А.А. Сапожников

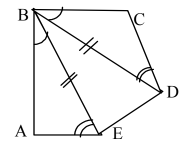
Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 8 класс

к пособию «Б.Г. Зив, В.М. Мейлер. Дидактические материалы по геометрии для 8 класса. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 2002 г.»

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

С-1

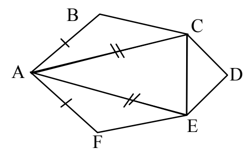
В-1



1. Дано: $BE = BD$, $\angle DBC = \angle ABE$, $\angle AEB = \angle BDC$.
Доказать: $P_{ABDE} = P_{BEDC}$.
Доказательство: Рассмотрим ΔABE и ΔBCD. Они равны по двум углам и стороне между ними. Так что $AB = BC$, $AE = CD$, $BE = BD$, значит: $P_{ABE} = P_{BCD}$. $P_{ABDE} = P_{ABE} + P_{BDE} = P_{BDE} + P_{BCD} = P_{BEDC}$.

2. По формуле: $\alpha = \frac{180^\circ}{n}(n-2) = \frac{180^\circ}{9} \cdot 7 = 140^\circ$.

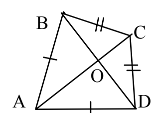
В-2



1. Дано: $AB = AF$, $AC = AE$, $\angle BAC = \angle EAF$.
Доказать: $P_{ABCE} = P_{ACEF}$.
Доказательство: $\Delta ABC = \Delta AEF$ (по двум сторонам и углу между ними). Так что $BC = EF$, $AB = AF$ и $AC = AE$, поэтому $P_{ABC} = P_{AEF}$.
$P_{ABCE} = P_{ABC} + P_{ACE} = P_{AEF} + P_{ACE} = P_{ACEF}$.

2. $\frac{540^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}(n-2) = \alpha$ — (величина каждого угла); $n-2 = 3$, $n = 5$.

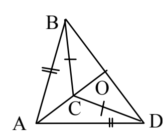
В-3



1. Дано: $AB = AD$, $BC = CD$.
Найти: P_{ABCOD} — ? P_{ABOCD} — ?
Решение: $P_{ABCOD} = AB + BC + CO + OD + DA = 2AB + BC + CO + OD$, $P_{ABOCD} = AB + BO + OC + CD + DA = 2AB + BC + CO + BO$ (т.к. $BC = CD$ и $AB = AD$).
$\Delta ABC = \Delta ACD$ (по трем сторонам), т.к. в равных треугольниках соответствующие элементы равны, то $\angle BAO = \angle OAD$. Тогда $\Delta ABO = \Delta OAD$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = AB$, AO — общая, $\angle BAO = \angle OAD$). Так что $BO = OD$ и $P_{ABCOD} = P_{ABOCD}$.

2. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника:
$n \cdot \left(180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}\right) = 180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 180^\circ \, 2 = 360^\circ$.

В-4



1. Дано: $AB > BC$, $AB = AD$, $BC = CD$.
Сравнить P_{BCODA} и P_{DCOBA}.
Решение:
$P_{BCODA} = BC + CO + OD + DA + AB = BC + 2AD + CO + OD$, $P_{DCOBA} = DC + CO + OB + BA + AD =$

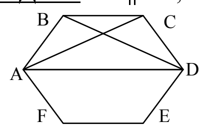
$= BC + 2AD + CO + OB$ (т.к. $AB = AD$ и $DC = BC$). Т.к. $\Delta\, ABC = \Delta\, ACD$ (по трем сторонам), то $\angle BAC = \angle CAD$. $\Delta\, BOA = DO$ по двум сторонам и углу между ними ($BA = AD$, AO — общая, $\angle BAO = \angle OAD$), так что $OB = OD$ и $P_{BCODA} = P_{DCOBA}$.

2. Сумма углов n-угольника $n \cdot \dfrac{180^\circ (n-2)}{n} = 180^\circ\ (n-2)$;

$180^\circ\ (n-2) - 180^\circ\ ((n-1)-2) = 180^\circ$, т.о. не зависит от n.

В-5

1. Дано: $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD = EF = FA$, $\angle BAD = \angle CDA$.



Сравнить P_{ABDEF} и P_{ACDEF}.

Решение:

$P_{ABDEF} = AB + BD + DE + EF + FA = 4AF + BD$,

$P_{ACDEF} = AC + CD + DE + EF + FA = 4AF + AC$

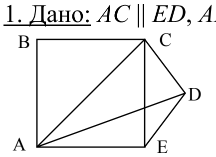
(т.к $AB = DE = EF = CD = AF$). Т.к. $BC \parallel AD$ и $\angle BAD = \angle ADC$ то $ABCD$ – равнобокая трапеция, а у нее диагонали равны, т.о. $AC = BD$, $P_{ABDEF} = P_{ACDEF}$.

2. Сумма углов $2n$-угольника: $180^\circ\ (2n–2)$, т.о. $180^\circ\ (2n - 2) = k \cdot 180^\circ\ (n–2)$,

$k = \dfrac{2n-2}{n-2} = 2 + \dfrac{2}{n-2}$, т.к. k — нечетно и k — целое число, то $k = 3$.

В-6

1. Дано: $AC \parallel ED$, $AB = BC = CD = DE = EA$,



$\angle CAE = \angle ACD$.

Сравнить P_{EABC} и P_{DCBA}.

Решение: $AC \parallel ED$ и $\angle ACD = \angle CAE$, так что $ACDE$ – равнобокая трапеция, т.о. $CE = AD$.

$P_{EABC} = EA + AB + BC + CE = 3AB + CE$, $P_{DCBA} = DC + CB + BA + AD = 3AB + AD = 3AB + CE$ (т.к. $AB = BC = EA = DC$ и $CE = AD$). Так что $P_{EABC} = P_{DCBA}$.

2. $180^\circ\ (n–2) = k \cdot 180^\circ\ (n–3)$, $k = \dfrac{n-2}{n-3} = 1 + \dfrac{1}{n-3}$, т.к. $k \in N$, то $k = 2$.

В-7

1. Рассмотрим произвольный n-угольник (выпуклый), количество диагоналей: из каждой вершины выходит $(n - 3)$ штуки, а так как число вершин n, но каждая диагональ соединяет две вершины, то общее число диагоналей $(n(n-3)) : 2 = 25$, $n^2 - 3n = 50$, $n^2 - 3n - 50 = 0$, $n = (3 \pm \sqrt{209}) : 2$ — не целое число. Значит такого многоугольника не существует.

2. (Из задачи В-3 (2)) сумма внешних углов равна 360°, т.о. может быть только два внешних угла больших 170°, т.о. только два внутренних угла могут быть меньше 10°.

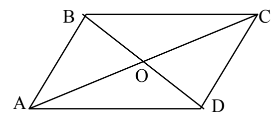
В-8

1. По предыдущей задаче $\frac{n(n-3)}{2} = 27$, n^2–$3n$–$54 = 0$, $n_1 = -6$ и $n_2 = 9$. Так что у 9-угольника 27 диагоналей.

2. Т.к. 5 внутренних углов по 140º, то соответствующие им внешние углы будут по 40º. Т.о. $5 \cdot 40º = 200º$, а $360º - 200º = 160º$ остается на остальные углы, а т.к. они тупые (> 90º), то только один тупой внешний угол у этого многоугольника, т.к. их сумма равна 160º, т.о. $n = 6$.

С-2

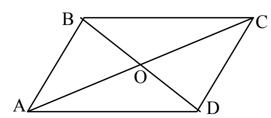
В-1



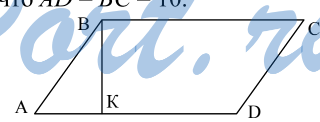
1. Дано: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC = 20$, $BD = 10$, $AB = 13$.
Найти: P_{COD} — ?
Решение: Так как $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, то $ABCD$ – параллелограмм, т.о. $BO = OD = 5$, $AO = OC = 10$, $AB = CD = 13$, т.к. в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, а противоположные стороны равны: $P_{COD} = 13 + 5 + 10 = 28$.

2. Дано: $BK = (1/2)AB$.
Найти: $\angle C$ и $\angle D$ — ?
Решение: ΔABK — прямоугольный, т.к. $BK = (1/2)AB$, то $\angle A = 30°$, а т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $\angle A = \angle C = 30°$, $\angle D = 180° - 30° = 150°$.

В-2

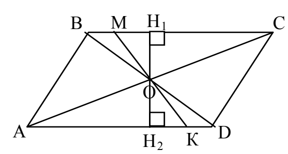


1. Дано: $AB \| CD$, $BC \| AD$, $P_{AOD} = 25$, $AC = 16$, $BD = 14$.
Найти: BC — ?
Решение: Так как $AB \| CD$, $BC \| AD$, то $ABCD$ — параллелограмм, тогда $AO = OC = 8$, $BO = OD = 7$, $AD = BC$, $P_{AOD} = AO + OD + AD = 15 + AD = 25$, так что $AD = BC = 10$.



2. Дано: $AK = BK$.
Найти: $\angle C$ и $\angle D$ — ?
Решение: Т.к. $AK = BK$, то ΔABK равнобедренный и прямоугольный, т.е. $\angle A = 45°$, а т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $\angle A = \angle C = 45°$, а $\angle D = 180° - 45° = 135°$.

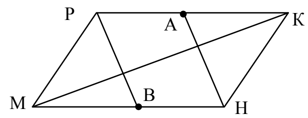
В-3



1. Дано: $\angle A + \angle B = 180°$, $AB \parallel CD$, $BM = KD$.
Доказать: $OM = OK$.
Доказательство: Так как $\angle A + \angle B = 180° \Rightarrow BC \parallel AD$, а т.к. $AB \parallel CD$, то $ABCD$ – параллелограмм. Проведем высоты OH_1 и OH_2.

$\angle BOH_1 = H_2OD$ — как вертикальные, $\angle OBH_1 = H_2OD$ как накрестлежащие при $BC \parallel AD$, $BO = OD$ (по свойству параллелограмма). Значит $\Delta BOH_1 = \Delta OH_2D$ (по стороне и двум прилежащим углам). Так что $BH_1 = \Delta DH_2$ и $OH_1 = OH_2$. Рассмотрим ΔMH_1O и ΔH_2OK. Они равны (т.к. $OH_1 = OH_2$, $H_2K = H_2D - KD = H_1B - BM = H_1M$), т.о. $OM = OK$.

2. Дано: $MP = PB = AK$, $\angle MPB = 60°$.



Найти: $\angle M$, $\angle P$ — ?

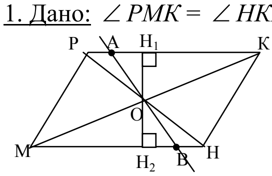
Сравнить: BM и HA.

Решение: Т.к. $MP = PB \Rightarrow \angle M = \angle PBM = \frac{1}{2}(180° - \angle MPB) = 60°$.

Значит ΔMPB — равносторонний и $BM = PB$. $\angle P = 180° - 60° = 120°$. $\angle K == \angle M$ (по свойству параллелограмма), $MP = KH = AK$, т.о. ΔKAH – равносторонний, т.к. $AK = KH$ и $\angle AKH = 60°$, $AK = KH = AH$, т.о. $BM = PB = AK = AH$, т.е. $BM = AH$.

В-4

1. Дано: $\angle PMK = \angle HKM$, $PK \parallel MH$.

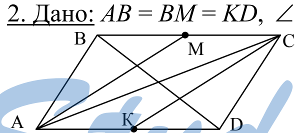


Доказать: $AP = HB$.

Доказательство: Т.к. $\angle PMK = \angle HKM \Rightarrow PM \parallel KH$, т.о. $PKHM$ параллелограмм. Проведем высоты OH_1 и OH_2. Рассмотрим ΔAH_1O и ΔH_2OB.

1. $\angle OAH_1 = \angle OBH_2$ (как накрестлежащие при РК ∥ МН).
2. $\angle H_2OB = \angle H_1OA$ (вертикальные).
3. $\angle OH_1A = \angle BH_2O = 90°$. Т.о. $\Delta AH_1O = \Delta H_2OB$ (по трем углам) $\Rightarrow H_2B = AH_1$, а т.к. $PH_1 = H_2H$ (из предыдущей задачи), т.о. $PA = HB$.

2. Дано: $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30°$.



Найти: $\angle A$ и $\angle B$ — ?

Сравнить: AM и CK.

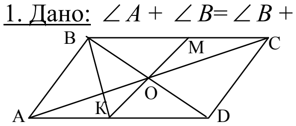
Решение: Задача аналогична предыдущей.

$\angle AMB = \angle BAM = 30°$, $\angle B = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$, $\angle A = 60°$.

$AB = CD$, т.о. $\Delta ABM = \Delta KCD$ (по 2-м сторонам и углу), т.о. $AM = CK$.

В-5

1. Дано: $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$, $\angle BOM = 90°$.

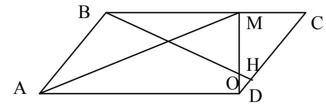


Доказать: $BK = BM$.

Доказательство: Т.к. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ параллелограмм. Рассмотрим ΔBKM, $KO = OM$ (из В-3 (1)), то BO является высотой и медианой $\Rightarrow \Delta BKM$ равнобедренный, т.е. $BK = BM$.

2. Дано: $\angle BHD = 95°$, $\angle DMC = 90°$, $\angle BOD = 155°$.

Найти: AB/MD — ? $\angle A$, $\angle B$ — ?



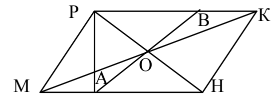
Решение: $\angle DOH = 180° - \angle BOD = 180° - 155° = 25°$, $\angle MDC = 180° - \angle DOH - \angle OHD = 180° - 25° - 95° = 60°$. Т.о. $\angle C = 30°$, $\angle B = 150°$ (по свойству параллелограмма), $\angle A = \angle C = 30°$. Т.о. $MD = (1/2)CD = (1/2)AB$, и $AB/MD = 2$.

В-6

<u>1. Дано:</u> $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle PMK = \angle MKH$, $PB = PA$.

Доказать: $HP \perp AB$.

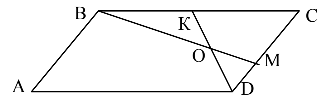
Доказательство: Т.к. $\angle M + \angle P = 180°$, то $MH \| PK$. Т.к. $\angle PMK = \angle MKH \Rightarrow MP \| KH \Rightarrow MPKH$ параллелограмм.



Задача обратная предыдущей. ΔAPB — равнобедренный ($AP = PB$).

$AO = OB$, а т.к. PO – медиана в равнобедренном треугольнике, то она является и высотой. Т.о. $PO \perp AB$ и $PH \perp AB$.

<u>2. Дано:</u> $\angle BOD = 140°$, $\angle DKB = 110°$, $\angle BMC = 90°$.

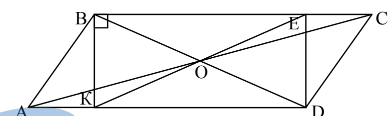


Найти: MC/AD — ? $\angle A$, $\angle B$ — ?

Решение: $\angle BOK = 180° - \angle BOD = 180° - 140° = 40°$, $\angle CBM = 180° - \angle BOK - \angle DKB = 180° - 40° - 110° = 30°$, $\angle C = 180° - \angle BMC - \angle MBC = 180° - 90° - 30° = 60°$, $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$. Т.о. $MC = (1/2)BC = (1/2)AD$, $MC/AD = (1/2)$.

В-7

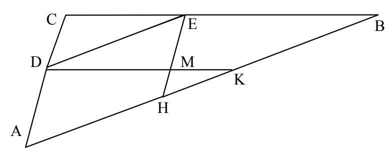
<u>1. Дано:</u> $\angle KBC = 90°$.



Доказать: $BO = OE$.

Доказательство: $\Delta BOE = \Delta KOD$, т.к. $OB = OD$, $KO = OE$ (B-3 (1)), $\angle KOD = \angle BOE$ (как вертикальные). Так что $BE = KD$. $\Delta BKO = \Delta EOD$ ($BO = OD$, $KO = OE$, $\angle BOK = \angle EOD$ (как вертикальные)), так что $BK = ED$. Т.о. $BEDK$ – прямоугольник, а в нем диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, т.о. $BO = OE$.

<u>2.</u> Т.к. $DCEM$ – параллелограмм, то $CD \| EM$, то есть и $AD \| EH$, а $DE \| AH$, значит $ADEH$ — параллелограмм. $KDEB$ – тоже параллелограмм, т.к. $KD \| EB$, $DE \| BK$.



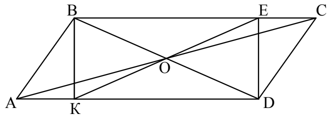
Т.о. $AH = DE$ и $KB = DE$, т.о. $AH = KB$, т.е. $AK = AH + HK = BK + HK = BH$.

В-8

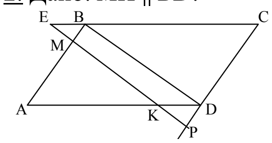
<u>1.</u> Дано: $BO = OE$.

Найти: $\angle KBE$ — ?

Решение: Т.к. $BO = OE$, $BO = OD$, $KO = OE$(В–3(1)), то $EO = OK =$ $= OD = BO$, а $BEDK$ — четырехугольник в котором диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Так что $BEDK$ — прямоугольник, т.о. $\angle KBE = 90°$.



2. Дано: $MK \parallel BD$.



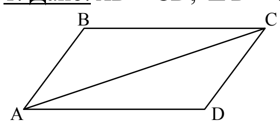
Доказать: $EM = KP$.

Доказательство: $EBDK$ и $BMPD$ – параллелограммы, т.к. $BD \parallel EP$, $PD \parallel BM$ и $EB \parallel KD$, т.о. $EK = BD = MP$, т.е. $EM = EK - MK =$ $= MP - MK = KP$.

С-3

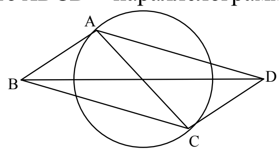
В-1

1. Дано: $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle ACD = 50°$, $\angle BCA = 60°$.



Доказать: $BC = AD$.

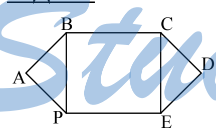
Доказательство: $\angle BAC = \angle ABC - \angle ACB =$ $= 180° - 70° - 60° = 50° = \angle ACD$. Т.о. $AB \parallel CD$ (т.к. $\angle BAC = \angle ACD$), а т.к. $AB = CD$, то $ABCD$ – параллелограмм, $AD = BC$.



2. $ABCD$ – параллелограмм (т.к. диагонали AC и BD точкой пересечения делятся пополам). Т.е. $\angle ABC = ADC$.

В-2

1. Дано: $AB = BC = CD = DE = EP = PA$, $A = \angle D$.



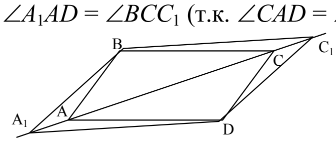
Доказать: $BP \parallel CE$.

Доказательство: $\Delta\, ABP = \Delta\, CDE$ по двум сторонам и углу ($AB = AP = CD = CE$, $\angle A = \angle D$). Т.е. $BP = CE$, т.к. $BC = PE$, то $BCEP$ – параллелограмм, т.е. $BP \parallel CE$.

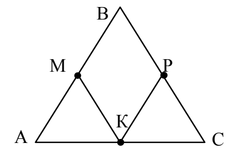
2. Дано: $AA_1 = CC_1$.

Доказать: $\angle BA_1D = \angle BC_1D$.

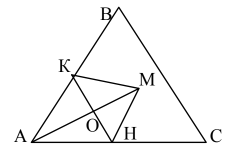
Доказательство: $\angle A_1AB = \angle C_1CD$ (т.к. $\angle BAC = \angle ACD$). Т.о. $\Delta A_1AB = \Delta DCC_1$ ($AA_1 = CC_1$, $BA = CD$, $\angle A_1AB = \angle C_1CD$), так что $\angle BA_1A = \angle CC_1D$, $\angle A_1AD = \angle BCC_1$ (т.к. $\angle CAD = \angle ACB$). Т.о. $\Delta\, A_1DA = \Delta\, BCC_1$ ($AA_1 = CC_1$, $AD = BC$, $\angle A_1AD = \angle BCC_1$). Т.о. $\angle AA_1D = \angle CC_1B$, так что $\angle A_1 = \angle BA_1A + DA_1A = \angle DC_1C + \angle CC_1B = \angle C_1$.



В-3

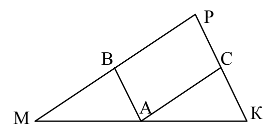


<u>1. Дано:</u> $PK = MB$, $\angle KPC = 80°$, $\angle C = 50°$.
Доказать: $\angle KMB + \angle MBP = 180°$.
Доказательство: $\angle A = \angle C = 50°$ (т.к. $\Delta\, ABC$ — равнобедренный), $\angle B = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$. Т.к. $\angle B = \angle KPC$, от $MB \| KP$, а т.к. $PK = MB$, то $MBPK$ – параллелограмм, т.е. $\angle KMB + \angle MBP = 180°$.

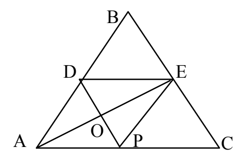


<u>2. Дано:</u> $AO = OM$, $KO = OH$, $\angle KMH = \angle C$.
Доказать: ABC – равнобедренный.
Доказательство: $AKMH$ – параллелограмм, т.к. диагонали KH и AM точкой пересечения делятся пополам. Т.о. $\angle KMH = \angle A = \angle C \Rightarrow \Delta\, ABC$ – равнобедренный.

В-4

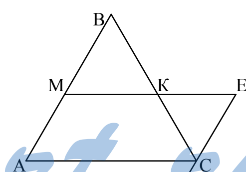


<u>1. Дано:</u> $\angle M = 65°$, $PC = CK = AM$, $BP = AC$, $\angle BAM = 50°$.
Доказать: $\angle CPB + \angle ABP = 180°$.
Доказательство: $\angle MBA = 180° - \angle BAM - \angle M = 180° - 50° - 65° = 65° = \angle M$, так что $\Delta\, ABM$ — равнобедренный, т.е. $MA = BA = PC$, т.е. $BPCA$ – параллелограмм, т.е. $\angle CPB + \angle ABP = 180°$.

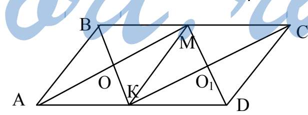


<u>2. Дано:</u> $DO = OP$, $AO = OE$.
Доказать: $\angle DEP = \angle BCA$.
Доказательство: Аналогично предыдущей задаче. Т.к. $ADEP$ – параллелограмм, то $\angle DEP = \angle A = \angle C$.

В-5



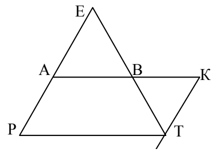
<u>1. Дано:</u> $AM = MB$, $BK = KC$, $AB \| EC$.
Доказать: $KE = (1/2)AC$.
Доказательство: $MK \| AC$ (средняя линия треугольника), $AM \| CE$ по условию. Т.о. $AMEC$ – параллелограмм. Т.к. $MK = (1/2)AC$, то $KE = MK = (1/2)AC$.



<u>2. Дано:</u> $AO = OM$, $BO = OK$, $KO_1 = O_1C$, $MO_1 = O_1D$.
Доказать: $\angle BAD = \angle BCD$.
Доказательство: $ABMK$ и $KMCD$ – параллелограммы (т.к. их диагонали делятся точкой пересечения пополам), так что $BM \| AK$, $MC \| KD$ и $BM = AK$, $MC = KD \Rightarrow AD \| BC$ и $AD = BC$, так что $ABCD$ – параллелограмм, т.е. $\angle A = \angle C$.

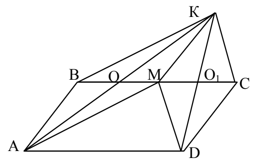
В-6

<u>1. Дано:</u> $AP = KT$, $AB = BK = (1/2)PT$.
Доказать: $PE = 2PA$.



Доказательство: Т.к. $AP = KT$ и $AK = PT$, то $PAKT$ – параллелограмм, т.е. $AK \parallel PT$. Таким образом, т.к. $AB = (1/2)PT$, и $AB \parallel PT$, то это средняя линия, т.е. $PA = AE \Rightarrow PE = 2PA$.

2. <u>Дано:</u> $AO = OK$, $BO = OM$, $MO_1 = O_1C$, $KO_1 = O_1D$.



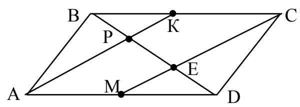
Доказать: $\angle ABC = \angle ADC$.

Доказательство: $ABKM$ и $MKCD$ – параллелограммы (см. предыдущую задачу).

Т.о. $AB= MK = CD$ и $AB \parallel MK \parallel CD$. Т.о. $ABCD$ – параллелограмм, т.е. $\angle ABC = \angle ADC$.

В-7

1. <u>Дано:</u> $AK \parallel CM$, $PK = EM$, $BP = ED$, $KC = AM$.



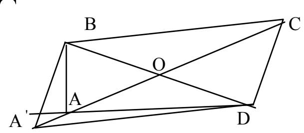
Доказать: $\angle BAD = \angle BCD$.

Доказательство: Т.к. $AK \parallel MC$, то $\angle MED=\angle BPK$, а т.к. $PK = EM$ и $BP = ED$, то $\Delta BPK = \Delta MED$ (по 2-м сторонам и углу). Т.е. $\angle MDB = \angle DBC$ (т.е. $BC \parallel AD$ и $MD = BK$) $\Rightarrow BC = AD$, т.е. $ABCD$ – параллелограмм, т.е. $\angle BAD = \angle BCD$.

2. <u>Дано:</u> $BO = OD$, $AO<OC$.

Доказать: $\angle BAD > \angle BCD$.

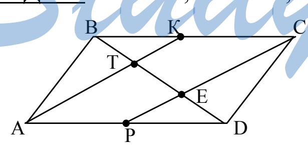
Доказательство: Отметим точку A' на луче CA, так что $A'O = OC$.



$A'BCD$ – параллелограмм, т.к. BD и $A'C$ – диагонали, которые пересекаются в середине. Очевидно, что $\angle BAD > \angle A'$, т.к. $\angle A' = \angle C \Rightarrow \angle BAD > \angle C$.

В-8

1. <u>Дано:</u> $KC = AP$, $AT = EC$, $TK = EP$.



Доказать: $\angle ABC = \angle ADC$.

Доказательство: Т.к. $AT = EC$ и $TK = EP$, то $AK = CP$. $AP = KC$ и $AK = CP$, значит $AKCP$ – параллелограмм. Т.е. $AP \parallel KC$, и $AK \parallel PC$. Т.к. $AK \parallel PC$ и $AP \parallel KC$, то $\angle CPD = \angle BKA$ и $\angle BTK = \angle PED$. Т.о. $\Delta PED = \Delta BTK$ (по стороне и 2-м углам), т.е. $BK = PD$, а т.к. $KC = AP$, то $BC = AD$, но $BC \parallel AD$, значит $ABCD$ – параллелограмм, т.е. $\angle ABC = \angle ADC$.

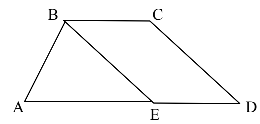
<u>2.</u> Допустим утверждение неверно, т.е. $AO \geq OC$. Тогда из предыдущей задачи $\angle BAD \leq BCD$, т.е. пришли к противоречию, т.е. $AO < OC$.

С-4

В-1

<u>1. Дано:</u> $BE \| CD$, $\angle ABE = 70°$, $\angle BEA = 50°$.

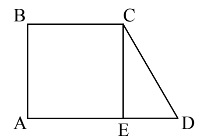
Найти: углы — ?



Решение: $\angle A = 180°–70°–50° = 60°$. Т.к. $BE \| CD$, то $\angle D = \angle AEB = 50°$. Т.к. $ED \| BC \Rightarrow \angle C = 180° – \angle D = 180° – 50° = 130°$ и $\angle EBC = \angle D = 50°$. Т.о. $\angle B = 70° + 50° = 120°$.

<u>2. Дано:</u> $\angle D = 45°$, $AB = BC = 10$.

Найти: AD — ?

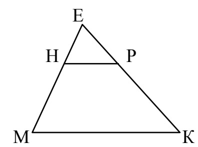


Решение: Т.к. $\angle D = 45°$, то $ED = CE = AB = 10$ см. $AE = BC = 10$ см. Т.о. $AE + ED = 20$ см.

В-2

<u>1. Дано:</u> $\angle MEK = 80°$, $\angle EHP = 40°$.

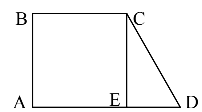
Найти: углы — ?



Решение: $\angle HPK = \angle EHP + \angle HEP = 80° + 40° = 120°$ (внешний угол ΔHEP). Т.к. $HP \| MK$, то $\angle M = \angle EHP = 40°$, $\angle PHM = 180° – 40° = 140°$, $\angle K = 180° – \angle HPK = 180° – 80° – 40° = 60°$.

<u>2. Дано:</u> $\angle D = 60°$, $AD = CD = 20$.

Найти: BC — ?

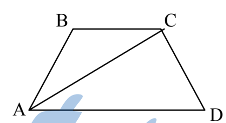


Решение: $\angle ECD = 90° – 60° = 30°$. Так как напротив угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы, то. $ED = (1/2) \cdot CD = (1/2) \cdot 20 = 10$. $BC = AE = AD – ED = 10$.

В-3

<u>1. Дано:</u> $AB = CD = BC$, $\angle ACD = 120°$.

Найти: углы — ?



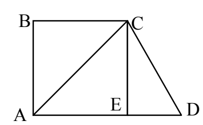
Решение:

Пусть $\angle BCA = \alpha$, тогда т.к. $AB = BC = CD$, ΔABC — равнобедренный и $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$.

Т.к. $BC \| AD$, то $\angle CAD = \angle BCA = \alpha$. Т.к. трапеция равнобокая, то $\angle D = \angle BAD$, т.е. $180° – \angle CAD – \angle ACD = \angle BAC + \angle CAD$, $60° – \alpha = 2\alpha$, $\alpha = 20°$, т.о. углы: $\angle D = 40°$, $\angle C = 140°$, $\angle B = 140°$, $\angle A = 40°$.

<u>2. Дано:</u> $\angle ACB = \angle D = 60°$.

Найти: AD/BC — ?



Решение: $\angle BAC = \angle ECD = 90° – 60° = 30° \Rightarrow ED = (1/2)CD$, $BC = (1/2)AC$ (из предыдущей задачи).

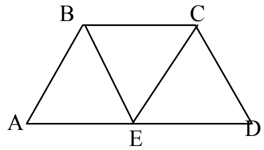
Т.к. $BC \| AD$, то $\angle CAD = \angle BCA = 60°$, т.о.

$AC = CD$ (т.к. ΔACD – равносторонний). Т.о. $ED = AE = BC$ и $AD/BC = 2$.

В-4

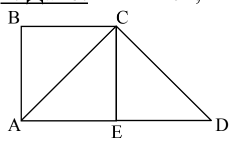
<u>1. Дано:</u> $AD = 2BC$, $BE = EC = BC$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$ — ?



Решение: Т.к. $AD = 2BC$, то $AE = BC = ED$. Т.к. $BC = BE = EC$, то ΔBCE – правильный. Т.е. $\angle CBE = 60° = \angle BEA$ (т.к. $BC \parallel AD$). Т.к. $BE = AE$, то $\angle A = \angle ABE$, так что $\angle A = (180° - \angle BEA) \cdot (1/2) = (180° - 60°) \cdot (1/2) = 60°$, $\angle B = 180° - (2 \cdot 60°) = 60°$.

<u>2. Дано:</u> $\angle D = 45°$, $\angle ACD = 90°$.



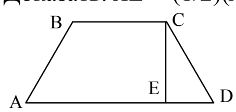
Найти: AD/BC — ?

Решение: Т.к. $\angle D = 45°$, то $\angle CAD = 180° - \angle ACD - \angle D = 45°$, $\angle ACE = 90° - \angle CAD = \angle CAD = 45°$. Так что $CE = AE = BC = ED$, т.е. $AD/BC = (AE + ED)/BC = (2BC)/BC = 2$.

В-5

<u>1. Дано:</u> $AB = CD$, $CE \perp AD$.

Доказать: $AE = (1/2)(AD + BC)$.



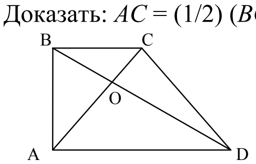
Доказательство:

Т.к. $AB = CD$, то $ED = (AD - BC)(1/2)$.

Т.о. $AE = AD - ED = AD - (1/2)AD + (1/2)BC = (1/2)(AD + BC)$.

<u>2. Дано:</u> $\angle ABD = 60°$, $BD \perp AC$.

Доказать: $AC = (1/2)(BC + AD)$.

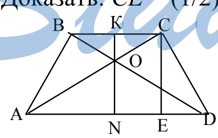


Доказательство: Т.к. $\angle ABD = 60°$, то $\angle ADB = 30°$. Т.е. $AD = 2AO$ (т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы). Так как $BC \parallel AD$, то $\angle ADO = \angle BCO = 30° \Rightarrow BC = 2CO$, т.е. $CA = OC + OA = (1/2)(AD + BC)$.

В-6

<u>1. Дано:</u> $\angle AOD = 90°$.

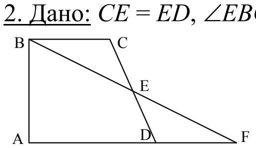
Доказать: $CE = (1/2)(AD + BC)$.



Доказательство: Проведем $OK \perp BC$ и $ON \perp AD$. ΔABO и ΔDCO — прямоугольные, и $AB = CD$ и $\angle BOA = \angle COD$ (вертикальные), так что $\Delta BOA = \Delta COD$ и $BO = OC$ и $AO = OD$.

Т.о. $OK = (1/2)BC$ и $ON = (1/2)AD$ (т.к. высота в равнобедренном прямоугольнике треугольника равна половине гипотенузы). Т.о. $CE = OK + ON = (1/2)(AD + BC)$.

<u>2. Дано:</u> $CE = ED$, $\angle EBC = 45°$.

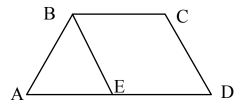


Доказать: $AB = AD + BC$.

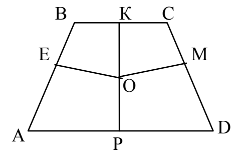
Доказательство: Продлим AD до пересечения с BE в точке F. $\Delta DEF = \Delta ECB$ по двум сторонам и углу между ними ($CE = ED$, $BE = EF$

(по теореме Фалеса), $\angle BEC = \angle DEF$ как вертикальные). Т.о. $DF = BC$, $\angle AFB = \angle EBC = 45°$, т.о. $AB = AF = AD + DF = AD + BC$.

В-7

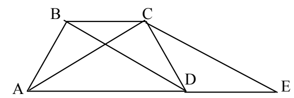


1. Проведем $BE \parallel CD$. Т.к. $BCDE$ – параллелограмм, так что $DE = BC$ и, $BD = CE$, так что $AE = AD + DE = AD + BC < AC + CE = AC + BD$.



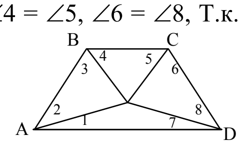
2. Проведем перпендикуляры как показано на рисунке. $\Delta\,OKC = \Delta\,OCM$ по катету и гипотенузе ($OM = OK$ и OC — общая). Т.о. $KC = CM$. Аналогично $MD = DP$, $PA = AE$, $EB = BK$. Т.о., сложив эти четыре равенства, получаем $BC + AD = AB + CD$.

В-8



1. Продлим луч AD до точки E так, что $BD \parallel CE$. Т.к. $BCED$ – параллелограмм, то $AE = AD + BC < AC + CE = CA + BD$.

2. Т.к. в трапеции сумма углов равна 360°, то $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$, но $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 8$, Т.к. треугольники AOD, DOC, COB и BOA — равнобедренные, то есть $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 7 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 8 = 180°$, т.е. $\angle C + \angle A = 180°$, $\angle B + \angle D$.



С-5

В-1

1. Сначала нарисовать известную сторону и отложить от нее данный угол, затем провести меньшую диагональ и соединить ее конец с противоположным концом нашей стороны. Т.о. мы имеем уже три точки параллелограмма. Чтобы построить четвертую необходимо параллельным переносом перенести большую сторону и отложить ее от конца диагонали.

2. Нарисовать меньшее основание, отложить от него перпендикулярную прямую, отмерить на ней меньшую боковую сторону. Затем из конца ее отложить луч, параллельный меньшему основанию в ту полуплоскость, где и это основание. Из второй вершины меньшего основания провести окружность радиусом большей стороны. Она пересечет луч в двух точках. Необходимо взять дальнюю от перпендикулярной прямой.

В-2

1. Необходимо нарисовать меньшую сторону, затем от нее отложить острый угол и провести прямую, которая должна содержать большую сторону, затем от меньшей стороны (с другого конца) отложить второй угол и провести прямую, которая должна содержать меньшее ос-

нование. В точке пересечения этих прямых будет третья вершина. Чтобы получить четвертую необходимо перенести меньшую сторону параллельным переносом и отложить ее от третьей вершины.
2. Построим треугольник по трем сторонам. Его основание большее основание трапеции. Из вершины, противолежащей основанию проведем прямую, параллельную основанию из конца основания (из которого выходит диагональ). Проведем перпендикулярную прямую. Точка пересечения этих прямых и будет четвертой вершиной.

В-3
1. Сначала необходимо поделить диагонали пополам и построить треугольник, стороны которого будут являться стороной и половинками диагоналей. Затем эти диагонали продлить вдвое. Т.о. мы будем иметь все 4 вершины.
2. Нарисуем большую сторону. Затем проведем параллельную ей прямую на расстоянии, равному высоте трапеции (см. В-5(1)). Затем из обеих концов основания проведем окружность с радиусом, равным боковой стороне. Отрезок между ближайшими точками пересечения этих окружностей с прямой будет меньшим основанием.

В-4
1. Сначала нарисуем меньшую диагональ. Затем отложим от нее угол между ней и меньшей стороной и проведем прямую, содержащую меньшую сторону. Затем необходимо поделить диагональ пополам и отложить от нее угол между диагоналями, и провести прямую, содержащую вторую диагональ. В точке пересечения наших прямых будет третья вершина. Четвертую можно получить, отмерив от точки пересечения диагоналей расстояние равное расстоянию от третьей вершины до точки пересечения диагоналей по большей диагонали.
2. Построим большее основание. Затем прямую параллельную ему на расстоянии высоты трапеции (см. В-5(1)). Из концов основания проведем 2 окружности с радиусами диагонали. Необходимо взять те 2 точки, чтобы отрезки, проведенные из концов основания к ним, пересекались и были равны.

В-5
1. Нарисуем известную сторону. Затем нарисуем перпендикулярную ей прямую, которая должна содержать наш отрезок. Затем отложим на ней расстояние, равное нашему отрезку, и проведем прямую перпендикулярную этому отрезку (она должна содержать 2-ю сторону). Затем, поставив циркуль в конец нашей стороны, проведем окружность с радиусом равным диагонали. Т.о. получим третью вершину. От нее необходимо отложить по данной прямой отрезок, равный нашей стороне (причем необходимо его откладывать в сторону 2-ой точки пересечения окружности с прямой). 2. Нарисуем две параллельные прямые (содержащие основания) на расстоянии высоты трапеции друг

(содержащие основания) на расстоянии высоты трапеции друг от друга (см. В-5(1)). Из произвольной точки на прямой строим боковую сторону (отложив острый угол от прямой и проведя прямую до пересечения с другой прямой). Затем проводим окружность с радиусом диагонали (берем точку, которая лежит в правой полуплоскости от боковой стороны). Затем из точки пересечения боковой стороны и меньшего основания проводим окружность с радиусом диагонали. Берем точку так, чтобы диагонали пересекались.

В-6

1. Разделим 2-е диагонали, а высоту пополам и построим треугольник по двум сторонам (половинками диагоналей) и высоте (половинка высоты). Затем достроить его до параллелограмма (В-3(1)).

2. Нарисуем две параллельные прямые (содержащие основания трапеции) на расстоянии высоты трапеции друг от друга (см. В-5 (1)). На любой прямой отложим угол, равный углу между меньшим основанием и диагональю, и проведем прямую до точки пересечения с другой прямой (это будет диагональ), а дальше как в предыдущей задаче (острый угол равен 180° – тупой).

В-7

1. Нарисовать сторону, отложить от нее данный угол и провести луч, который должен содержать вторую сторону. Затем в другую вершину стороны воткнуть циркуль и провести окружность с радиусом, равным диагонали. В точке пересечения окружности с лучем будет третья вершина. Далее параллельным переносом получим четвертую.

2. Пусть необходимо построить трапецию $ABCD$ с большим основанием AD. Продлим луч AD до точки E ($CE \parallel BD$). Т.о. $CE = BD$, $\angle ACE = \angle AOD$ (O – точка пересечения диагоналей). Т.о. можно построить ΔACE по двум сторонам и углу между ними. Точку D получаем, проведя окружность из точки C радиусом CD. Из точки C откладываем отрезок параллельный AD и равный DE.

В-8

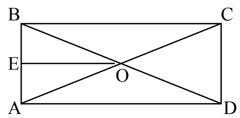
1. Нарисуем диагональ и от обеих сторон отложим равные углы (которые нам даны) и проведем две прямые, которые содержат две параллельные стороны. Затем воткнуть циркуль в один конец диагонали, провести окружность с радиусом, равным данной стороне (получится третья вершина). Параллельным переносом получим четвертую.

2. Пусть необходимо построить трапецию $ABCD$ с большим основанием AD. Поставим точку E на AD так, чтобы $BE \parallel CD$. Т.о. $DE = CE$, $AE = AD - BC$. Т.о. мы можем построить ΔABE по трем сторонам. Далее продлим AE до AD ($AD = AE + BC$), проведем BC так, чтобы $BC \parallel AD$.

С-6

В-1

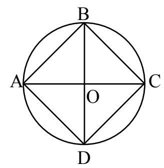
1. <u>Дано:</u> $AE = EB$, $\angle BAC = 50°$.



Найти: $\angle EOD$ – ?

Решение: Т.к. $AO=BO$, то $\angle ABD=\angle BAC=50°$, $\angle BOA = 180° - 2\cdot 50° = 80°$, $\angle AOD = 180° - 80° = 100°$. Т.к. $BO = OA$, $EB = EA$, то $\Delta BEO = \Delta AEO$ (по трем сторонам). Так что $\angle BEO = \angle OEA = 90°$, $\angle EOA = 90° - 50° = 40°$.Т.о. $\angle EOD = 100° + 40° = 140°$.

2. Т.к. BD и AC диаметры, то $BD = AC$, т.к они точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ $ABCD$ – прямоугольник.

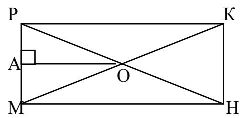


В-2

1. <u>Дано:</u> $OA \perp PM$, $\angle AOP = 15°$.

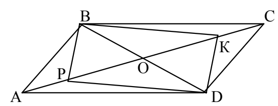
Найти: $\angle OHK$ – ?

Решение: Т.к. ΔPOM равнобедренный (свойство прямоугольника), то OA – биссектриса, т.о. $\angle POM = 30° = \angle KOH$ (вертикальные). ΔOKH тоже равнобедренный $\Rightarrow$ $\angle OHK = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$.



