_{13}(x-13) - 25} \ge 0$.

Чтобы $x = 14$ было решением, а $x = 26$ — не было, необходимо, чтобы подкоренное выражение при $x = 14$ было ≥ 0, а при $x = 26 \le 0$.

$$\begin{cases} a^2 - 24a \cdot \log_{13} 1 - 25 \ge 0 \\ a^2 - 24a - 25 < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a \in (-1;\ 25) \\ \left[\begin{array}{l} a \geq 5 \\ a \leq -5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $a \in [5; 25)$.

б) $(x-16)(x-30)\sqrt{a^2-15a\log_{15}(x-15)-16} \geq 0$.

Чтобы $x = 16$ было решением, а $x = 30$ не было необходимо, чтобы подкоренное выражение при $x = 16$ было ≥ 0, а при $x = 30$ меньше 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-16 \geq 0 \\ a^2-15a-16 < 0 \end{cases};\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq 4 \\ a \leq -4 \end{array}\right. \\ a \in (-1;\ 16) \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $a \in [4; 16)$.

6.6.D08.

а) $\dfrac{13\log_{12}(10x^2+1)+15}{1-3\log_{12}(10x^2+1)} = a$.

$\log_{12}(10x^2+1)(13+3a) = a-15$;

1) $a = -\dfrac{13}{3}$ — решений нет;

2) $a \neq -\dfrac{13}{3}$;

$\log_{12}(10x^2+1) = \dfrac{a-15}{3a+13} \geq 0$ (т.к. $10x^2+1 \geq 1$);

$a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{13}{3}\right) \cup [15;\ +\infty)$;

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{13}{3}\right) \cup [15;\ +\infty)$.

б) $\dfrac{9\log_7(x^2+1)+4}{13-7\log_7(x^2+1)} = a$.

$\log_7(x^2+1)(9+7a) = 13a-4$;

1) $a = -\dfrac{9}{7}$ — решений нет;

2) $a \neq -\dfrac{9}{7}$;

$\log_7(x^2+1) = \dfrac{13a-4}{7a+9} \geq 0$ (т.к. $x^2+1 \geq 1$);

$a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{9}{7}\right) \cup \left[\dfrac{4}{13};\ +\infty\right)$;

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{9}{7}\right) \cup \left[\dfrac{4}{13};\ +\infty\right)$.

6.6.D09. а) $(x^2 - 13x + 42)\log_3(10 + a^2(x - 6) - 7a(x - 6)^2) \le 0$.
Чтобы $x = 6$ — было решение, а $x = 7$ — не было, необходимо, чтобы $10 + a^2(x - 6) - 7a(x - 6)^2$ при $x = 6$ было больше 0, а при $x = 7 \le 0$

$$\begin{cases} 10 > 0 \\ a^2 - 7a + 10 \le 0 \end{cases};$$

$a \in [2; 5]$;
Таким образом $x = 6$ будет всегда решением.
Ответ: $a \in [2; 5]$.
б) $(x^2 - 11x + 30)\log_{12}(88 + a^2(x - 5) - 19a(x - a)^2) \le 0$.
Т.к. $x = 5$ — всегда решение $\Rightarrow$ чтобы $x = 6$ не было решением, необходимо, чтобы:
$88 + a^2(x - 5) - 19a(x - 5)^2 \le 0$ при $x = 6$;
$a^2 - 19a + 88 \le 0$;
$D = 9$;
$a \in [8; 11]$.
Ответ: $a \in [8; 11]$.
6.6.D10. а) $\log_4^2 x - (6a + 23)\log_4 x + 9a^2 + 69a + 132 = 0$.
$D = 36a^2 + 529 + 276a - 36a^2 - 276a - 528 = 1$;
$\log_4 x = 3a + 11$;
$x_1 = 4^{3a+11}$;
$\log_4 x = 3a + 12$;
$x_2 = 4^{3a+12}$;
т.к. x_1 и x_2 симметричны относительно $x = 40 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 40 + k = 4^{3a+12} \\ 40 - k = 4^{3a+11} \end{cases};$$

$80 = 5 \cdot 4^{3a+11}$;
$3a + 11 = 2$;
$a = -3$.
Ответ: a = –3.
б) $\log_{11}^2 x - (10a + 23)\log_{11} x + 25a^2 + 115a + 132 = 0$.
$D = 100a^2 + 529 + 460a - 100a^2 - 460a - 528$;
$\log_{11} x = 5a + 12$;
$x_1 = 11^{5a+12}$;
$\log_{11} x = 5a + 11$;
$x_2 = 11^{5a+11}$;
т.к. x_1 и x_2 симметричны относительно $x = 66 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 66 + k = 11^{5a+12} \\ 66 - k = 11^{5a+11} \end{cases};$$

$132 = 11^{5a+11} \cdot 12$;
$5a + 11 = 1$;
$a = -2$;
Ответ: $a = -2$.

6.6.D11. а) $\log_3 \dfrac{3}{14x^2+3} = x^2 + (5b-1)^2$.

$1 - \log_3(14x^2 + 3) = x^2 + (5b - 1)^2$;

Т.к. левая часть ≤ 0, а правая $\ge 0 \Rightarrow x = 0$, $b = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: при $b = \dfrac{1}{5}$ $x = 0$.

б) $\log_9 \dfrac{9}{10x^2+9} = x^2 + (13b-12)^2$.

$1 - \log_9(10x^2 + 9) = x^2 + (13b - 12)^2$;

Т.к. левая часть уравнения ≤ 0, а правая $\ge 0 \Rightarrow$ решения $\exists$, только при $x = 0$, $b = \dfrac{12}{13}$.

Ответ: при $b = \dfrac{12}{13}$ $x = 0$.

6.6.D12. а) $(2x^2 - (a + 4)x + 2a) \log_2 \dfrac{|x|}{2} \le 0$.

Т.к. $\log_2 \dfrac{|x|}{2} \le 0$ при $x \in [-2;\ 0) \cup (0;\ 2] \Rightarrow$ необходимо, чтобы корни уравнения $2x^2 - (a + 4)x + 2a$ равнялись -2 и 2.

По теореме Виета: $\begin{cases} -4 = a \\ -2 + 2 = a + 4 \end{cases} \Rightarrow a = -4$.

Ответ: $a = -4$.

б) $(4x^2 - (a - 12)x - 3a) \log_4 \dfrac{|x|}{3} \le 0$.

Т.к. $\log_4 \dfrac{|x|}{3} \le 0$ при $x \in [-3;\ 0) \cup (0;\ 3] \Rightarrow$ необходимо, чтобы корни уравнения $4x^2 - (a - 12)x - 3a$ равнялись -3 и 3.

По теореме Виета: $-9 = -\dfrac{3a}{4} \Rightarrow a = 12$. Ответ: $a = 12$.