2. <u>Дано:</u> $PO = OD$, $OK = OB$.

Доказать: $PBKD$ – прямоугольник.

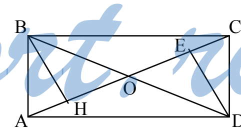


Доказательство: Т.к. $PO= OD$ и $OK = OB$, то сложив $PO + OK = OD + OB$. $PK = BD$, учитывая, что $BO = OD$, получаем $PBKD$ – прямоугольник.

В-3

1. <u>Дано:</u> $\angle BOH = 60°$, $AH = 5$.

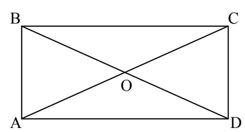
Найти: OE – ?



Решение: Т.к. $\angle BOH = 60°$ и $BO = AO \Rightarrow$ ΔABO – правильный $\Rightarrow AH = HO = 5$. Так как $CO = OD$ и $\angle COD = \angle BOA = 60°$, то ΔCOD тоже правильный и $OE = EC = (1/2)OC = (1/2)AO = AH$, т.е. $OE = AH = 5$.

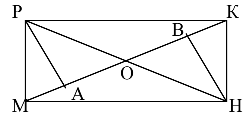
2. <u>Дано:</u> $AO = OD$, $BO = OC$, $\angle BAC = \angle DCA$.

Найти: $\angle ABC$ — ?



Решение: Т.к. $BO = OC$, $AO = OD$ и $\angle BOA=\angle COD$ (вертикальные), то т.к. $\angle BAC=\angle ACD \Rightarrow AB \parallel CD$. $\Delta BOA = \Delta OCD$ (по углу и 2-м сторонам) $\Rightarrow AB = CD \Rightarrow ABCD$ параллелограмм $\Rightarrow BO = OD$ $\Rightarrow AO = OC \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник $\Rightarrow \angle B = 90°$.

В-4



1. <u>Дано:</u> $MA = OB$.

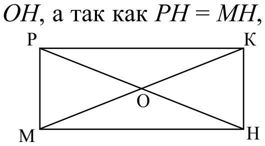
Найти: $\angle POM$ – ?

Решение: $\angle PMA = \angle HKB$ (т.к. $PM \parallel KH$), $PM = KH$ и $\angle KBH = \angle MAP = 90°$, значит $\Delta PMA = \Delta HKB$ (по гипотенузе и острому углу). Значит $AM = KB$. То есть $OB = KB$. Значит HB — медиана и высота, значит ΔOHK — равносторонний и $\angle KOH = 60°$, $\angle POM = \angle KOH$ (вертикальные), значит $\angle POM = 60°$.

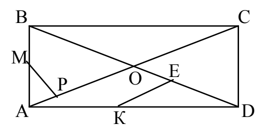
2. <u>Дано:</u> $\angle OMH = \angle OHM$, $PH = MK$, $PK = MH = OB$.

Найти: $\angle MHK$ – ?

Решение: Так как $\angle OMH = \angle OHM$, то $OM = OH$, а так как $PH = MH$, то $PO = OK$, а $PK = MH$ по условию, значит $\Delta POK = \Delta MOH$ (по 3-м сторонам), так что $MO = OK = OP = OH$, т.е. $PKHM$ — прямоугольник и $\angle MHK – 90°$.



В-5



1. <u>Дано:</u> $AM = MB$, $AK = AD$, $MP \perp AC$, $KE \perp BD$, $4KE = AD$.

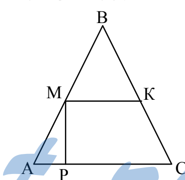
Найти: AP/PC — ?

Решение: Т.к. $AK = KD$ т.е. $2KE = KD$, т.о. $\angle BDA = 30°$, т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы, т.е. $\angle ABO = 60°$, значит, ΔABO – равносторонний. Т.е. $\angle MAP = 60°$ и $\angle AMP = 30°$ $\Rightarrow$ $AP = (1/2)AM = (1/4)AB = (1/4)AD = (1/8)AC$. Значит $PC = (7/8)AC$ и $AP/PC = 1/7$.

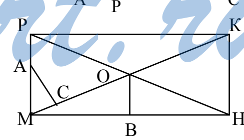
2. <u>Дано:</u> $AM = CK$, $2MK = AC = 4AP$.

Найти: $\angle PMK$ – ?

Решение: Т.к. $2MK = AC$ и $AM = KC$, то MK – средняя линия. Т.к. $AP = (1/4)AC$, т.е. $2AP + MK = AC$, т.е. $\angle PMK = 90°$.



В-6



1. <u>Дано:</u> $MC/CK = 1:7$, $MA = AP$, $MB = BH$, $AC \perp MK$.

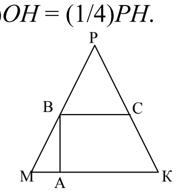
Найти: $BO : PH$ – ?

Решение: Т.к. $MC/CK = 1/7$, то $MC = (1/8)MK = (1/4)MO = (1/2)MA$ (из предыдущей задачи), т.е. $\angle MAC = 30° = \angle OMH = \angle OHM$, т.к. $\angle OHM = 30°$, то $BO = (1/2)OH = (1/4)PH$.

2. <u>Дано:</u> $MA = (1/4)MK$, $BC \parallel MK$, $BC = 2MA$.

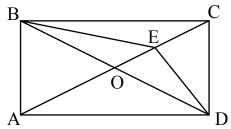
Найти: $\angle MAB$-?

Решение: задача аналогична предыдущей, т.к. $MK = 4MA = 2BC$, то BC — средняя линия, $\Rightarrow$ $\angle MAB = 90°$.



В-7

<u>1. Дано:</u> $\angle EDC = \angle CAD = 15°$.

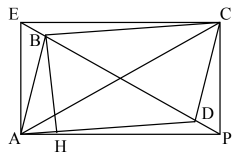


Доказать: $BE < 5ED$.

Доказательство: Т.к. $\angle CAD = 15°$, то $\angle ACD = 75°$. Т.е. $\angle CED = 90°$. Т.к. $AO = OD$ (по св-ву прямоугольника), то $\angle ODA = \angle CAD = 15°$, $\angle EDO = 90° - \angle ODA - \angle EDC = 90° - 2 \cdot 15° = 60°$, т.е. $\angle EOD = 30° \Rightarrow ED = (1/2)OD = (1/4)\ BD$.

Из ΔBDE : $BE < ED + BD = 5ED$.

<u>2. Дано:</u> $\angle BAE + \angle BCE = 60°$, $AB = 10$.

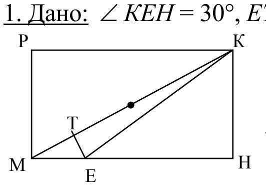


Найти: BH – ?

Решение: Пусть луч BD пересекает окружность в точке P. т.е. $ECPA$ – прямоугольник (В-1 (2)). $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACB) = 180° - (180° - 60° - 90°) = 150°$. Т.о. $\angle BAD = 30°$, т.е. $BH = (1/2)AB = 5$.

В-8

<u>1. Дано:</u> $\angle KEH = 30°$, $ET \perp MK$, $\angle KMH = 15°$.

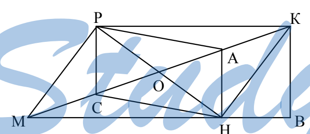


Доказать: $PT > 0{,}49\ KH$.

Доказательство: $\angle TEM = 90° - \angle KMH = 75°$, $\angle TEK = 180° - \angle TEM - \angle KEH = 180° - 75° - 30° = 75°$. Т.е. $\angle TKE = 15°$, т.е. ΔMEK – равнобедренный $\Rightarrow ME = EK \Rightarrow TE$ – медиана и $MT = TK$. Т.к. ΔKHM — прямоугольный $KH < MK = 2MT = 2PT$ (т.к. точка T — точка пересечения диагоналей), т.е. $PT > 0{,}5KH > 0{,}49KH$.

<u>2. Дано:</u> $\angle KPA + \angle KHA = 45°$, $KB = 10$.

Найти: HB-?

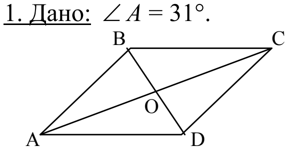


Решение: $APCH$ – прямоугольник (В-1 (2)). $\angle PKH = 180° - \angle KPH - \angle PHK = 180° - (90° + \angle KPA + \angle KHA) = 45°$. Т.о. $\angle KHB = 45°$, т.е. ΔHBK – равнобедренный $\Rightarrow HB = KB = 10$.

С-7

В-1

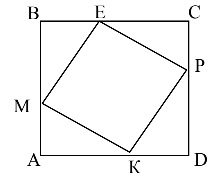
<u>1. Дано:</u> $\angle A = 31°$.



Найти: углы ΔBOC — ?

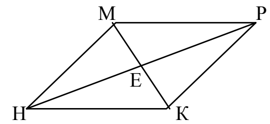
Решение: $\angle BAO = (31°/2) = 15°30'$ (по свойству ромба). $\angle BAO = \angle BCO = 15°30'$. По свойству ромба $\angle BOC = 90°$, так что $\angle OBC = 90° - \angle OCB = 74°30'$.

<u>2. Дано:</u> $AK = PD = EC = BM$.



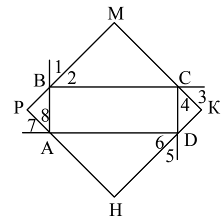
Доказать: *MEPK* – квадрат.
Доказательство: $\Delta BEM = \Delta MAK$ ($AK = BM$ и $BE = CB - EC = BA - BM = MA$) и аналогично с другими треугольниками. Т.о. $MK = KP = PE = EM$. Так как $\angle BEM = \angle AMK$, то $\angle EMB = 90° - \angle AMK$ $\Rightarrow$ $\angle EMK = 90°$ (аналогично с другими углами) $\Rightarrow$ *MEPK* – квадрат.

В-2



<u>1. Дано:</u> $\angle EPK = 16°30'$.
Найти: Остальные углы ΔPEK, $\angle PMH$ – ?
Решение: $\angle PEK$ по свойству ромба равен $90°$. $\angle PKE = 90° - 16°30' = 73°30'$. Т.к. $\angle MHP = \angle MPH = \angle EPK = 16°30'$, то $\angle PMH = 180° - 2 \cdot 16°30' = 147°$.

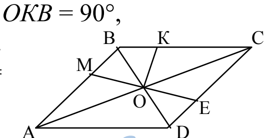
<u>2. Дано:</u> $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$.



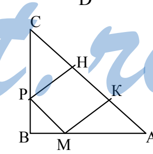
Доказать: *HKMP* – квадрат.
Доказательство: Т.к. $BA \perp BC$, то $\angle 1 = \angle 2 = 45°$, аналогично $\angle 3 = \angle 4 = 45°$, $\angle 5 = \angle 6 = 45°$, $\angle 7 = \angle 8 = 45°$. $\angle 3 = \angle MCB = 45°$ как вертикальные. Т.о. $\angle M = 90°$. Аналогично с другими углами. $\Delta BMC = \Delta ADH$, $\Delta CKD = \Delta BPA$ (по стороне и двум углам). Все они еще и равнобедренные $\Rightarrow$ $PM = MK = KH = HP$ $\Rightarrow$ *PMKH* – квадрат.

В-3

<u>1.</u> $\Delta MOB = \Delta BOK$ (*BO* – общая, $\angle OMB = \angle OKB = 90°$, $\angle MBO = \angle OBK$ (по свойству ромба)). Т.о. $OM = OK$, т.к. $BO \perp AC$, то $\angle MOB + \angle COE = 180° - \angle BOC = 180° - 90° = 90°$.

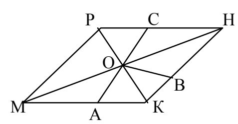


<u>2. Дано:</u> $\angle B = 90°$, $AB = BC$, $MP = a$.
Найти: *AC*-?



Решение: ΔMKA – равнобедренный (т.к. $\angle A = 45°$ и $\angle MKA = 90°$) $\Rightarrow$ $KA = MK = MP = a = HK$. Аналогично $CH = a$. Т.о. $AC = 3a$.

В-4

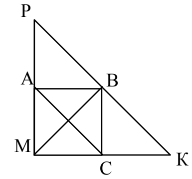


<u>1. Дано:</u> $AK = KB = PC$.
Доказать: $OA = OB$.
Найти: $\angle POC + \angle MOA$ – ?
Решение: Так как $AK = BK$ и $\angle OKA = \angle OKB$ (по свойству ромба), то $\Delta AKO = \Delta KBO$ (по двум сторонам и углу), т.о. $OA = OB$. Т.к. $PK \perp MH$, то $\angle POC + \angle MOA = 180° - \angle POM = 180° - 90° = 90°$.

<u>2. Дано:</u> $MP = MK$, $AC = a$.

Найти: PK – ?

Решение: Т.к. ΔCKB-равнобедренный ($\angle K = 45°$, $\angle BCK = 90°$) $\Rightarrow$ $BC = AB = CK$ и $AB \parallel CK$ $\Rightarrow$ $ABKC$ — параллелограмм. Т.е. BK = a. Т.к. MB — высота, а значит и медиана $\Rightarrow$ $PK = 2BK = 2a$.

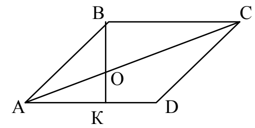


В-5

<u>1. Дано:</u> $BK \perp AD$, $AC = 2BK$.

Найти: $\angle AOB$ — ?

Решение: Т.к. $BK = (1/2)AC$, то $BO = (1/2)CO$ и $OK = (1/2)AO$. Т.о. $\angle CAD = 30°$, т.е. $\angle AOB = 180° – (90° – 30°) = 120°$.

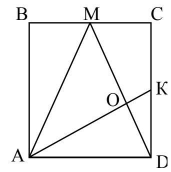


<u>2. Дано:</u> $MC = KD$, $AM = 2OM$.

Найти: $\angle AMO$ – ?

Решение: Т.к. $AD = CD$ и $MC = KD$, то $\Delta AKD = \Delta MCD$ (по двум катетам).

Т.о. $\angle KOD = 180° – \angle AKD – \angle MDC = 90°$ (т.к. $\angle AKD + \angle MDC = \angle AKD + \angle KAD = 90°$) $\Rightarrow$ т.к. $AM = 2OM$, $\angle MAK = 30°$ (т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы) и $\angle AMO = 60°$.

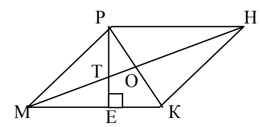


В-6

<u>1. Дано:</u> $PE \perp MK$, $\angle MTP = 120°$, $OH = a$.

Найти: PE – ?

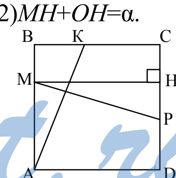
Решение: $\angle PTO = 180° – 120° = 60°$. $\angle MTE = = \angle PTO = 60°$, $\angle TME = 30°$. Так что $TE = = (1/2)MT$. $\angle PHT = \angle TME = 30°$. Так что $PT=(1/2)TH$. Тогда $TE+PT=(1/2)MT+(1/2)TH$, т.е. $PE=(1/2)MH+OH=\alpha$.



<u>2. Дано:</u> $MP \perp AK$.

Сравнить: MP и AK.

Решение: Проведем высоту MH. $MH = AB$. Пусть $\angle BAK = \alpha$, тогда $\angle AMP = 90° – \alpha$, $\angle HMP = \alpha$ $\Rightarrow$ $\Delta BKA = \Delta HMP$ (по гипотенузе и острому углу), т.о. $MP = AK$.

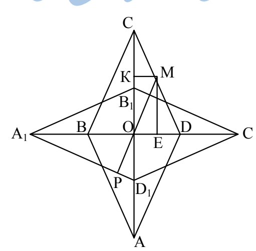


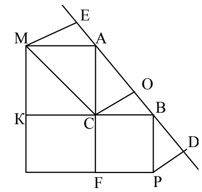
В-7

<u>1. Дано:</u> $CM = MD$.

Доказать: $\angle MPD_1 = 90°$.

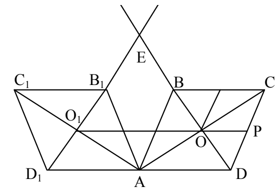
Доказательство: Построим $MK \perp OC$ и $ME \perp OC$, $\Delta CKM = \Delta MED$ ($CM = MD$, $\angle KCM = \angle EMD$) $\Rightarrow$ $ME = OK = CK$. Аналогично $\Delta OME = \Delta EMD$ $\Rightarrow$ $OM = MD = CM$ $\Rightarrow$ $\angle MCO = \angle MOC$, т.о. $\angle POD_1 = \angle KOM = = \angle OCM$ $\Rightarrow$ $\angle POD_1 + \angle PD_1O = 90°$, $\angle PD_1O = \angle ODC$ и $OP \perp A_1D_1$.



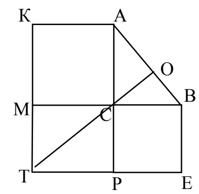


2. <u>Дано:</u> $AC \perp CB$.
Доказать: $ME + PD = AB$.
Доказательство: $\Delta EAM = \Delta COA$ ($MA = AC$, $\angle CAO = 90° - \angle MAE = \angle EMA$). $\Delta BOC = \Delta BPD$ ($CB = BP$ и $\angle PBD = 90° - \angle CBO = \angle OCB$). Т.о. $PD = OB$ и $ME = AO$. Т.е. $ME + PD = AB$.

В-8



В задачнике вероятно опечатка: PO – биссектриса ΔDOC.
1. <u>Дано:</u> $\angle CAC_1 = 90°$, $\angle DOP = \angle POC$.
Доказать: $PA = PE$.
Доказательство: Т.к. $\angle CAC_1 = 90°$, $BD \perp AC$, $B_1D_1 \perp AC_1$, $AO_1 = AO$ (т.к. ромбы равные), то O_1AOE – квадрат. Т.к. PO – биссектриса, то PO лежит на луче O_1O. Т.о. т.к. $EA \perp O_1P$, то $PA = PE$.



2. <u>Дано:</u> $AC \perp CB$.
Доказать: $TC \perp AB$.
Доказательство: Пусть $\angle MTC = \alpha$, тогда $\angle MCT = 90° - \alpha$. $\Delta MCT = \Delta ABC$ ($MT = CB$, $MC = AC$ как стороны квадратов). Т.о. $\angle MCT = \angle CAB = 90° - \alpha$. $\angle ACO = \alpha$ (как соответствующие углы при параллельных прямых KT и AC). Т.о. $\angle COA = 90°$.

С-8

В-1

<u>1.</u> Т.к. $P = 2(a + b)$, т.е. если нам дана b, то $a = (1/2)P - b$. Затем построим два равных прямоугольных треугольника по двум катетам и соединим их так, чтобы равные стороны были напротив.

<u>2.</u> Т.к. в квадрате диагонали пересекаются под прямым углом, то значит нам дана диагональ (вернее половина ее), т.е. нам необходимо построить 4 прямоугольных, равнобедренных равных треугольника и соединить их катетами, тогда получится квадрат.

В-2

<u>1.</u> Т.к. в ромбе диагонали являются биссектрисами, то необходимо построить два равнобедренных треугольника по стороне (меньшая диагональ) и углу при этой стороне (1/2 нашего угла) и соединить их основаниями).

<u>2.</u> Т.к. перпендикуляр опущенный из точки пересечения диагоналей на сторону равен половине стороны, значит необходимо построить два прямоугольных равнобедренных, равных треугольника по двум катетам (равных стороне квадрата) соединить их гипотенузами, тогда получится квадрат.

В-3

1. Построить два равных прямоугольных треугольника по гипотенузе и прилежащему углу и соединить их гипотенузами так, чтобы равные стороны были напротив друг друга.

2. Построим прямоугольный треугольник по углу и противолежащему катету (ΔABC с гипотенузой AB). Нарисуем лучи AC и AB и из точки B проведем прямую параллельную AC. На ей отложим отрезок BD равный данному (в полуплоскость не содержащую точку A). Затем опустим перпендикуляр DH на AC. Т.о. $BCHD$ – квадрат.

В-4

1. Необходимо построить два равнобедренных равных треугольника по основанию (известная диагональ) и углу при вершине (удвоенный данный) и соединить их основания.

2. Построим прямоугольный ΔABC с катетом AC, гипотенузой BC и углом $\angle B = 90° - \alpha$ (α и AC нам даны). Из вершины A опустим перпендикуляр AH на BC и проведем прямую из точки C параллельную AH до точки O пересечения с лучем BA. Из точки A опустим перпендикуляр AM на OC, т.о. $AMCH$ – искомый квадрат.

В-5

1. Необходимо построить прямоугольный треугольник по катету (данный перпендикуляр) и прилежащему углу (равному данному). Затем построить прямоугольный треугольник по катету (данный перпендикуляр) и противолежащий углу (равному данному) и соединить их, чтобы получился один большой прямоугольный треугольник. Затем нарисовать равный ему и соединить их гипотенузами так, чтобы получился прямоугольник.

2. Т.к. $\angle BAE = (1/2) \angle BAC = (1/4) \angle BAD = (90°/4)$, то мы можем построить ΔBAE по двум углам ($\angle B = 90°$) и гипотенузе, а затем, т.к. AB - сторона квадрата, достроить его до квадрата.

В-6

1. Построить два прямоугольных треугольника по катету (данный отрезок) и противолежащий углу (равному данному). Затем построить прямоугольник по двум сторонам (первая равна данному отрезку, а вторая равна гипотенузе построенного треугольника минус второй катет, который нам не был дан). Затем эти три фигуры соединить до ромба.

2. Т.к. $\angle BMD$=180°–$\angle MBD$–$\angle BDA$=180°–$\angle MBD$–45°=135° –$\angle MBD$, то мы можем построить ΔBMD по стороне и двум прилежащим углам, а затем т.к. 2MD равен стороне квадрата, построить квадрат по стороне.

В-7

1. Построим треугольник по стороне ((1/2)P), другой стороне (диагональ) и противолежащему ей углу равному 45°, затем к стороне равной

$(1/2)P$ проведем высоту. Т.о. у нас получилось два прямоугольных треугольника, один из которых равнобедренный (т.к. один угол равен 45°) и второй, катеты которого соответствующие стороны прямоугольника. Затем достроим второй треугольник до прямоугольника (см. В-5 (1)).

2. Пусть необходимо построить квадрат $ABCD$. На диагонали BD возьмем точку F, $FD = AD$. Т.к. ΔAFD равнобедренный, то $\angle AFD =$ $= \frac{1}{2}(180° - \angle BDA) = \frac{1}{2} \cdot 135°$. Т.о. $\angle BFA = 180° - \angle AFD = (225°/2)$. $BF = BD - AD$ (т.к. $AD = FD$), $\angle ABD = (90°/2)$. Т.о. мы можем построить ΔABF по стороне и двум углам. Т.о. у нас есть сторона квадрата, далее необходимо построить квадрат по стороне.

В-8

1. Допустим, что нам необходимо построить ромб $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей. На луче OB отметим точку F, $OF = OC$. Т.о. $\angle OFC = 45°$, а $\angle BFC = 180° - 45° = 135°$; $BF = \dfrac{BD - AC}{2}$. Т.к. $OF = OC$ $\Rightarrow$ $2OF = AC$ и $BF = (1/2)BD - (1/2)AC$. Т.о. мы можем построить ΔBFC (по двум сторонам и углу). Далее отложим от стороны CF угол в 45° и проведем прямую до пересечения с лучем BF. Т.о. мы построили ΔBOC. Далее построим $\Delta DAO = \Delta CBO$ так, чтобы AO лежала на прямой OC и DO на OB. Т.о. $ABCD$ – ромб.

2. Пусть надо построить квадрат $ABCD$ на луче CA (за точкой A). Отметим точку E. $AE = AD$, т.о. $EC = AC + AD$, $\angle ECD = (90°/2)$. Т.к. $\angle EAD = 180° - \angle CAD' = 135°$, то т.к. $EA = AD$, то $\angle E = \frac{1}{2}(180° - 135°) =$ $= (45°/2)$, а значит мы можем построить ΔECD по стороне и двум углам, а отрезок CD будет стороной квадрата. Т.о. мы можем построить квадрат по стороне.

С-9

В-1

1. $S = (a + b + c)(f + 1) - f^2 + (1/2)BD = af + bf + cf + al + bl + cl - f^2 +$ $+ (1/2)BD$.

2. Пусть a и b – стороны прямоугольника, $a = 9$. $P = 2(a + b) = 26$, т.о. $b = 4$. $S = ab = 36 = c^2$, где C — сторона квадрата. Т.о. $c = \sqrt{36} = 6$ см.

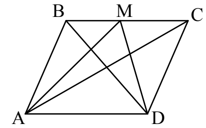
В-2

1. $S = (f + a + b + c)l - f(l - f) - (1/2)db = al + bl + cl + f^2 - (1/2)db$.

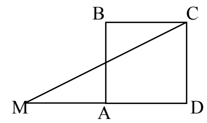
2. Пусть a – сторона квадрата, тогда $P = 4a = 32$. Т.о. $a = 8$. $S = 8^2 = 64$ $= 4b$, где b – вторая сторона прямоугольника. Т.о. $b = 16$.

В-3

1. $S_{AMD} = (1/2)AD \cdot h$ (h – высота параллелограмма).



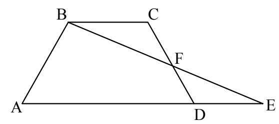
$S_{ABCD} = AD \cdot h$. $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{AMB}} = 2$.



2. Дано: $MC = 20$ дм, $\angle CMD = 30°$.
Найти: S_{ABCD} – ?
Решение: Т.к. против угла в 30° в прямоугольном треугольнике лежит катет равный (1/2) гипотенузы, т.о. $CD = 10$ дм. $S_{ABCD} = 10^2 = 100$ дм^2.

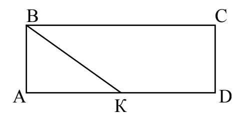
В-4

1. Дано: $CF = FD$.
Доказать: $S_{ABCD} = S_{ABE}$.



Доказательство: $\angle DFE = \angle BFC$ (вертикальные). $CF = FD$, $\angle FDE = \angle DCB$ (накрест лежащие). Т.о. $\Delta BCF = \Delta FED$ по стороне и двум прилежащим углам.
$S_{ABE} = S_{ABFD} + S_{FDE} = S_{ABFD} + S_{BFC} = S_{ABCD}$.

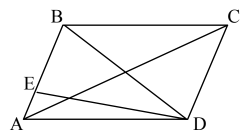
2. Дано: $\angle ABK = \angle KBC = 45°$, $AK = 5$ см, $KD = 7$ см.
Найти: S_{ABCD} – ?



Решение: Т.к. $\angle ABK = 45°$, то $AB = AK = 5$.
$AD = AK + KD = 5 + 7 = 12$ см.
Т.о. $S_{ABCD} = 5 \cdot 12 = 60$ см^2.

В-5

1. Дано: $DE \perp AB$.
Доказать: $S_{ABCD} = DE \cdot AB$.

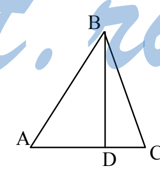


Доказательство: $S_{ABCD} = (1/2)S_{ABD} + (1/2)S_{ACD} = (1/2)BA \cdot DE + (1/2)CD \cdot ED = BA \cdot ED$.

2. Ромб его диагоналями делится на четыре равных прямоугольных треугольника. Пусть a и b – диагонали ромба, тогда $S_{ромба} = 4S_{треуг.} = 4 \cdot (1/2) \cdot (1/2)a \cdot (1/2)b = (1/2)ab$.

В-6

1. Дано: $AC \perp BD$.
Доказать: $S_{ABC} = AC \cdot BD \cdot (1/2)$.



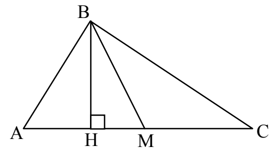
Доказательство: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC} = (1/2)AD \cdot BD + (1/2)DC \cdot BD = (1/2)BD(AD + DC) = (1/2)BD \cdot AC$.

2. Пусть диагональ квадрата равна a, тогда две диагонали разбивают квадрат на четыре прямоугольных треугольника.
$S_{квадр.} = 4S_{треуг.} = 4 \cdot (1/2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 = (1/2)a^2$.

В-7

1. Дано: $AM = MC$.
Доказать: $S_{ABM} = S_{MBC}$.

Доказательство: Проведем высоту BH.



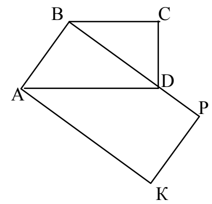
$S_{\Delta ABM} = (1/2)BH \cdot AM$. $S_{\Delta BMC} = (1/2)BH\ AM$, т.к $AM = MC$ (см. предыдущую задачу). Т.о. $S_{ABM} = S_{MBC}$.

<u>2. Дано:</u> $\angle A = 45°$, $\angle C=100°$, $\angle BDC = 35°$, $BD : DP = 2:1$, $P_{ABPK} = 30$ см.

Найти: S_{ABPK} – ?

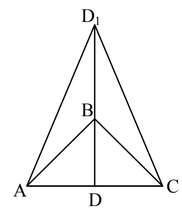
Решение: $\angle CBD = 180° - 100° - 35° = 45°$.

Т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \angle ADB = \angle CBD = 45°$ и $\angle ABD = 90°$. Т.о. $ABPK$ – прямоугольник. Т.о. $AB = BD$. Пусть $AB = x$, тогда



$BD = x$, $DP = x/2$, $BP = x + x/2 \Rightarrow P = 2x + 2\left(x + x/2\right) = 30$; $5x = 30$; $x = 6$ (см). Т.о. $S_{ABPK} = 6 \cdot \left(6 + \frac{1}{2} \cdot 6\right) = 54$ (см^2).

B-8

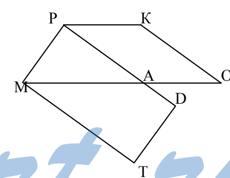


<u>1.</u> $S_{AD_1C} = (1/2)D_1D \cdot AC = (1/2) \cdot 2BD \cdot AC$ (т.к. $DD_1 = 2BD$) (см. В-6 (1)).

$S_{ABC} = (1/2)BD \cdot AC$. Т.о. $\dfrac{S_{AD_1C}}{S_{ABC}} = 2$.

<u>2. Дано:</u> $\angle M = 45°$, $\angle K = 135°$, $PA : AD = 1 : 3$, $S_{MPDT} = 36$ см^2.

Найти: P – ?

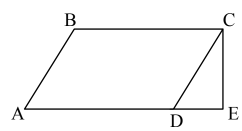


Решение: Т.к. $\angle K = 135° \Rightarrow \angle O = 45° = \angle PAM$ (соответствующие углы). Т.о. $\angle MPA = 90° \Rightarrow MP=PA$ и $MPDT$ – прямоугольник. Пусть $MP=x$, тогда $AP = x$ и $AD = 3x$, $PD = 4x$, $S_{MPDT} = x \cdot 4x = 4x^2 = 36$, $x = 3$ (см).

Т.о. $P = 2x + 2 \cdot 4x = 6 + 2 \cdot 12 = 30$ (см).

С-10

B-1

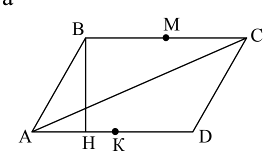


<u>1. Дано:</u> $\angle B > 90°$, $\angle ECD = 60°$, $\angle CED = 90°$, $AB = 4$ см, $AD = 10$ см.

Найти: S_{ABCD} – ?

Решение: т.к. $\angle ECD = 60°$, то $\angle CDE = 30°$, а $CE = (1/2)CD = (1/2)AB = 2$ см (катет против угла в 30° равен 1/2 гипотенузы),

т.о. $S_{ABCD} = (1/2)AD \cdot CE = 20$ см^2.

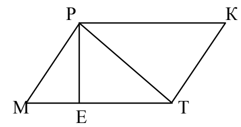


<u>2. Дано:</u> $BM = MC$, $AK = KD$.

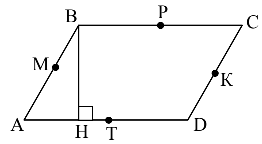
Доказать: $S_{ABMK} = S_{ACD}$.

Доказательство: Пусть BH – высота. Так как $BM = AK$, то $BMKA$ — параллелограмм. $S_{ABMK} = (1/2)AD \cdot BH = (1/2)S_{ABCD} = S_{ACD}$.

В-2

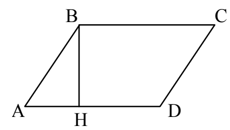


1. Дано: $\angle PEM = 90°$, $\angle EPT = 45°$, $ME = 4$ см, $ET = 7$ см.
Найти: S_{MPTK} – ?
Решение: т.к. $\angle EPT = 45°$, то $\angle PTE = 45°$ и $PE = ET = 7$ см. $MT = ET + ME = 11$ см.
$S_{MPKT} = 11 \cdot 7 = 77$ (см^2).

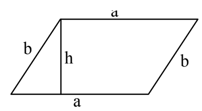


2. Дано: $BM = CK = KD = MA$, $BP = PC = DT = TA$.
Доказать: $S_{ABPT} = S_{AMKD}$.
Доказательство: Пусть BH – высота.
$S_{ABPT} = (1/2)AD \cdot HB = (1/2)HB \cdot AD = S_{AMKD}$.

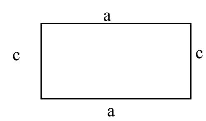
В-3



1. Дано: $S_{ABCD} = 20$ см^2, $AH = 2$ см, $HD = 8$ см.
Найти: $\angle A$ – ? $\angle D$ – ?
Решение: $S_{ABCD} = (2 + 8)BH = 20 \Rightarrow BH = 2$. Т.к. $BH = AH$, то ΔAHB - равнобедренный, т.е. $\angle A$=45°, $\angle D = 180° – 45° = 135°$.

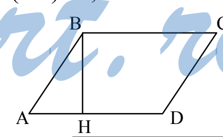


2. Дано: $P_1 = P_2$.
Сравнить: S_1 и S_2.
Решение: $P_1 = 2a + 2b = P_2 = 2c + 2a$, т.е. $b = c$, $h < b$, т.к. катет всегда меньше гипотенузы, т.о. $S_1 = ah < ab = ac = S_2$.

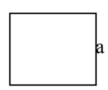


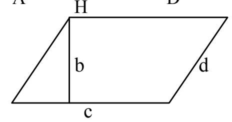
В-4

1. Дано: $S_{ABCD} = 40$ см^2, $AB = 8$, $AD = 10$.
Найти: $\angle A$, $\angle D$ – ?
Решение: $S_{ABCD} = 10BH = 40$, $BH = 4$ см. т.к. $BH = (1/2)AB$, то $\angle A = 30°$ (т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы) $\Rightarrow \angle D = 180° – 30° = 150°$.



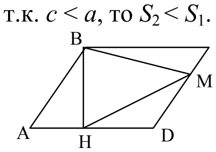
В задачнике вероятно опечатка, не параметры равны, а периметры.





2. Дано: $P_1 = P_2$, $a = b$.
Сравнить: S_1 и S_2.
Решение: $d > b$ (см. предыдущую задачу). $P_1 = 4a = P_2 = 2d + 2c$,а так как $d > b$, т.е. $d > a$, то $c < a$. $S_1 = a^2$ и $S_2 = bc = ac$, т.к. $c < a$, то $S_2 < S_1$.

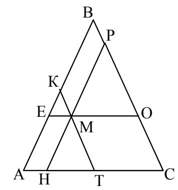
В-5



1. Дано: $\angle HBM = 45°$, $AH = 2$ см, $HD = 8$ см.
Найти: S_{ABCD} – ?

Решение: т.к. $\angle HBM = 45°$, то $\angle MBC = 45° \Rightarrow \angle C = 45°$.
Т.о. $\angle D = 135°$. Т.к. $\angle A = \angle C = 45° \Rightarrow AH = BH = 2$ см.
Т.о. $S_{ABCD} = 2 \cdot (2 + 8) = 20$ см^2.

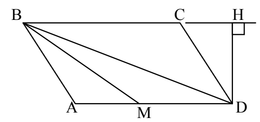
2. Т.к. ΔABC — равнобедренный и $EO \parallel AC \Rightarrow AE = OC$.
Пусть расстояние от AC до EO равно h, тогда:



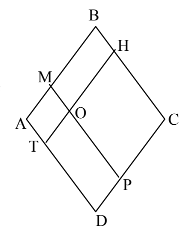
$S_{AEMH} : S_{MOCT} = \dfrac{AH \cdot h}{TC \cdot h} = \dfrac{AH}{TC}$, а т.к. $KT \parallel BC$, то $\dfrac{AH}{TC} = \dfrac{EM}{MO} = \dfrac{BP}{BK}$ (по теореме Фалеса).

В-6

1. Дано: $\angle ABM = \angle MBD$, $\angle BMD = 157°30'$, $DH = 10$ см.
Найти: S_{ABCD} – ?



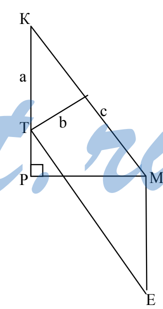
Решение: $\angle ADB = \angle ABD$ (т.к. $AB = AD$), т.о. $157°30' + \angle ADB + (1/2)\angle ADB = 180°$. $\angle ADB = 15°$. Т.о. $\angle A = 180° - 15° - 15° = 150°$, т.е. $\angle D = 30°$, $\angle DCH = \angle D = 30°$. Т.о., так как против угла в 30° лежит в прямоугольном треугольнике катет равный (1/2) гипотенузы, то $CD = AB = 20$ см, т.е. $S_{ABCD} = 10 \cdot 20 = 200$ (см^2).



2. Т.к. $MP \parallel AD$ и $HT \parallel AB$, то $\dfrac{S_{AMOT}}{S_{MBHO}} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{TO}{OH} = \dfrac{S_{TOPD}}{S_{OPCH}} \Rightarrow S_{AMOT} \cdot S_{OPCH} = S_{OPDT} \cdot S_{MBHO}$.

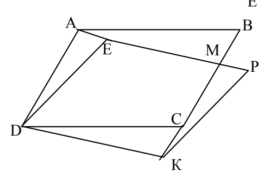
В-7

1. Дано: $PM < KP$, $TK = a$, $KM = c$.
Найти: PM – ?



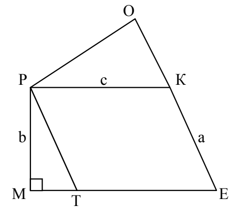
Решение: Проведем дополнительные построения как показано на рисунке, т.е. $ME \parallel KP$ и $ME = KT \Rightarrow KTEM$ – параллелограмм. $S_{KTEM} = bc = PM \cdot a$, т.е. $PM = bc / a$.

2. Т.к. $AD \parallel MK$, $EP \parallel DK$ $DE \parallel PK$, то $AMKD$ и $EPKD$ — параллелограммы, так что $AD = MK$ и $PK = ED$, и $S_{ABCD} = S_{AMKD} = S_{EPKD}$, то $S_{ABCD} = S_{AMKD}$.
Так что:
$S_{ABCD} - S_{DEMC} = S_{DABME} = S_{EPKD} - S_{DEMC} = S_{DKPMC}$
$\Rightarrow S_{DABME} = S_{DKPMC}$.

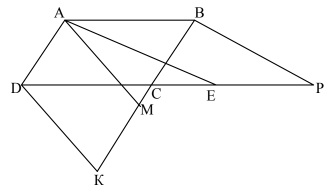


В-8

<u>1. Дано:</u> $\angle M = 90°$, $MP = b$, $PK = c$, $KE = a$.
Найти: PO – ?
Решение: Проведем дополнительные построения как показано на рисунке $PT \parallel KE$, т.о. $PTEK$ – параллелограмм, и $PT = KE = a$.
$S_{PTEK} = bc = PO \cdot a$, т.е.$PO = bc / a$.



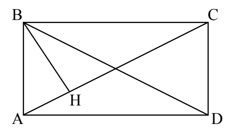
<u>2.</u> Решаем аналогично предыдущей задаче. $S_{ABCD} = S_{ABPE}$. $S_{ABCD} = S_{AMKD}$ $\Rightarrow$ $S_{ABPE} = S_{AMKD}$, $S_{ABPCM} = S_{ABPE} + S_{AECM} =$ $= S_{AMKD} + S_{AECM} = S_{AECKD}$.



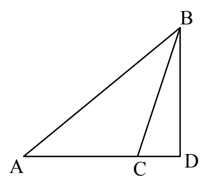
С-11

В-1

<u>1. Дано:</u> $BD = 12$ см, $BH = 4$ см.
Найти: S_{ABC} - ?
Решение: $BD = AC = 12$ см (свойство прямоугольника). $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$ (см^2).

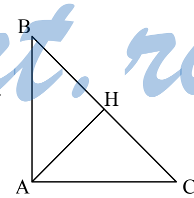


<u>2. Дано:</u> $\angle C = 135°$, $AC = 6$ дм, $BD = 2$ дм.
Найти: S_{ABD} – ?
Решение: $\angle BCD = 180° – 135° = 45°$.
$\angle CBD = 90° – 45° = 45°$. Т.о. $BD = CD = 2$ дм.
$S_{ABD} = (1/2)AD \cdot BD = \dfrac{1}{2}(6 + 2) \cdot 2 = 8$ (дм^2).

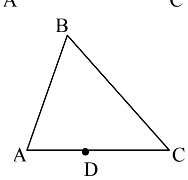


В-2

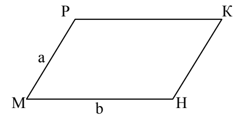
<u>1. Дано:</u> $AB = AC$, $BC = 10$ см.
Найти: S_{ABC}?
Решение: В равнобедренном треугольнике высота является и медианой $\Rightarrow$ $HC = 5$ см, т.к. $\angle C = 45°$ $\Rightarrow$ $HC = AH = 5$ см $\Rightarrow$ $S_{ABC} = 5 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 25$ (см^2).



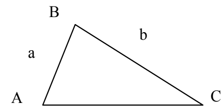
<u>2. Дано:</u> $S_{ABC} = 36$ см^2, $AD : DC = 1/5$.
Найти: S_{ABD} – ?
Решение: $S_{ABC} = (1/2)AC \cdot h$, где h – высота, опущенная из точки B. $AD = (1/6)AC$.
Т.о. $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} AC \cdot h = \dfrac{36}{6} = 6$ (см^2).



В-3

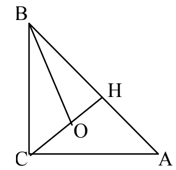


1. Дано: $\angle B = 130°$, $AB = a$, $BC = b$, $MP = a$, $MH = b$, $\angle M = 50°$.
Найти: $S_1 : S_2$ – ?



Решение: $S_2 = S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin 130°$, $S_1 = S_{MPKH} =$
$= ab\sin 50°$. $S_1 : S_2 = \frac{S_{MPKH}}{S_{ABC}} = 2\frac{\sin 50°}{\sin 130°} = 2 : 1$.

2. Дано: $CO = OH$, $BH = HA$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см.
Найти: S_{OBC} — ?

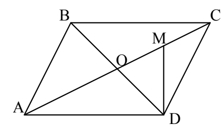


Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$ (см^2).

$S_{CHB} = (1/2)S_{ABC} = 12$ (см^2) (т.к. CH — медиана).
$S_{OBC} = (1/2)S_{CHB} = 6$ (см^2) (т.к. BO — медиана).

В-4

1. Дано: $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = 15°$, $KP = x$, $MK = y$, $\angle K = 165°$.
Сравнить: S_1 и S_2



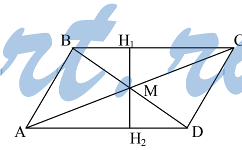
Решение: Пусть $\sin 15° = u$, тогда $\sin 165° =$
$= \sin 15° = u \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot u$, $S_{MPK} = \frac{1}{2}xyu \Rightarrow$
$S_1 = S_2$. т.о. $S_1 = S_2$.

2. Дано: $BD = 5$ см, $AC = 12$ см, $AM : MC = 4:1$.
Найти: S_{AMD} – ?

Решение: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = 30$ см^2. $S_{ACD} = (1/2)S_{ABCD} = 15$ см^2.

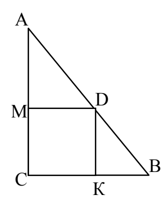
$AM = (4/5)AC \Rightarrow S_{AMD} = (1/2)AM\cdot OD = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot AC\cdot OD = (4/5)S_{ACD} =$
$= 12$ (см^2).

В-5



1. $S_{AMD} = (1/2)AD\cdot H_2M$. $S_{BMC} = (1/2)BC\cdot H_1M$.
$S_{BMC} + S_{AMD} = (1/2)AD(H_1M + H_2M) = (1/2)S_{ABCD}$.

2. Дано: $CMPK$ – квадрат, $AC = 6$ см, $BC = 14$ см.
Найти: MC — ?

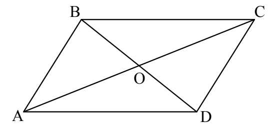


Решение: Пусть $MC = x$, тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 14 = 42 =$
$= x^2 + \frac{1}{2}x(14 - x) + \frac{1}{2}x(6 - x)$;

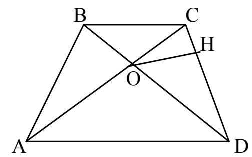
$42 = x^2 + 7x - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}x^2$; $x = 4,2$ (см).

В-6

<u>1.</u> $S_{ABO} = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$.
$S_{BOC} = (1/2)BO \cdot OC \cdot \sin\angle BOC = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$.
$S_{COD} = (1/2)CO \cdot OB \cdot \sin\angle COD = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$.
$S_{AOD} = (1/2)AO \cdot OD \cdot \sin\angle AOD = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$ (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам) $\Rightarrow$
$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

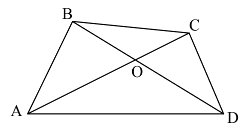


<u>2. Дано:</u> $OH = 4$ см, $CD = 8$ см.
Найти: S_{AOB} — ?
Решение: $S_{ABC} = S_{BCD}$ (т.к. BC — общая и высоты равны) $\Rightarrow$ $S_{ABO} = S_{COD}$. (Вычли из равенства S_{OBC}), а $S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$ (см^2) $= S_{AOB}$.

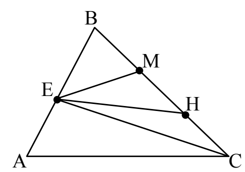


В-7

<u>1. Дано:</u> $AC = 8$, $BD = 12$, $\angle AOB = 30°$.
Найти: S_{ABCD} – ?
Решение: $S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$
$= (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin 30° + (1/2)BO \cdot OC \cdot \sin 150° +$
$+ (1/2)CO \cdot OB \cdot \sin 30° + (1/2)AO \cdot OD \cdot \sin 150° =$
$= (1/2)\sin 30°\ (OB(AO + OC) + OD(AO + OC)) =$
$= \frac{1}{2} \cdot (1/2)\ (AC \cdot BD) = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 12 = 24$ (см^2).

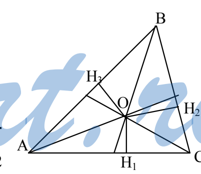


<u>2. Дано:</u> $AE = EB$, $BM = MH = HC$, $S_{ABC} = S$.
Найти: S_{EMH} – ?
Решение: $S_{EMH} = (1/3)S_{EBC}$ (т.к. $MH = (1/3)BC$) $\Rightarrow$
$S_{EBC} = (1/2)\ S_{ABC}$ (т.к. CE — медиана) $\Rightarrow$
$S_{EMH} = (1/6)S$ (т.к. $AE = EB$).

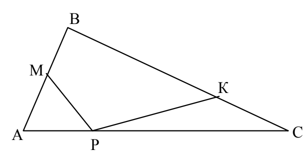


В-8

<u>1. Дано:</u> $OH_1 = 1{,}5$ см, $P_{ABC} = 16$ см.
Найти: S_{ABC}-?
Решение: т.к. точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности $\Rightarrow OH_1 = OH_2 = OH_3 = 1{,}5$ см $\Rightarrow S_{ABC} = (1/2)AB{\cdot}1{,}5 + (1/2)AC{\cdot}1{,}5 + (1/2)BC{\cdot}1{,}5 =$
$= \frac{3}{4}(AB + AC + BC) = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ (см^2).



<u>2. Дано:</u> $AM : MB = BK : KC = PC : AP =$
$= 2 : 1$, $S_{ABC} = S$.
Найти: S_{MBKP} – ?
Решение: $S_{AMP} = (1/2)AM \cdot AP \cdot \sin A =$
$= \frac{1}{2} \cdot (2/3)AB \cdot (1/3)AC \cdot \sin A = (2/9)S$.

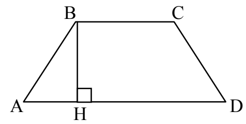


$S_{PKC} = (1/2)PC \cdot KC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot (1/3)BC \cdot (2/3)AC \cdot \sin C = (2/9)S.$

$S_{MBKP} = S - 2 \cdot (2/9)S = (5/9)S.$

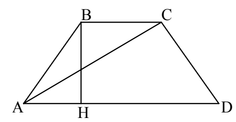
С-12

В-1



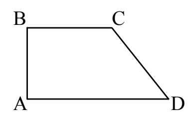
1. <u>Дано:</u> $P_{ABCD} = 32$ см, $AB = CD = 5$ см, $S = 44$ см^2.
Найти: BH – ?
Решение: $P=10+BC+AD=32$; $\frac{1}{2}(BC+AD)=11$ см.

$\frac{1}{2}(BC + AD)BH = 44$ (см^2) $\Rightarrow BH = 4$ (см).



2. <u>Дано:</u> $BC = 8$ см, $AD = 10$ см, $S_{ACD} = 30$ см^2.
Найти: S – ?
Решение: $S_{ACD} = (1/2)AD \cdot BH = 30$ (см^2). Так что $BH = 6$ (см). $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = 54$ (см^2).

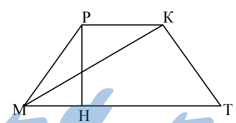
В-2



1. <u>Дано:</u> $S_{ABCD} = 30$ см^2, $P_{ABCD} = 28$ см, $AB = 3$ см.
Найти: CD – ?
Решение:

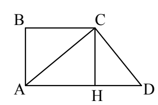
$$\begin{cases} 3 + BC + AD + CD = 28 \\ \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot 3 = 30 \end{cases}; \quad \begin{cases} BC + AD = 20 \\ 3 + 20 + CD = 28 \end{cases};$$

$CD = 5$ см.



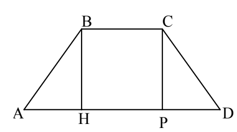
2. <u>Дано:</u> $PK = 6$ см, $PH = 8$ см, $S_{MKT} = 48$ см^2.
Найти: S – ?
Решение: $S_{MKT} = (1/2)MT \cdot PH = 48$, так что $MT =12$ (см). $S = (PK + MT)\frac{1}{2} \cdot PH = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 72$ (см^2).

В-3



1. <u>Дано:</u> $AB = 3$ дм, $\angle CDA = \angle BAC = 45°$.
Найти: S – ?
Решение: т.к.$\angle CDA=\angle BAC=45° \Rightarrow \angle CAH=\angle CDA=45°$, ΔACD и ΔCDH – равнобедренные, так что $HD=AH=$ $= CH = 3$ (дм).

Т.о. $S = S_{ABCH} + S_{CHD} = 9 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 13{,}5$ (дм^2).



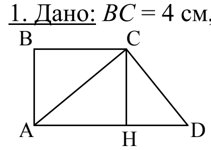
2. <u>Дано:</u> $BC = BH = 6$ см, $AH + DP = HP$.

Найти: S – ?

Решение: т.к. $AH = PD \Rightarrow BC = HP = 2AH \Rightarrow AD = 12$ (см) $\Rightarrow$
$S = \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot 6 = 54$ (см^2).

В-4

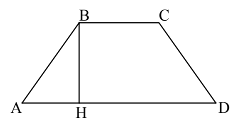
<u>1. Дано:</u> $BC = 4$ см, $\angle BCA = 45°$, $\angle C = 135°$.



Найти: S – ?

Решение: $\angle ACD = 135° – 45° = 90°$, $\angle BAC = 45° \Rightarrow$ $BC = AB = 4$, $\angle D = 45° \Rightarrow CH = AB = HD = 4 \Rightarrow$ $AD = 8$ и $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (8 + 4) = 24$ (см^2).

<u>2. Дано:</u> $AH = (1/2)BC$, $BH = 6$ см, $AD = BC + 2$.

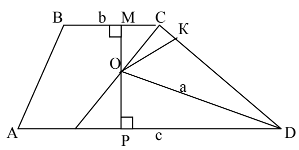


Найти: S – ?

Решение: $AD=BC+2AH=2BC=BC+2 \Rightarrow BC=2$ см, $AD = 4$ (см). $S = \frac{1}{2} \cdot (2 + 4) \cdot 6 = 18$ (см^2).

В-5

<u>1. Дано:</u> $\angle D = 60°$, $AD = c$, $OD = a$, $BC = b$.

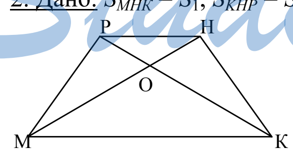


Найти: S – ?

Решение: Опустим перпендикуляры OP, OK и OM как показано на рисунке.

Т.к. $\Delta POD = \Delta OKD$ (по углу и гипотенузе), $\Delta MOC = \Delta COK$ (по углу и гипотенузе), то $OP = OK = OM$. Т.к. $\angle ODK = 30°$ $\Rightarrow OK = \frac{a}{2}$ (т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы). Т.о. $S = \frac{1}{2}(b + c)\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}(ab + ac)$.

<u>2. Дано:</u> $S_{MHK} = S_1$, $S_{KHP} = S_2$.

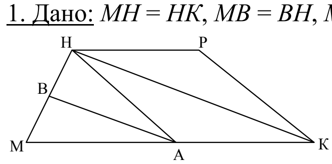


Найти: S – ?

Решение: $S_{MPH} = S_{KPH}$, т.к. у них общее основание и равные высоты $\Rightarrow S_{MPO} = S_{OHK}$,
$S = 2 \cdot S_{MPO} + S_{PHO} + S_{OMK} = S_{MHK} + S_{MHP} =$
$= S_{MHK} + S_{KPH} = S_1 + S_2$.

В-6

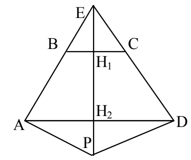
<u>1. Дано:</u> $MH = HK$, $MB = BH$, $MA = AK$, $BA \perp MH$, $MK = a$, $HP = b$.



Найти: S – ?

Решение: т.к. $MA = AK$ и $MB = BH \Rightarrow$ AB - средняя линия $\Delta MHK \Rightarrow AB =$
$= (1/2)HK = (1/2)MH=MB$. Т.о. $AM= AH$

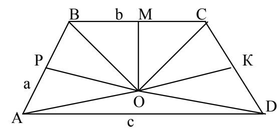
(т.к. AB и медиана и высота в ΔMHA). $HA \perp MK$, т.к. ΔMHK – равнобедренный и $MA = AK \Rightarrow HA = \dfrac{a}{2}$ и $S = \dfrac{1}{2}(a+b)\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}(a+b)$.



2. <u>Дано:</u> $EH_1 = H_1H_2 + H_2P$, $S_{BEC} = S_1$, $S_{APD} = S_2$.
Найти: S – ?
Решение: $S_1 = (1/2)BC \cdot H_1E$, $S_2 = (1/2)AD \cdot H_2P$.
Т.к. $H_1E = H_2P = H_1H_2$, то:
$S_1 + S_2 = (1/2)H_1H_2(BC + AD) = S$.

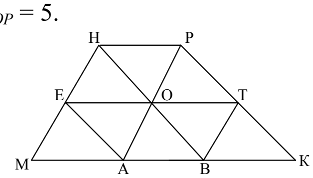
В-7

1. <u>Дано:</u> $\angle BCD = 150°$, $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$.
Найти: S – ?



Решение: т.к. $OP \perp AB$, $AP = PB$, $OM \perp BC$, $BM = MC$, $OK \perp CP$, $CK = KD \Rightarrow OD = OC = OB = OA$, т.о. $\angle OCB = (150°/2) = \angle OBC$. $\angle B = 2\angle OBC = 150° \Rightarrow \angle A = \angle D = 30°$ $\Rightarrow$ высота равна $\dfrac{a}{2} \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}(b + c)\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}(b + c)$.

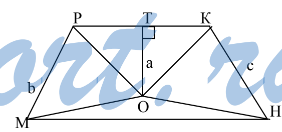
2. <u>Дано:</u> $MK : HP = 3:1$, $MA = AB = BK$, $S_{HOP} = 5$.
Найти: S – ?



Решение: Проведем прямую через точку O параллельную MK, как показано на рисунке. Т.к. $MK : HP = 3 : 1 \Rightarrow MA = AB = BK = HP$ (по теореме Фалеса).
Т.о. $MH \parallel PA$ и $HB \parallel PK \Rightarrow EO = MA = AB \Rightarrow EA \parallel OB \Rightarrow EA \parallel PK$ (аналогично $BT \parallel MH$). т.о. трапеция разбивается на 8 треугольников равных $\Delta HOP \Rightarrow S = 8 \cdot 5 = 40$ (см^2).

В-8

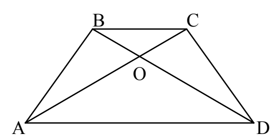
1. <u>Дано:</u> $OT = a$, $PM = b$, $KH = c$.
Найти: S – ?



Решение: Из задачи С-12 В-5 (1) вытекает, что точка O равноудалена от сторон трапеции, далее из задачи С-4 В-7 (2) вытекает, что $PK + MH = b + c$.

Т.о. $S = 2a \cdot \dfrac{1}{2}(b + c) = ab + ac$.

2. <u>Дано:</u> $S_{BOC} = 5$ см^2, $S_{AOD} = 20$ см^2.
Найти: S – ?



Решение: $S_{ABO} = S_{OCD}$ исходя из задачи С-12 В-5 (2). Т.к. $\sin\angle AOB = \sin\angle BOC = \sin\angle AOD = \sin\angle COD$;

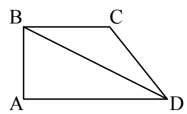
$$\frac{AO \cdot BO \cdot \frac{1}{2}\sin\angle AOB}{OC \cdot BO \cdot \frac{1}{2}\sin\angle AOB} = \frac{AO \cdot OD \cdot \frac{1}{2}\sin\angle AOD}{OC \cdot OD \cdot \frac{1}{2}\sin\angle AOD}.$$

Т.о. $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{DOC}} \Rightarrow S^2_{AOB} = 100$, $S_{AOB} = 10 \Rightarrow S = 20 + 5 + 2 \cdot 10 = 45$ (см^2).

С-13

В-1

1. Дано: $BD = 13$ см, $AD = 12$ см, $BC = 8$ см.



Найти: S – ?

Решение: по теореме Пифагора:

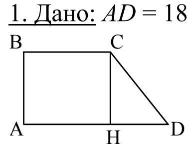
$AB = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ (см).

$S = \frac{1}{2}(12 + 8) \cdot 5 = 50$ (см^2).

2. Этот треугольник прямоугольный, т.к. по теореме Пифагора $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ углы равны: 30°, 60° и 90°.

В-2

1. Дано: $AD = 18$ см, $BC = 9$ см, $CD = 15$ см.



Найти: S – ?

Решение: $HD = AD - BC = 9$ (см).

По теореме Пифагора: $CH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см).

$S = \frac{1}{2}(18 + 9) \cdot 12 = 162$ (см^2).

2. Это треугольник прямоугольный, т.к. по теореме Пифагора: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos A = \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ углы равны: два по 45° и один 90°.

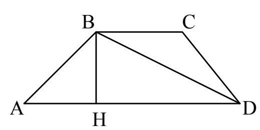
В-3

1. Дано: $BD = 26$ см, $AB = \sqrt{577}$ см, $BH = 24$ см, $BC = 7$ см.

Найти: S – ?

Решение: по теореме Пифагора:

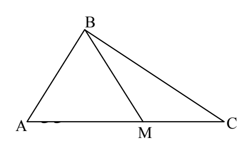
$AH = \sqrt{577 - 24^2} = 1$ (см). $HD = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$ (см).



$S = \frac{1}{2}(10 + 7 + 1) \cdot 24 = 216$ (см^2).

2. Дано: $AB = \sqrt{2}\,BC = 2$, $AM = BM = 1$.

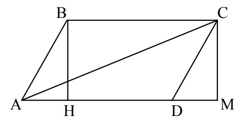
Найти: $\angle ABC$ — ?



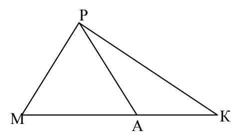
Решение: Т.к. $AM^2 + BM^2 = AB^2$, то ΔABM — равнобедренный прямоугольный, так что $\angle A = \angle ABM = 45°$ и $\angle BMC = 90° \Rightarrow$
т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы, и $BM = (1/2)BC$, то $\angle C = 30°$ и $\cos C = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle MBC = 60° \Rightarrow$

$\angle B = 45° + 60° = 105°$.

В-4



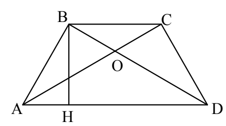
1. Дано: $BH = 9$ см, $AB = \sqrt{82}$ см, $AC = 15$ см.
Найти: S – ?
Решение: по теореме Пифагора
$AH = \sqrt{82 - 9^2} = 1$ (см). $AM = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см). $AD = 12 - 1 = 11$ (см).
$S = 11 \cdot 9 = 99$ (см^2).



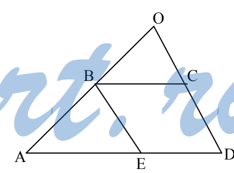
2. Дано: $PK = 2$, $AK = 1$, $MA = AP = \sqrt{3}$.
Найти: $\angle MPK$ – ?
Решение: ΔAPK – прямоугольный, т.к. по теореме Пифагора $AK^2 + PA^2 = 1 + 3 = 4 = PK^2 \Rightarrow$ $\angle PAK = 90°$ и т.к. $AK = (1/2)PK$, то $\angle APK = 30°$, а т.к. $MA = AP$ $\Rightarrow \angle M = \angle MPA = 45° \Rightarrow \angle P = 45° + 30° = 75°$.

В-5

1. Дано: $AB = CD$, $AC \perp CD$, $AB = 26$ см, $AH = 24$ см.
Найти: S – ?

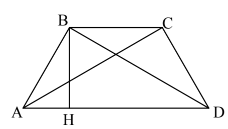


Решение: по теореме Пифагора $BH = \sqrt{26^2 - 24^2} =$ $= 10$ (см). Из задачи С-4 В-6 (1) вытекает, что $AD + BC = 2BH$, т.о. $S = BH^2 = 100$ (см^2).



2. Дано: $AB = 9$ см, $CD = 12$ см, $BC = 15$ см, $AD = 30$ см.
Найти: $\angle AOD$ – ?
Решение: Проведем $BE \parallel CD$. Т.о. $BCDE$ – параллелограмм по построению $\Rightarrow BE = CD$, $ED = BC$, $\Rightarrow AE = 15$ см $\Rightarrow \angle ABE = 90°$, т.к. $AB^2 + BE^2 = AE^2 \Rightarrow \angle O = 90°$ (т.к. $BE \parallel OD$).

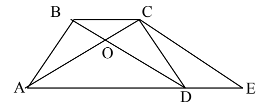
В-6



1. Дано: $AC = 25$ см, $BH = 15$ см.
Найти: S – ?
Решение: т.к. $BD = AC \Rightarrow$ по теореме Пифагора:
$HD = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ см. Из задачи С-4 В-5 (1):
$HD = \dfrac{1}{2}(AD + BC) = 20$ (см). Т.о. $S = HD \cdot BH = 20 \cdot 15 = 300$ (см^2).

2. Дано: $BD = 5$, $AC = 12$, $BC = 3$, $AD = 10$.

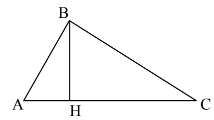
Найти: $\angle AOD$ – ?



Решение: Проведем $CE \parallel BD$, как показано на рисунке. Тогда $BCED$ –параллелограмм по построению и $CE = BD$. $BC = DE$, ΔACE – прямоугольный, $AC^2 + CE^2 = 25 + 144 = 13^2 = (AD + DE)^2 = AE^2$, так что $\angle ACE = 90°$. $\angle AOD$ тоже $90°$ (т.к. $BD \parallel CE$).

В-7

1. Из теоремы косинусов:



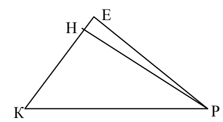
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$; $\cos A = \dfrac{BH}{AB}$, то:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot BH$.

2. Если бы $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ он прямоугольный, а т.к. $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow$ он тупоугольный (следствие теоремы косинусов).

В-8

1. Исходя из предыдущей задачи, т.к. $\angle H$ – тупой $\Rightarrow \cos H = -\dfrac{HE}{HP} \Rightarrow$

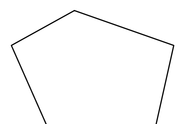


$PK^2 = HP^2 + HK^2 + 2HE \cdot HK$.

2. Если бы $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ он прямоугольный, а т.к. $c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow$ он остроугольный (следствие теоремы косинусов).

С-14

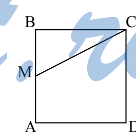
В-1



1. $S = 7 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 =$ $= 63 - 3 - 6 - 5 - 5 = 44$ (клеточки), а так как 1 см^2 = 4 клеточкам, то $S = 11$ (см^2).

2. Дано: $BC = 12$ см, $MC = 13$ см.

Найти: S_{AMCD} – ?

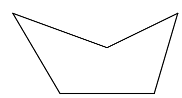


Решение:

По теореме Пифагора: $BM = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

$S_{ABCD} = 12^2 = 144$ см^2. $S_{AMCD} = 144 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 114$ см^2.

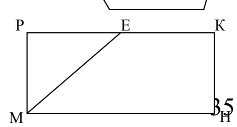
В-2



1. $S = 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 24 - 6 -$ $- 2 - 4 = 12$ (клеточек), т.е. $S = 3$ (см^2).

2. Дано: $ME = 15$ см, $PM = 12$ см, $EK = 6$ см.

Найти: S_{MEKH} – ?



Решение: по теореме Пифагора:

$PE = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (см). $PK = 9 + 6 = 15$ см. $S_{MPKH} = 12 \cdot 15 = 180$ (см^2).

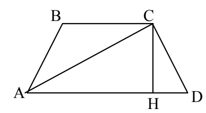
$S_{MEKH} = 180 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 126$ (см^2).

В-3

1. $S = S_{DEC} + S_{EPAB}$. $EPAB$ - прямоугольник, т.к. $ED^2 + AP^2 = AE^2 \Rightarrow$ $S_{EPAB} = 3 \cdot 4 = 12$ (см^2). DEC – прямоугольный треугольник, т.к. $EC =$ $=4 + 1 = 5$ см, и $EC^2 + DC^2 = ED^2 \Rightarrow S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 \Rightarrow$

$S = 12 + 30 = 42$ (см^2).

2. Дано: $AC = \sqrt{35}$ см, $BC = 3$ см, $CH = \sqrt{10}$ см.
Найти: S – ?



Решение: по т. Пифагора $AH = \sqrt{35 - 10} =$ 5 см.
$HD = 5 - 3 = 2$ (см). $AD = 5 + 2 = 7$ (см).

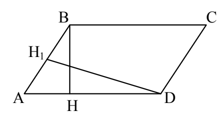
$S = \frac{1}{2}(7 + 3) \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$ (см^2).

В-4

1. $S = S_{HTMP} + S_{EPK}$ $HTMP$ – прямоугольник, т.к. $MP^2 + PH^2 = MH^2 \Rightarrow$ $S_{HTMP} = 3 \cdot 4 = 12$ см^2. В задачнике вероятно опечатка и вместо PH=3 см должно быть $EH = 10$ см. Так как EP=EH+HP=13 см, то $KP^2 + EK^2 = EP^2$ и значит ΔKPE — прямоугольный.

$S_{EPK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$ (см^2). S=30 + 12 = 42 (см^2).

2. Дано: $BH = 4$ см, $AH = HD = 3$ см.
Найти: DH_1 – ?



Решение: по теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

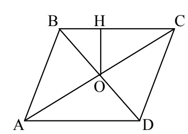
(см), $S = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (см^2) $= AB \cdot DH_1$, $DH_1 = \frac{24}{5} = 4{,}8$ (см).

В-5

1. Третий угол равен 180° – 45° – 105° = 30°. Меньшая высота будет исходить из угла в 105°. Пусть она x, тогда сторона на которую она падает поделится на x и y (т.к. один угол равен 45°).

Т.о. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)x = \sqrt{3}+1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{y} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x^2 + \sqrt{3}x^2 = 2(\sqrt{3}+1) \end{cases}$; $x = \sqrt{2}$ (см).

2. Дано: $AC = 4OH$, $AB = 2$ см.
Найти: S – ?



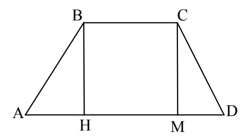
Решение: $OC = 2OH$, т.е. $\angle BCA = 30°$,

$\cos 30° = OC/BC$, $BC = AB = 2$, $OC = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$S = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\sin 30° = 2\sqrt{3}$ (см^2).

В-6

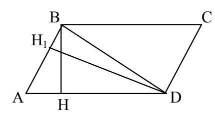
1. Дано: $AD = 6$ см, $BC = 4$ см, $\angle A = 30°$, $\angle D = 45°$.
Найти: S – ?



Решение: $c\text{tg}30° = \dfrac{AM}{BH} = \sqrt{3}$. $MD = CM$ (т.к. $\angle D = 45°$). $AM = \sqrt{3}\,BH = \sqrt{3}\,MD$ (так как $BH = CM = MD$). $AD = 4 + (\sqrt{3} + 1)MD = 6$, $MD = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ (см) $= BH$.

$S = \dfrac{1}{2} \cdot (6 + 4)\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{10}{\sqrt{3}+1}$ (см^2).

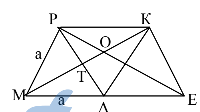
2. Дано: $BH = 6$ см, $DH_1 = 7{,}8$ см, $S = 78$ см^2.
Найти: BD – ?



Решение: $S = AD \cdot 6 = 78$, $AD = 13$ (см).
$S = AB \cdot 7{,}8 = 78$, $AB = 10$ (см). По теореме Пифагора: $AH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), $HD = 13 – 8 = 5$ (см),
$BD = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$ (см).

В-7

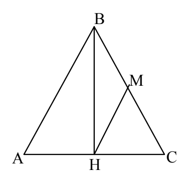
1. Дано: $AM = MP = a$, $AE = EK$.
Найти: S – ?



Решение: $\Delta MTA = \Delta TPK$ (т.к. $PT = TA$, $\angle MTA = \angle PTK$ и $\angle MAP = \angle APK$).
Т.о. $PK = MA = a \Rightarrow MPKA$ – ромб, т.о. $PA \parallel KE$, $PA = KE \Rightarrow$ трапеция равнобокая, а так как основания a и $2a$, значит высота ее равна $\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$S = \dfrac{1}{2}(a + 2a)\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Дано: $BH = HM = 12$ см, $BM = MC$.
Найти: S – ?



Решение: Т.к. центр описанной окружности вокруг прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы $\Rightarrow$ $HM = MC = BM = 12$ см.
Т.о. $AB = 24$ (см). По теореме Пифагора:

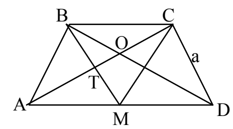
$AH = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{432} = 2\sqrt{108} = 12\sqrt{3}$ (см). $AC = 2AH = 24\sqrt{3}$ (см).

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$ (см^2).

В-8

<u>1.</u> Дано: $AM = MD$, $AB = BC = CD = a$.

Найти: S – ?

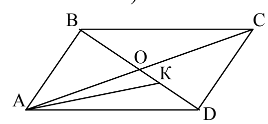


Решение: Т.к. $AC \perp BM$, то $ABCM$ – ромб $\Rightarrow$ $AM = CM = AB = a = BM$, далее аналогично предыдущей задаче. $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

<u>2. Дано:</u> $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 15°$, $AD = 12$ см.

Найти: S – ?

Решение: $\angle BAD = 180° - 90° - 15° = 75°$. Отметим на BD точку K так, чтобы $\angle BAK = 60°$ $\Rightarrow$ $\angle BKA = 30°$. $\angle KAD = 15°$. Пусть $BA = a$, тогда $AK = 2a$, $AK = KD = 2a$ (так как $\angle KAD = \angle KDA = 15°$).



$\cos 30° = \dfrac{BK}{AK}$, $BK = \sqrt{3}\,a$. $BD = a(2 + \sqrt{3})$.

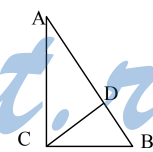
$AD^2 = AB^2 + BD^2$, т.е. $12^2 = a^2(7 + 4\sqrt{3}) + a^2$.

Т.о. $a^2 = \dfrac{144}{8 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{36}{2 + \sqrt{3}}$, $a = \dfrac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

$S = AB \cdot BD = \dfrac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}(2 + \sqrt{3}) = 36$ (см^2).

С-15

В-1



<u>1.</u> $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EF}{MN}$, $AB = 5$ см, $CB = 80$ мм, $MN = 1$ дм,

$\dfrac{5}{8} = \dfrac{EF}{10}$, $EF = \dfrac{25}{4}$ (см) = 6,25 (см).

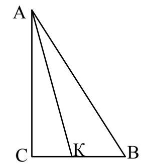
<u>2. Дано:</u> $AC = 6$ см, $BC = 8$ см

Найти: AB, AD, DB — ?

Решение: По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см). Пусть $AD = x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AC}{x} = \dfrac{CB}{10 - x}$ (по свойству биссектрисы). $8x = 60 - 6x$, $14x = 60$, $x = \dfrac{30}{7}$ (см) и $10 - \dfrac{30}{7} = \dfrac{40}{7}$ (см).

Ответ: 10, $^{30}/_{7}$, $^{40}/_{7}$ (см).

В-2



1. $\dfrac{KP}{MN}=\dfrac{DO}{AL}$, KP = 8 дм, MN = 40 см, DO = 1 м,

$\dfrac{8}{4}=\dfrac{10}{AL}$, AL = 5 дм.

2. Дано: AB = 20 см, AC = 16 см.

Найти: BC, BK, KC — ?

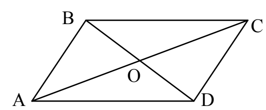
Решение: По теореме Пифагора: $CB=\sqrt{20^2-16^2}$ =12 см. Пусть $BK = x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{x}=\dfrac{AC}{12-x}$ (по свойству биссектрисы); 240 – 20x = 16x, x = $\dfrac{20}{3}$,

$12 - x = \dfrac{16}{3}$ (см).

Ответ: $\dfrac{20}{3}$, $\dfrac{16}{3}$ и 12 (см).

В-3

1. Дано: CD = 10 см, $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{AC}{OC}$.



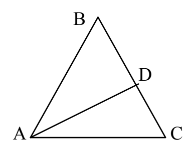
Найти: P — ?

Решение: $\dfrac{BC}{10}=\dfrac{2OC}{OC}$, (т.к. AC = 2OC),

BC = 20 см, $P = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 60$ (см).

2. Дано: $AB = BC$, $AC = AB$– 9,6, BD : DC = 5 : 3.

Найти: P — ?



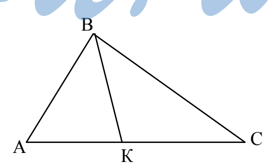
Решение: $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$ (по свойству биссектрисы),

$\dfrac{AC+9{,}6}{AC}=\dfrac{5}{3}$, 3$AC$ + 28,8 = 5AC, AC = 14,4 (см),

$AB = BC$ = 14,4 + 9,6 = 24 (см), $P = 2 \cdot 24 + 14{,}4 = 62{,}4$ (см).

В-4

1. Дано: S_{ABK}:S_{KBC} = $\dfrac{1}{3}$, BC = 10 см, $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{AK}{KC}$.



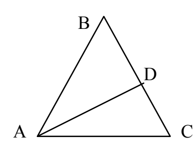
Найти: AC — ?

Решение: Т.к. $\dfrac{S_{ABK}}{S_{KBC}}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ AK = KC = 1 : 3,

т.о. (10/AC)=(1/3), AC = 30 (см).

2. Дано: AC = 18 мм, DC = 12 мм.

Найти: P — ?



Решение: $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$ (по свойству биссектрисы).

Пусть $BD = x$, $\frac{x+12}{x} = \frac{3}{2}$, $\frac{12}{x} = \frac{1}{2}$, $x = 24$, $AB = BC = 36$. Т.о. $P = 2 \cdot 36 + 18 = 90$ (мм).

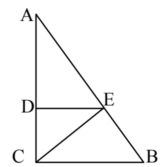
В-5

1. Дано: $\frac{AC}{CB} = \frac{EM}{MK}$.

Доказать: $AB \cdot MK = CB \cdot EK$

Доказательство:

$\frac{AC}{CB} = \frac{EM}{MK} \Rightarrow \frac{AC+CB}{CB} = \frac{EM+MK}{MK} \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{EK}{MK} \Rightarrow AB \cdot MK = CB \cdot EK$.



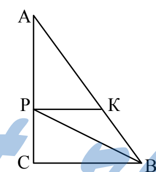
2. Дано: $DE \parallel BC$, $DE = DC$, $AE = 15$ мм, $EB = 20$ мм.

Найти: P – ?

Решение: $DE \parallel BC$, $\angle EDC = 90°$ и $DE = DC$ $\Rightarrow \angle ECD = \angle ECB = 45° \Rightarrow CE$ – биссектриса. Т.о. $\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{EB}$ (по свойству биссектрисы), $AC = \frac{3}{4} CB$, по теореме Пифагора $35 = \sqrt{BC^2 + \frac{9}{16} BC^2}$, $\frac{5}{4} BC = 35$, $BC = 28$, $AC = 21$, $P = 84$ (мм).

В-6

1. $\frac{KP}{MP} = \frac{EC}{LC} \Rightarrow \frac{KM+MP}{MP} = \frac{EL+LC}{LC} \Rightarrow \frac{KM}{MP} = \frac{EL}{LC} \Rightarrow$
$KM \cdot LC = EL \cdot MP$.

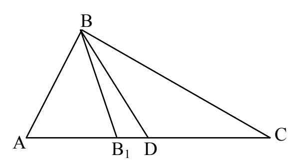


2. Дано: $PK \parallel BC$, $PK = KB$, $AP = 5$ дм, $PC = 4$ дм.

Найти: P — ?

Решение: Пусть $\angle KBP = \alpha$, тогда $\angle BPK = \alpha$ (т.к. $PK = KP$). Т.к. $PK \parallel BC$, $\angle CBP = \angle BPK = \alpha$, $\angle CBP = \alpha$ $\Rightarrow BP$ – биссектриса, т.о. $\frac{CB}{PC} = \frac{AB}{AP}$ (по свойству биссектрисы), $AB = \frac{5}{4} CB$. По теореме Пифагора: $9 = \sqrt{\frac{25}{16} CB^2 - CB^2} = \frac{3}{4} CB$, $CB = 12$ (дм), $AB = 15$ дм $\Rightarrow P = 15 + 12 + 9 = 36$ (дм).

В-7



1. Дано: $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.

Доказать: $\angle ABD > \angle DBC$

Доказательство: Проведем биссектрису

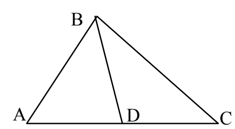
BB_1, тогда $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}$ по свойству биссектрисы, но т.к. $\frac{AD}{DC}>\frac{AB}{BC}$ $\Rightarrow$ $\frac{AD}{DC}>\frac{AB_1}{B_1C}$ $\Rightarrow$ $\frac{AD+DC}{DC}>\frac{AB_1+B_1C}{B_1C}$. Т.о. $\frac{AC}{DC}>\frac{AC}{B_1C}$ $\Rightarrow DC < B_1C \Rightarrow \angle ABD > \angle DBC$.

2. Пусть E – искомая точка, продлим луч CB на отрезок $BD = AB$. Так как BE — биссектрисса $\angle EBD = \angle EBA$ и $\Delta ABE = \Delta DBE$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow AE = DE$, и $\angle CEB = \angle BED \Rightarrow EB$ – биссектриса $\angle CED \Rightarrow$ (по свойству биссектрисы) $\frac{BC}{DB}=\frac{AE+AC}{DE}$; $\frac{9}{AB}=\frac{AE+2}{AE}$; $\frac{9}{8}=1+\frac{2}{AE}$; $AE = 16$ см.

В-8

1. Дано: $\angle ABD > \angle DBC$.

Доказать: $\frac{AD}{DC}>\frac{AB}{BC}$.



Доказательство: Допустим это не так, $\frac{AD}{DC}\le\frac{AB}{BC}$.

Исходя из предыдущей задачи, если $\frac{AD}{DC}\le\frac{AB}{BC}$ $\Rightarrow \angle ABD \le \angle DBC$, т.о. пришли к противоречию.

2. Из предыдущей задачи: E – точка пересечения биссектрисы внешнего угла с AC, а H – биссектрисы внутреннего угла CB. $PB = AB$ $\Rightarrow$ (по свойству биссектрисы) $\frac{BC}{DB}=\frac{AE+AC}{DE}$. $\frac{24}{20}=1+\frac{16}{AE}$, $AE = 80$, далее $\frac{AB}{AH}=\frac{BC}{HC}$; $\frac{20}{AH}=\frac{24}{16-AH}$; $80 - 5AH = 6AH$, $AH = \frac{80}{11}$ (см).

$EH = \frac{80}{11}+80=87\frac{3}{11}$ (см).

С-16

В-1

1. Дано: $EF = 14$, $DF = 20$, $BC = 21$.

Найти: AC — ?

Решение: $\frac{EF}{BC}=\frac{DF}{AC}$ (т.к. они подобны), $AC=\frac{21\cdot 20}{14}=30$.

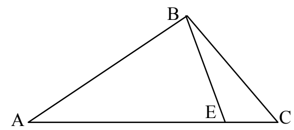
2. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{25}=k^2$, т.о. $k=\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{x}=\frac{4}{5}$, $x=\frac{10}{4}$ см = 2,5 (см).

В-2

1. Т.к. они подобны, то соответствующие их углы равны $\Rightarrow \angle T = \angle F$, $\angle K = \angle E$, $\angle P = \angle M$.
$\angle T = 20°$, $\angle K = 40°$, $\angle M = 180° - 20° - 40° = 120° = \angle P$.

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5} = k$, $\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{4}{25} = \frac{8}{x}$, $x = (50$ см$^2)$.

В-3

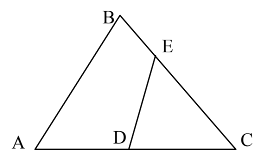


1. Запишем отношение подобия: $\frac{BC}{AC} = \frac{EC}{BC}$ (т.к. $\angle ABC$ и $\angle BEC$ – тупые и $\angle C$ – общий).
$BC^2 = EC^2 + EC \cdot AE = 81 + 144 = 225$, $BC = 15$ (см).

2. Т.к. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3} = k \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{4}{9} \\ S_1 + S_2 = 260 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_1 = \frac{4}{9} S_2 \\ \frac{13}{9} S_2 = 260 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_1 = 80 \quad (см^2) \\ S_2 = 180 \quad (см^2) \end{cases}.$$

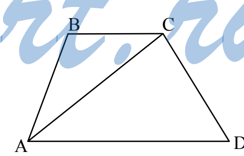
В-4



1. Запишем отношение подобия: $\frac{CE}{AC} = \frac{DC}{BC}$ (т.к. $\angle C$ – общий и $DE \| AB$), CE=((3+5) · 5)/7= = 40/7 (см).

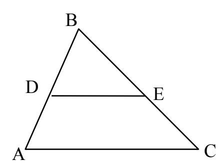
2. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{50}{32} = k^2$, $k = \frac{5}{4}$, $\begin{cases} \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4} \\ P_1 + P_2 = 117 \end{cases}$; $\begin{cases} P_1 = \frac{5}{4} P_2 \\ \frac{9}{4} P_2 = 117 \end{cases}$ 1; $\begin{cases} P_1 = 65 \quad (дм) \\ P_2 = 52 \quad (дм) \end{cases}$.

В-5



1. Дано: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $BC = 4$ см, $AB = 9$ см.
Найти: AC — ?
Решение:
Т.к. $\angle CAD = \angle ACB$, то отношение подобия: $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = 4 \cdot 9 = 36$, $AC = 6$ (см).

2. Дано: $S_{ABC} = 27$ см^2, $\frac{BD}{AB} = \frac{1}{3}$.
Найти: S_{ADEC} — ?

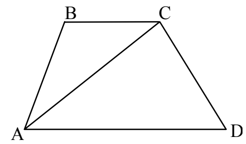


Решение: $\frac{BD}{AB} = k = \frac{1}{3}$, $\Delta ABC \sim \Delta DBE$ по 3-м сторонам $\Rightarrow$

$\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{9}$, $S_{DBE} = 3$ см^2, $S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{DBE} = 24$ см^2.

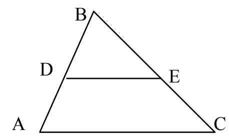
В-6

<u>1. Дано:</u> $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, AC – биссектриса, $AB = 9$ см, $CD = 12$ см.
Найти: Р — ?



Решение: Т.к. $\angle CAB = \angle CAD = \angle BCA$, то
$AB = BC = 9$ см. Т.к. $\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow$
$\angle CAB = \angle D \Rightarrow CD = CA \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{AC}{AD}$,
$AD = CD^2 : 9 = 16$ (см) $\Rightarrow P = 12 + 2 \cdot 9 + 16 = 46$ (см).

<u>2. Дано:</u> ВР:$AB = 1 : 4$, $S_{ADEC} = 30$ см^2.
Найти: S_{ABC} — ?

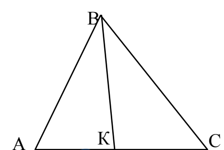


Решение: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$ по трем сторонам $k = \frac{1}{4}$.

$$\begin{cases} \frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = k^2 = 16 \\ S_{ABC} - S_{DBE} = 30 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_{DBE} = \frac{1}{16} S_{ABC} \\ \frac{15}{16} S_{ABC} = 30 \end{cases}; \quad S_{ABC} = 32 \text{ см}^2.$$

В-7

<u>1. Дано:</u> $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$, $\Delta ABK \sim \Delta KBC$.



Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — ?
Решение: 1. Если $\angle B \neq 90°$, то BK не может быть перпендикулярно AC, т.к. ΔABK не будет $\sim \Delta KBC$.
2. Если BK не перпендикулярна $AC \Rightarrow \angle BKC$ тупой (острый) $\Rightarrow$ $\angle C + \angle KBC = 180° - \angle BKC = \angle AKB \Rightarrow$ ΔABK не будет $\sim \Delta BKC$.
3. Если $BK \perp AC$ и BK – биссектриса, то ΔABC равнобедренный и $\Delta ABK = \Delta BKC$, что неверно. Т.о. остается только $\angle B = 90°$, $BK \perp AC$
$\Rightarrow$ т.к. $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{3}$ и т.к. $\Delta ABK \sim \Delta BKC \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow$

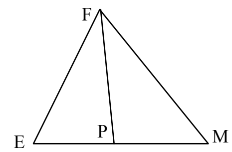
$KB^2 = AK \cdot KC = \frac{1}{3} CK^2$. Т.о. $KC = \sqrt{3}\, KB$.

По теореме Пифагора: $BC^2 = BK^2 + 3BK^2$, $BC = 2BK \Rightarrow \angle C = 30°$, $\angle A = 60°$.
Ответ: 30°, 60°, 90°.

В-8

1. Дано: $\Delta EFP \sim \Delta PFM$, $\angle PFM = 60°$, $S_{PFM} = 30$ см^2.

Найти: S_{EFM} — ?



Решение: Их предыдущей задачи: $\angle F = 90°$, $FP \perp EM$. Т.о. $\angle M = 30°$, $FP = (1/2)\,FM \Rightarrow$

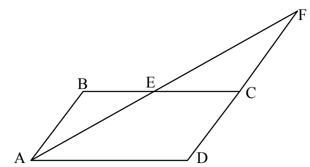
$S_{PFM} = \frac{1}{2} \cdot 2FP^2 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} FP^2 = 30.$

$FP = \sqrt{\frac{60}{\sqrt{3}}} = \sqrt{20\sqrt{3}}$ (см), $\angle EFP = 30° \Rightarrow EP = (1/2)EF \Rightarrow$ по теореме Пифагора: $EF = \sqrt{\frac{1}{4}EF^2 + 20\sqrt{3}}$, $\frac{3}{4}EF^2 = \sqrt{20\sqrt{3}}$, $EF = \sqrt{\frac{80}{\sqrt{3}}}$,

$EP = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$, $S_{EFP} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{20\sqrt{3}} = 10$ см^2, $S_{EFM} = 10 + 30 = 40$ см^2.

С-17

В-1



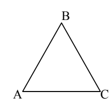
1. Т.к. $AB \| CD \Rightarrow \angle BAE = \angle F$ (накрест лежащие).

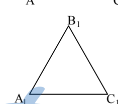
$\angle B = \angle ECF, \angle BEA = \angle FEC$ (вертикальные).

Т.о. $\Delta ABE \sim \Delta ECF$ (по трем углам).

2. Дано: $\angle B_1 = \angle C$, $AC = 2$; $\angle B = \angle A_1$; $B_1C_1 = 4$; $A_1C_1 = AB + 2{,}2$; $A_1B_1 = 2{,}8$.

Решить треугольники.





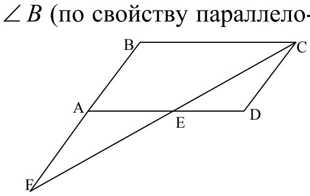
Решение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум углам $\Rightarrow$ $\frac{BC}{A_1B_1} = \frac{AB}{A_1C_1} = \frac{AC}{B_1C_1}$, т.е. $BC = \frac{2{,}8 \cdot 2}{4} = 1{,}4$, т.е. $\frac{BC}{A_1B_1} =$

$= k = \frac{1{,}4}{2{,}8} = \frac{1}{2}$, т.е. $AB = (1/2)A_1C_1 = (1/2)AB + 1{,}1$.

$AB = 2{,}2$; $A_1C_1 = 4{,}4$.

В-2

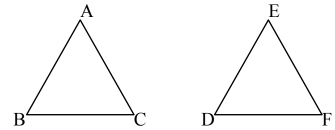
1. Т.к. $AB \parallel CD \Rightarrow \angle F = \angle FCD$, $\angle D = \angle B$ (по свойству параллелограмма), $\angle BCF = \angle DEC$ (накрест лежащие), т.о. $\Delta FBC \sim \Delta ECD$ (по трем углам).



2. Дано: $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AC = 6$, $EF = 2$, $AB = 3{,}3$, $DF = BC - 3{,}2$.

Решить треугольники.

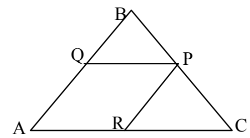
Решение: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ по двум углам $\Rightarrow$ $\frac{AC}{EF} = 3 = k$, $AB = 3ED \Rightarrow$



$ED = 1{,}1;\ \dfrac{BC}{DF} = 3 \Rightarrow BC = 3BC - 9{,}6.$

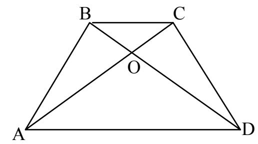
Т.о. $BC = 4{,}8;\ DF = 1{,}6.$

В-3



1. Т.к. $QP \parallel AC$ и $PR \parallel AB \Rightarrow \angle C = \angle QPB$, $\angle PRC = \angle BQP$, $\angle B = \angle RPC$. Т.о. $\Delta QBP \sim \Delta RPC$ (по трем углам) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{CR} = \dfrac{BQ}{PR}$.

Т.о. $PQ \cdot PR = BQ \cdot CR$.



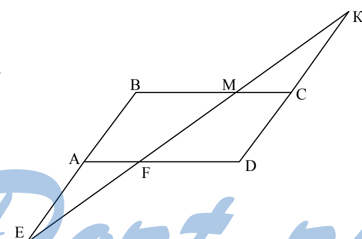
2. Дано: $\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \dfrac{1}{9}$, $BC + AD = 4{,}8$.

Найти: BC и AD — ?

Решение: $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (по двум углам), т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \angle OAD = \angle OCB$ (накрест лежащие) и $\angle AOD = \angle BOC$ (вертикальные), т.е. $\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = k^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow$

$k = \dfrac{1}{3}$, т.е.: $\begin{cases} \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3} \\ BC + AD = 4{,}8 \end{cases}$; $\begin{cases} BC = \dfrac{1}{3}AD \\ \dfrac{4}{3}AD = 4{,}8 \end{cases}$; $\begin{cases} AD = 3{,}6 \\ BC = 1{,}2 \end{cases}$.

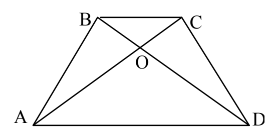
В-4



1. Т.к. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AP \Rightarrow$
$\angle AFE = \angle KFD = \angle FMB = \angle KMC$ (вертикальные), $\angle E = \angle K$.
Т.о. $\Delta AFE \sim \Delta MKC$ (по двум углам)
$\Rightarrow \dfrac{AE}{KC} = \dfrac{AF}{MC} \Rightarrow AE \cdot MC = AF \cdot KC.$

2. Дано: $\dfrac{P_{BOC}}{P_{ABO}} = \dfrac{2}{3}$, $AC = 20$.

Найти: AO и OC — ?

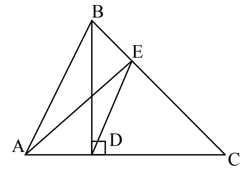


Решение: Т.к. $\Delta BOC \sim \Delta AOB$ (смотри предыдущую задачу) и $k = \dfrac{P_{BOC}}{P_{ABO}} = \dfrac{2}{3}$, то:

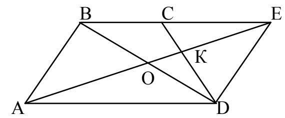
$\begin{cases} \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{2}{3} \\ OC + OA = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} OC = \dfrac{2}{3}OA \\ \dfrac{5}{3}OA = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} OA = 12 \\ OC = 8 \end{cases}$.

В-5

1. $\Delta AEC \sim \Delta BDC$ (по двум углам) ($\angle C$ – общий) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{EC} \Rightarrow BC \cdot EC = DC \cdot AC$.

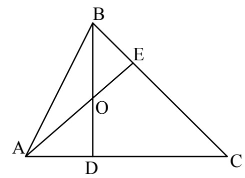


2. Дано: $CK : KD = 1 : 2$, $BC : AD = 1 : 2$.
Доказать: $BO = OD$
Доказательство: Продлим AO до пересечения с BC. $\Delta CEK \sim \Delta AKD$ (т.к. $BC \| AD \Rightarrow \angle EAD = \angle AEC$, $\angle OKD = \angle CKE$ как вертикальные), т.о. $\dfrac{CE}{AD} = \dfrac{CK}{KD} = \dfrac{1}{2}$ и т.к. $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BE = AD$ и $BE \| AD \Rightarrow ABED$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $BO = OD$.

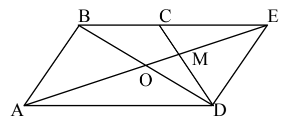


В-6

1. $\Delta BOE \sim \Delta AOD$, (по трем углам), т.к. $\angle BEO = \angle ODA = 90°$ и $\angle AOD = \angle BOE$ (вертикальные) $\Rightarrow \dfrac{BO}{OA} = \dfrac{OE}{OD} \Rightarrow$
$BO \cdot OD = OE \cdot OA$.

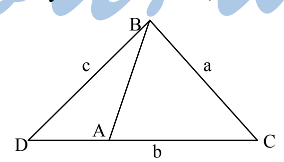


2. Дано: $CM : MD = 2 : 3$, $AB = AD$, $BC : AD = 1 : 3$.
Доказать: $BD \perp AM$.
Доказательство: Продлим AO до пересечения с BC. $\Delta CEM \sim \Delta AMD$ (смотри предыдущую задачу). Т.о. $\dfrac{CE}{AD} = \dfrac{CM}{MD} = \dfrac{2}{3}$ и т.к. $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BE = AD = AB \Rightarrow ABED$ – ромб, т.о. $BD \perp AE$.

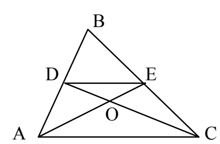


В-7

1. Дано: $\angle A = 2\angle B$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
Доказать: $a^2 = bc + b^2$.
Доказательство: Продлим луч CA до $AD = AB$. Пусть $\angle D = \alpha$, тогда $\angle DAB = 180° - 2\alpha$, $\angle BAC = 2\alpha$, а т.к. $\angle ABC = \angle BAC \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ABC = \alpha \Rightarrow$ $\Delta DBC \sim \Delta ABC$ (по двум углам), т.к. $\angle C$ – общий $\Rightarrow \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow$
$a^2 = (b + c)b = b^2 + cb$.



2. Дано: $S_{AOD} = S_{CEO} = 8$, $S_{DOE} = 4$.
Найти: S_{ABC} — ?
Решение: Так как $S_{ADO} = S_{CEO}$, то $S_{ADE} = S_{CDE} \Rightarrow$



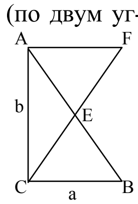
$DE \parallel AC$ и $\frac{AO}{OE} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \Delta\, DEO \sim \Delta\, AOC$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$, т.о. $S_{AOC} = 4S_{DOE} = 16$, т.о. $S_{ADEC} = 16+4+28=36$ и т.к. $\frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$ и $\Delta\, DBE \sim \Delta\, ABC$ (по двум углам), то $S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{DBE} = S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{ABC} =$ $= \frac{3}{4} S_{ABC} = 36$, $S_{ABC} = 48$.

В-8

1. <u>Дано:</u> $BC = a$, $AC = b$, $AE : EB = 1 : 2$.

Доказать: $CE = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$.

Доказательство: Продлим луч CE до пересечения с прямой, проведенной через точку A, параллельно CB. Т.к. $AF \parallel CB \Rightarrow \angle F = \angle FCB$ и $\angle BEC = \angle AEF$ (как вертикальные). Т.о. $\Delta\, AEF \sim \Delta\, CEB$ (по двум углам). Т.о. $\frac{AF}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$. Т.о. $AF = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора: $CF = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Т.к. $\Delta\, AEF \sim \Delta\, CEB$ с коэффициентом $\frac{1}{2} \Rightarrow CE = \frac{2}{3} CF$, т.е. $CE = \frac{1}{3}\sqrt{4b^2 + a^2}$.

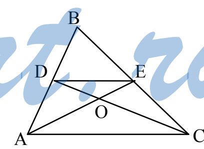


2. <u>Дано:</u> $S_{ADC} = S_{AEC}$, $S_{DOE} = 2$, $S_{AOC} = 8$.

Найти: S_{ABC} — ?

Решение: Т.к. $S_{ADC} = S_{AEC}$, то $DE \parallel AC \Rightarrow$ $\Delta\, DOE \sim \Delta\, AOC$ (по трем углам) с коэффициентом подобия $k^2 = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$. $S_{AOC} = (1/2)AO \cdot OC \cdot \sin AOC =$ $= (1/2)AO \cdot 2OD \cdot \sin DOA = 2S_{DOA} = 8$.

$S_{ADEC} = 8 + 8 + 2 = 18$. $\Delta\, DBE \sim \Delta\, ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (см. предыдущую задачу), т.о. $S_{ABC} = S_{DBE} + S_{ADEC} = \frac{1}{4} S_{ABC} + 18 = S_{ABC}$, т.е. $S_{ABC} = 24$.

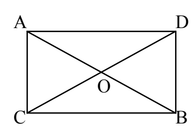


С-18

В-1

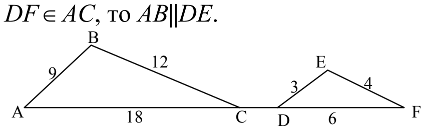
1. <u>Дано:</u> $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$.

Доказать: $\angle CBO = \angle DAO$.



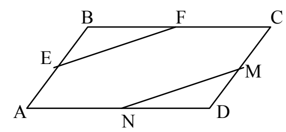
Доказательство: $\Delta\, ADO \sim \Delta\, COB$, по углу и двум пропорциональным сторонам $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{DO}{OC}$ и $\angle\, AOD = \angle\, COB$ (как вертикальные) $\Rightarrow$ $\angle\, CBO = \angle\, DAO$.

<u>2.</u> $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$, по трем сторонам, т.к. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow$ $\angle\, D = \angle\, A$, т.к. $DF \in AC$, то $AB \| DE$.



В-2

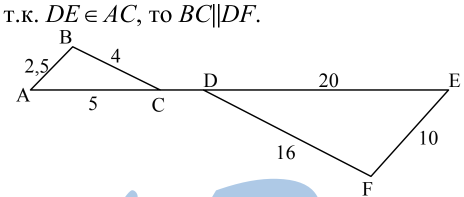
<u>1. Дано:</u> $\dfrac{EB}{BF} = \dfrac{DM}{DN}$.



Доказать: $\angle\, BEF = \angle\, NMD$.

Доказательство: $\Delta\, EBF \sim \Delta\, NMD$ по углу и двум пропорциональным сторонам (т.к. $\angle\, B = \angle\, D$ и $\dfrac{BE}{BF} = \dfrac{DM}{DN}$). Т.о. $\angle\, BEF = \angle\, NMD$.

<u>2.</u> $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$, по трем сторонам, т.к. $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BC}{DF} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ $\angle\, C = \angle\, D$, а т.к. $DE \in AC$, то $BC \| DF$.

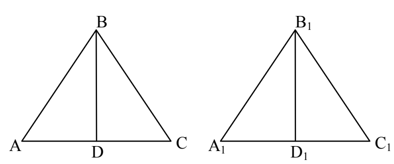


В-3

<u>1. Дано:</u> $\angle\, A = \angle\, A_1$, $\angle\, BDA = \angle\, B_1D_1A_1$.

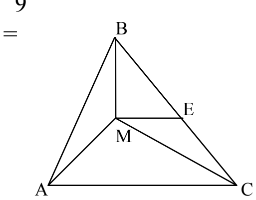
Доказать: $\Delta\, BDC \sim \Delta\, B_1D_1C_1$.

Доказательство: $\Delta\, ABD \sim \Delta\, A_1B_1D_1$ по трем углам $\Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{B_1D_1}{A_1D_1}$, а т.к. $AD = DC$ и $A_1D_1 = D_1C_1 \Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{B_1D_1}{D_1C_1}$ и $\angle\, BDC = \angle\, B_1D_1C_1 \Rightarrow$



$\Delta\, DBC \sim \Delta\, D_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу.

<u>2. Дано:</u> $AB = 4$ см, $MB = 1\dfrac{7}{9}$, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см, $ME =$



$2\frac{2}{3}$, $CE = 2$.

Доказать: $ME \parallel AC$.

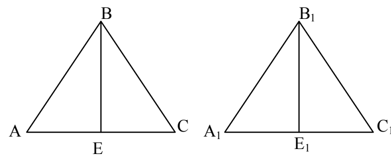
Доказательство: $BE = 6 - 2 = 4$. $\Delta BME \sim \Delta ABC$, по трем сторонам, т.к. $\frac{BE}{AC} = \frac{ME}{BC} = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{9}$, т.о. $\angle BEM = \angle C \Rightarrow ME \parallel AC$.

В-4

<u>1. Дано:</u> $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AE}{EC} = \frac{A_1E_1}{E_1C_1}$.

Доказать: $\Delta ABE \sim \Delta A_1B_1E_1$.

Доказательство: Т.к. BE и B_1E_1 – биссектрисы и $\angle B = \angle B_1$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{A_1C_1}{E_1C_1} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$

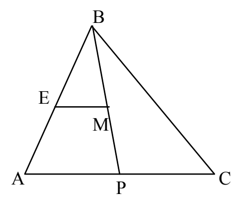


$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по углу и двум сторонам $\Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{A_1B_1}{B_1E_1}$ и $\angle ABE = \angle A_1B_1E_1 \Rightarrow$

$\Delta ABE \sim \Delta A_1B_1E_1$ по углу и двум сторонам.

<u>2. Дано:</u> $AB = 4$, $AC = 7$, $ME = 4\frac{1}{2}$, $BC = 6$, $MB = 5\frac{1}{4}$, $AE = 1$.

Доказать: ΔAPB – равнобедренный.

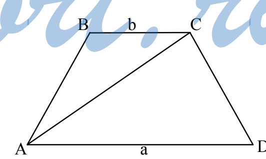


Доказательство: $BE = 4 - 1 = 3$. $\Delta EBM \sim \Delta ABC$, по трем сторонам, т.к. $\frac{EB}{AB} = \frac{BM}{AC} = \frac{EM}{BC} = \frac{3}{4}$, т.о. $\angle ABP = \angle A \Rightarrow AP = BP \Rightarrow \Delta ABP$ – равнобедренный.

В-5

<u>1. Дано:</u> $AD = a$, $BC = b$, $AC = \sqrt{ab}$.

Доказать: $\angle BAC = \angle ADC$.



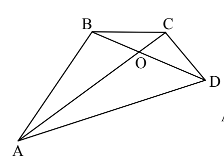
Доказательство: Т.к. $\frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$,

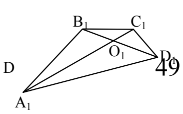
т.е. $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$, и $\angle BCA = \angle CAD \Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ по углу и двум сторонам $\Rightarrow \angle D = \angle BAC$.

<u>2. Дано:</u> $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$; $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$; $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$; $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.





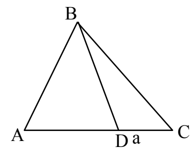
Доказательство: $\Delta ADC \sim \Delta A_1D_1C_1$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AD}{A_1D_1}$.

$\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1$.

Т.о. $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$ по трем углам $\Rightarrow \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AD}{A_1D_1} \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и

т.к. $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по углу и двум сторонам.

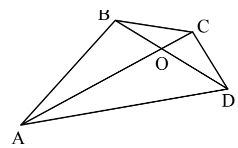
В-6



1. Дано: $DC = a$, $AC = b$, $BC = \sqrt{ab}$.
Доказать: $\angle BAC = \angle DBC$.
Доказательство: $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ по углу и двум сторонам т.к. ($\angle C$ – общий и $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$, т.к.

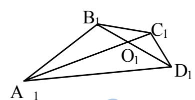
$\dfrac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$). Т.о. $\angle BAC = \angle DBC$.

2. Дано: $AO = OC$; $A_1O_1 = O_1C_1$; $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$; $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$; $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$.
Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
Доказательство: $\Delta AOD \sim \Delta A_1O_1D_1$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{AO}{A_1O_1} = \dfrac{AD}{A_1D_1}$ и $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$,



т.к. $AC = 2AO$ и $A_1C_1 = 2A_1O_1$, то $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AD}{A_1D_1}$,

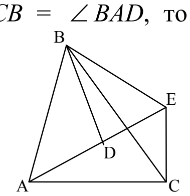
$\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$ (по двум углам) $\Rightarrow$ и $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AD}{A_1D_1} \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и



$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

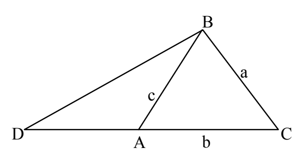
В-7

1. Дано: $\angle EBC = \angle ABD$, $\angle ECB = \angle BAD$.
Доказать: $\Delta DBE \sim \Delta ABC$.
Доказательство: Так как $\angle EBC = \angle ABD$ и $\angle ECB = \angle BAD$, то $\angle BDA = \angle BEC$. $\Delta BDA \sim \Delta BEC$ (по двум углам).



Т.о. $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BE}{BD}$ (т.к. $\angle CBE = \angle ABD$) $\Rightarrow \angle CBE + \angle DBC =$
$= \angle EBD = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.
Т.о. $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ по трем углам.

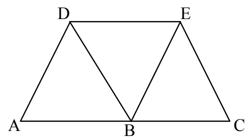
2. Дано: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $a^2 = bc + b^2$.
Доказать: $\angle A = 2\angle B$.



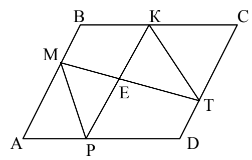
Доказательство: Продлим луч CA до $AD = AB$, т.к. $a^2 = b(b + c)$ $\Rightarrow$ $BC^2 = AC \cdot DC$ $\Rightarrow$ $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$ $\Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta DBC$ (по углу и двум сторонам). Т.е. $\angle BAC = \angle DBC$.
Пусть $\angle D = \alpha$ $\Rightarrow$ $\angle DAB = 180° - 2\alpha \Rightarrow$ $\angle BAC = 2\alpha = \alpha + \angle ABC$.
Т.о. $\angle A = 2\angle B$.

В-8



1. Дано: $\angle ADB = \angle EBC$, $\angle DAB = \angle BCE$.
Доказать: $\angle BDE = \angle ADB$.
Доказательство: $\Delta ADB \sim \Delta BEC$ по двум углам $\Rightarrow$ $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DB}{BE}$, а т.к. $AB = BC$, то $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DB}{BE}$,
$\angle ABD = 180° - \angle A - \angle ADB$.
$\angle DBE = 180° - \angle EBC - 180° + \angle A + \angle ADB = \angle A$, т.о. $\Delta ADB \sim \Delta DBE$ по двум сторонам и углу $\Rightarrow$ $\angle BDE = \angle ADB$.



2. Дано: $\dfrac{AM}{CT} = \dfrac{AP}{CK} = \dfrac{1}{2}$.

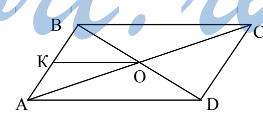
Найти: $\dfrac{ME}{ET}$ — ?

Решение: Т.к. $\angle A = \angle C$ и $\dfrac{AM}{CT} = \dfrac{AP}{CK}$, то

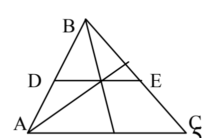
$\Delta AMP \sim \Delta KTC$ по углу и двум сторонам с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$, т.о. $MP \parallel KT$ $\Rightarrow$ $MKTP$ – трапеция $\Rightarrow$ $\Delta MEP \sim \Delta KTE$ по свойству трапеции с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow ME : ET = \dfrac{1}{2}$.

С-19

В-1



1. Дано: $AK = KB$, $AK = 3$ см, $KO = 4$ см.
Найти: P — ?
Сравнить: $\angle KOA$ и $\angle BCA$.
Решение: Т.к. $AK = KB$ и $BO = OD \Rightarrow KO$ – средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow KO \parallel AD \parallel BC \Rightarrow$ $\angle KOA = \angle BCA \Rightarrow KO =$ $= (1/2)AD$ $\Rightarrow$ $AB = 3 \cdot 2 = 6$ и $AD = 4 \cdot 2 = 8$, $P = 2(6 + 8) = 28$ (см).

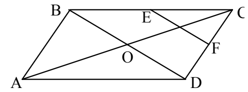


2. Дано: $AC = 12$ см.
Найти: DE — ?
Решение: Т.к. медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, то $DE = (2/3)AC = 8$ (см).

В-2

<u>1. Дано:</u> $BE = EC$, $CF = FD$.

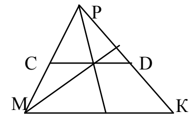
Доказать: $EF = BO$, $EF \perp AC$.



Доказательство: Т.к. $BE = EC$ и $CF = FD \Rightarrow EF$ – средняя линия $\Delta BCD \Rightarrow EF \parallel BD \perp AC \Rightarrow EF \perp AC$ и $EF = (1/2)BD = BO$.

<u>2. Дано:</u> $CD = 18$ см.

Найти: MK — ?



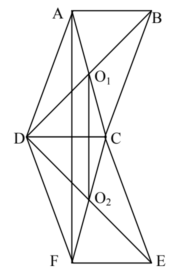
Решение: Смотри предыдущую задачу.

$CD = (2/3)MK$, $MK = \dfrac{3}{2} \cdot 18 = 27$ (см).

B-3

<u>1. Дано:</u> $AB = CD = EF$, $AB \parallel CD \parallel EF$.

Доказать: $AF \parallel O_1O_2$, $AF = 2O_1O_2$.

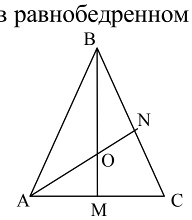


Доказательство: Т.к. $AB = DC = FE$ и $AB \parallel DC \parallel FE$, то $ABCD$ и $CEFD$ – параллелограммы $\Rightarrow AO_1 = O_1C$, $FO_2 = O_2C \Rightarrow O_1O_2$ – средняя линия ΔACF и $O_1O_2 \parallel AF$ и $AF = 2O_1O_2$.

<u>2. Дано:</u> $AB = BC$, $OA = 5$, $OB = 6$.

Найти: S — ?

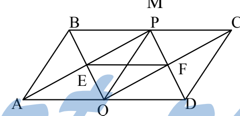
Решение: Т.к. $AB = BC \Rightarrow \angle AMO = 90°$ (т.к. медиана в равнобедренном треугольнике является и высотой) $OM = (1/2)OB = 3$ (свойство медиан), $AC = 2AM = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$ (по теореме Пифагора). $BM = 3OM = 9$, $S = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$ (см^2).



B-4

<u>1. Дано:</u> $AQ = BP$.

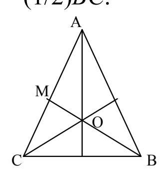
Доказать: $EF \parallel BC$, $EF = (1/2)BC$.



Доказательство: $ABPQ$ – параллелограмм, т.к. $PB \parallel AQ$ и $BP = AQ \Rightarrow BE = EQ$. $QPCD$ тоже параллелограмм, т.к. $PC \parallel QD$ и $PC = BC - BP = AD - AQ = QD \Rightarrow CF = FQ \Rightarrow EF$ – средняя линия $\Delta BCQ \Rightarrow EF \parallel BC$ и $EF = (1/2)BC$.

<u>2. Дано:</u> $BC = 9$, $OB = 10$.

Найти: S — ?

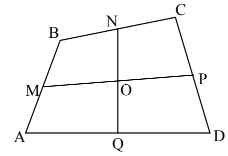


Решение: $BM = (3/2)BO = \dfrac{3}{2} \cdot 10 = 15$, $AC = 2MC = 2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24$ (по т. Пифагора), $S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 9 = 108$.

B-5

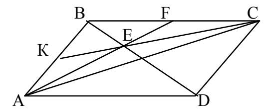
<u>1. Дано:</u> $BN = NC$, $CP = PD$, $DQ = AQ$, $AM = MB$.

Доказать: $NO = OQ$, $MO = OP$.



Доказательство: $MN = (1/2)AC = PQ$ (как средняя линия ΔABC).

$P = MQ = (1/2)BD$ (как средняя линия ΔBCD и ΔABD). Так что $MNPQ$ – параллелограмм $\Rightarrow NO = OQ$ и $MO = OP$.



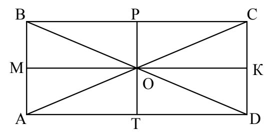
2. Дано: $KB = 5$, $AD = 12$, $\angle A = 30°$.

Найти: S — ?

Решение: E – точка пересечения медиан. $\Delta ABC \Rightarrow AB = 2KB = 10$. Высота параллелограмма равна $(1/2) \cdot AB = 5$ (т.к. $\angle A = 30°$).

$S = 12 \cdot 5 = 60$.

В-6



1. Т.к. $AC = BD \Rightarrow ABCD$ – прямоугольник. Т.к. $AM = MB$ и $BO = OD \Rightarrow MO$ — средняя линия и $MO \| AD$. Аналогично $PO \| AB \Rightarrow MO \perp PO$.

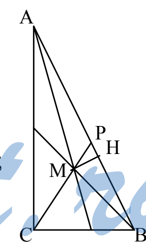
2. Дано: $AC = 4$, $BC = 3$.

Найти: MH — ?

Решение: $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (по т. Пифагора). Т.к. P — центр описанной окружности, то $CP = AP = PB = (1/2)AB$: $CP = \frac{5}{2}$, $MP = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$,

$PB = \frac{5}{2}$. $BM = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$. Пусть $PH = x$, $MH = y$. Тогда:

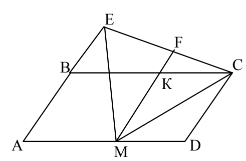
$$\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^2 = x^2 + y^2 \\ \frac{52}{9} = y^2 + \left(\frac{5}{2} - x\right)^2 \end{cases}; \; x^2 \left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = \frac{25}{36} - \frac{52}{9};$$



$36x^2 - 225 + 180x - 36x^2 = -183$; $180x = 42$; $x = \frac{7}{30}$;

$y^2 = \frac{25}{36} - \frac{49}{900} = \frac{576}{900}$, $y = 0{,}8$ (см).

В-7



1. Дано: $CE \perp AB$, $BC = 2AB$.

Доказать: $\angle EMB = 3\angle AEM$.

Доказательство: Пусть F – середина EC, FM – медиана ΔEMC, FM – средняя линия трапеции $AECD \Rightarrow FM \| AB \Rightarrow FM \perp EC \Rightarrow EM = CM$ и $\angle EFM = \angle FMC = 90°$. Пусть $BC \cap MF = K$, т.к. $MD = CD = KC = KM \Rightarrow MKCD$ – ромб и $\angle KMC = \angle CMD$. Т.к. $AE \| FM \Rightarrow \angle AEM = \angle EMK \Rightarrow \angle EMD = 3\angle AEM$.

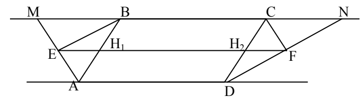
2. Дано: $AE = 9$, $CD = 12$, $AC = 10$.
Найти: S — ?
Решение: $OC = (2/3)CD = 8$, $AO = (2/3)AE = 6$.

$P_{AOC} = 10 + 8 + 6 = 24$, $\frac{P}{2} = 12$,

$S_{AOC} = \sqrt{12(12-10)(12-8)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = 24$ (по формуле Герона),
$S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOC} = 72$.

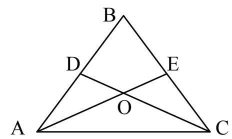
В-8

1. Дано: $AB = a$, $BE \perp AE$, $CF \perp DF$.
Доказать: $EF = 2a$.



Доказательство: Пусть M – точка пересечения AE и BC. $N = DC \cap DF$. $\angle MAB = \angle M \Rightarrow MB = BA = a \Rightarrow BE$ – медиана. Аналогично с ΔDNC. CF – медиана $\Rightarrow FE$ — средняя линия трапеции $MNDA$. Так как $MB = BA$ и $CN = CD$, то $MN = 3$а, так что $EF = (MN + AD) : 2 = (a + 3a) : 2 = 2a$.

2. Дано: $S_{ABC} = 12$ см^2, $\angle AOC = 150$, $AE = 3$ см.
Найти: CD — ?

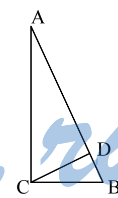


Решение: $S_{AOC} = (1/3)S_{ABC} = 4$, $AO = (2/3)AE =$ $= 2$ (см). $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot \sin 150° \cdot 2 \cdot CO = 4$ (см^2).
$CO = 8$ (см). $CD = (3/2)CO = 12$ (см).

С-20

В-1

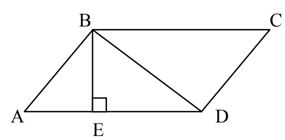
1. Дано: $CD \perp AB$, $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$.



Найти: $S_{ACD}:S_{CDB}$ — ?
Решение: $\Delta ACD \sim \Delta CDB$ по острому углу, т.к. $\angle A = \angle DCB$ с коэффициентом $\frac{1}{2} = k = \frac{AC}{CB}$.

Т.о. $\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = k^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

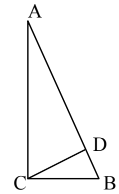
2. Дано: $BD \perp AB$, $AE = 3$ см, $BE \perp AB$, $BE = 6$ см.
Найти: S — ?



Решение: $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ (по т. Пифагора) $\Delta ABE \sim \Delta ABD$ (по острому углу). $\angle A$ – общий $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AB}$ $\Rightarrow$

$AD=\dfrac{AB^2}{AE}=\dfrac{45}{3}$ = 15 (см). $S = 6 \cdot 15 = 90$ (см^2).

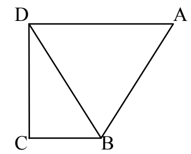
В-2



1. Дано: $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{2}{3}$.

Найти: $S_{ADC}:S_{ACB}$ — ?

Решение: ΔABC подобен ΔACD по острому углу с $k=\dfrac{3}{2}$.



Т.о. $\dfrac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{1}{k}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

2. Дано: $BC = 3$, $CD = 6$, $BD \perp AB$.

Найти: S — ?

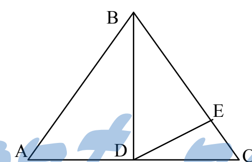
Решение: $BD=\sqrt{3^2+6^2}=\dfrac{BE}{ED}=\dfrac{3}{4}$ (по теореме Пифагора) $\Delta BDC \sim \Delta DBA$ (по острому углу) (т.к. $\angle CDB = \angle A) \Rightarrow$

$\dfrac{CB}{DB}=\dfrac{DB}{DA} \Rightarrow DA=\dfrac{DB^2}{CB}=\dfrac{45}{3}$ = 15. $S=\dfrac{1}{2}(15+3)\cdot 6 = 54$.

В-3

1. Дано: $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{2}{1}$, $S_{DEC} = 20$.

Найти: S — ?

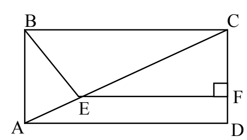


Решение: Из предыдущей задачи $\dfrac{S_{BDE}}{S_{DEC}}=\left(\dfrac{2}{1}\right)^2$. $S_{BDE} = 4S_{ECD} = 80$ (см^2).

$S_{ABC} = 2S_{BDC} = 2 \cdot (80 + 20) = 200$ (см^2).

2. Дано: $AB = 4$, $BC = 6$, $BE \perp AC$.

Найти: EF — ?

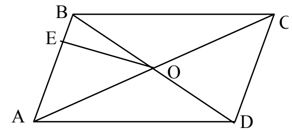


Решение: По теореме Пифагора: $AC=\sqrt{4^2+6^2}$ $=\sqrt{45}$. $\Delta ABE \sim \Delta ABC$ (по острому углу). Т.к. $\angle BCA = \angle ABE \Rightarrow \dfrac{CB}{DB}=\dfrac{DB}{DA} \Rightarrow AE=\dfrac{16}{\sqrt{52}}$, т.к.

$EF \parallel AD \Rightarrow$ $\Delta ACD \sim \Delta ECF$ по острому углу $\Rightarrow \dfrac{CB}{DB}=\dfrac{DB}{DA}$.

$EF=\left(\sqrt{52}-\dfrac{16}{\sqrt{52}}\right)\cdot 6:\sqrt{52}=\dfrac{36}{\sqrt{52}}\cdot 6\cdot\dfrac{1}{\sqrt{52}}=\dfrac{54}{13}==4\dfrac{2}{13}$.

В-4



<u>1. Дано:</u> $\frac{AC}{BD}=\frac{3}{2}$, $OE \perp AB$, $S_{AOE} = 27$ см^2.

Найти: S — ?

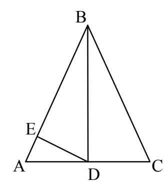
Решение: $\frac{AC}{BD}=\frac{AO}{BO}=\frac{3}{2}$. Т.к. $\angle BOA = 90°$, то $\angle BAC = \angle BOE$, т.о. $\Delta BEO \sim \Delta AOE$ с $k = \frac{2}{3}$, т.о. $\frac{S_{BEO}}{S_{AOE}}=\frac{4}{9}$,

$S_{BEO} = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12$. $S_{AOB} = 12 + 27 = 39$ (см^2). $S_{ABCD} = 4SAOB = 156$ (см^2).

<u>2. Дано:</u> $DE \perp AB$, $\frac{AE}{EB}=\frac{4}{9}$, $BD + AC = 14$.

Найти: P — ?

Решение: Т.к. $\Delta AED \sim \Delta ABD$ по острому углу ($\angle A$ – общий) $\Rightarrow$ $\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AB}$. Пусть $AE = x \Rightarrow EB = \frac{9}{4}x$, $AB = \frac{13}{4}x \Rightarrow \frac{13}{4}x^2 = AD^2$,



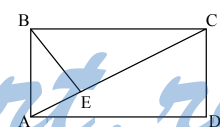
$AD = \frac{\sqrt{13}}{2}x$, $AC = \sqrt{13}x$. По теореме Пифагора:

$BD = \sqrt{\left(\frac{13}{4}x\right)^2 - \frac{13}{4}x^2} = \frac{\sqrt{115}}{4}x \Rightarrow \frac{\sqrt{117}}{4}x + \sqrt{13}x = 14.$

$x = \frac{56}{\sqrt{117}+\sqrt{13}} = \frac{56}{7\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$. $AB = 2\sqrt{13}$. $AC = 8$.

$P = AC + 2AB$. $P = 4\sqrt{13} + 8$.

В-5



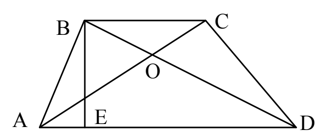
<u>1. Дано:</u> $AE:EC = 1:3$.

Найти: $\angle CAD$ — ?

Решение: $AE = (1/3)EC$. $\Delta ABE \sim \Delta EBC$, по острому углу, т.к. $\angle BCA = \angle ABE \Rightarrow \frac{\text{AE}}{\text{EB}}=\frac{\text{EB}}{\text{EC}} \Rightarrow$

$BE^2 = (1/3)EC^2$. $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}EC$. tg $BCA = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\text{EC}}{\text{EC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle BCA = 30°$,

$\angle BAC = 60°$, $\angle CAD = 30°$.



<u>2. Дано:</u> $\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$, $\frac{BE}{ED}=\frac{3}{4}$, $S_{ABE} = 18$ см^2.

Найти: S — ?

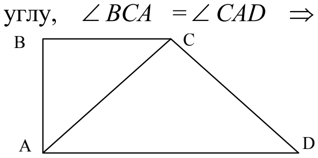
Решение: В учебнике вероятно опечатка: необходимо добавить условие: $BD \perp AB$. $\Delta EBD \sim \Delta ABE$ по острому углу, ($\angle BDA = \angle EBA$)

$\Rightarrow \dfrac{S_{EBD}}{S_{ABE}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$ и т.к. $AD : BC = 2 : 1 \Rightarrow S_{ABD} : S_{BCO} = 2 \Rightarrow$

$S = \dfrac{3}{2} \cdot \left(18 \cdot \dfrac{16}{9} + 18\right) = 75$ (см²).

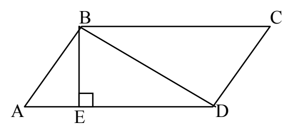
В-6

1. Дано: $AC \perp CD$, $AB \perp AD$, $BC = 6$, $AD = 8$.
Найти: $\angle C$, $\angle D$ — ?
Решение: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ по острому углу, $\angle BCA = \angle CAD \Rightarrow$
$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 6 \cdot 8 = 48$. $CA = \sqrt{48}$.



По теореме Пифагора: $CD = \sqrt{8^2 - 48} = 4$
$\Rightarrow \angle CAD = 30°$, $\angle D = 60°$, $\angle C = 90° + 30° =$
$= 120°$, $\angle B = \angle A = 90°$.

2. Дано: $BD \perp AB$, $AE = 4$ см, $AB{:}AD = 1 : 2$,
$BE \perp AD$.
Найти: S — ?
Решение: Т.к. $AB = (1/2)AD \Rightarrow \angle BDA = 30°$

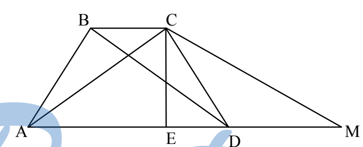


$\Rightarrow \angle A = 60°$, $\text{tg}60° = \dfrac{BE}{AE}$, $BE = 4\sqrt{3}$ (см),

$\text{ctg}30° = \dfrac{ED}{BE}$, $ED = 12$ (см) $\Rightarrow AD = 16$ (см). $S = 16 \cdot 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ (см²).

В-7

1. Дано: $AC \perp BD$, $AC = 15$, $AE = 9$.
Найти: S — ?
Решение: По теореме Пифагора:



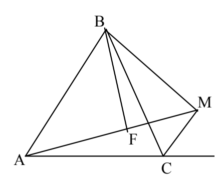
$CE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см). Проведем прямую $CM \parallel BD$ до пересечения с

AD, тогда $\angle ACM = 90°$, т.к. $BD \perp AC \Rightarrow \cos\angle CAE = \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{3}{5}$,

$AM = 15 \cdot \dfrac{5}{3} = 25$ (см). $AD + BC = AD + MD = AM$.

Так что $S = \dfrac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150$ (см²).

2. Дано: $BM \perp CM$, $\angle BCM = \angle ABC$, $\dfrac{AF}{MF} = \dfrac{3}{1}$.

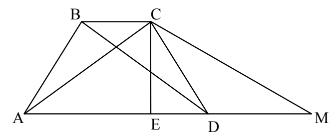


Найти: $\angle BAM$ — ?
Решение: $\angle BCM = \angle ABC$. $\angle CBM = 90° - \angle BCM \Rightarrow \angle ABM = 90°$. $\Delta ABF \sim \Delta ABM$ (по ост-

рому углу). Т.к. $\angle BAF$ – общий $\frac{AB}{AM} = \frac{AF}{AB}$, пусть $MF = x \Rightarrow$

$AB^2 = 3x \cdot 4x$. $AB = 2\sqrt{3}\,x$. $\cos BAM = \frac{3x}{2\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BAM = 30°$.

В-8



<u>1. Дано:</u> $AC \perp BD$, $AC : BD = \sqrt{2} : \sqrt{3}$, $CE = 2\sqrt{6}$.

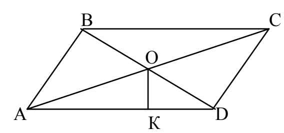
Найти: S — ?

Решение: Проведем $CM \parallel BD$ До пересечения с $AD \Rightarrow \angle ACM = 90°$. Т.к. $AC \perp BD$, тогда $\Delta CEM \sim \Delta ACM$ по острому углу (т.к. $\angle M$ – общий) $\Rightarrow \frac{AC}{CM} = \frac{CE}{EM}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{EM} \Rightarrow EM = 6$ (см), т.о.:

$CM = \sqrt{24+36} = \sqrt{60} = BD$, по теореме Пифагора, т.е. $\frac{AC}{\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$AC = \sqrt{40} \Rightarrow AE = \sqrt{40-24} = 4$ см $\Rightarrow AM = AE + EM = 4 + 6 = 10$ (см).

Так как $AD + BC = AD + DM = AM$, то $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 10 = 10\sqrt{6}$ (см).



<u>2. Дано:</u> $OK \perp AD$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \frac{16}{1}$.

Найти: $\angle A$ — ? $\angle B$ – ?

Решение: Т.к. $\frac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{OKD}} = \frac{8}{1} \Rightarrow$

$\frac{S_{AOD}}{S_{OKD}} = \frac{4}{1} \Rightarrow$ т.к. $\Delta OKD \sim \Delta AOB$ ($\angle BDA$ – общий) $\Rightarrow$ коэффициент подобия $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OD}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BDA = 30°, \angle B = \angle D = 60°$, $\angle A = 120° = \angle C$.

С-21

В-1

<u>1.</u> Сначала построим ΔAB_1C_1 подобный данному (по двум углам). Затем сторону B_1C_1 разделим пополам и проведем медиану AM_1. Затем от точки A отложим отрезок AM и через точку M проведем прямую, параллельную B_1C_1. Она пересечет прямые AC_1 и AB_1 в точках C и B. ΔABC – искомый.

<u>2.</u> Нам необходимо разделить отрезок на 10 равных частей. Разделим отрезок пополам. Одна часть будет 5, а вторую необходимо разделить

в отношении 2 : 3 (пусть она равна a). Построим ΔABC : $AB=BC=2a$, $AC = 3a$. Проведем биссектрису AM, тогда $BM = 1\frac{1}{5}a$ (по свойству биссектрисы). Т.о. мы можем разделить отрезок a на 5 равных частей.

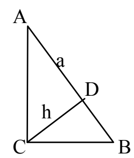
В-2

1. Сначала построим ΔA_1B_1C (по углу C и $A_1C = 2x$, $B_1C = 3x$, где x – произвольное число). $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ (по двум сторонам и углу). Затем проведем биссектрису CD под углом $c/2$ к прямой CA_1, далее, через точку D. проведем прямую параллельную A_1B_1, которая пересечет сторону A_1C и B_1C в точках A и B. ΔABC – искомый.

2. Нам необходимо разделить отрезок на 12 равных частей. Разделим его пополам, затем еще каждую часть пополам. У нас получится 4 равных отрезка, которые необходимо разделить на 3 части (см. В-3 (1)).

В-3

1. Построим сначала прямоугольный треугольник с катетом AD и углом $DBA = 180° - \angle ABC$, т.о. сейчас нам необходимо от луча DB отложить $BC = (2/3)AB$. Строим треугольник со сторонами AB, AB и $2AB$ (равнобедренный). Из угла основания треугольника пускаем биссектрису, которая разделит сторону AB на $(1/3)AB$ и $(2/3)AB$ по свойству биссектрисы.



2. Построим прямоугольный ΔADC, $AD = a$, $DC = b$, $\angle D = 90°$, затем достроим его до ΔABC (как показано на рисунке). Тогда $\Delta ADC \sim \Delta DCB$ ($\angle B = \angle BCA$) $\Rightarrow$ $\frac{a}{b} = \frac{b}{DB} \Rightarrow DB = \frac{b^2}{a}$.

В-4

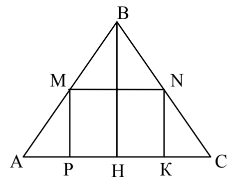
1. Сначала построим ΔAB_1C_1 (по углу A, $AB = x$, $AC = 3x$). Т.о. $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$. Пусть O – точка пересечения медиан ΔABC, т.о. $BM = (3/2)OB$ (медиана, опущенная на сторону AC). В ΔAB_1C_1 проведем медиану B_1M_1. Она будет параллельна BM. Затем на луче M_1B_1 от точки M_1 отложим отрезок BM. От его конца отложим перпендикулярную прямую, которая пересечет прямую AA_1 в точке B. Затем на прямой AC_1 отложим отрезок $AC = 3AB$, т.о. ΔABC – искомый.

2. $\frac{(a+b)b}{a} = b + \frac{b^2}{a}$ из предыдущей задачи мы можем построить отрезок $\frac{b^2}{a}$, тогда прибавив к нему b, получим исходный.

В-5

1. Пусть стороны прямоугольника x и $2x$.

$BH = h$, $BN = a_1$, $BC = a$, $NC = a_2$, $AC = h$, тогда $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ ($\angle B$ – общий, $MN \parallel AC$) $\Rightarrow$ $\frac{2x}{b} = \frac{a_1}{a}$. Аналогично $\Delta KNC \sim \Delta BHC$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{h} = \frac{a - a_1}{a}$; $x = \frac{a_1 b}{2a} \Rightarrow \frac{a_1 b}{2ah} = \frac{a \cdot a_1}{a} \Rightarrow ab = 2ha - 2ha_1$



$\Rightarrow$ $a_1 = \frac{2ha - ab}{2h} = \frac{a(2h - h)}{2h} = a - \frac{ah}{2h}$. Построим отрезок $y = \frac{ab}{2h}$ $\Rightarrow$ $\frac{y}{a} = \frac{b}{2h} \Rightarrow \frac{2h}{b} = \frac{a}{y}$. Это построение описывается в задаче С-21 В-5 (2).

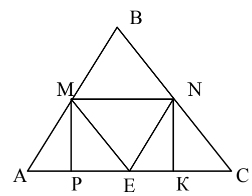
Затем $a_1 = a - y$. Т.о. мы нарисовали точку N. Далее провести $NK \perp AC$, $NM \parallel AC$ и $MT \perp AC$. $MKNP$ – искомый.

2. Проведем построения как показано на рисунке. Докажем, что C_1D_1 – искомый : $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$ ($\angle AOB$ – общий, а $AD \parallel A_1D_1$). Аналогично $\Delta OBC \sim \Delta OB_1C_1$ и $\Delta OCD \sim OC_1D_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

В-6

1. Достроим ΔMNE до прямоугольника $MNKP$. Пусть $NK = a$, тогда $PK = NM = 2a$, т.е. задача сводится к предыдущей.

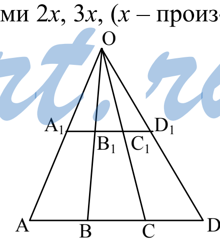
2. $\frac{AB}{CB} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$ $\Rightarrow$ $\frac{AB}{C_1D_1} = \frac{CD}{A_1B_1}$, а дальше действуем также, как и в предыдущей задаче.



В-7

1. Нарисуем прямоугольный треугольник с катетами $2x$, $3x$, (x – произвольное число).

Тогда гипотенуза будет равна $\sqrt{13}\,x$. Затем нарисуем два параллельных отрезка : один длиной периметра, другой – $2x + 3x + \sqrt{13}\,x$. Если они равны, то построенный треугольник искомый, если нет, то: проведем прямые AA_1 и DD_1 до точки пересечения в точке O. Затем отрезки OB и OC разделят A_1D_1 на $2 : 3 : \sqrt{13}$ ($AB = 2x$, $BC = 3x$, $CB = \sqrt{13}\,x$). Т.о. нам необходимо построить ΔMNK (прямоугольный) с катетами A_1B_1 и B_1C_1. ΔMNK – искомый.



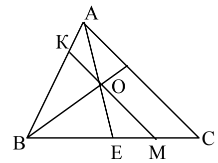
2. Построим сначала треугольник по двум углам и высоте, опущенной из третьего угла (которая равна расстоянию от точки пересечения диагоналей до вершины B). Затем из основания нашей высоты проведем

прямую перпендикулярную к боковой стороне, которая пересечет продолжение другой стороны в точке A. Затем проведем прямую AC параллельную основанию нашего треугольника, которая пересечет продолжение другой стороны в точке C. ΔACB – исходный.

В-8

<u>1.</u> Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе ($4x$) и катету (x). Тогда второй катет будет равен $x\sqrt{15}$.Далее аналогично предыдущей задаче : $AB = 2x$, $C = CD = x\sqrt{15}$.

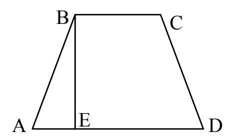
<u>2</u>. Пусть необходимо построить ΔABC.



Построим сначала ΔAKM (С-21 В-2 (1)), т.о. $KM \parallel AC$. Т.к. AE – биссектриса, то $\angle KAE$ = = $\angle EAC$ = $\angle KOA$ (т.к. $KM \parallel AC$)$\Rightarrow AK = KO$. Продлив сторону BK на отрезок KO и проведя $AC \parallel M$ получим ΔABC.

С-22

В-1



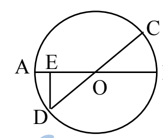
<u>1</u>. Дано: $BC = 2$, $AB = 15$, $AD = 20$.

Найти: $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ — ?

Решение: $AE = \dfrac{AD - BC}{2} = 9$. По т. Пифагора:

$BE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$, $\sin A = \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{4}{5}$, $\cos A = \dfrac{AE}{BA} = \dfrac{3}{5}$;$\operatorname{tg} A = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{4}{3}$.

<u>2</u>. Дано: $CD = 4$, $DE = \sqrt{3}$.



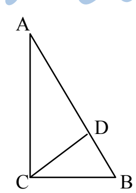
Найти: $\angle EOD$ — ?

Решение: $OD = (1/2)\,CD = 2$,

$\sin\angle EOD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle EOD = 60°$.

В-2

<u>1</u>. Дано: $AD = 2$, $DB = 3$, $CD \perp AB$.



Найти: $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ — ?

Решение: Т.к. $\Delta CDB \sim \Delta ABC$ по острому углу ($\angle B$ – общий) $\Rightarrow$ $\dfrac{DB}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$. $CB^2 = 3 \cdot 5 = 15$, $CB = \sqrt{15}$.

$AB = 5$, $AC = \sqrt{25 - 15} = \sqrt{10}$, $\sin A = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

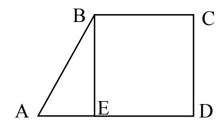
$\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

<u>2.</u> Дано: $BC = 2$, $AD = 4$, $CD = 2\sqrt{3}$.

Найти: $\angle A$ — ?

Решение: $AE = AD - BC = 2$,

$\operatorname{tg} A = \frac{BE}{AE} = \frac{CD}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle A = 60°$.



В-3

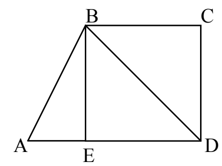
1. Дано: $AB = 9$, $BD = 12$, $AD = 15$.

Найти: $\sin CBD$, $\cos CBD$, $\operatorname{tg} CBD$ — ?

Решение: ΔABD – прямоугольный. Т.к. по теореме Пифагора $AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow$

$\angle CBD = \angle BDA \Rightarrow \cos CBD = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$,

$\sin CBD = \frac{3}{5}$. $\operatorname{tg} CBD = \frac{3}{4}$.

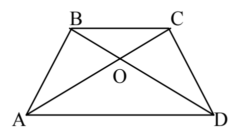


2. Дано: $AD = 2BC$, $BD \perp AC$, $BD = 3\sqrt{3}$, $AC = 3$.

Найти: $\angle CAD$, $\angle BDA$ — ?

Решение: Т.к. $AD=2BC \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{1}{2}$.

Т.о. $OD = \sqrt{3}$, $\frac{CO}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} CAD = \frac{OD}{AO} = \sqrt{3}$, $\angle CAD=60°$, $\angle BDA = 30°$.

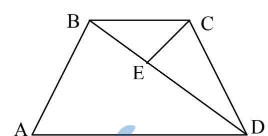


В-4

1. Дано: $AB = 12$, $BD = 16$, $DA = 20$, $CE \perp BD$.

Найти: $\sin BCE$, $\cos BCE$, $\operatorname{tg} BCE$ — ?

Решение: ΔABD – прямоугольный, т.к. $AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow$ т.к. $\angle A = \angle BCE$, то $\cos BCE = \cos A \frac{AB}{AD} = \frac{3}{5}$, $\sin BCE = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} BCE = \frac{4}{3}$.

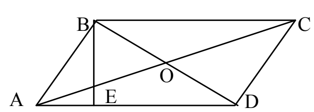


2. Дано: $S = 4\sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{2}$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$ — ?

Решение: $S = AB \cdot BE = 4\sqrt{2} \Rightarrow BE = 2$,

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle A = 45°$, $\angle B = 135°$.

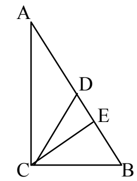


В-5

1. Дано: $CE \perp AB$, $AB = 4$, $ED = \sqrt{3}$, $AD = DB$.

Найти: $\angle CDE$ и $\angle DCE$ — ?

Решение: Т.к. $DB = CD$ (свойство медианы в прямоугольном треугольнике), то $CD = 2$, $CE = \sqrt{4-3} = 1$ (по теореме Пифагора в $\Delta\, CED$).

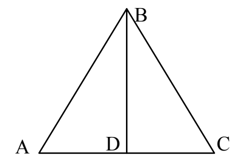


$\text{tg}DCE = \sqrt{3} \Rightarrow \angle DCE = 60° \Rightarrow \angle CDE = 30°$.

2. Дано: $AB = BC = 5$, $AC = 6$.

Найти: $\sin B$, $\cos B$, $\text{tg}B$ — ?

Решение:



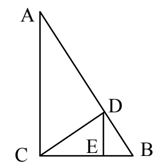
По теореме косинусов: $36 = 50 - 2 \cdot 25 \cos B \Rightarrow$

$\cos B = \frac{7}{25}$, $\sin B = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$, $\text{tg}B = \frac{24}{7}$.

В-6

1. Дано: $DE \| AC$, $DE = EC$, $BD : DA = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Найти: углы — ?



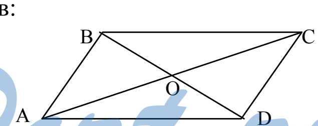
Решение: Т.к. $CE = ED \Rightarrow \angle DCE = 45° \Rightarrow CD$ – биссектриса $\Rightarrow$ по свойству биссектрисы $\frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow$

$\frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}A$. Т.о. $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$.

2. Дано: $BD = 6$, $AC = 8$.

Найти: $\sin A$, $\cos A$, $\text{tg}A$ — ?

Решение: $BO = (1/2)BD = 3$. $AO = (1/2)AC = 4$. $AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = 5$ (по теореме Пифагора). По теореме косинусов:



$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$,

$36 = 50 - 50\cos A$, $36 = 50 - 50\cos A$,

$\cos A = \frac{7}{25}$. Из предыдущей задачи:

$\sin A = \frac{24}{25}$, $\text{tg}A = \frac{24}{7}$.

В-7

1. Пусть α — искомый угол $\Rightarrow \sin\alpha = 2\cos\alpha \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 2 \Rightarrow$ необходимо построить $\Delta\, ABC$ ($\angle C = 90°$) такой, что $AC = 2CB \Rightarrow \angle B = \alpha$.

2. Рассмотрим $\Delta\, ABC$. $\angle C = 90°$, $AC = BC = 1$ и $\Delta\, A_1BC$ с $\angle CBA_1 = 30°$ $\Rightarrow \angle ABA_1 = 75° = \alpha$, $\text{tg}30° = CA_1 : CB \Rightarrow CA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$A_1B = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Т.о. $S_{ABA_1} = \frac{1}{2} AB \cdot A_1B \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC$, то есть $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 75^\circ =$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sin 75^\circ = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

В-8

1. Пусть α — искомый угол $\Rightarrow$ sin α = 3cos α $\Rightarrow$ tg α = 3 $\Rightarrow$ необходимо построить ΔABC ($\angle C = 90°$) такой, что $AC = 3CB \Rightarrow \angle B = \alpha$.

2. Рассмотрим ΔABC. $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $AB = 2$, AD — биссектриса $\angle DAC = 15°$. Т.о. $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{1-CD}$ (по свойству биссектрисы) $\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}\,CD = 2CD \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})}$. $AD = \sqrt{3 + \frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}} =$

$= \sqrt{3 + 3(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}}$ (по теореме Пифагора).

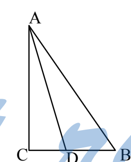
$\sin 15^\circ = \frac{DC}{AD} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{24-12\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

С-23

В-1

1. $S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha + \frac{1}{2} ab\sin\alpha = ab\sin\alpha$; $S = 2{,}3 \cdot 3{,}7 \cdot \sin 40^\circ 37' \approx 5{,}54$.

2. Дано: $\angle$ A = 45°, AB = 10, $\angle DAC = 30^\circ$.
Найти: DC — ?



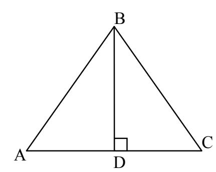
Решение: Т.к. $\angle$ A = 45° $\Rightarrow 10 = \sqrt{AC^2 + AC^2} \Rightarrow$

AC=BC=$\frac{10}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}30^\circ = \frac{CD}{AC}$, $CD = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

В-2

1. Сторона равна $\frac{h}{\sin\alpha}$, $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{h \cdot h}{\sin\alpha} = \frac{h^2}{\sin\alpha}$; $S = \frac{17{,}3^2}{\sin 52^\circ 43'} \approx 376{,}16$.

2. Дано: $\angle$ A = 60°, $\angle$ C = 45°, $BD \perp AC$, $AD = 3$.
Найти: BC — ?



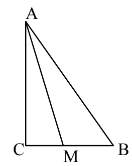
Решение: $\text{tg}60^\circ = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BD = 3\sqrt{3}$,

$\sin 45^\circ = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}$.

В-3

1. Пусть сторона ромба — a, тогда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2\alpha}$; $a = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \sin\alpha = \frac{d^2}{2tg\frac{\alpha}{2}};\ S \approx 123{,}85.$$



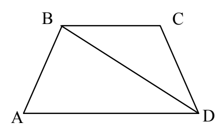
2. Дано: $MC = 2{,}7$, $AM = 4{,}1$.
Найти: $\angle A$ — ? $\angle B$ — ?
Решение: Т.к. M от AC и AB находится на одинаковом расстоянии $\Rightarrow$ $\angle CAM = \angle MAB$, $\sin\angle CAM = \frac{2{,}7}{4{,}1}$, т.о. про таблице синусов находим, что $\angle A = 2\cdot 41^\circ 11{,}5' = 82^\circ 23'$, $\angle B = 7^\circ 37'$.

В-4

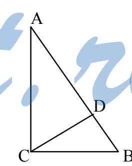
1. Дано: $AD=2a$, $\angle CBD = \alpha$, $BC = a$, $BD \perp AB$, $a = 7{,}6$, $\alpha = 54^\circ 21'$.
Найти: S — ?

Решение: $\angle BDA = \angle DBC = \alpha$, $\cos BDA = \frac{BD}{AD}$, $BD = AD\cos\alpha = 2\alpha\cos\alpha$.

$\sin\alpha = \frac{AB}{2a}$, $AB = 2a\sin\alpha$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cos\alpha\cdot 2a\sin\alpha = a^2\sin 2\alpha$.

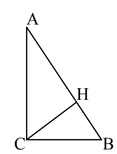


$S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABD}$; $S_{ABCD} = \frac{3}{2}a^2\sin 2\alpha \approx 82{,}07$.



2. Дано: $AD = DB$, $CD = 5{,}3$, $BC = 4{,}7$.
Найти: $\angle DCB$ — ?
Решение:
Т.к. $\angle C = 90^\circ \Rightarrow AB = 2CD = 10{,}6 \Rightarrow \angle DCB = \angle B$,
$\cos B = \frac{4{,}7}{10{,}6}$, т.е. $\angle B \approx 63^\circ 41' = \angle DCB$.

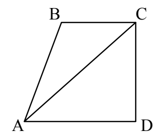
В-5



1. $\sin\alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin\alpha}$, $BC = \frac{CH}{\cos\alpha}$.

$S = \frac{1}{2}\frac{CH^2}{\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow CH = \sqrt{S\sin 2\alpha} \approx 6{,}44$.

2. Дано: $\angle BAD = 40^\circ 27'$, $AB = 12{,}7$, $AC = 18{,}1$.
Найти: $\angle CAD$ — ?

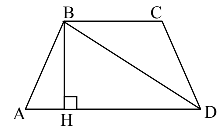


Решение: $\sin\angle BAD = \dfrac{CD}{AB} \Rightarrow CD = AB\cdot\sin\angle BAD$,

$\sin\angle CAD = = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AB}{AC}\cdot\sin\angle BAD \approx 0{,}455$, так что

$\angle \mathrm{CAD} \approx 27^\circ 5'$.

В-6



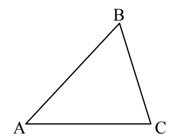
1. Дано: $S_{ABCD} = S$, $\angle BDA = \alpha$, $S = 234{,}6$, $\alpha = 23^\circ 46'$.

Найти: BH — ?

Решение: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{BH}{HD} \Rightarrow HD = \dfrac{BH}{tg\alpha}$. Так как

$AH + BC = AD$, то $S_{\mathrm{ABH}} + S_{\mathrm{BCD}} = S_{\mathrm{BHD}}$ и $S_{ABCD} = S_{\mathrm{BHD}}$, т.е. $S = \dfrac{BH^2}{tg\alpha} \Rightarrow$

$BH = \sqrt{Stg\alpha} \approx 10{,}16$.



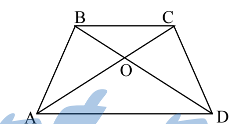
2. Дано: $BC = 2{,}7$, $AB = 4{,}2$, $\angle ACB = 132^\circ 40'$.

Найти: $\angle BAC$ — ?

Решение: По теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow$

$\sin A = \dfrac{BC\cdot\sin C}{AB} \approx 0{,}47$, так что $\angle A \approx 28^\circ 13'$.

В-7



1. Дано: $\angle CAD = \beta$, $\angle CBD = \alpha$, $BD = d$, $d = 15{,}9$, $\alpha = 27°30'$, $\beta = 40°15'$.

Найти: AC — ?

Решение: $\dfrac{DO}{\sin\beta} = \dfrac{AO}{\sin\alpha}$ по теореме синусов,

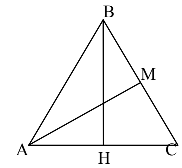
$\dfrac{BO}{\sin\beta} = \dfrac{CO}{\sin\alpha}$ (т.к. $\angle CBD = \alpha = \angle BDA$ и $\angle CAD = \beta = \angle BCA$) $\Rightarrow$

$AC = AO + CO = \dfrac{DO\sin\alpha}{\sin\beta} + \dfrac{BO\sin\alpha}{\sin\beta} = BD\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = = \dfrac{d\sin\alpha}{\sin\beta} \approx 11{,}36$.

2. Дано: $AB = BC$, $BM = MC$, $\angle MAC = \alpha = 37^\circ 23'$.

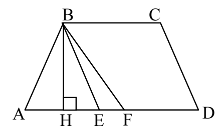
Найти: $\angle B$ — ?

Решение: Пусть $MC = a$, $\angle C = \beta$, тогда $\dfrac{AM}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $AM = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

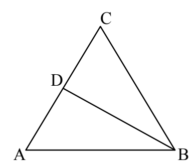


Далее $\angle BAM = \beta - \alpha$, $\angle B = 180° - 2\beta$. Так что $\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha(\sin(180^\circ - 2\beta))}$ (теорема синусов в $\triangle ABM$). Так что $(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)\sin\beta =$ $= \sin\alpha \cdot 2\sin\beta\cos\beta$, $\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) =$ $= 2\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\alpha = 3\sin\alpha\cos\beta$, $\mathrm{tg}\beta = 3\mathrm{tg}\alpha$, $\beta \approx 66{,}26'$. Так что $\angle B = 180° - 2\beta \approx 47°8'$.

В-8



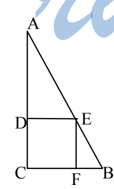
1. Дано: $\angle A + \angle D = 90^\circ$, $AD = 2BC$, $AE : ED =$ $= 1 : 3$, $BE = a$, $\angle A = \alpha$, $a = 17{,}3$, $\alpha = 40^\circ 23'$.
Найти: S — ?
Решение: Проведем $BF \parallel CD$. Так что $\angle BFA = \angle D$ и $\angle BFA + \angle A = 90^\circ$. Т.о. $\angle ABF = 90^\circ$. Т.к. $BC = FD$ и $AD = 2BC \Rightarrow$ $AF = BC$; $\frac{BC - EF}{BC + EF} = \frac{1}{3}$; $BC = 2EF \Rightarrow AF = 2EF \Rightarrow AE = FE = BE = a$ $\Rightarrow AE = 2a$ и $AB = 2a\cos\alpha$. $BH = AB\sin\alpha = 2a\cos\alpha\sin\alpha \Rightarrow$
$S = 6a^2\sin\alpha\cos\alpha \approx 886{,}24$.



2. Дано: $\cos C = m$.
Найти: $\mathrm{tg}DBA$ — ?
Решение: Рассмотрим ΔDBC: $BC = AC = \frac{BD}{tgC}$ из треугольника ADB : $AD = BD \cdot \mathrm{tg}DBA$, $AC = CD + AD$,
$\frac{BD}{\sin C} = \frac{BD}{tgC} + BD \cdot \mathrm{tg}DBA$. Откуда $\mathrm{tg}DBA = \frac{1-\cos C}{\sin C} = \frac{1-m}{\sqrt{1-m^2}}$.

С-24

В-1



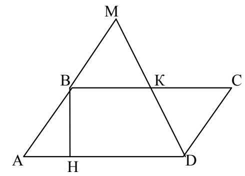
1. Дано: $AC = 4$, $BC = 6$, $EF : ED = 1 : 2$.
Найти: S_{DEFC} — ?
Решение: $\mathrm{tg}B = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{EF}{FB} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}FB$.

$CF = DE = 6 - FB$, т.о. $\frac{2}{3}FB : (6 - FB) = \frac{1}{2}$.

$\frac{2}{3}FB = 3 - \frac{1}{2}FB \Rightarrow FB = \frac{18}{7}$, т.е. $CF = \frac{24}{7}$ и $DC = \frac{12}{7} \Rightarrow S = \frac{288}{49}$.

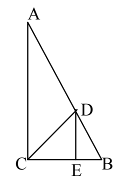
2. Дано: $\angle A = 60^\circ$, $BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $BM = 4$.

Найти: $BK : KC$ — ?



Решение: $\angle D = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$, $\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{3}2}{2\sqrt{3}} = 3$, $\Delta BMK \sim \Delta KCD$ (т.к. $\angle MKB = \angle CKD$ и $BM \parallel CB$) $\Rightarrow$ $\frac{BK}{KC} = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{3}$.

В-2



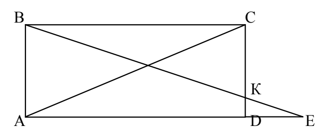
1. <u>Дано:</u> $DE = 3$, $DC = 5$, $AC = 2BC$.
Найти: S_{ABC} — ?

Решение: $\mathrm{tg}B = \frac{2BC}{BC} = 2 = \frac{DE}{EB} = \frac{3}{EB} \Rightarrow EB = \frac{3}{2}$.

По теореме Пифагора: $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow CB = \frac{11}{2}$,

$AC = 11 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot 11 = \frac{121}{4}$.

2. <u>Дано:</u> $AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\angle CAD = 30^\circ$, $DE = 3$.
Найти: $CK : KD$ — ?



Решение: Т.к. $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow CD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы), $\cos 30^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

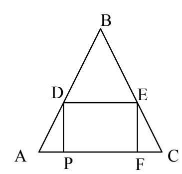
$\Delta DEK \sim \Delta BKC$ т.к. ($\angle BKC = \angle EKD$ и $DE \parallel BC$) $\Rightarrow \frac{CK}{KD} = \frac{ED}{BC} = \frac{3}{4}$.

В-3

1. <u>Дано:</u> $AB = BC = 10$, $AC = 12$, $PF : DP = 1 : 3$.
Найти: S_{PFED} — ?

Решение: $\cos C = \frac{AC}{2BC} = \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}C = \frac{4}{3} = \frac{EF}{FC}$, т.е. $EF = \frac{4}{3} \cdot FC$,

$PF = AC - 2 \cdot FC$, т.е. $\frac{AC - 2FC}{\frac{4}{3}FC} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12 - 2FC = \frac{4}{9}FC$



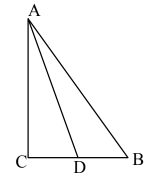
$\Rightarrow FC = \frac{54}{11}$, т.е. $PF = 12 - \frac{108}{11} = \frac{24}{11}$, $DP = 3 \cdot \frac{24}{11} = \frac{72}{11}$,

$S_{PFED} = \frac{72}{11} \cdot \frac{24}{11} = \frac{1728}{121}$.

2. <u>Дано:</u> $\cos B = \frac{3}{5}$.

Найти: $CD : DB$ — ?

Решение:



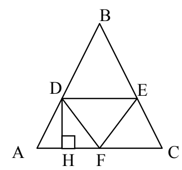
$\sin B = \frac{4}{5} = \frac{AC}{AB}$, а по свойству биссектрисы $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{4}{5}$.

В-4

1. <u>Дано:</u> $DF = FE$, $BF = 16$ см, $AB = 20$ см.

Найти: S_{DEF} — ?

Решение: Т.к. $AB = BC$, то высота BF попадет в вершину прямоугольного треугольника $AF = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см) по теореме Пифагора $\sin A = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $\sin A = \frac{4}{5} = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = \frac{4}{5}AD = HF$ (т.к. $DE \parallel AC$, то $\angle AFD = 45°$), $\cos A = \frac{3}{5} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow$

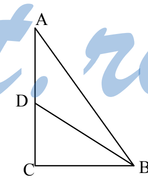


$AH + HF = \frac{7}{5}AD = AF = 12$ (см). Т.о. $AD = \frac{60}{7}$ (см), т.е. $HF = \frac{48}{7}$ (см). По теореме Пифагора:

$DF = \sqrt{\left(\frac{48}{7}\right)^2 + \left(\frac{48}{7}\right)^2} = \frac{48}{7}\sqrt{2}$ (см). $S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{48}{7}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2304}{49} = 47\frac{1}{49}$ (см^2).

2. <u>Дано:</u> $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{17}{8}$.

Найти: $\sin ABC$ — ?



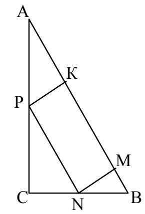
Решение: Т.к. высота BC у них общая, то $\frac{AD}{DC} = \frac{17}{8}$, а по свойству биссектрисы $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{17}{8} \Rightarrow$

$\cos B = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin B = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$.

В-5

1. <u>Дано:</u> $\angle A = 30°$, $AB = 4$, $KM = 2NM$.

Найти: S_{KMNP} — ?



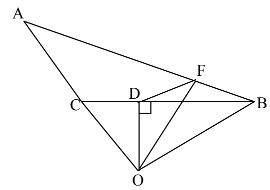
Решение: $CB = 2$ (т.к. против угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы). $AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

$PK = \dfrac{1}{2}AP$ (т.к. $PK = AP \cdot \sin A$). $KM = 2PK = AP$. Т.к. $\angle CPN = 30^\circ$, то $\cos 30° = \dfrac{PC}{PN} = \dfrac{PC}{AP} \Rightarrow PC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AP$,

$AC = PC + AP = 2\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}AP = 2\sqrt{3}$. $AP = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = 8\sqrt{3} - 12$, т.е.

$S_{KMNP} = \dfrac{1}{2}(8\sqrt{3}-12)^2 = 168 - 96\sqrt{3} = 24(7 - 4\sqrt{3})$.

2. $\Delta FBO \sim \Delta ABO$ ($\angle B$ — общий) $\Rightarrow \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{FB}{OB} \Rightarrow FB = \dfrac{OB^2}{AB} \Rightarrow$ $OB^2 = AB \cdot FB$.

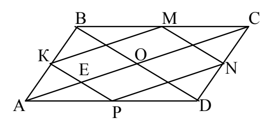


$\Delta BDO \sim \Delta CBO$ ($\angle CBO$ — общий), т.о. $\dfrac{BD}{BO} = \dfrac{BO}{CB} \Rightarrow BD = \dfrac{BO^2}{CB} \Rightarrow$

$BO^2 = CB \cdot BD$. Т.о. $\dfrac{FB}{BD} = \dfrac{BC}{AB}$ и если учесть, что $\angle ABC$ — общий, то $\Delta ACB \sim \Delta DFB \Rightarrow \angle DFB = \angle ACB$.

В-6

1. Дано: $PN{:}MN = 2$, $AB = a$, $\angle A = 60^\circ$.



Найти: S_{PNMK} — ?

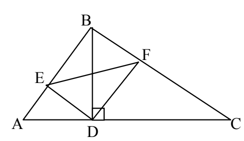
Решение: Т.к. $\angle A = 60^\circ$, то □ABD - правильный и $BD = a$. Пусть $AP = x$, тогда $EP = \dfrac{x}{2}$,

$KP = x$, $EO = \dfrac{1}{2}KM = KP = x$. $PD = \dfrac{EO}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$;

$PD + AP = a$, $x(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1) = a$; $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = = 2a\sqrt{3} - 3a$. $KP = 2a\sqrt{3} - 3a$ и

$PN = 2KP = 4a\sqrt{3} - 6a$. $S_{PNMK} = (2a\sqrt{3} - 3a)(4a\sqrt{3} - 6a) = a^2(42 - 24\sqrt{3}) =$
$= 6a^2(7 - 4\sqrt{3})$.

2. $\Delta EBD \sim \Delta ABD$ ($\angle ABD$ — общий) $\Rightarrow$ $EB = \dfrac{BD^2}{AB}$, т.о. $BD^2 = AB \cdot EB$.



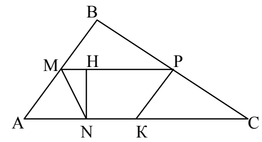
$\Delta BDF \sim \Delta BDC$ ($\angle DBC$ — общий) $\Rightarrow$

$FB = \dfrac{BD^2}{AB} \Rightarrow BD^2 = AB \cdot FB$. Т.о. $\dfrac{EB}{FB} = \dfrac{BC}{BA}$, т.к. $\angle B$ — общий $\Rightarrow$ $\Delta EBF \sim \Delta ABC$.

В-7

1. Дано: $AC = b,\ MN = NK = KP = a,\ \angle PMN = 60^\circ$.

Найти: S_{ABC} — ?



Решение: $\sin 60^\circ = \dfrac{HN}{a} \Rightarrow TP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$MH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow MP = 2a \Rightarrow S_{MNKP} = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a =$

$= \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. $\Delta BMP \sim \Delta ABC$ (т.к. $\angle B$ — общий, $MP \parallel AC$).

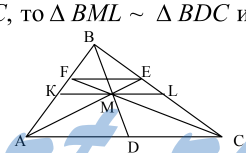
Т.о. $k = \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow \text{k} = \dfrac{2a}{b}$. $AMPC$ — трапеция, т.к. $MP \parallel AC$.

$S_{AMPC} = \dfrac{1}{2} \cdot (b + 2a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab + 2a^2)$. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MBP}} = \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{b^2}{4a^2} = 1 + \dfrac{S_{AMPC}}{S_{MBP}}$

$\Rightarrow S_{MBP} = \dfrac{4a^2 S_{AMPC}}{b^2 - 4a^2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}a(b+2a)}{(b-2a)(b+2a)} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{b-2a} \Rightarrow$

$S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab + 2a^2) + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{b-2a} = \dfrac{\sqrt{3}a(b^2 - 4a^2) + 4a^3\sqrt{3}}{b-2a} = \dfrac{ab^2\sqrt{3}}{b-2a}$.

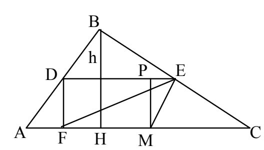
2. Проведем через точку M прямую параллельную AC и пересекающую AC в точке K и BC в точке L. Т.к. $KL \parallel AC$, то $\Delta BML \sim \Delta BDC$ и $\Delta BKM \sim \Delta BAD$, т.е. $\dfrac{ML}{DC} = \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{KM}{AD}$, т.е.



$\dfrac{ML}{KM} = \dfrac{DC}{AD}$, т.е. $ML = KM$. Т.к. $\Delta KFM \sim \Delta AFC$ ($\angle KFM$ — общий, $KM \parallel AC$), то $\dfrac{FM}{FC} = \dfrac{KM}{AC}$. Аналогично $\dfrac{EM}{AE} = \dfrac{ML}{AC}$. Т.к. $KM = ML$, то $FM : FC = EM : AE$, т.е. $\dfrac{FM}{MC} = \dfrac{EM}{MA}$. Т.к. $\angle FME = \angle AMC$, то $\Delta FME \sim \Delta AMC \Rightarrow \angle EFM = \angle MCA$. Т.о. $EF \parallel AC$.

В-8

1. Дано: $FH = a,\ BH = h,\ DF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Найти: S_{ABC} — ?

Решение: Т.к. $DE \parallel AC$, то $\angle DEF = \angle EFM$, так что $EM = FM = a$. По теореме синусов:

$\dfrac{FE}{\sin(180^\circ - 2\cdot\angle FEM)} = \dfrac{FM}{\sin\angle FEM}$, так что $FE = 2a\cos\angle FEM$. Но

из $\Delta\, DFE : FE = \dfrac{DF}{\sin\angle DEF} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin\angle FEM}$.

Так что $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\angle FEM} = 2\cos\angle FEM$. Так что $\angle FEM = 30°$ и $FE = a\sqrt{3}$.

Далее $DE = \sqrt{FE^2 - DF^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{3a}{2}$. Т.к. $DE \parallel AC$, то

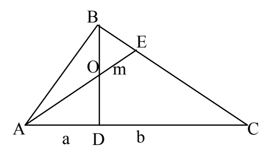
$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBE$ и $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{h - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{h}$, так что $AC = \dfrac{3a\cdot h}{2(h - \frac{a\sqrt{3}}{2})} = \dfrac{3ah}{2h - a\sqrt{3}}$.

Значит $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot h = \dfrac{3ah^2}{4h - 2a\sqrt{3}}$.

<u>2.</u> $\Delta\, BDC \sim \Delta\, AEC$ (т.к. $\angle C$ — общий). Т.о. $\dfrac{BD}{AE} = \dfrac{DC}{EC}$, далее т.к. $\angle EAC$ — общий, то $\Delta\, EAC \sim \Delta\, AOD \Rightarrow$

$\dfrac{EC}{OD} = \dfrac{AE}{AD}$, т.е. $AE = \dfrac{EC\cdot AD}{OD}$.

$BD = \dfrac{EC\cdot AD\cdot DC}{OD\cdot EC} = \dfrac{AD\cdot DC}{OD} = \dfrac{ab}{m}$.



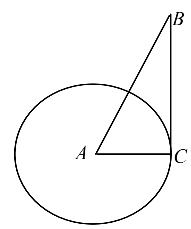
С-25

В-1

<u>1. Дано:</u> $\angle C = 90^o$, $\angle ABC = 30^o$, $AB = 10$.

Решение: а) Если окружность касается прямой BC, то C-точка касания, т.к. $\angle C$ — прямой, и AC – радиус окружности.

$\dfrac{AC}{AB} = \sin\angle ABC = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$; $AC = \dfrac{1}{2}AB = 5$.



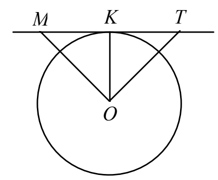
б) Окружность не имеет общих точек с BC, если ее радиус $R < AC = 5$.

в) Окружность имеет с BC две общие точки, если ее радиус $R > AC = 5$.

Ответ: а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$.

<u>2. Дано:</u> $OM = OT = 20$ см., $TM = 32$ см.

Решение: Пусть K — точка касания, тогда OK — радиус. ΔOMT — равнобедренный, следовательно OK — высота и медиана и значит MK = KТ = 16 см. ΔMKO — прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора $OK = \sqrt{OM^2 - MK^2}$,

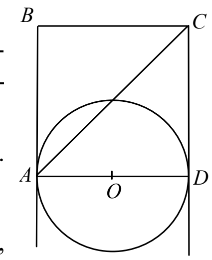


$OK = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

В-2

<u>1. Дано:</u> $ABCD$ — квадрат, AC = $10\sqrt{2}$, O — середина AD. Решение: ΔACD — прямоугольный, равнобедренный. По теореме Пифагора:

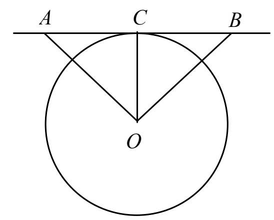


$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2AD^2} = 10\sqrt{2}$. AD = CD = 10. AO = OD = 5.

а) $R_{ОКР}$ = 5; б) $R_{ОКР}$ < 5; в) $R_{ОКР}$ > 5.

<u>2. Дано:</u> AB — касательная, OC = 8, AB = 30, $\angle AOC = \angle BOC$.

Найти: AO, BO.



Решение: Т.к. AB — касательная, то $AB \perp OC$ и $\Delta AOC = \Delta BOC$ (по стороне и двум углам), т.к. OC — общая сторона $\Rightarrow$

$AC = BC = \frac{1}{2}AB = 15$. По теореме Пифагора:

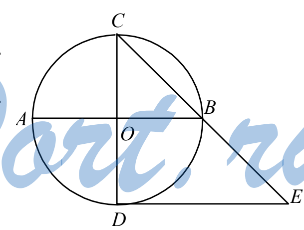
$BO = AO = \; = \sqrt{AC^2 + OC^2} = \sqrt{225 + 64} = 17$.

Ответ: 17.

В-3

<u>1. Дано:</u> BE = CB.

Решение: $\Delta COB \sim \Delta CDE$, т.к. $\angle C$ — общий и $\frac{CO}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow \Delta CDE$ — прямоугольный, $\angle CDE$ — прямой, т.е. ED — касательная к окружности.



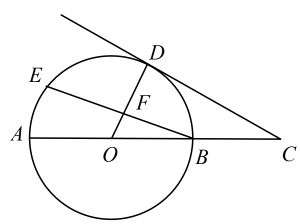
<u>2. Дано:</u> CD — касательная, OB = 10 см, OF = 4 см.

Найти AC.

Решение: $\Delta OFB \sim \Delta ODC$ (по 3 углам) $\Rightarrow$:

$\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OB}$, $OC = \frac{OD \cdot OB}{OF} = \frac{10 \cdot 10}{4} = 25$ (см).

AC = AO + OC = 10 + 25 = 35 (см).

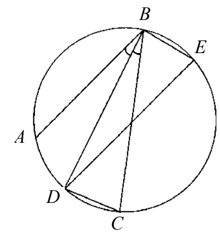


Решение: $\cup FC = 2\angle ABC = 80^o$ (т.к. $\angle FBC$ — вписанный).

$\cup BFC = 2\angle BCA = 2\left(\frac{180^o - 40^o}{2}\right) = 140°$ (т.к. $\angle BCA$ — угол между касательной и хордой) $\Rightarrow$ $\cup BF = \cup BFC - \cup FC = 60^o$ $\Rightarrow \cup CB = 220^o$.

Ответ: 60°, 80°, 220°.

В-7

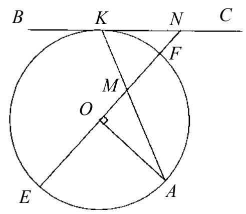


1. Дано: $\angle ABD = \angle DBC$, $AB \parallel DE$.

Доказать: $DE = BC$.

Доказательство: Так как $AB \parallel DE$ и BD — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle ABD = \angle BDE = \angle DBC$; $\angle DCB = \angle DEB$, как вписаный, опирающийся на ту же дугу, откуда $\Delta DCB = \Delta DEB$ по стороне и двум углам. Отсюда $DE = BC$.

2. Доказать: $NK = NM$.



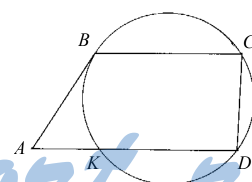
Доказательство: $\angle NKM = \frac{1}{2} \cup KFA$,

$\cup KFA = \cup KF = \cup FA = \cup KF + 90^o$.

$\angle KMF = \frac{1}{2}(\cup KF + \cup EA) = \frac{1}{2}(\cup KF + 90^o) \Rightarrow$

$\angle NKM = \angle KMF$, поэтому ΔKNM — равнобедренный и $NK = NM$.

В-8



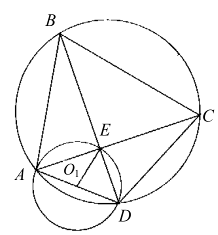
1. Дано: $ABCD$ — трапеция, ΔBCD — вписаный, AB — касательная.

Доказать: $BD = \sqrt{BC \cdot AD}$.

Доказательство: $\angle CBD = \angle ADB$ (т.к. $AD \parallel BC$ — основания трапеции).

$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BKD$ (т.к. он вписаный и опирается на эту дугу). $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup BKD$ (как угол между касательной и хордой) $\Rightarrow$ $\angle BCD = \angle ABD \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD$ (по двум углам), откуда $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{BD}$ $\Rightarrow$

$BD = \sqrt{BC \cdot AD}$.



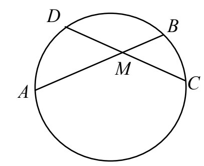
2. Дано: $ABCD$ — вписаный, $\cup AB + \cup CD = 180^o$, ΔAED — вписаный в окружность с центром O_1, $O_1E = 8$ см.

Найти: AD.

Решение: $\angle CAD + \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB + \frac{1}{2} \cup CD = 90^o$ (т.к. эти углы вписаные и опираются на дуги $\cup AB$ и $\cup CD$ соответственно). $\Rightarrow \angle AED = 90^o$, т.е. ΔAED — прямоугольный $\Rightarrow$ O_1 лежит на AD и $AD = 2\ O_1E = 8 \cdot 2 = 16$ см.
Ответ: 16 см.

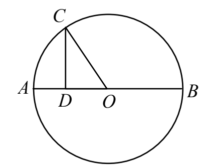
С-27

В-1



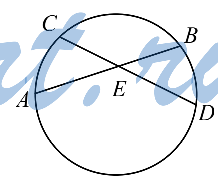
1. Дано: M — внутри круга, AB, CD — хорды, $AM = MB$, $CM = 16$ см, $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{4}$.

Решение: $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{4}$, $MC = 4 \cdot DM$, $16 = 4 \cdot DM$,
$DM=4$ (см).
$AM \cdot MB = DM \cdot MC$. $AM \cdot MB = 4 \cdot 16 = 64$ (см), т.к. $AM = MB$, то $AM = MB = 8$ (см).
$AB = AM + MB = 8 + 8 = 16$ (см).
Ответ: 16 см.

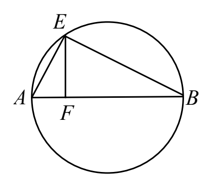


2. Дано: AB-диаметр, $CD \perp AB$, $AD = 3$, $DB = 5$.
В условии задачи опечатка, пропущено условие : точка D лежит на AB.
Найти: CD.
Решение: $AB=AD+DB=8$. Проведем радиус $OC = 4$.
ΔODC — прямоугольный. По теореме Пифагора :
$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$ (т.к. $OD = AO - AD = 4 - 3 = 1$).

В-2



1. Дано: $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $CD = 20$, $DE = 5$.
Найти: AB.
Решение: $CE = CD - DE = 20 - 5 = 15$. $3AE = EB$.
$AE \cdot EB = CE \cdot ED$. $AE \cdot 3AE = 15 \cdot 5$. $AE^2 = 25$, $AE = 5$, $EB = 3AE = 15$. $AB = AE + EB = 5 + 15 = 20$.
Ответ: 20.



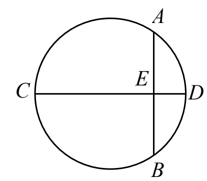
2. Дано: В условии задачи опечатка, пропущено: точка F лежит на AB.
AB-диаметр, $EF \perp AB$, $FB = 4$, $EF = 6$.
Найти: $R_{ОКР}$.
Решение: ΔEFB — прямоугольный, а т.к. $\angle AEB$ опирается на диаметр, то он прямой и $\Delta AEB \sim \Delta EFB$, т.к. $\angle B$ — общий.

$EB = \sqrt{EF^2 + BF^2} = 2\sqrt{13}$. $\frac{EB}{BF} = \frac{AB}{EB}$; $\frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{AB}{2\sqrt{13}}$, $AB = 13$.

$R_{ОКР.} = \frac{1}{2} AB = 6{,}5$.

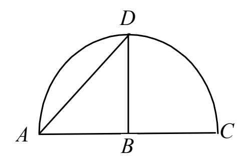
Ответ: 6,5.

В-3



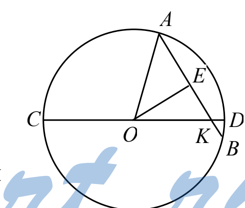
1. Дано: CD — диаметр, $AB \perp CD$, $CE = 2$ (см), $AB + CE = CD$.
Найти: $R_{ОКР}$.
Решение: $CD = CE + ED = CE + AB$ (по условию), следовательно $AB = ED$.
Т.к. $AB \perp CD$, то E — середина AB и $AE = EB$. Поэтому $AE^2 = CE \cdot ED = 2AB = 4AE$, $AE = 4$ (см), $AB = 8$ (см) следовательно $CD = 2 + 8 = 10$ (см). $R_{ОКР} = \frac{1}{2}CD = 5$ (см).

Ответ: 5 (см).



2. Дано:
Решение: Откладываем на одной прямой оба отрезка AB и AC, затем проводим полуокружность диаметром AC, из точки B проводим перпендикуляр BD. AD — искомый отрезок.

В-4

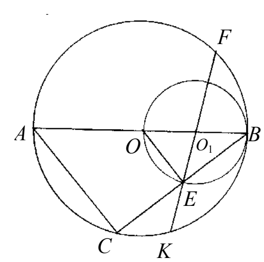


1. Дано: $OK = 5$ (см), $OE = 4$ (см), $AB = 16$ (см).
Найти: OA .
Решение: $AE = BE = 8$ (см);
$OA = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ (см).

Ответ: $4\sqrt{5}$ (см).

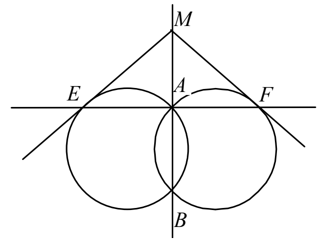
2. Строится аналогично задаче В-3, С-27, 2 для длин отрезков 2 см и 3 см.

В-5



1. Дано: $KE = 2$ см, $EF = 8$ см.
Найти: BC.
Решение: $\angle ABC$ — вписанный в большую окружность и опирающийся на $\cup AC$, $\angle OBE$ — вписанный в меньшую окружность и опирающийся на $\cup OE$. Значит градусные меры этих углов равны, а следовательно равны и градусные меры дуг BE и BC, откуда следует : $\angle CAB = \angle OEB$. Тогда

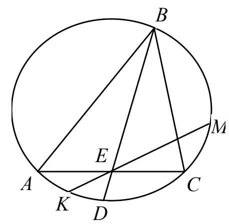
$\Delta ABC \sim \Delta OEB$ и $\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BO} = 2$, т.е. $BE = EC$. Тогда получаем:



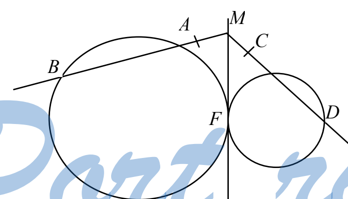
$BE^2 = BE \cdot EC = KE \cdot EF = 16$ (см), откуда BE = 4 см и $BC = 2BE$ = 8 см.
Ответ: 8 см.
<u>2.</u> Доказать: $ME = MF$.
Доказательство: Из св-ва хорды и касательной к окружности, проведенным из одной точки, имеем: $ME^2 = MA \cdot MB$, $MF^2 = MA \cdot MB$, откуда $ME = MF$.

В-6

<u>1. Дано:</u> $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, KE = 4 см, ME = 6 см, $\cup AD = \cup DC$.



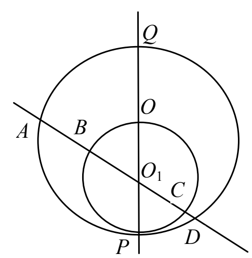
Найти: AC.
Решение: Пусть $AC = x$. $\angle ABD = \angle DBC$ (т.к. по условию $\cup AD = \cup DC$), т.е. BE — биссектриса $\angle ABC$ и $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AE = \frac{2}{5}x$, $EC = \frac{3}{5}x$.
По свойству хорд, пересекающихся внутри окружности $AE \cdot EC = KE \cdot EM$, т.е. $\frac{6}{25}x^2 = 24$, откуда x = 10 (см).
AC = 10 см
Ответ: 10 см.
<u>2. Дано:</u> $MA = MC$.



Доказать: $AB = CD$.
Доказательство: По свойству касательной и хорды, проведенных из одной точки к окружности, имеем: $MF^2 = MB \cdot MA = MD \cdot MC$, откуда $MB = MD$ и $AB = CD$.

В-7

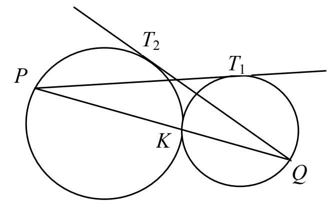
<u>1. Дано:</u> R, r — радиусы большей и меньшей окружностей соответственно.



$AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.
Найти: (r / R)= ?
Решение: имеем $BC = 2r$, $AB = r$,
$CD = \frac{3}{4} \cdot 2r = \frac{3}{2}r$. $O_1P \cdot O_1Q = O_1A \cdot O_1D$. Т.к. $O_1Q = 2R - r$, $O_1P = r$, $O_1A = r + r = 2r$,

$O_1D = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r$, то имеем: $(2R - r)r = 5r^2$, откуда $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

Ответ: (1/3).

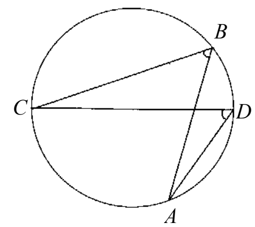


2. Доказать: $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$

Доказательство: По теореме о касательной и секущей $PT_1^2 + PK \cdot PQ$, $PT_1^2 + QK \cdot PQ$. Складывая получим: $PT_1^2 + PT_1^2 = PQ(PK + KQ) = PO^2$.

В-8

1. Дано: CD — диаметр, AB — хорда, AE = 4, EB = 3, AD = 6,5, $\angle AB = 60^o$.

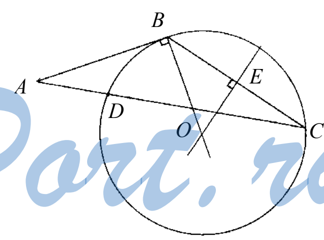


Найти: CE, ED.

Решение: $\angle CDA = \angle ABC = 60^o$ (т.к. они вписанные и опираются одну дугу). $\angle CAD = 90^o$ (т.к. он вписаный и опирается на диаметр) $\Rightarrow CD = 2AD = 13$.

$CE \cdot ED = AE \cdot EB = 12$ (как отрезки хорд, пересекающиеся внутри окружности). Таким образом, имеем : $\begin{cases} CE \cdot ED = 12 \\ CE + ED = 13 \end{cases}$. Решая систему получаем: CE = 12, ED = 1.

Ответ: CE = 12, ED = 1.



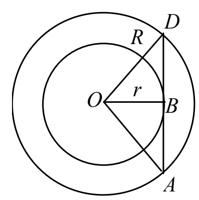
2. Дано: ΔABC, $\angle B$ — тупой. Построить на AC точку D, такую, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

Построение:

Восстанавливаем перепендикуляр BO к AB и серединный перепендикуляр EO к BC. Строим окружность с центром в точке O радиуса OB. Она пересекает AC в искомой точке D.

С-28

В-1

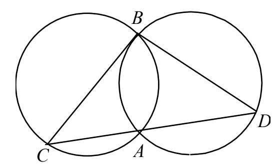


1. Дано: r — радиус меньшей окружности, R — радиус большей.

Решение: Т.к. хорда AD касается малой окружности, то $\angle OAB$ — прямой, B — точка касания. По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{R^2 - r^2}$, $AB = DB$, т.к. ΔODA — равнобедренный, а OB - медиана и высота $AD = AB + BD = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

Ответ: $2\sqrt{R^2 - r^2}$.

2. Дано:

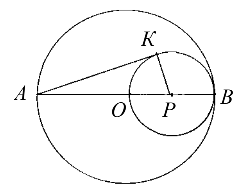


$\angle ADB = \angle ACB$, так как эти углы опираются на равные дуги. Следовательно ΔCBD — равнобедренный и $BC = BD$, что и требовалось доказать.

В-2

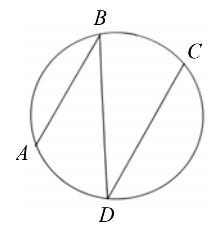
1. Дано: Окр.$_1$(O, r), AB — диаметр, OB — диаметр окр.$_2$, AK — касательная к меньшей окружности.

Найти: AK = ?



Решение: Т.к. AB — диаметр, то O лежит на AB. Пусть P — центр меньшей окружности. Он также лежит на AB. $KP \perp AK$ (т.к. AK — касательная) $\Rightarrow$ $\Delta\ AKP$ — прямоугольный следовательно $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$.

Ответ: $AK = 2\sqrt{2}r$.



2. Дано: A, B, C, D — лежат на окружности, $\cup BC = \cup AD$.

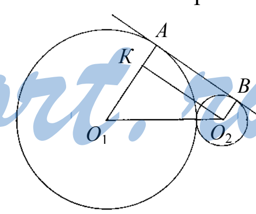
Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство: т.к. $\cup AD = \cup BC$, то $\angle ABD = \angle BDC \Rightarrow AB \parallel CD$.

В-3

1. Дано: Окр.$_1$ (O_1, 8 см), окр.$_2$ (O_2, 2 см) касаются внешним образом, AB-общая касательная.

Найти: AB = ?



Решение: Опустим из O_2 перпендикуляр O_2K на AO_1. Имеем : $AB \perp O_1A$, $AB \perp O_2B$, $O_2K \perp AK \Rightarrow ABO_2K$ — прямоугольник $\Rightarrow AB = O_2K$, $AK = O_2B = 2$ (см). Рассмотрим $\Delta\ O_1O_2K$ — прямоугольный.

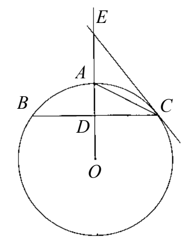
$O_1O_2 = 8 + 2 = 10$ (см) — гипотенуза, $O_1K = 8 - 2 = 6$ (см) $\Rightarrow$ $O_2K = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см) $\Rightarrow AB = 8$ (см).

Ответ: 8 см.

2. Дано: Окружность, OA — радиус, D лежит на AO. $BC \perp OA$, BC — хорда, проходящая через D. CE — касательная.

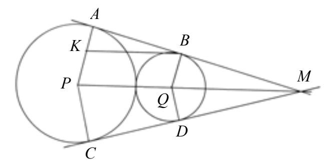
Доказать: CA — биссектриса $\angle BCE$.

Доказательство: $\angle BCA = \frac{1}{2} \cup AB$ (т.к. $\angle BCA$ опирается на $\cup AB$). $\angle ACE = \frac{1}{2} \cup AC$ (как угол между касательной и хордой). $\cup AB = \cup AC$ $\Rightarrow \angle BCA = \angle ACE$, что и требовалось доказать.



В-4

1. <u>Дано:</u> Окр.$_1$ (P, 6), окр.$_2$ (Q, 4), AB-общая внешняя касательная, CD — общая внешняя касательная, $AB \cap CD = M$.



Найти: MQ = ?

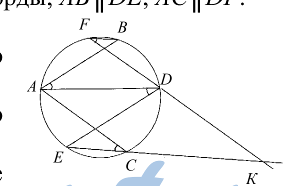
Решение: Прямая PQ проходит через точку M. $PA \perp AB$, $QB \perp AB$ $\Rightarrow$ $AP \parallel BQ$ $\Rightarrow$ $\angle APM = \angle BQM$.

Проведем отрезок $BK \parallel PQ$. Тогда, $\angle AKB = \angle APM = \angle BQM$ и $\angle ABK = \angle BMQ \Rightarrow$ $\Delta KAB \sim \Delta QBM$ $\Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{BQ}{QM}$. $PQ \parallel KB$, $PK \parallel QB$ $\Rightarrow PKQB$ — паралеллограм $\Rightarrow KB = PQ = 6 + 4 = 10$, $AK = AP - KP =$ $= AP - BQ = 6 - 4 = 2 \Rightarrow QM = \frac{KB}{AK} \cdot BQ = \frac{10}{2} \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

2. <u>Дано:</u> Окружность; AB, AC, DE, DF, — хорды; $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$.

Доказать: $FB \parallel CE$.



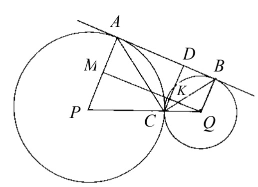
Доказательство: Т.к. $AB \parallel DE$, то $\angle BAD = \angle ADE$. Т.к. $\angle BAD$ и $\angle BFD$ опираются на одну и ту же дугу BD, то $\angle BAD = \angle BFD$.

Аналогично, $\angle ACE = \angle BFD$. Пусть прямые EC и FD пересекаются в точке K.

Тогда $\angle ACE = \angle FKE \Rightarrow \angle BFK = \angle FKE \Rightarrow FB \parallel EC$, что и требовалось доказать.

В-5

1. <u>Дано:</u> Окр.$_1$ (P, 3 см), окр.$_2$ (Q, 1 см) касаются в точке C, AB — общая внешняя касательная.



Найти: S_{ABC} = ?

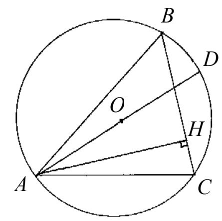
Решение: Опустим из точки C перепендикуляр CD на AB и из точки Q перпендикуляр QM на AP, пересекающий CD в точке K. Имеем : $MA \perp AB$, $KD \perp AB$, $QB \perp AB$, $MA \perp MQ$,

$DK \perp MQ$, $BQ \perp MQ \Rightarrow ADKM$ и $KDBQ$ — прямоугольники $\Rightarrow$ $BQ = KD = AM = 1$,

$$AB = MQ = \sqrt{PQ^2 - MP^2} = \sqrt{(3+1)^2 - (3-1)^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3},$$

$$\Delta PQM \sim \Delta CKQ \Rightarrow \frac{PM}{PQ} = \frac{CK}{CQ} \Rightarrow CK = \frac{2}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

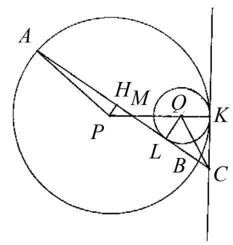


2. Дано: ΔABC вписан в окружность с центром в точке O, $AH \perp BC$.

Доказать: $\angle OAC = \angle BAH$.

Доказательство: Продолжим AO до пересечения с окружностью в точке D. Пусть $\angle BAH = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 90^o - \alpha \Rightarrow \cup AC = 180° - 2\alpha \Rightarrow$ $\cup DC = \cup AD - \cup AC = 180° - 180° + 2\alpha \Rightarrow$ $\angle DAC = \frac{1}{2} \cup DC = \alpha$, что и требовалось доказать.

В-6



1. Дано: Окр.$_1$ (P, 4), окр.$_2$ (Q, 1) касаются внутренним образом, AB касается окр.$_2$ и является хордой для окр.$_1$, $\angle ACK = 60^o$.

Найти: AB = ?

Решение: Пусть AB касается меньшей окружности в точке L, точка касания окружностей — K, PQ пересекается с AB в точке M. $\angle QCL = \angle QCK = 30^o$, $\angle CQL = \angle CQK = 60° \Rightarrow \angle MQL = 60° \Rightarrow \angle AMP = 30°$. ΔMQL — прямоугольный, QL = 1 см $\Rightarrow MQ$ = 2см $\Rightarrow PM = PK - QK - MQ$ = 1 см. Опустим перпендикуляр PH из P на $AB \Rightarrow \Delta PHM$ — прямоугольный $\Rightarrow PH = \frac{1}{2}$ см (т.к. $\angle HMP = 30^o$, PM = 1 см) $\Rightarrow$

$$AH = \frac{1}{2}AB = \sqrt{AP^2 - PH^2} = \frac{\sqrt{63}}{2} \text{ (см)} \Rightarrow AB = \sqrt{63} \text{ (см)}.$$

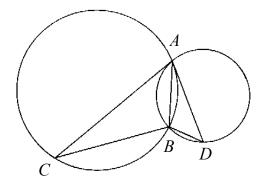
Ответ: $AB = \sqrt{63}$ см.

2. Дано: Окр.$_1$ пересекается с окр.$_2$ в точках A, В, AC-хорда окр.$_1$ и касательная к окр.$_2$, AD — хорда окр.$_2$ и касательная окр.$_1$.

Доказать: $AC \cdot BA = AD \cdot BC$.

Т.к. AD — касательная к окр.$_1$, то $\angle BAD = (1/2) \cup AB$ (в окр.$_1$). Но и $\angle ACB = (1/2) \cup AB$ (в окр.$_1$), т.к. опирается на нее $\Rightarrow \angle ACB = \angle BAD$.

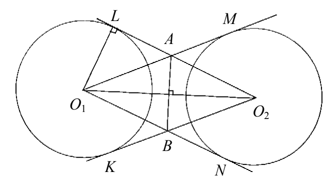
Аналогично $\angle ADB = \angle CAB$. Таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB}$ $\Rightarrow AC \cdot BA = AD \cdot BC$, что и требовалось доказать.



B-7

<u>1. Дано:</u> 2 круга радиуса r, расстояние между центрами — d.

Найти: $S_{O_1AO_2B} = ?$



В силу симметрии относительно O_1O_2 и AB $S_{O_1AO_2B} = 4S_{O_1AB}$, $\Delta O_1LO_2 \sim HAO_2$ (т.к. оба они прямоугольны и имеют общий острый угол) $\Rightarrow \frac{O_1L}{O_2L} = \frac{AH}{HO_2}$. $O_2L = \sqrt{d^2 - r^2}$, т.о.

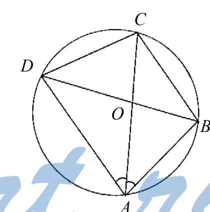
$$S_{O_1AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot AH = \frac{d}{4} \cdot \frac{O_1L}{O_2L} \cdot HO_2 = \frac{d}{4} \cdot \frac{r}{\sqrt{d^2 - r^2}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{rd^2}{\sqrt{d^2 - r^2}} \Rightarrow$$

$$S_{O_1AO_2B} = \frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}.$$

Ответ: $\frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$.

<u>2. Дано:</u> четырехугольник $ABCD$ — вписаный, $\angle DAC = \angle BAC$.

Доказать: $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$



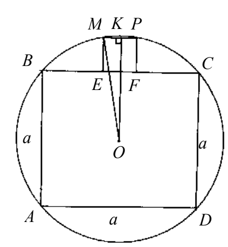
Пусть AC пересекает BD в точке O. $\angle DAC = \angle BAC$ по условию, а $\angle BAC = \angle BDC$ как вписаные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta COD$ по 2-м углам ($\angle DAC$ — общий) $\Rightarrow \frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DO$ (1).

Аналогично $\Delta ABC \sim \Delta BOC$ и $AB \cdot BC = AC \cdot BO$ (2). Складывая (1) и (2), получаем $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$, что и требовалось доказать.

B-8

<u>1. Дано:</u> квадрат $ABCD$ — вписаный в окружность, $EMPF$ — квадрат, E, F лежат на BC; M, P лежат на окружности.

Найти: сторону квадрата $EMPF$.



Решение: Пусть сторона квадрата $EMPF$.

равна x. Опустим перпендикуляр OK из точки O на MP.

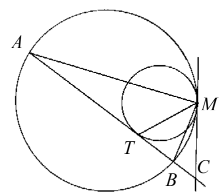
Тогда, $MK = KP = \dfrac{x}{2}$, $OK = \dfrac{a}{2} + x$, $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (радиус окружности).

$MK^2 + OK^2 = OM^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + (x + \dfrac{a}{2})^2 = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + x^2 + ax + \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow$

$5x^2 + 4ax - a^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 5a^2}}{5} = \dfrac{-2a \pm 3a}{5} = \left[\dfrac{a}{5}\right.$ ($-a$ — не подходит по смыслу задачи).

Ответ: $\dfrac{a}{5}$.

<u>2. Дано:</u> Две окружности касаются внутренним образом в точке M. AB - хорда большей и касательная к меньшей окружности (в точке T).



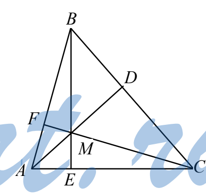
Доказать: $\angle AMT = \angle BMT$.

Доказательство: Проведем общую касательную двух окружностей и пусть AB пересекает эту касательную в точке C. Так как $CT = CM$ как обрезка касательных, проведенных из точки C к меньшей окружности, то $\angle CMT = \angle CTM$. Кроме того, $\angle CAM = \angle BMC$, $\angle AMT = \angle CTM - \angle CAM = \angle CTM - \angle BMC =$
$= \angle CMT - \angle BMC = \angle BMT$, то есть $\angle AMT = \angle BMT$.

С-29

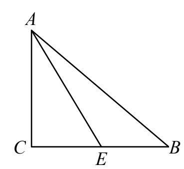
В-1

<u>1. Дано:</u> $AD \perp BC$, $CF \perp AB$.



Решение: Достроим BM до пересечения с AC, BE — тоже высота, так как все высоты в треугольнике пересекаются в одной точке. $\angle FMB = \angle EMC$ т.к. они вертикальные, следовательно ΔFBM и ΔEMC — подобные и значит $\angle MCA = \angle ABM$ что и требовалось доказать.

<u>2. Дано:</u> AE — биссектриса, $CE = 5$, $AB = 14$.



Решение: По свойству биссектрисы:

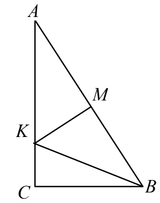
$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CE}{EB}$; $\dfrac{AC}{14} = \dfrac{5}{EB}$; $AC \cdot EB = 70$.

$S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2} AC \cdot EB = \dfrac{1}{2} \cdot 70 = 35$.

Ответ: $S_{\Delta ABE} = 35$.

В-2

<u>1. Дано:</u> $AK = 5$, $BC = 4$, $AM = BM$.



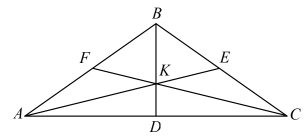
Найти: $P_{\Delta BKC}$.

Решение: $\Delta AMK = \Delta BMK$ (по двум катетам), так как MK — общий катет, следовательно $BK = AK = 5$.

По теореме Пифагора: $KC = \sqrt{BK^2 - BC^2} = \sqrt{25-16} = 3$.

$P_{\Delta BKC} = KC + BK + BC = 3 + 5 + 4 = 12$.

Ответ: 12.

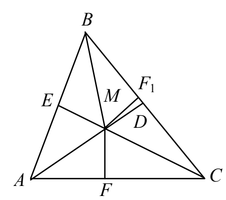


2. <u>Дано:</u> AE, FC — медианы, $AB = BC$, $BK = 6$, $AC = 10$.
Найти: $S_{\Delta ABC}$.

Решение: Продолжим BK до пересечения с AC в точке D. Т.к. все медианы пересекаются в одной точке, то BD — тоже медиана, а т.к. ΔABC — равнобедренный, то BD — высота. Медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, следовательно $\frac{BK}{KD} = \frac{2}{1}$, $BK = 2KD = 6$. $KD = 3$, $BD = BK + KD = 6 + 3 = 9$.
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45$.

Ответ: 45.

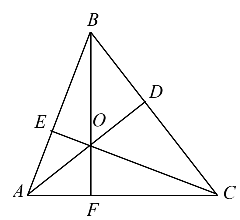
В-3



1. <u>Дано:</u> AD, CE — биссектрисы, $BM = m$, $\angle ABC = \alpha$.
Найти: MF.
Решение: Точка M — центр вписанной окружности, а $MF = MF_1$ — ее радиусы. ΔBMF_1 — прямоугольный, $\angle MBF_1 = \frac{\alpha}{2}$. $\frac{MF_1}{BM} = \sin\angle MBF_1$;
$MF_1 = MF = m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

2. <u>Дано:</u> AD, CE — высоты, $OA = 4$, $OD = 3$, $BD = 4$.
Найти: OF.

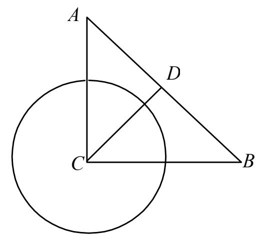


Решение: $\angle AOF = \angle BOD$ (вертикальные) и $\Delta AOF \sim \Delta BOD$ (по 3 углам). $\frac{OF}{AO} = \frac{OD}{BO}$;
$OF = \frac{AO \cdot OD}{\sqrt{BD^2 + OD^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{16+9}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

В-4

<u>1. Дано:</u> $AC = 3$, $BC = 4$, $R_{ОКР} = 2{,}4$.



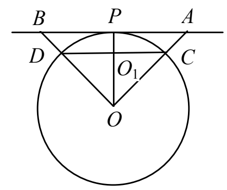
Решение: Построим высоту CD.

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (по 3 углам). $\frac{CD}{AC} = \frac{CB}{AB}$;

$CD = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Т.к. $CD = R_{ОКР}$, то AB — касательная к окружности.

<u>2. Дано:</u> $OD = OC = 7$, $OA = OB = 25$.



Найти: CD.

Решение: $PA = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{625 - 49} = 24$.

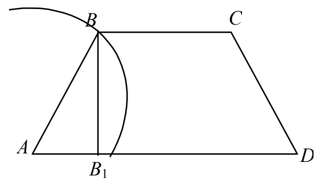
$\Delta OO_1C \sim \Delta OPA$.

$\frac{CO_1}{OC} = \frac{PA}{OA}$; $CO_1 = \frac{OC \cdot PA}{OA} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$.

$DC = 2CO_1 = 13{,}44$.

В-5

<u>1. Дано:</u> $AB = BC = CD$, $AD = 2BC$.



Решение: Проведем высоту BB_1.

$AB_1 = \frac{1}{2}AB$. $\cos\angle A = \frac{AB_1}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$;

$\angle A = 60°$; $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$; $\angle C = \angle ABC = 120°$. ΔBCD — равнобедренный $\Rightarrow$ $\angle CDB = \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 30°$;

$\angle ADB = 60° - 30° = 30°$. $\angle ABD = 180° - \angle A - \angle ADB = 90°$. Т.к. A — центр окружности, то BD — касательная.

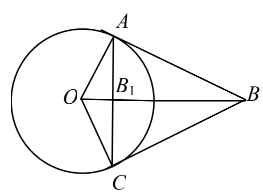
<u>2. Дано</u>: $R_{ОКР} = R$, $\angle ABC = \alpha$.

Найти: AC.

Решение: $\angle AOB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, т.к. ΔAOB — прямоугольный.

$\angle AOC = 2\angle AOB = 180° - \alpha$; $\angle OAB_1 = \frac{\alpha}{2}$, т.к. ΔOAB_1 — прямоугольный. $\frac{AB_1}{r} = \cos\angle OAB_1 = \cos\frac{\alpha}{2}$; $AB_1 = r\cos\frac{\alpha}{2}$;

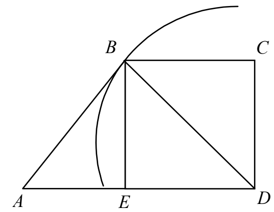
$AC = 2AB_1 = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$.



Ответ: $2r\cos\frac{\alpha}{2}$.

В-6

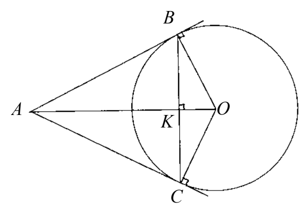
<u>1. Дано:</u> $BC = CD$, $AD = 2BC$, $\angle CDA = 90^o$.



Решение: Опустим высоту BE на AD. Тогда $EBCD$ — квадрат, откуда $\angle EBD = 45^o$, а $AE = BE$, т.е. ΔABE — прямоугольный, равнобедренный и $\angle ABE = 45^o$. Таким образом, $\angle ABD = 90^o$, т.е. AB касается данной окружности.

<u>2. Дано:</u> $\angle BAC = \alpha$, $OK = m$.

Найти: AB, BC = ?



Решение: $\Delta ABK \sim \Delta KBO$, откуда

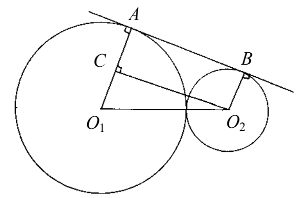
$$\angle KBO = \angle BAO = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow OB = \frac{m}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$AB = \frac{OB}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{\sin\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{2}} .$$

В-7

<u>1. Дано:</u> d_1, d_2 — диаметры.

Доказать: $AB^2 = d_1d_2$.



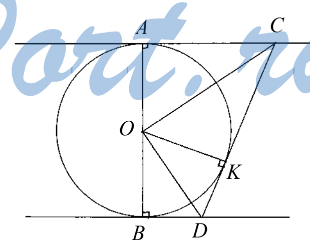
Доказательство: Пусть $d_1 > d_2$.

Тогда $O_1C = = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)$, т.к ($O_2C \perp AC$).

$O_1O_2 = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2$. Так что по теореме Пифагора : $AB^2 = O_2C^2 = \frac{1}{4}(d_1 + d_2)^2 - \frac{1}{4}(d_1 - d_2)^2 = d_1d_2$, т.е. $AB^2 = d_1d_2$.

<u>2. Дано:</u> R — радиус окружности.

Доказать: $R^2 = CA \cdot BD$.



Доказательство:

Пусть $\angle OCK = \alpha$. Тогда $\angle ACO = \alpha$, $\angle COK = \alpha \Rightarrow$

$\angle KOD = \frac{1}{2}$ (180°–180°+2α) = α ⇒

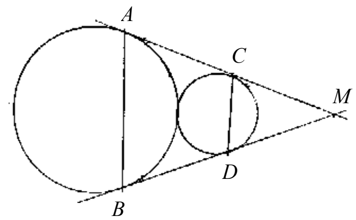
$\angle COD = 90^o$, т.е. ΔCOD — прямоугольный. OK — высота $\Delta COD \Rightarrow r^2 = OK^2 = CK \cdot DK$, но $CK = AC$ и $DK = BD \Rightarrow r^2 = CA \cdot BD$.

В-8

<u>1. Дано:</u> AC и BD — общие касательные для двух окружностей.

Доказать: $ACDB$– равнобедренная трапеция.

Доказательство: $MA = MB$ как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки. Аналогично, $MC = MD$. Тогда $\Delta\, AMB$ и $\Delta\, DCM$ — равнобедренные с общим углом $M \Rightarrow$ $\angle MAB = \angle MCD = \angle MBA = \angle MDC \Rightarrow$ $CD \parallel AB$. Т.о., имеем: $CD \parallel AB$ и $AC = BD$, т.е. $ACDB$ — равнобедренная трапеция.



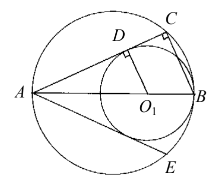
2. <u>Дано</u>: AB – диаметр окружности с центром в точке O, окр.(O,R), $\angle DAE = 60^o$.

Найти: CA и CE.

Решение: Очевидно, что $AC = AE$, поэтому достаточно найти AC.

$\angle DAO_1 = \angle O_1AE = \dfrac{1}{2}\angle DAE = 30^o$, $O_1D = R \Rightarrow$

$AD = r\sqrt{3}$, $AO_1 = 2R$. $\Delta ACB \sim \Delta ADO_1$ (т.к. они оба прямоугольны и имеют общий острый угол) $\Rightarrow$



$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AO_1} \Rightarrow AC = AD \cdot \frac{AB}{AO_1} = r\sqrt{3} \cdot \frac{3r}{2r} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r\,.$$

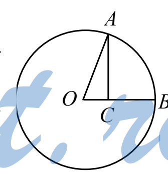
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r$.

С-26

В-1

1. <u>Дано:</u> $\cup AB = 60^o$, $OA = 6$ см.

Решение: ΔAOC — прямоугольный, т.к. AC - расстояние от A до OB. $\dfrac{AC}{AO} = \sin\angle AOC = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,



$AC = AO \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $3\sqrt{3}$ (см).

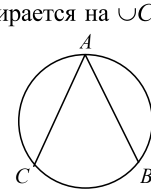
2. <u>Дано:</u> AB, AC — хорды, $\angle BAC = 70^o$, $\cup \text{AB} = 120^o$.

Решение: Т.к. $\angle BAC = 70^o$, вписан в окружность и опирается на $\cup CB$, то $\cup CB = 2 \cdot \angle BAC = 140^o$.

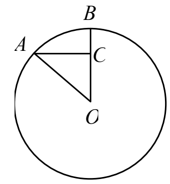
Градусная мера полной окружности равна 360º, следовательно: $\cup AC = 360^o - \cup CB - \cup AB \Rightarrow$

$\cup AC = 360^o - 140^o - 120^o = 100^o$.

Ответ: $\cup AC = 100^o$.



В-2



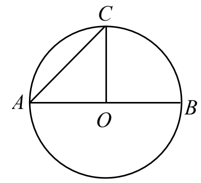
1. Дано: $OB = OA = 2 \cdot AC$.

Найти: $\cup AB$.

Решение: ΔACO — прямоугольный. $\cup AB = \angle AOB$.

$\sin\angle AOB = \frac{AC}{AO} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOB = 30^o$.

Ответ: 30º.



2. Дано: $\frac{\cup AC}{\cup CB} = \frac{7}{2}$.

Найти: $\angle BAC$.

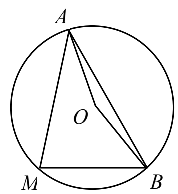
Решение: $\cup AB + \cup CB = 180^o$, т.к. AB — диаметр.

Пусть $\cup CB = x$, тогда $\cup AB = \frac{7}{2}x$, $x + \frac{7}{2}x = 180^o$,

$x = 40^o$. $\angle COB = \cup CB$, $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB$, $\angle CAB = \frac{1}{2}40^o = 20^o$.

Ответ: 20º.

В-3



1. Дано: $\angle AMB = 30^o$, $R_{OKP} = 10$ см.

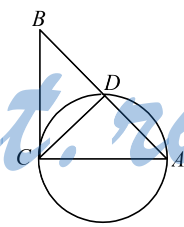
Найти: AB.

Решение: $\angle AOB = 2\angle AMB$, т.к. они опираются на одну дугу $\cup AB$. По теореме косинусов в ΔAOB

$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB}$;

$AB = \sqrt{100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}} = 10$ (см).

Ответ: 10 см.



2. Дано: $BD = 4$ см, $AD = 9$ см.

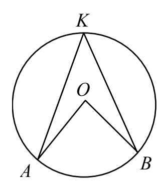
Найти: CD.

Решение: $\angle CDA$ — прямой, т.к. опирается на диаметр окружности. $\angle DCB = \angle DAC$ (т.к. BC — касательная) и $\Delta BCD \sim \Delta ACD$ (по 3 углам). $\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$,

$CD^2 = AD \cdot BD$, $CD = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

В-4



1. Дано: $\angle AKB = 45^o$, $AB = 3\sqrt{2}$.

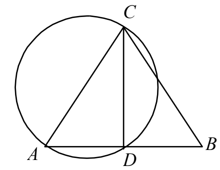
Найти : R_{OKP}.

Решение : $\angle AOB = 2\angle AKB = 90^o$; $AO = BO = R_{OKP}$.

По т. Пифагора: $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{2AO^2} = AO\sqrt{2}$;

$AB = AO\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $AO = 3$.

Ответ : 3.



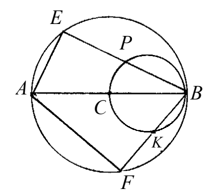
2. Дано: $AC = CB$, $CD = 18$, $AD = 16$.

Найти : S_{ABC}.

Решение : Т.к. AC — диаметр, $\angle ADC$ — прямой. Т.к. ΔABC равнобедренный, то $AD = BD$ и $AB = 2AD = 32$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 18 = 288$.

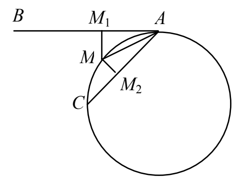
Ответ : 288 см^2.

В-5



1. Доказать, что $\frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}$.

Решение: $\angle AEB$, $\angle CPB$, $\angle AFB$, $\angle CKB$ — прямые, т.к. опираются на диаметр окружности, следовательно $AF \parallel KC$ и $AE \parallel PC$. По теореме Фалеса $\frac{EP}{PB} = \frac{AC}{CB}$ и $\frac{FK}{KB} = \frac{AC}{CB}$, т.е. $\frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}$, что и требовалось доказать.



2. Дано: $\cup AM = \cup MC$, $MM_1 = 5$.

Найти: MM_2.

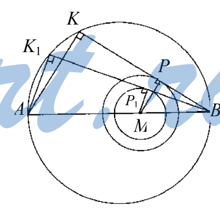
Решение:

$\angle M_2AM = \frac{1}{2} \cup AC$; $\angle CAM = \cup MC = \frac{1}{2} \cup AC \Rightarrow$

$\Delta M_2AM = \Delta MAM_1$ и $MM_2 = MM_1 = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

В-6

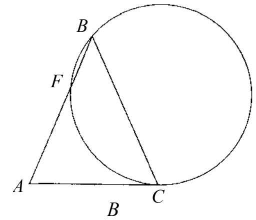


1. Доказать: $\frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B}$.

Доказательство:

$\Delta AK_1B \sim \Delta MP_1B$ (т.к. угол B — общий), откуда $\frac{K_1P_1}{P_1B} = \frac{AM}{MB}$. Аналогично из подобия ΔAKB и ΔMPB $\frac{KP}{PB} = \frac{AM}{MB}$, откуда получаем $\frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B}$.

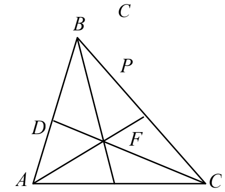
2. Дано: $\angle ABC = 40^o$.



Найти: $\cup BF$ **= ?,** $\cup FC$ **= ?,** $\cup CB$ **= ? В-4**

<u>1. Дано:</u> $CF = 10$, $AB = 16$.

Найти: FD.

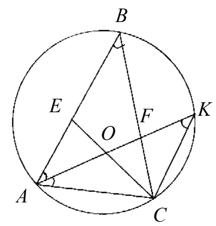


Решение: Все серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, поэтому FD — тоже серединный перпендикуляр. Точка F — равноудалена от вершин: $AF = BF = CF = 10$; $AD = DB = 8$. По теореме Пифагора:

$$FD = \sqrt{BF^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 .$$

Ответ: 6.

<u>2. Дано:</u> ΔABC — вписаный, $\angle A = 2\angle B$, AF и CE — биссектрисы, пересекаются в точке O. AO пересекает окружность в точке K.



Доказать: $KC \parallel AB$.

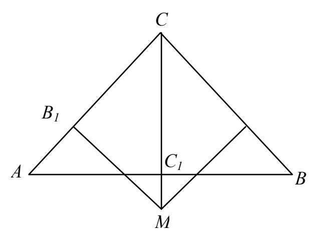
Доказательство: Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 2\alpha$ (по условию), а $\angle BAF = \angle FAC = \alpha$ (т.к. AF — биссектриса $\angle BAC$).

$\angle AKC = \angle ABC = \alpha$ (т.к. они оба вписаные и опираются на $\cup AC$) $\Rightarrow KC \parallel AB$.

В-5

<u>1. Дано:</u> $AC = BC = a$, $\angle ACB = 120^o$.

Найти: MC_1.



Решение:

Построим высоту CC_1. Т.к. ΔABC — равнобедренный, то высота CC_1 — это серединный перпендикуляр и биссектриса.

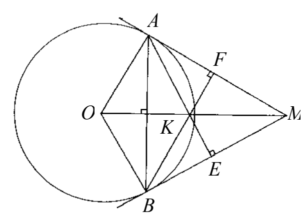
$\angle ACC_1 = \frac{1}{2}\angle ACB = 60°$; $\frac{CC_1}{AC} = \cos\angle ACC_1$;

$CC_1 = AC \cdot \cos\angle ACC_1 = a \cdot \frac{1}{2}$; $\Delta CB_1M \sim \Delta ACC_1$ (по 2 углам) и

$\frac{CM}{CB_1} = \frac{AC}{CC_1}$; $CM = \frac{CB_1 \cdot AC}{CC_1} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a}{2}} = a$;

$C_1M = CM - CC_1 = \alpha - (\alpha/2) = (\alpha/2)$.

Ответ: $(\alpha/2)$.



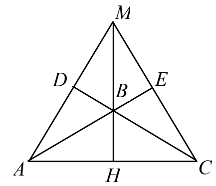
<u>2. Дано:</u> $MO = 2OB$.

Найти: $\angle KAB$.

Решение: Т.к. $MO = 2OB$ и $OB \perp BM$, то $\angle BMO = 30^o$. Пусть продолжение AK пересекает BM в точке E. Тогда $AE \perp BM$, поскольку K — точка пересечения высот ΔAMB. Таким образов, стороны углов $\angle KAB$ и $\angle BMO$ взаимно перпендикулярны, а значит $\angle KAB = \angle BMO = 30^o$.

Ответ: 30^o.

В-6



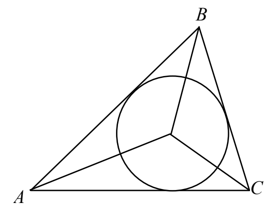
1. Дано: $\angle ABC$ — тупой, $MB = 5$, $AC = 10$.

Найти: S_{AMCB}.

Решение: Очевидно, что AE и CD — высоты ΔAMC, откуда MH (H — точка пересечения прямой MB с AC) — также высота в этом треугольнике, т.е. $MH \perp AC$.

$S_{AMCB} = S_{AMC} – S_{ABC} = \frac{1}{2} AC(MH - BH) = \frac{1}{2} AC \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$.

Ответ: 25.



2. Дано: $\angle ABC = 2\alpha$.

Найти: $\angle AOC$.

Решение:

точка, равноудаленная от сторон треугольника — это точка пересечения биссектрис.

Отсюда имеем:

$$\angle AOC = 180^o - \angle OAC - \angle OCA = 180^o - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) =$$

$$= 180^o - \frac{1}{2}(180^o - 2\alpha) = 90^o + \alpha .$$

Ответ: $90^o + \alpha$.

В-7

1. Строим вспомогательный прямоугольный равнобедренный треугольник с некоторым катетом a и построением находим отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис и медиан. Пусть этот отрезок имеет длину, равную $в$. Все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны. Обозначим сторону искомого треугольника через $x = \frac{am}{b}$. Тогда $\frac{a}{x} = \frac{в}{m}$. Построением находим отрезок x. Дальнейшее построение очевидно.

2. Дано: ΔABC, $AB = BC = 5$, $AC = 6$.

Найти : $PQ = ?$

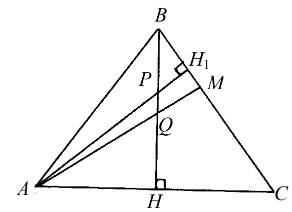
Решение:

Пусть P — точка пересечения высот, а Q — медиан.

Очевидно, что $BH = 4$. $BQ = \frac{2}{3} BH = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$. $\Delta PBH_1 \sim \Delta HBC$ (по двум углам), а $\Delta APH \sim \Delta PBH_1$ (также по двум углам).

Таким образом, $\Delta APH \sim \Delta HBC$ и $\frac{AH}{HB} = \frac{HP}{HC}$, откуда $HP = \frac{9}{4}$. Тогда $PQ = |HP - HQ| = \left|HP - \frac{1}{3}BH\right| = \frac{11}{12}$.

Ответ: (11/12).



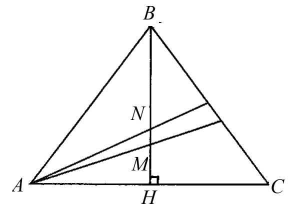
В-8

1. Задача решается аналогично задаче 1 варианта 7.

2. Дано: ΔABC — равнобедренный, $AB = BC = 5$, $AC = 6$.

Найти: MN — ?

Решение: Пусть M — точка пересечения медиан, N — точка пересечения биссектрис. Пусть $BH \perp AC$. Тогда, $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 4$. $MH = \frac{1}{3}; BH = \frac{4}{3}$,



$$NH = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{6 \cdot 4}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN = NH - MH = \frac{1}{6}.$$

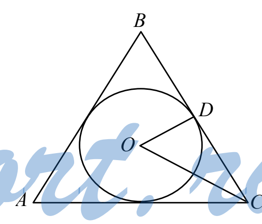
Ответ: $MN = \frac{1}{6}$.

С-30

В-1

1. Дано: ΔABC — равносторонний, $AB = 2\sqrt{3}$ см.

Решение: Построим радиус OD. Так как окружность вписанная, то BC-касательная и $OD \perp BC$. ΔODC — прямоугольный. Т.к. ΔABC — равносторонний, то $\angle ABC = 60^o$, а $\angle OCD = 30^o$, т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис. Т.к. ΔABC — равносторонний, то BD=DC= $\sqrt{3}$ (см). $tg\angle DCO = \frac{OD}{DC} = \frac{OD}{\sqrt{3}} = tg30^{\circ} = = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $OD = 1$ (см).

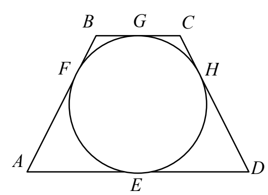


Ответ: $r = 1$ см.

2. Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $P_{ABCD} = 10$ см.

Найти: AB.

Решение: Обозначим точки прикосновения окружности через E, F, G, H. Имеем $AF = AE$, $BF = BG$, $CG = CH$, $DH = DE$. Т.к.

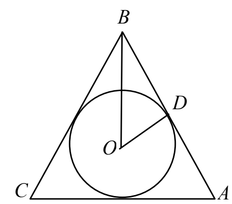


трапеция равнобедренная, то $AE = ED = a$, $BG = GC = b$.

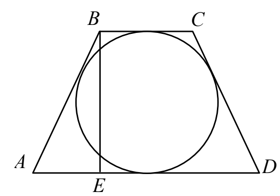
Тогда $P_{ABCD} = 4(a + b) = 10$ (см); $a + b = \frac{5}{2} = AB = CD$.

Ответ: $AB = CD = \frac{5}{2}$ см.

В-2



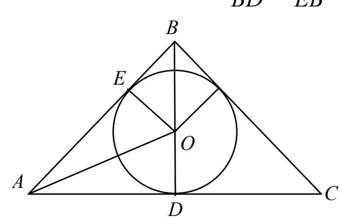
1. <u>Дано:</u> $OD = \sqrt{3}$ см ΔABC — равносторонний.
Найти: AB.
Решение: ΔOBD — прямоугольный. Т.к. ΔABC — равносторонний, то $\angle CBA = 60^o$ и $\angle OBD = 30^o$. $tg\angle OBD = \frac{OD}{BD}$; $tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$BD = 3$ (см).
$AB = 2BD = 6$ (см).
Ответ: 6 см.



2. <u>Дано:</u> $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $\angle BAD = 30^o$, $BE = 4$ см.
Найти: $BC + AD$.
Решение: ΔABE — прямоугольный. $\sin\angle A = \frac{BE}{AB}$; $\sin 30^o = \frac{4}{AB} = \frac{1}{2}$, $AB = 8$ (см).
Т.к. окружность вписана в трапецию, то $AB + CD = BC + AD = 16$ (см).
Ответ: 16 см.

В-3

1. <u>Дано:</u> $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.
Найти: $R_{\text{ОКР}}$.
Решение: Центр вписанной окружности — пересечение биссектрис, но т.к. ΔABC — равнобедренный, то BD — высота и медиана и $AD = \frac{1}{2}AC = 6$ (см); $\Delta OEB \sim \Delta ABD$ (по 3 углам) и $\frac{AD}{BD} = \frac{OE}{EB}$;



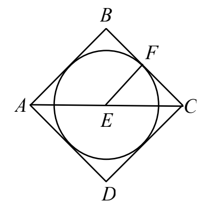
$$OE = \frac{AD \cdot EB}{BD} = \frac{AD \cdot EB}{\sqrt{AB^2 - AD^2}}.$$

AE=AD=6 см; EB=AB–AE=10–6=4 см.

$$OE = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{100 - 36}} = 3 \text{ (см)}.$$

Ответ: 3 см.
2. <u>Дано:</u> P_{ABCD} = 80 см., AC = 32 см.
Найти: $R_{\text{впис. ОКР}}$.

Решение: $BC = \frac{1}{4} \cdot P_{ABCD} = 20$ (см);



$EC = \frac{1}{2} AC = 16$ (см); $BE \perp AC$. $\Delta BEF \sim \Delta BEC$ (по 3 углам); $BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

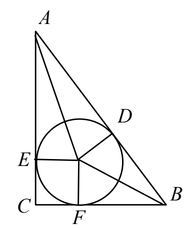
$\frac{EF}{BE} = \frac{EC}{BC}$; $EF = \frac{BE \cdot EC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6$ (см).

Ответ: 9,6 см.

В-4

1. Дано: $AD = 6$ см, $DB = 4$ см.

Найти: $R_{\text{ОКР}}$.

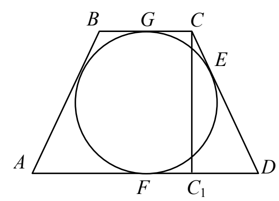


Решение: $AE = AD = 6$ см, $BF = BD = 4$ см(отрезки касательных, проведенных из одной точки). Обозначим $CE = CF = x$. Тогда по теореме Пифагора, имеем: $(6+x)^2+(4+x)^2=(6+4)^2$; $36+12x+x^2+16+8x+x^2 = 100$; $x^2 + 10x–24 = 0$, $x = 2$ (см) (второй корень — отрицательный, не подходит по смыслу задачи)

Ответ: 2 см.

2. Дано: $AB = CD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см.

Найти: $R_{\text{ОКР}}$.



Решение: $CG = CE = (1/2)BC = 1$ (см), $DE = DF = (1/2)AD = 4$ (см) (отрезки касательных проведенных из одной точки). Проведем высоту CC_1; $FC_1 = GC = 1$.

$DC_1 = 4 – 1 = 3$ (см). По теореме Пифагора:

$CC_1 = \sqrt{CD^2 - DC_1^2} = \sqrt{(1+4)^2 - 3^2} = 4$ (см).

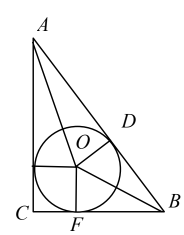
$CC_1 = 2 \cdot R_{\text{ОКР}} = 4$ (см), $R_{\text{ОКР}} = 2$ (см).

Ответ: 2 см.

В-5

1. Дано: $\angle B = 60^o$, $R_{\text{ОКР}} = 2\sqrt{3}$ см.

Найти: S_{ABC}.



Решение: $CF = R_{\text{ОКР}} = 2\sqrt{3}$ (см); $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle B = 30^o$.

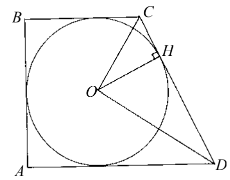
$\frac{OF}{BF} = tg\angle OBF$; $BF = \frac{OF}{tg\angle OBF} = \frac{2\sqrt{3}}{tg30^o} = 6$ (см):

$CB = (2\sqrt{3} + 6)$ (см).

$\frac{AC}{CB} = tg\angle B$; $AC = CB \cdot tg\angle B = (2\sqrt{3}+6)\sqrt{3} = (6+6\sqrt{3})$ см.

$$S = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CB = \frac{1}{2}6(1+\sqrt{3})(2\sqrt{3}+6) = 6(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) =$$
$$= 6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2$ см^2.



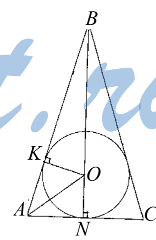
<u>2. Дано:</u> $ABCD$ — прямоугольная трапеция, $OC = 6$ см, $OD = 8$ см.
Найти: S_{ABCD}.
Решение: Поскольку CO и DO — биссектрисы углов $\angle BCD$ и $\angle CDA$ соответственно, а также из того, что $\angle BCD + \angle CDA = 180^o$, имеем: $\angle COD = 90^o$, т.е. ΔCOD — прямоугольный. Тогда $CD = 10$ (см) и $OH = \frac{24}{5}$ (см) — радиус окружности. Следовательно, $AB = 2OH = \frac{48}{5}$ (см). $AD + BC = AB + CD = \frac{98}{5}$ (см) (т.к. трапеция $ABCD$ — описанная).

Тогда $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot AB = \frac{49}{5}\cdot\frac{48}{5} = 94{,}08$ (см).

Ответ: 94,08 см^2.

В-6

<u>1. Дано:</u> $BO = 5$ см, $AB = BC = 10$ см.
Найти: r.

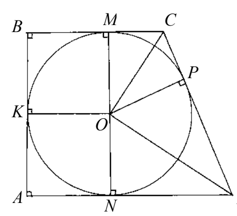


Решение: Пусть искомый радиус равен r. Тогда $BK = \sqrt{25-r^2}$, откуда $AN = AK = 10-\sqrt{25-r^2}$.

Тогда $r = \frac{S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{(10-\sqrt{25-r^2})(5+r)}{20-\sqrt{25-r^2}}$, откуда:

$20r = 10(5+r) - 5\sqrt{25-r^2}$. $r^2 - 8r + 15 = 0 \Rightarrow r = \left[\begin{array}{l}3\ (\text{см})\\5\ (\text{см})\end{array}\right.$,

5 (см)— не подходит, т.к. должно быть $r + 5 < 10$.
Ответ: 3.



<u>2. Дано:</u> $\angle A = \angle B = 90^o$, $BC = 3$, $r = 2$.
Найти: S_{ABCD}.
Решение: Очевидно, что $BM = BK = KA = 2$, $MC = CP = 1$, $MN = 4$, $ND = PD$.

Пусть $\angle MCO = \angle OCP = \alpha$. Тогда $\angle POD = \angle NOD = \alpha$, откуда следует, что $\Delta COP \sim \Delta POD$, откуда $\dfrac{OP}{PC} = \dfrac{PD}{DP}$, откуда $PD = \dfrac{OP^2}{PC} = 4$.

Таким образом, $S_{ABCD} = \dfrac{4+2+3}{2} \cdot 4 = 18$.

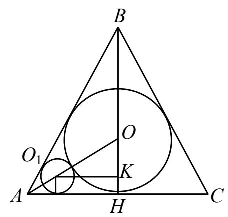
Ответ: 18.

В-7

<u>1. Дано:</u> $AB = BC = 20$, $AC = 24$.

Найти: $r = ?$

Решение:



Пусть r — искомый радиус. Радиус окружности вписаной в ΔABC $R = \dfrac{S_{ABC}}{P_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16}{32} = 6$.

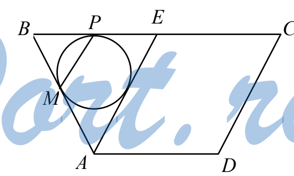
$\Delta AOH \sim \Delta O_1OK$, откуда $\dfrac{OK}{OH} = \dfrac{O_1O}{AO}$; $OK = 6 - r$, $OH = 6$, $O_1O = 6 + r$, $AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$, т.е. $\dfrac{6-r}{6} = \dfrac{6+r}{6\sqrt{5}}$, откуда $r = 3(3-\sqrt{5})$.

Ответ: $3(3-\sqrt{5})$.

<u>2. Дано:</u> $\angle BAE = \angle EAD$, $BM = MP$.

Найти: $\angle BAD$.

Решение: Очевидно, что $AB = BE$ и $BM = BP$. Отсюда $\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{BE}{BP}$. Тогда $\Delta MBP \sim \Delta ABE$. Из подобия треугольников следует, что ΔBMP равнобедренный и $\angle BMP = \angle BPM$, так как по условию $BM = MP$, а $\angle BPM = \angle MPB$, то ΔMPB — равносторонний, а потому и ΔABE равносторонний и $\angle BAE = 60^o$, т.е. $\angle BAD = 120^o$.



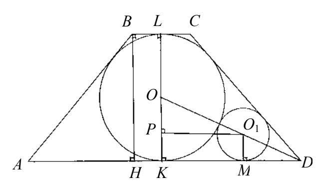
Ответ: $\angle BAD = 120^o$.

В-8

<u>1. Дано:</u> $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см.

Найти: $r = ?$

Решение:



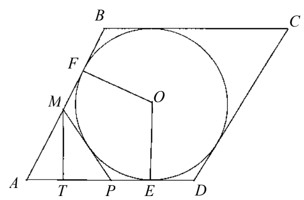
$KL=BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (см) $\Rightarrow$ $KO = 2$ (см). Пусть радиус меньшей окружности равен r $\Rightarrow$ $OP = 2 - r$, $OO_1 = (2 + r)$ (см).

$\Delta KOD \sim \Delta MO_1D$ (т.к. оба они прямоугольны и имеют общий острый угол) $\Rightarrow$ $\dfrac{O_1P}{OP}=\dfrac{KD}{KO}=\dfrac{4}{2}=2 \Rightarrow O_1P = 2OP = 4–2r$. По теореме пифагора для ΔPOO_1: $(2 - r)^2 + 4(2–r)^2 = (2 + r)^2$, откуда $r^2–br + 4 = 0$ и

$r=\left[\begin{array}{l}(3+\sqrt{5})(см)\\(3-\sqrt{5})(см)\end{array}\right.$, $(3+\sqrt{5})$(см) — не подходит по смыслу задачи.

Ответ: $3-\sqrt{5}$.

<u>2. Дано:</u> $ABCD$ — ромб, $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60^o$, $MP = 2$ см.
Найти: MB, PD.
Решение:



Очевидно, что радиус вписаной окружности равен $\sqrt{3}$ см и $AE=AF=3$ (см). Из свойств касательных $AP + PK = AE$ и $AM + MK = AF$. Складывая эти равенства, получим $P_{AMP} = 6$ (см), а так как $MP = 2$ (см), то $AP = AM = 4$ (см). Пусть MT высота ΔAMP. Обозначим AM через x. Тогда $MT=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $AT=\dfrac{x}{2}$,

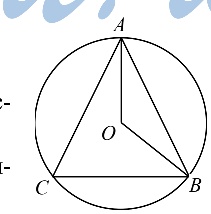
$PT = 4-\dfrac{3x}{2}$. Из ΔMTP следует, что $\dfrac{3x^2}{4}+16-12x+\dfrac{9x^2}{4}=4$.

Отсюда $x = 2$ (см), т.е. $AM = AP = 2$ (см). Тогда и $MB = PD = 2$ (см).
Ответ: 2 см.

С-31

В-1

<u>1. Дано:</u> ΔABC — равносторонний, $OA = 3\sqrt{3}$.
Найти: P_{ABC} = ?
Решение:

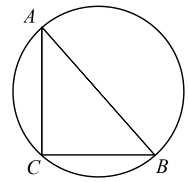


Т.к. ΔABC — равносторонний, то OA и OB — биссектрисы, и $\angle OAB = \angle OBA = 30°$,
$\angle AOB = 180° – 30° – 30°= 120°$. По теореме косинусов: $AB=\sqrt{OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB}$,

$AB=\sqrt{27+27+2\cdot 27\cdot\dfrac{1}{2}}=9$. $P_{ABC} = 3\cdot AB = 3\cdot 9 = 27$.

Ответ: $P_{ABC} = 27$.

2. <u>Дано:</u> ΔABC — прямоугольный, $AC = 16$, $R_{ОКР} = 10$.
Найти: $S_{\Delta ABC}$.



Решение: Т.к. ΔABC — прямоугольный и вписан в окружность, то AB-диаметр, $AB = 2 \cdot 10 = 20$.

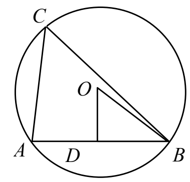
По теореме Пифагора $BC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$.

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 96$.

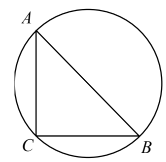
В-2

1. <u>Дано:</u> $AB = 24$ см., $OD \perp AB$, $OD = 5$.
Найти: OB.



Решение:
Т.к. $OD \perp AB$, то D — середина AB и $DB = 12$ (см).
По теореме Пифагора:
$OB = \sqrt{OD^2 + BD^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$ (см).
Ответ: 13 см.

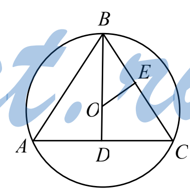
2. <u>Дано:</u> $R_{ОКР} = 7{,}5$ см; $AC = 9$ см.
Найти: $P_{\Delta ABC}$.



Решение: Т.к. $\angle ABC$ - прямой, то AB - диаметр, $AB = 2 \cdot 7{,}5 = 15$ (см). По теореме Пифагора:
$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{225 - 81} = 12$ (см).
$P_{\Delta ABC} = 15 + 9 + 12 = 36$ (см).
Ответ: 36 см.

В-3

1. <u>Дано:</u> $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.
Найти: $R_{ОКР}$.



Решение: Центр описанной окружности O — пересечение серединных перпендикуляров. Т.к. ΔABC — равнобедренный, то BD — медиана, высота и биссектриса. $DC = \frac{1}{2} AC = 6$ (см). По теореме Пифагора: $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см). $\Delta OBE \sim \Delta BDC$ (по 3 углам); Т.к. $OE \perp BC$, то E — середина BC и $BE = \frac{1}{2} BC = 5$ (см).

$\frac{OB}{BE} = \frac{BC}{BD}$; $OB = \frac{BE \cdot BC}{BD} = \frac{5 \cdot 10}{8} = 6{,}25$ (см).

Ответ: 6,25 см.

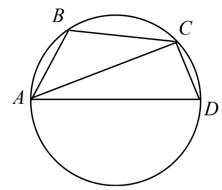
2. <u>Дано:</u> AD — диаметр, $\angle ABC = 130^o$, $\angle BCD = 140^o$.

Найти: $\angle BAD$, $\angle CDA$, $\angle ACB$.

Решение: Т.к. $ABCD$ — вписанный, то $\angle ABC+\angle CDA = 180°$, $\angle CDA = 180°–130° = 50°$. Аналогично $\angle BAD=180°–\angle BCD=180°–140° = 40°$. Т.к. AD — диаметр, то $\angle ACD = 90°$.

$\angle ACB = \angle BCD – \angle ACD = 140° – 90° = 50°$.

Ответ: 40°, 50°, 50°

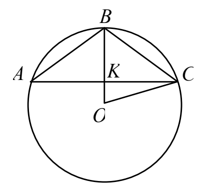


В-4

1. <u>Дано:</u> $AC = 24$ см, $OC = 13$ см.

Найти: $AB = BC$.

Решение: Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, следовательно $AK = KC = 12$ (см)и $OB \perp AC$. В ΔOCK:



$OK = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

$BK = OB – OK = 13–5 = 8$ см.

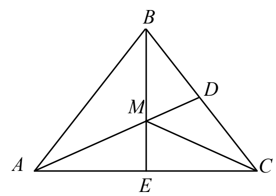
$BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$ (см).

Ответ: $4\sqrt{13}$ см.

2. <u>Дано:</u> $AB = BC = AC = \sqrt{3}$ см.

Доказать, что около $MDCE$ можно описать окружность.

Решение: Т.к. ΔABC — равносторонний, то $\angle C = 60^\circ$, и $BE = AD$ — биссектриса, высота и медиана, следовательно $\angle MEC$ и $\angle MDC$ — прямые $\Rightarrow$ $\angle EMC = \angle DMC = 90°–30° = 60°$, $\angle MEC + \angle MDC = 180°$; $\angle EMD + \angle ECD = 180°$; т.е. около $MDCE$ можно описать окружность. Т.к. $\angle MDC$ — прямой, то МС — диаметр окружности.



$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$ (см); $MD = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ (см);

$MC = \sqrt{MD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ (см). $R_{ОКР} = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ (см).

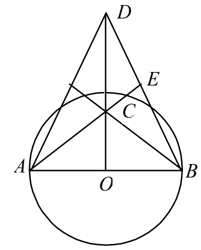
Ответ: $\frac{1}{2}$ см.

В-5

1. <u>Дано:</u> $AC = CB$, $\angle ACB = 120^o$.

Доказать: $OD = 2OC$.

Решение: Пусть радиус окружности — r. $\angle CAB = 30^o$, $\angle COB = 60^o$ (т.к. опирается на одну и ту же дугу). $\angle FCE = \angle ACB$ (вертикальные). Т.к. ΔABC — равнобедренный, то OD — биссектриса и $\angle FCD = \angle ECD = 60^o$. Т.к. ΔCDE — прямоугольный, то $\angle CDE = 30°$.



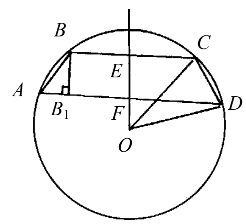
$\angle DBO = 180° - \angle ODB - \angle DOB = 90°$.

$\frac{OB}{OD} = \cos\angle DOB$; $OD = \frac{OB}{\cos\angle DOB} = \frac{r}{\cos 60^o} = 2r$ что и требовалось доказать.

2. <u>Дано:</u> $BC = 6$ дм, $AD = 8$ дм, $BB_1 = 1$ дм.

Найти: $R_{ОКР}$.

Решение: Построим радиус $OE \perp AD$ и радиусы ОС и OD. Пусть радиус окружности — r. Тогда запишем уравнения для прямоугольных ΔOEC и ΔOFD; обозначив $OF = x$:



$$\begin{cases} r^2 - 16 = x^2; \\ r^2 - 9 = x^2 + 2x + 1; \end{cases}$$

$x^2 + 16 + x^2 + 2x + 10$, $x = OF = 3$ (дм); $r^2 - 16 = 3^2$, $r = 5$ (дм).

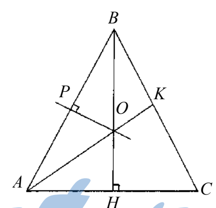
Ответ: 5 дм.

В-6

1. <u>Дано:</u> $AB = BC$, $\angle ABC = 72^o$, $BK = a$.

Найти: R.

Решение:



Пусть искомый радиус равен R. Центр описанной окружности O— точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника PO и BH. Тогда $\angle ABO = 36^o = \angle BAO$ (т.к. ΔABO — равнобедренный: $AO = BO$), откуда $\angle BKA = 72^o$, а тогда $\angle BOK = 180° - 36° - 72° = 72°$ т.е. ΔBOK — равнобедренный и $R = BO = BK = a$.

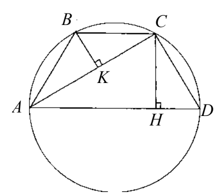
Ответ: a.

2. <u>Дано:</u> $R = 4$ см, $\angle BCA = 30^o$, $\angle BAC = \angle CAD$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение:

Очевидно, что $\angle BAC = \angle CAD = \angle BCA = 30^o$, откуда $\angle CDA = \angle BAD = 60^o$ и следовательно, $\angle ACD = 90^o$, т.е. AD — диаметр и $AD = 2R = 8$ (см).



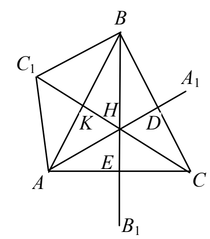
Из ΔACD $AC = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см). Тогда, поскольку в ΔABC $AB = BC$, то $AK = KC = 2\sqrt{3}$ (см), откуда $BC = 4$ (см). Высота CH вычисляется из прямоугольного ΔACD:

$$CH = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{8} = 2\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{4+8}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $12\sqrt{3}$ см^2.

В-7



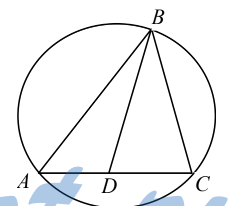
1. Очевидно, что $\Delta AC_1B = \Delta AHB$. Отсюда $\angle AC_1B = \angle AHB_1$, но $\angle DHE = \angle AHB$. В четырехугольнике $EHDC$ углы HEC и HDC прямые, поэтому $\angle DHE + \angle BCA = 180^o$. Следовательно, $\angle AC_1B + \angle BCA = 180^o$. Это значит, что точка C_1 лежит на окружности, описаной около ΔABC. Аналогично для точек A_1 и B_1.

2. Дано: R, $AC = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \angle BDC$.

Найти: $r = ?$

Решение: Пусть r — радиус окружности, описаной около ΔBDC. $\Delta BDC \sim \Delta BCA$ (по двум углам) с коэфициентом подобия $\frac{b}{a}$, откуда

$r = \frac{b}{a}R$.



Ответ: $\frac{bR}{a}$.

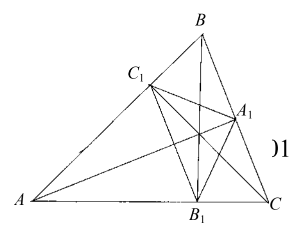
В-8

1. Дано: ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1, — высоты.

Доказать: AA_1, BB_1, CC_1, — биссектрисы $\Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство: Пусть H — точка пересечения высот ΔABC. Около четырехугольника AC_1HB_1 можно описать окружность; $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Обозначим их через α. $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$,

$\angle BC_1A_1 = \angle BCA = 90^o = \alpha$.

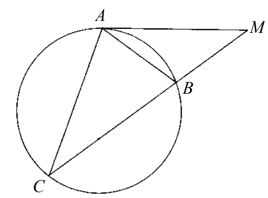


Тогда $\angle A_1C_1H = 90° - 90° + \alpha$. Следовательно, $\angle A_1C_1H = \angle HC_1B_1$; т.е. CC_1 — биссектриса $\angle A_1C_1B_1$. Аналогично можно доказать, что AA_1 — биссектриса $\angle C_1A_1B_1$ и BB_1 — биссектриса $\angle C_1B_1A_1$.

<u>2. Дано:</u> $AC = b$, $AB = c$. R — радиус описаной окружности ΔAMC.

Найти: радиус описаной окружности ΔAMB.

Решение: $\angle MAB = \angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta AMC$ (т.к. $\angle M$ у них общий). Тогда, обозначив за R_1 радиус описанной около ΔAMB окружности будем иметь: $\frac{c}{b} = \frac{R_1}{R}$, откуда $R_1 = \frac{cR}{b}$.



Ответ: $\frac{cR}{b}$.

С-32

В-1

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$. б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$.

в) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

с) $\vec{f}$ и $\vec{e}$.

Нельзя.

В-2

а) $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

в) $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

с) $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Да, можно.

В-3

$\left|\overrightarrow{AB}\right| > \left|\overrightarrow{BC}\right|$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

а) $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{d}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

в) $\vec{a}$ и $\vec{d}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

с) $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В-4

1. $\left|\vec{AD}\right| > \left|\vec{AC}\right|$; $\left|\vec{AC}\right| = \left|\vec{BD}\right|$

2. а) $\vec{n}$ и $\vec{m}$, $\vec{m}$ и $\vec{c}$, $\vec{n}$ и $\vec{c}$.

б) $\vec{n}$ и $\vec{m}$.

в) $\vec{m}$ и $\vec{c}$, $\vec{n}$ и $\vec{c}$.

с) $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

В-5

1. Так как $\vec{AB} = \vec{DC}$, то $ABCD$ — параллелограмм.

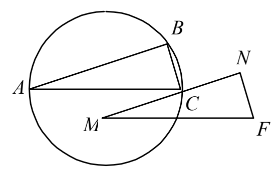
а) $\vec{BE}$ и $\vec{EC}$, $\vec{AF}$ и $\vec{DF}$, $\vec{BE}$ и $\vec{AF}$, $\vec{BE}$ и $\vec{DF}$, $\vec{EC}$ и $\vec{AF}$, $\vec{EC}$ и $\vec{DF}$.

б) $\vec{BE}$ и $\vec{EC}$, $\vec{BE}$ и $\vec{AF}$, $\vec{EC}$ и $\vec{AF}$.

в) $\vec{BE}$ и $\vec{DF}$, $\vec{AF}$ и $\vec{DF}$, $\vec{EC}$ и $\vec{DF}$.

г) $\vec{EC}$ и $\vec{AF}$.

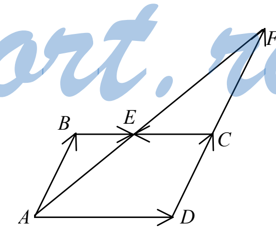
д) $\vec{EC}$ и $\vec{AF}$, $\vec{BE}$ и $\vec{DF}$.



2. Решение: $\angle ABC = 90°$, т.к. опирается на диаметр. $\Delta ABC = \Delta MNF$ (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно $\angle MNF = \angle ABC = 90°$.
Ответ: 90°.

В-6

1. Дано: $\vec{AB} = \vec{DC}$.



Решение: Поскольку $\vec{AB} = \vec{DC}$, то $AB = CD$ и AB $\parallel$ CD, т.е. $ABCD$ — параллелограмм.

а) Коллинеарны: $\vec{AB}$ и $\vec{CF}$, $\vec{BE}$ и $\vec{CF}$, $\vec{BE}$ и $\vec{AD}$, $\vec{AD}$ и $\vec{CF}$.

б) Сонаправлены: $\vec{AB}$ и $\vec{CF}$, $\vec{BE}$ и $\vec{AD}$.

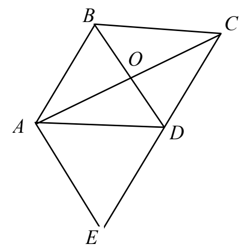
в) Противоположно направлены: $\vec{BE}$ и $\vec{CF}$, $\vec{AD}$ и $\vec{CF}$.

г) $\vec{AB} = \vec{CF}$.

д) $|\vec{AB}| = |\vec{CF}|$, $|\vec{BE}| = |\vec{CE}|$.

<u>2. Дано:</u> $|\vec{AC}| = 12$ см, $|\vec{BD}| = 16$ см, $\vec{AE} = \vec{BD}$.

Найти: $|\vec{EC}|$.

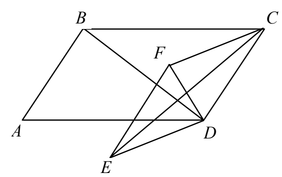


Решение: Т.к. $\vec{AE} = \vec{BD}$, то $AE \parallel BD$, откуда $\Delta AEC \sim \Delta DOC$ (O — точка пересечения диагоналей ромба), откуда $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{OC} = 2$, т.е. $EC = 2DC = 2\sqrt{8^2 + 6^2} = 20$ (см) $= |\vec{EC}|$.

Ответ: 20 см.

В-7

<u>1.</u>



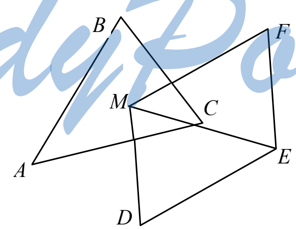
Решение: $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF}$, $\vec{DE} = \vec{CF}$, $\vec{AD} = \vec{BC}$,

$\vec{DF}, \vec{CE}, \vec{BD}, \vec{AC}, \vec{AE} =$ $\vec{BF}$, $\vec{AF}$, $\vec{BE}$ обратные к ним и $\vec{O}$. Итого: 21.

Ответ: 21.

<u>2. Дано:</u> $\vec{MF} = \vec{AB}$, $\vec{ME} = \vec{AC}$, $\vec{MD} = \vec{BC}$.

Доказать: $MFED$ — параллелограм.

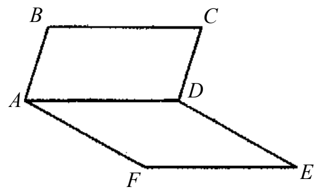


Доказательство: $\vec{FE} = \vec{ME} - \vec{MF} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{MD}$, т.е. $MD = FE$ и $MD \parallel FE$, откуда $MFED$ — параллелограмм.

В-8

<u>1. Дано:</u> ΔABC, $ADEF$ — паралеллограммы.

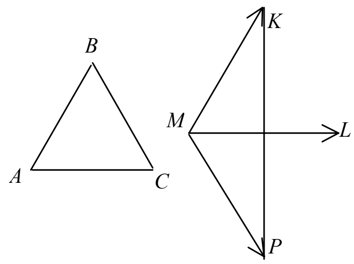
Сколько существует различных векторов с концами в вершинах данных паралеллограмов?



Решение: $\vec{AB} = \vec{CD}$, $\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{FE}$, $\vec{AF} = \vec{DE}$, $\vec{BF} = \vec{CE}$, $\vec{BE}$, $\vec{FC}$, $\vec{BD}$, $\vec{AC}$, $\vec{AE}$, $\vec{FD}$, обратные к ним, и $\vec{O}$. Итого: 21.

<u>2. Дано:</u> ΔABC — правельный, $\vec{AB} = \vec{MK}$, $\vec{ML} = \vec{AC}$, $\vec{MP} = \vec{BC}$.

Доказать: $ML \perp KP$.

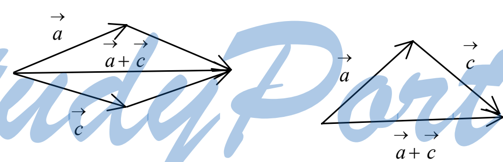


Доказательство: Очевидно, что $\Delta MKL = \Delta MLP$, и оба они правильные. Тогда, $MKLP$ – ромб, а ML и KP — его диагонали $\Rightarrow ML \perp KP$.

С-33

В-1

1.

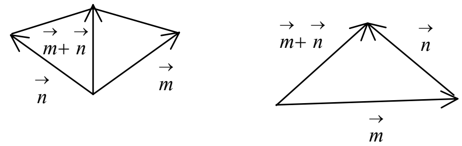


<u>2.</u> $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{OS} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OS}) + \overrightarrow{SM} =$

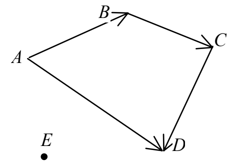
$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SM} = \vec{O}$ (нулевой вектор).

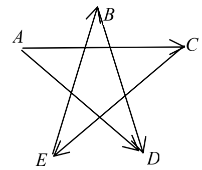
В-2

<u>1. Дано:</u>



2. Дано:

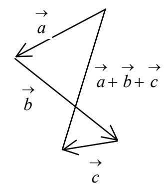


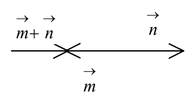


От перестановки слагаемых сумма векторов не меняется. Поэтому, рассмотрим сумму $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$; $\vec{AC}+\vec{EB}+\vec{CE}+\vec{BD}=$ $=\vec{AC}+\vec{CE}+\vec{EB}+\vec{BD}=\vec{AD}$.

В-3

1.



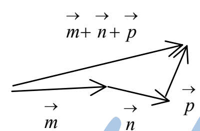


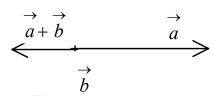
2. $\vec{AM}+\vec{DC}+\vec{MD}+\vec{CB}=\vec{AM}+\vec{MD}+\vec{DC}+\vec{CB}=\vec{AB}$.

$\vec{AC}+\vec{DA}=\vec{AB}$; $\vec{AB}=\vec{AB}$

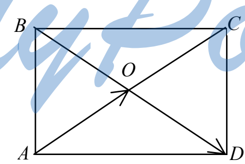
В-4

1.





2.

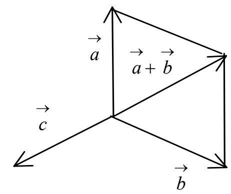


Доказательство: $\left|\vec{AO}+\vec{DC}+\vec{OD}\right|=\left|\vec{AD}+\vec{DC}\right|$.

$\vec{AO}+\vec{DC}+\vec{OD} = \vec{AO}+\vec{OD}+\vec{DC} = \vec{AC}$, $\vec{DA}+\vec{DC}=\vec{DB}$. $\vec{AC}$ и $\vec{DB}$ — диагонали прямоугольника, следовательно их длины равны.

В-5

<u>1. Дано:</u> $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$, $\angle \vec{ab} = \angle \vec{ac} = 120^o$.



Доказать, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

Решение: Построим сумму $\vec{a}+\vec{b}$ по правилу параллелограмма. Тогда $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

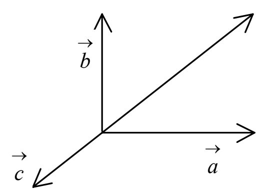
Векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ лежат на одной прямой и противоположно направлены, т.к. угол между $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}$ равен 60°, а между $\vec{c}$ и $\vec{b}$ — 120°, угол между $\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ равен 180°, следовательно $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=0$ что требовалось доказать.

<u>2.</u> $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{O}$, получаем: $\vec{AD}+\vec{DE}+\vec{x}-\vec{AD}=\vec{O}$; $\vec{DE}+\vec{x}=\vec{O}$; $\vec{x}=-\vec{DE}=\vec{ED}$.

Ответ: $\vec{ED}$.

В-6

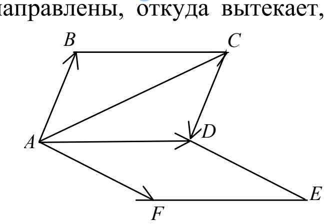
<u>1. Дано:</u> $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90^o$, $(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=135^o$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$.



Доказать: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$.

Доказательство: Построим вектор $\vec{a}+\vec{b}$. Тогда получим: $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$ и $(\widehat{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}})=45^o$, т.е. вектора $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны по модулю и противоположно направлены, откуда вытекает, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$.

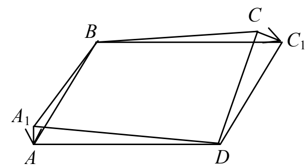
<u>2. Дано:</u> $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{CD}+\vec{AF}+\vec{y}=\vec{AF}$.



Найти: $\vec{y}$.

Решение: Легко видеть, что $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{CD}+\vec{AF}=\vec{AE}$, откуда видно, что $\vec{y}$ можно взять, например, равный $\vec{EF}$.

В-7

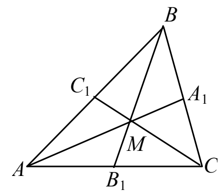


<u>1.</u> Доказать: $\vec{AA_1} = \vec{CC_1}$.

Доказательство:

$\vec{AA_1} = \vec{DA_1} - \vec{DA} = -\vec{BC_1} + \vec{BC} = \vec{C_1C}$, т.е. $\vec{AA_1} = \vec{CC_1}$.

<u>2. Дано:</u> M — точка пересечения медиан.



Доказать: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{O}$.

Доказательство:

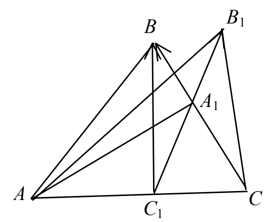
Пусть медианы $\Delta ABC - AA_1, BB_1, CC_1$.

$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB}) \Rightarrow$

$\vec{MA} = -\frac{2}{3}\vec{AA_1} = -\frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB})$. Аналогично $\vec{MB} = -\frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC})$ и $\vec{MC} = -\frac{1}{3}(\vec{CB} + \vec{CA})$. Складывая эти равенства, получим $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{O}$.

В-8

<u>1. Дано:</u> $A_1B = A_1C$, $A_1B_1 = A_1C_1$.



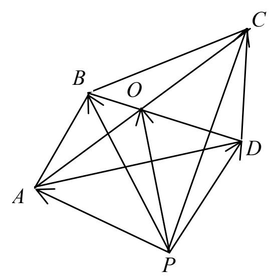
Доказать: $\vec{CB_1} = \vec{C_1B}$.

Доказательство: Так как AA_1 — общая медиана ΔABC и ΔAB_1C_1, то $\vec{C_1A} = \vec{AB_1}$ и $\vec{CA_1} = \vec{A_1B}$. Тогда:

$\vec{C_1B} = \vec{C_1A_1} + \vec{A_1B} = \vec{CA_1} + \vec{A_1B} = \vec{CB_1}$, т.е. $\vec{CB_1} = \vec{C_1B}$.

<u>2. Дано:</u> $ABCD$ — параллелограмм.

Доказать: $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$.



Доказательство:

$\vec{PA} = \vec{OA} + \vec{PO}$, $\vec{PB} = \vec{OB} + \vec{PO}$,

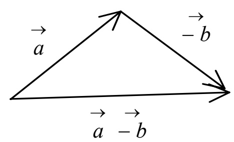
$\vec{PC} = \vec{OC} + \vec{PO}$, $\vec{PD} = \vec{OD} + \vec{PO}$, откуда, учитывая, что $\vec{BO} + \vec{DO} = \vec{AO} + \vec{CO} = \vec{O}$, имеем:

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}.$$

С-34

В-1

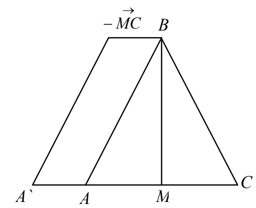
1.



2. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

3. Дано: ΔABC — равнобедренный, AB=5 см, BM = 4 см.

Найти: $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}\right|$.

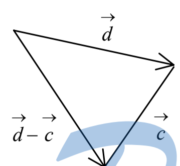


Решение: Построим вектор $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}$. Его длина равна $2\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|$. $AM^2 = AB^2–BM^2$ (по теореме Пифагора): $AM=\sqrt{25-16}=3$ см; $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}\right|=2\cdot 3=6$ см.

Ответ: 6 см.

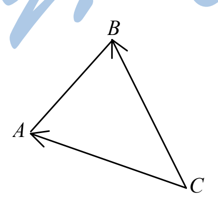
В-2

1.



$\vec{d}-\vec{c}=\vec{d}+(-\vec{c})$.

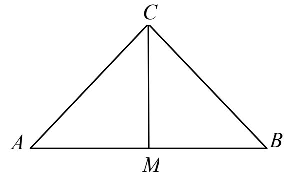
2.



$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$.

3. Дано: $AC = CB$, CM — медиана, AB = 10.

Найти: $\left|\vec{AB}-\vec{AC}+\vec{BM}\right|$.



Решение: по теореме Пифагора $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2AC^2}=AC\sqrt{2}$.

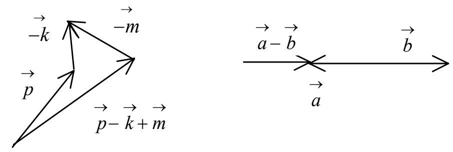
$AB = 10 = AC\sqrt{2}$, $AC = \dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

$AM=\dfrac{1}{2}AB=5$. Построим вектор $\vec{AB}-\vec{AC}+\vec{BM}=\vec{AD}$. По теореме Пифагора: $AD=\sqrt{MD^2-AM^2}= =\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{50-25}=5$.

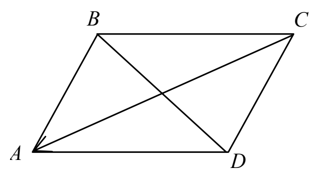
Ответ: 5.

В-3

1.



2. Дано: $\vec{CA}=\vec{a}$; $\vec{CD}=\vec{c}$.

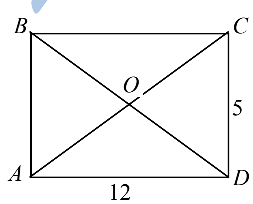


Найти: $\vec{AB},\vec{BC},\vec{DA}$.

Решение: $\vec{AB}=-\vec{c}$; $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{a}$; $\vec{c}+\vec{DA}=\vec{a}$; $\vec{DA}=\vec{a}-\vec{c}$.

3. $\vec{AB}+\vec{AD}-\vec{DC}-\vec{OD}$; $\vec{AB}-\vec{DC}=\vec{O}$. $\vec{AD}-\vec{OD}=\vec{AD}+\vec{DO}=\vec{AO}$;

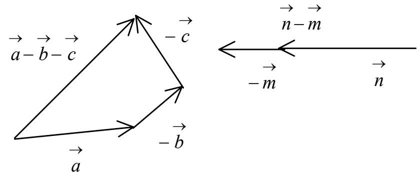
$\left|\vec{AO}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{AC}\right|$, $\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{12^2+5^2}=13$. $\left|\vec{AO}\right|=6{,}5$.



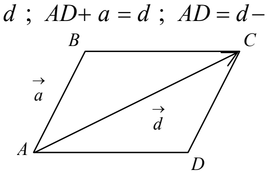
Ответ: 6,5.

В-4

1.

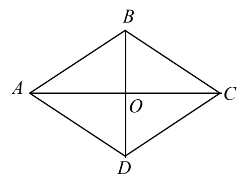


2. $\vec{d}+\vec{CB}=\vec{a}$; $\vec{CB}=\vec{a}-\vec{d}$; $\vec{AD}+\vec{a}=\vec{d}$; $\vec{AD}=\vec{d}-\vec{a}$; $\vec{DC}=\vec{a}$.



3. Дано: $AD = 20$, $BD = 24$.

Найти: $\left|\vec{AD}+\vec{AB}-\vec{BC}-\vec{OB}\right|$.



$\vec{AD}+\vec{AB}=\vec{AC}$; $\vec{BC}+\vec{OB}=\vec{OC}$;

$\vec{AC}-\vec{OC}=\vec{AO}$; $BO=\frac{1}{2}BD=12$;

$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$.

Ответ: 16.

В-5

1. $\vec{AB}=\vec{AC}+\vec{CB}$; $\vec{BC}=\vec{BD}+\vec{DC}$; $\vec{CB}=-\vec{BD}-\vec{DC}$; $\vec{AB}=\vec{AC}-\vec{BD}-\vec{DC}$.

2. $\vec{OD}-\vec{OA}=\vec{OC}-\vec{OB}$; $\vec{OA}=\vec{OD}-\vec{OC}+\vec{OB}$.

3. Дано: $\angle A=\angle ACD=90^o$, $AC=a$, $\angle BCA=45^o$.

Найти: $\left|\vec{CB}-\vec{CA}+\vec{CD}\right|$.

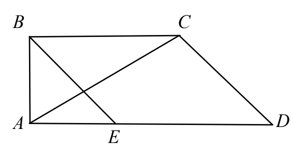
Решение: $\angle B=90^o$, следовательно $\angle BAC=45^o$ и $BA=BC=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$\angle CAD=90^o-\angle BAC=45^o$ и следовательно $\angle ADC=45^o$.

Тогда $AC = CD =$ a. $\vec{CB}-\vec{CA}=\vec{AC}+\vec{CB}=\vec{AB}$; $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AE}$.

ΔABE — прямо-угольный и $\vec{BE}=\vec{CD}$.

$\left|\vec{AE}\right|=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

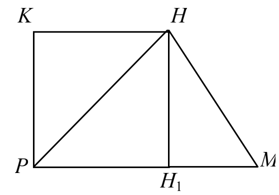


В-6

1. Решение: $\vec{AB}=\vec{AD}+\vec{DC}+\vec{CB}=\vec{DC}+\vec{CB}-\vec{DA}$.

2. Дано: $\vec{OB}+\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OC}$.
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство: из условия имеем: $\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OC}-\vec{OD}$, откуда $\vec{AB}=\vec{DC}$, т.е. $ABCD$ — параллелограмм.

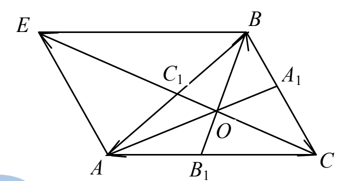


3. Дано: $\angle KPM=90^o$, $\angle PHK=30^o$, $\angle PHM=90^o$, $PM=a$.
Найти: $\left|\vec{KP}+\vec{MK}-\vec{MH}\right|$.

Решение: $\vec{KP}+\vec{MK}-\vec{MH}=\vec{KP}+\vec{HK}=\vec{HP}$.
$\angle HPM=\angle KHP=30^o$ и $\angle PHM=90^o$ (по условию). Тогда из ΔPHM имеем: $PH=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\left|\vec{KP}+\vec{MK}-\vec{MH}\right|$.

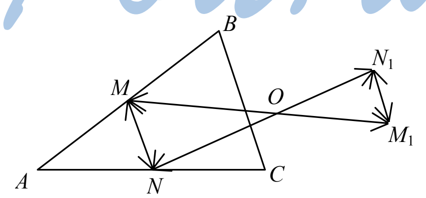
Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

В-7



1. Дано: $CC_1=m$.
Построить: $\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OC}$ и найти его длину.
Решение:
$\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{CA}=\vec{DE}$ (см.рис.).
$CO=\frac{1}{3}CE=\frac{2}{3}m \Rightarrow OE=2m-\frac{2}{3}m=\frac{4m}{3}$.

Ответ: $\frac{4m}{3}$.



2. Дано:
$AM=MB$, $AN=NC$, $NO=N_1O$, $MO=M_1O$.
Доказать: $M_1N_1 \parallel BC$ и $M_1N_1=\frac{1}{2}BC$.

Доказательство:
$\vec{M_1N_1}=\vec{ON_1}-\vec{OM_1}=\vec{OM}-\vec{ON}=\vec{NM}$.

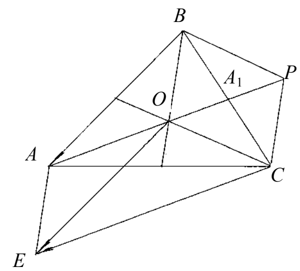
$\vec{NM}$ — средняя линия треугольника $\Delta ABC \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$ и $MN \parallel BC$, откуда $M_1N_1 \parallel BC$ и $M_1N_1 = \frac{1}{2}BC$.

В-8

1. Дано: ΔABC, $AA_1=m$ — медиана.

Построить: $\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC}$ и найти его длину.

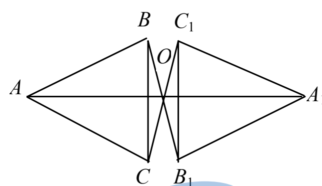
Решение: $\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC}=\vec{BA}-\vec{OC}$. От точки O откладываем $\vec{OE}=\vec{BA}$. Тогда $\vec{OE}-\vec{OC}=\vec{CE}$. Продолжим AA_1 на отрезок $A_1P=OA_1$. Тогда $OPBC$ — паралеллограм и $PC \parallel OB \parallel AE$, $PC=OB=AE$. Отсюда следует, что $EAPC$-паралеллограм и $\left|\vec{CE}\right| = \frac{4m}{3}$.



Ответ: $\frac{4m}{3}$.

2. Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ и их стороны соответственно паралелльны.

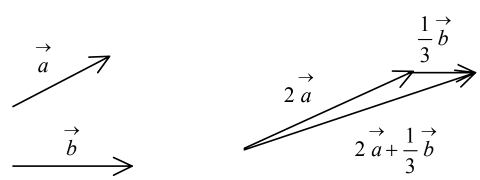


Доказательство: $\vec{A_1B_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA_1} = \vec{OB} - (-\vec{OA}) = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$. Отсюда следует, что $A_1B_1=BA$ и $A_1B_1 \parallel BA$. Дальнейшее очевидно.

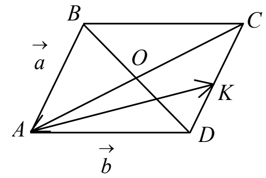
С-35

В-1

1.



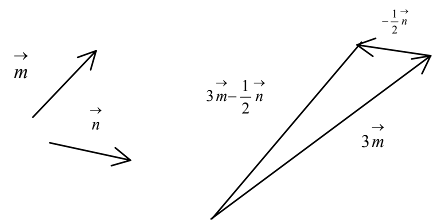
2.



$\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{AK}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$.

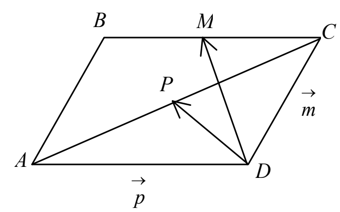
В-2

<u>1.</u>



<u>2.</u> $\vec{m}=\vec{DC}$, $\vec{p}=\vec{DA}$.

Найти: $\vec{DP}$, $\vec{DM}$.

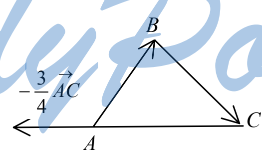


Решение: В параллелограмме диагонали делятся пополам в точке пересечения, поэтому:

$\vec{DP}=\frac{1}{2}\vec{DB}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{m})$; $\vec{DM}=\frac{1}{2}\vec{P}+\vec{m}$.

В-3

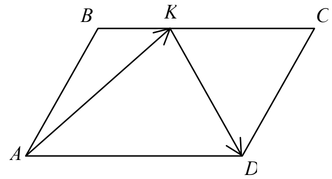
<u>1.</u>



$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$; $\vec{AC}-\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{AC}$; $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\vec{AC}=-\frac{3}{4}\vec{AC}$;

$-\frac{3}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}-\frac{1}{2}\vec{AC})=-\frac{3}{4}\vec{AC}$.

<u>2. Дано:</u> $\frac{BK}{KC}=\frac{1}{4}$, $\vec{AB}=\vec{p}$, $\vec{AD}=\vec{k}$.



Найти: $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$.

Решение:

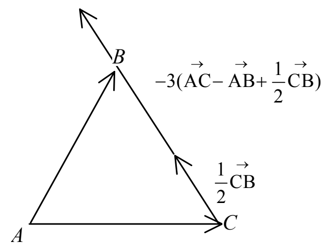
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$; $\quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\vec{k}$; $\quad \overrightarrow{AK} = \vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}$. $\quad \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{KD} = \vec{k} - \vec{p} - \frac{1}{5}\vec{k} = \frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}$.

Ответ: $\vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}$; $\frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}$.

В-4

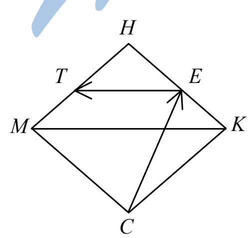
1.



$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$; $\qquad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;

$-3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \ \ \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}) = -3 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

2. Дано: $KE = \frac{1}{5}HE$, $MT = TH$, $\overrightarrow{CK} = \vec{p}$, $\overrightarrow{CM} = \vec{a}$.



Найти: $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{ET}$.

Решение: $\vec{CE}=\vec{p}+\vec{KE}=\vec{p}+\frac{1}{6}\vec{a}$; $\vec{ET}=\vec{EH}+\vec{HT}=\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{p}$.

Ответ: $\vec{p}+\frac{1}{6}\vec{a}$; $\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{p}$.

В-5

1. Дано: $\vec{OM}=\frac{3}{4}\vec{OA}+\frac{1}{4}\vec{OB}$. Доказать, что *A*, *M*, *B* лежат на одной прямой. $\vec{MA}=\vec{OA}-\vec{OM}=\frac{1}{4}(\vec{OA}-\vec{OB})$; $\vec{MB}=\vec{OB}-\vec{OM}=-\frac{3}{4}(\vec{OA}-\vec{OB})$. Векторы $\vec{MA}$ и $\vec{MB}$ — коллинеарны, а это значит, что точки *A*, *B*, *M* лежат на одной прямой.

2. $\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AC}=\frac{2}{3}(\vec{AB}+\vec{AD})=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{p})$; $\vec{AM}+\vec{MH}=\vec{AH}$;

$\vec{MH}=\vec{AH}-\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{p}=-\frac{1}{6}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}$.

Ответ: $-\frac{1}{6}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}$.

В-6

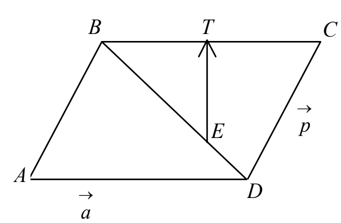
1. Дано: $\vec{OE}=\frac{9}{7}\vec{OK}-\frac{2}{7}\vec{OF}$.

Доказать: *E*, *F*, *K* лежат на одной прямой.
Доказательство:

$\vec{KE}=\vec{OE}-\vec{OK}=\frac{9}{7}\vec{OK}-\frac{2}{7}\vec{OF}-\vec{OK}=\frac{2}{7}(\vec{OK}-\vec{OF})$.

$\vec{FE}=\vec{OE}-\vec{OF}=\frac{9}{7}\vec{OK}-\frac{2}{7}\vec{OF}-\vec{OF}=\frac{9}{7}(\vec{OK}-\vec{OF})$, т.е. $\vec{FE}=\frac{9}{2}\vec{KE}$, а это и значит, что точки *E*, *F*, *K* лежат на одной прямой.

2. Дано: *BE*:*ED*=2:1, *BT*=*TC*, $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DC}=\vec{p}$. Выразить $\vec{ET}$ через $\vec{a}$ и $\vec{p}$.



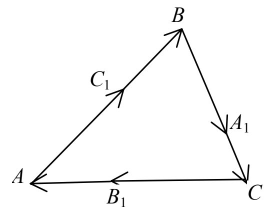
Решение: $\vec{ET}=\vec{EB}+\vec{BT}=\frac{2}{3}\vec{DB}+\frac{1}{2}\vec{BC}=$

$=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{p})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{p}$.

Ответ: $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{p}$.

В-7

1. Дано: $\vec{AC_1} = \kappa\,\vec{AB}$, $\vec{BA_1} = \kappa\,\vec{BC}$, $\vec{CB_1} = \kappa\,\vec{CA}$.



Найти: $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}$ =?

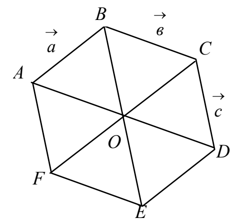
Решение:

$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \kappa(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \kappa \cdot \vec{O} = \vec{O}$.

Ответ: $\vec{O}$.

2. Дано: $AB \parallel DE \parallel CF$, $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel FA$.

Доказать: $BE \parallel AF$.



Доказательство:

Пусть $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{в}$, $\vec{CD} = \vec{c}$.

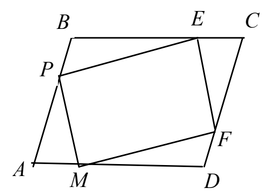
Тогда $\vec{FE} = \vec{OD} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{AF} = k\,\vec{CD} = k\,\vec{c}$,

$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AF} + \vec{FE} = -\vec{a} + k\,\vec{c} + (\vec{a} + \vec{c}) = (k+1)\,\vec{c}$.

Это значит, что $BE \parallel AF$.

В-8

1. Дано: $\vec{AP} = \kappa\,\vec{AB}$, $\vec{BE} = \kappa\,\vec{BC}$, $\vec{CF} = \kappa\,\vec{CD}$, $\vec{DM} = \kappa\,\vec{DA}$.



Доказать: $PEFM$ — параллелограмм.

Доказательство:

$\vec{PE} = \vec{BE} - \vec{BP} = \kappa\,\vec{BC} - (\kappa - 1)\,\vec{AB}$. Аналогично получаем $\vec{MF} = \kappa\,\vec{AD} - (\kappa - 1)\,\vec{DC}$. Так как $\vec{BC} = \vec{AD}$ и $\vec{AB} = \vec{DC}$, то $\vec{PE} = \vec{MF}$, а потому $PEFM$ — параллелограмм.

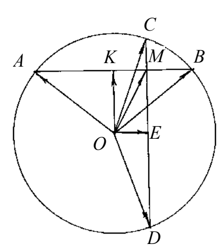
2. Дано: $AB \perp CD$.

Доказать: $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

Доказательство: Пусть $AB \perp OK$, $OE \perp CD1$.

Тогда $\vec{OM} = \vec{OK} + \vec{OE}$, $\vec{OK} = \vec{OA} + \vec{AK} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} =$

$= \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.



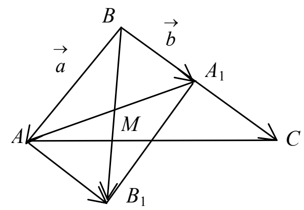
Аналогично $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$, откуда

$\vec{OM} = \vec{OK} + \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

С-36

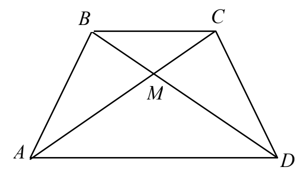
В-1

1.



$\vec{BB_1} = \vec{a} + (1/2)\vec{b}$; $\vec{BM} = (1/2)\vec{BB_1}$, $\vec{BM} = (1/2)\vec{a} + (1/4)\vec{b}$.

2. Дано: Дано: $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{AD}$.

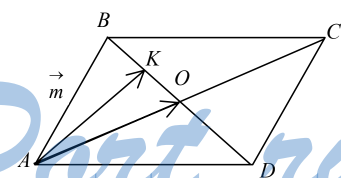


Решение: Т.к. $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{AD}$, то $AD \parallel BC$, т.е. $ABCD$ — трапеция и $\Delta AMD \sim \Delta BMC$ (по 3 углам). А т.к. $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{AD}$, то $AM : MC = \frac{1}{3}$ и $DM : MB = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

В-2

1. Дано: $\vec{AB} = \vec{m}$, $\vec{AC} = \vec{p}$.



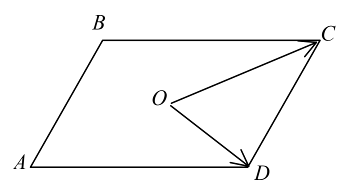
Найти: $\vec{AK}$.

Решение: $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$,

$\vec{OB} = \vec{AB} - \vec{AO} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{p}$. $\vec{OK} = \frac{1}{2}\vec{OB}$;

$\vec{AO} + \vec{OK} = \vec{AK}$; $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{4}\vec{p} = \frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{m}$.

2. Дано: $\vec{AB} + \vec{OD} = \vec{OC}$; $\angle A = 15^\circ$.
Найти: $\angle B, \angle C, \angle D$.



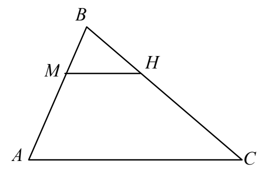
Решение: $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC}$, но с другой стороны: $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{AB}$ (по условию), следовательно $\vec{DC} = \vec{AB}$, и следовательно $ABCD$ — параллелограмм. Тогда $\angle C = \angle A = 15^{\circ}$, $\angle B = \angle D = 180^{\circ} - 15^{\circ} = 165^{\circ}$.

Ответ: $15^{\circ}, 165^{\circ}, 165^{\circ}$.

В-3

<u>1. Дано:</u> $AB=3BM$, $BC=3BH$.

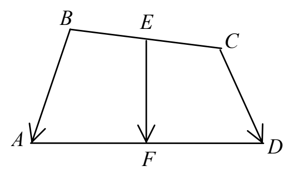
Доказать: $MH \parallel AC$ и $MH = \frac{1}{3}AC$.



Решение: $\vec{MB} = \frac{1}{3}\vec{AB}$; $\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{BC}$; $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$;

$\vec{MH} = \vec{MB} + \vec{BH} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{BC})$; $\vec{MH} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

<u>2.</u> Выразить $\vec{EF}$ через $\vec{BA}$ и $\vec{CD}$.



Обозначим $\vec{BA} = \vec{a}$ и $\vec{CD} = \vec{b}$; $-\vec{a} + \vec{BC} + \vec{b} = \vec{AD}$.

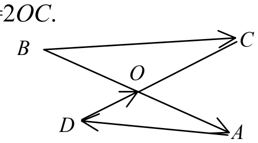
$-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

$\vec{EF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{CD}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{CD}$.

В-4

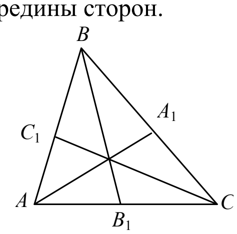
<u>1. Дано:</u> $AO=2OB$, $OD=2OC$.



Доказать: $BC \parallel AD$ и $BC = \frac{1}{2}AD$.

Решение: $\vec{BC}=\vec{BO}+\vec{OC}=\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{DO}=-\frac{1}{2}\vec{AD}$. Т.е. $BC\parallel AD$ и $BC=\frac{1}{2}AD$.

2. Дано: A_1, B_1, C_1, — середины сторон.



Доказать, что $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}$, O — произвольная точка.

Решение: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=(\vec{OA_1}+\vec{A_1A})+(\vec{OB_1}+\vec{B_1B})+(\vec{OC_1}+\vec{C_1C})=$

$=\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}+\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{CB}+\frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{AC}=\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}$

В-5

1. Решение:

Возьмем в плоскости некоторую точку O. Тогда получим:

$\vec{MP}=\vec{OP}-\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OB_1})-\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OA_1})$;

$\vec{HF}=\vec{OF}-\vec{OH}=\frac{1}{2}(\vec{OC}+\vec{OC_1})-\frac{1}{2}(\vec{OD}+\vec{OD_1})\Rightarrow\vec{MP}=\frac{1}{2}(\vec{AB}-\vec{A_1B_1})$,

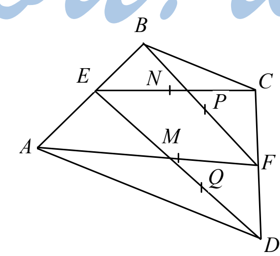
$\vec{HF}=\frac{1}{2}(\vec{DC}-\vec{D_1C_1})=\frac{1}{2}(\vec{AB}-\vec{A_1B_1})$, а это и означает, что M, P, F, H являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.

2. Решение: $\vec{OM}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$, откуда: $|\vec{OM}|\le\frac{1}{3}(|\vec{OA}|+|\vec{OB}|+|\vec{OC}|)$.

В-6

1. Дано: $AE=EB$, $CF=FD$, $EN=NC$, $BP=PF$, $AM=MF$, $EQ=QD$.

Доказать: M, N, P, Q — вершины параллелограмма.

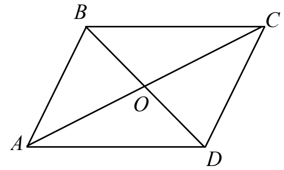


Доказательство:

$\vec{NP}=\vec{BP}-\vec{BN}=\frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{CF})-\frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{BE})=$

$=\frac{1}{2}\vec{CF}+\frac{1}{2}\vec{EB}$,

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$. Поскольку $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, то $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$, а это и означает, что M, N, P, Q — вершины параллелограмма, либо что они лежат на одной прямой.



2. Пусть параллелограмм $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$. Пусть $AC \parallel BD$. Это означает, что $\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$, т.е. $(1-k)\vec{a} + (1+k)\vec{b} = \vec{O}$. Также равенство возможно только когда $1 - k = 0$ и $1 + k = 0$, а такого быть не может. Следовательно AC и BD пересекаются.

Пусть $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BO} = n\overrightarrow{BD}$. Тогда $\overrightarrow{OD} = (1-n)\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{OC} = (1-m)\overrightarrow{AC}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \vec{b}$, получим:

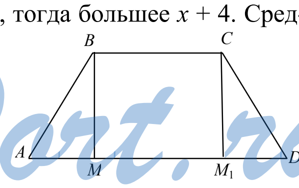
$$\begin{cases} m(\vec{a} + \vec{b}) - n(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}; \\ (1-m)(\vec{a} + \vec{b}) - (1-n)(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}. \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} m - n = 0 \\ m + n = 1 \end{cases}$, т.е. $m = n = \frac{1}{2}$, а значит диагонали в точке пересечения делятся пополам.

С-37

В-1

1. Дано: пусть меньшее основание равно x, тогда большее $x + 4$. Средняя линия: $\frac{1}{2}(x + x + 4) = 10$, $x = 8$ (см),



большее основание: 8 + 4 = 12 (см).
Ответ: 8 см, 12 см.

2. Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $BM \perp AD$, $AM = 4$ см, $MD = 10$ см.
Найти: AD, BC.
Решение: проведем высоту CM_1.
Т.к. трапеция равнобедренная, то $AM = M_1D = 4$ см.
$AD = AM + MM_1 + M_1D = MM_1 + 8 = 14$ см.
$MM_1 = BC = 6$ см. Средняя линия $\frac{BC + AD}{2} = 10$ (см).
Ответ: 14 см, 6 см, 10 см.

В-2

1. Дано: $ABCD$ – трапеция, AD и BC – основания, $AD = 2BC$, средняя линия $S = 15$ см.

Найти: AD и BC.

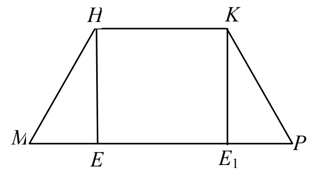
Решение: $S = \dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{2BC + BC}{2} = \dfrac{3BC}{2} = 15$, $BC = 10$ (см).

$AD = 2 \cdot BC = 20$ (см).

Ответ: 10 см, 20 см.

2. Дано: $MH=KP$, $ME=6$ см, $HK = 10$ см.

Найти: MP, среднюю линию S.



Решение:

построим перпендикуляр KE_1. Т.к. $MHKP$ – равнобедренная трапеция, то: $ME = KE_1 = 6$ см и $MP=ME+E\ E_1+E_1P=$
$= 2ME + HK = 22$ см.

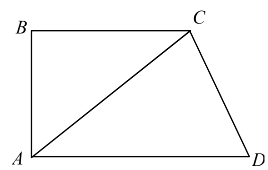
Средняя линия $S = \dfrac{MP + HK}{2} = \dfrac{22+10}{2} = 16$ (см).

Ответ: 22 см, 16 см.

В-3

1. Дано: $\angle A = 90^o$, $\angle C = 135^o$, $AB = 2$ см, $AC \perp CD$.

Найти среднюю линию.



Решение: $\angle D = 180^o - 135^o = 45^o$,

$\angle CAD = \angle D = 45^o$, следовательно $\angle BAC = 45^o$, $\angle BCA = 135^o - 90^o = 45^o$, следовательно ΔABC – равнобедренный и

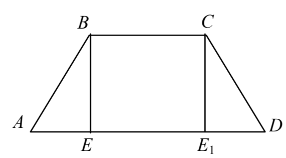
$BC = AB = 2$ см. $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ (см); $AC = CD = 2\sqrt{2}$ (см);

$AD = \sqrt{8+8} = 4$ (см). Средняя линия: $\dfrac{4+2}{2} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

2. Дано: $\angle A = \angle D = 60^o$, $AB = CD = 10$ см, $AD = 15$ см.

Найти: BC, средняя линия.



Решение: проведем высоты E и E_1.

$\dfrac{AE}{AB} = \cos\angle A$; $AE = 10 \cdot \cos 60^o = 5$ см $= AE_1$;

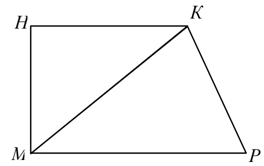
$EE_1 = AD - AE - E_1D = 15 - 5 - 5 = 5$ (см).

$BC = EE_1 = 5$ (см). Средняя линия: $\dfrac{5+15}{2} = 10$ (см).

Ответ: 5 см; 10 см.

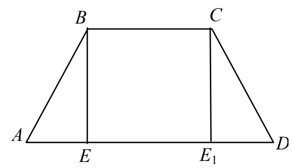
В-4

1. Дано: $\angle M = 90^o$, $\angle K = 150^o$, $HK = 2$ см, $MK \perp KP$.
Найти: среднюю линию.
Решение: $\angle HKM = \angle HKP - \angle MKP = 150^o - 90^o = 60^o$;
$\angle H = 180° - \angle M = 90°$;
$\angle KMP = 90^o - \angle KMP = 90^o - (90^o - \angle HKM) = 60^o \Rightarrow \Delta HKM \sim \Delta KMP$ (по 3 углам). $\dfrac{HK}{MK} = \dfrac{MK}{MP}$; $MP = \dfrac{MK^2}{HK}$; $MK = \dfrac{HK}{\cos \angle HKM} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.



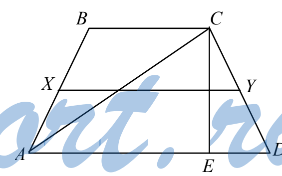
$MP = \dfrac{4^2}{2} = 8$ (см). Средняя линия: $\dfrac{HK + MP}{2} = \dfrac{2+8}{2} = 5$ (см).
Ответ: 5 см.

2. Дано: $AB=CD$, $\angle A = \angle D = 45^o$, $BC = 5$ см, $BE = 4$ см.
Найти: AD, средняя линия.
Решение: построим высоту CE_1. $EE_1=BC=4$ см.
$\angle ABE = 90^o - \angle A = 45^o$, следовательно ΔABE – равнобедренный и $AE = BE = 4$ (см). Аналогично $E_1D = 4$ см.
Тогда $AD=AE+EE_1+E_1D=4+5+4=13$ (см).
Средняя линия: $\dfrac{13+5}{2} = 9$ (см).
Ответ: 13 см, 9 см.

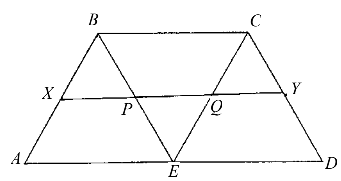


В-5

1. Дано: $BC = 4$ см, $\angle CAD = 60^o$, XY – средняя линия.
Найти: XY.
Решение: опустим перпендикуляр CE на AD. Тогда, в силу того, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $XY=AE=4/2=2$ (см).
Ответ: 2 см



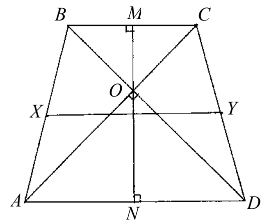
2. Доказать: $XY = \frac{3}{2}BC$.
Доказательство: очевидно, что $XP = PQ = QY = \frac{1}{2}BC$ (т.к. XP, PQ и QY – средние линии правильных ΔABE, ΔBCE, ΔECD соответственно) $\Rightarrow$,
$XY = XP + PQ + QY = \frac{3}{2}BC$.



В-6

1. Дано: MN = 8 см, $AB = CD$, средняя линия XY = ?

Решение: проведем высоту MN через пересечение диагоналей. Пусть $MO = x$, тогда $NO = 8 - x$. Легко видеть, что ΔAOD и ΔBOD — прямоугольные, равнобедренные, откуда $AD = 2NO = 16 - 2x$, $BC = 2MO = 2x$. Тогда средняя линия трапеции:



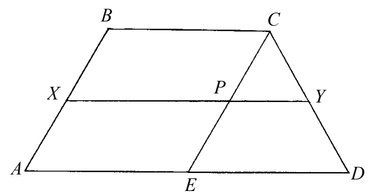
$$XY = \frac{AD + BC}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

Ответ: 8 см

2. Дано: $ABCD$ — ромб, ΔECD — правильный.

Доказать: $XY = \frac{3}{4}AD$.

Доказательство: пусть средняя линия трапеции XY пересекает CE в точке P. Тогда $XP = AE$, по $AE=EC=ED$ (т.к. по условию $ABCD$ – ромб, ΔECD — правильный). PY – средняя линия ΔECD, поэтому $PY = \frac{1}{2}ED$. Таким образом, получим: $XY = XP + YP = AE + \frac{1}{2}ED = \frac{3}{4}AD$ (т.к. $AE = ED$).



В-7

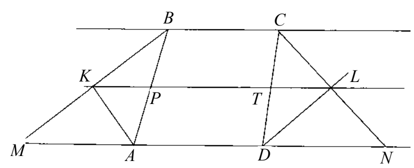
1. Дано: KL = 25 см.

Найти: P_{ABCD} = ?

Решение: пусть прямая CL пересекает прямую AD в точке N, а прямая BK – в точке M. Очевидно, что $DL \perp CL \Rightarrow \Delta CLD = \Delta DLN$ (т.к. прямоугольны и имеют общую сторону DL) $\Rightarrow CL = LN$. Аналогично $BK = KM \Rightarrow KL \| BC \| AD$ и KL равноудалена от BC и $AD \Rightarrow PT$ — средняя линия трапеции $ABCD$. Т.к. ΔAKB и ΔCLD — прямоугольные, то $AB = 2KP$ и $CD = 2LT$

$\Rightarrow P_{ABCD} = 2KL = 50$ (см).

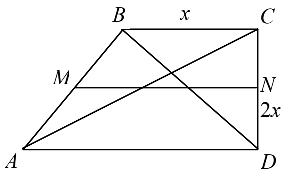
Ответ: 50 см.



2. Дано: $\angle C = \angle D = 90^o$; $BC{:}CD$ = 1:2, MN = 10 см.

Найти: AD = ?, BC = ?

Решение: пусть $BC = x$. Тогда $CD = 2x$, $AD = 20 - x$, $\Delta BCD \sim \Delta ACD$



$\Rightarrow \dfrac{2x}{20-x} = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = BC = 4$ (см), $AD = 16$ (см).

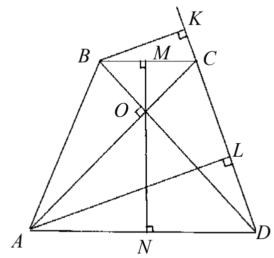
Ответ: 4 см, 16 см.

В-8

1. <u>Дано:</u> $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AL = 3BK$, $MN = 12$ см.

Найти: $AD = ?$, $BC = ?$

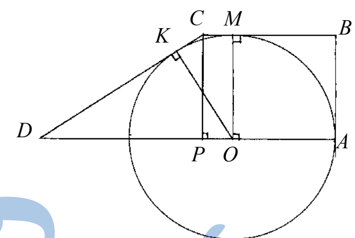
Решение: $\Delta ALD \sim \Delta BKC \Rightarrow \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AL}{BK} = 3$. Так как $ABCD$ – равнобедренная трапеция, то $\Delta AOD = \Delta BOC$, причем они прямоугольные. Т.к. $\dfrac{AD}{BC} = 3$, то $\dfrac{ON}{OM} = 3$, откуда $ON = 9$ (см) и $OM = 3$ (см) (т.к. $MN = 12$ см) $\Rightarrow AD = 2ON = 18$ (см), $BC = 2OM = 6$ (см).



Ответ:18 см, 6 см.

2. <u>Дано:</u> $\angle A = 90^o$, $\angle D = 30^o$, $xy = 6 - \sqrt{3}$ — средняя линия.

Найти: Радиус окружности.



Из прямоугольного ΔDKO находим: $DK = R\sqrt{3}$, $DO = 2R$ — радиус окружности. Из ΔCPD имеем: $DC = 2R$, $KC = 2R - R\sqrt{3}$.

$CM = CK = 2R - R\sqrt{3}$, $AD = 3R$,

$BC = R + 2R - R\sqrt{3} = 3R - R\sqrt{3}$. Т.к. $xy = 6 - \sqrt{3}$, то:

$\dfrac{3R + 3R - R\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3}$, откуда $R = 2$.

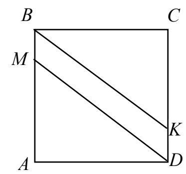
Ответ: 2.

С-38

В-1

1. <u>Дано:</u> ABCD квадрат, AB=4 см, AM=KC=3 см.

Решение: $BM \parallel KD$ т.к. они лежат на противоположных сторонах квадрата; $BM = AB - AM = 1$ (см), $KD = CD = CK = 1$ (см), а т.к. $BM = KD$, то $MBKD$ – параллелограмм.



2. $MD = BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{16+9} = 5$ (см) (по теореме Пифагора).
$P_{MBKD} = 2(5+1) = 12$ (см).

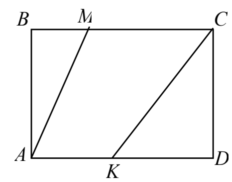
$S_{MBKD} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{BCK} = 16 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 4$ (см^2).

Ответ: 4см^2, 12см.

В-2

1. Дано: $\angle BAM = 40^o$, $\angle DCK = 50^o$, $CK = 8$ см, $BC = 20$ см.

а) Доказать, что $\frac{BM}{CD} = \frac{AM}{KC}$.



б) Найти: KD, CD, BM, S_{AMCK}.
Решение:

б) $\frac{KD}{CK} = \sin \angle DCK$, $KD \approx 8 \cdot 0,766 \approx 6,1$ см.

$CD = \sqrt{CK^2 - KD^2} \approx \sqrt{64 - 37,552} \approx 5,1$ (см), $\frac{BM}{AB} = tg\angle BAM$,

$BM \approx 5,143 \cdot 0,839 \approx 4,3$ см. $S_{AMCK} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{CKD} = AB \cdot BC =$
$= \frac{1}{2} AB \cdot BM - \frac{1}{2} CD \cdot KD = 5,1 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 4,3 - \frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 6,1 = 75,48$ см^2.

Ответ: 6,1 см; 5,1 см; 4,3 см; 75 см,48 см^2.

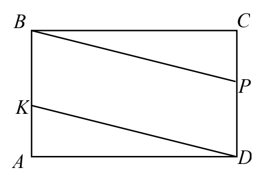
а) Т.к. $\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)$, то $\sin\angle BAM = \cos\angle DCK$.

$\sin\angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{CD}{CK} = \cos\angle DCK$, следовательно $\frac{BM}{CD} = \frac{AM}{CK}$.

В-3

1. Дано: $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $\frac{AK}{AB} = \frac{CP}{CD} = \frac{3}{8}$.

Доказать: а) $KBPD$ – ромб; б) P_{KBPD}; S_{KBPD}.



Решение:

а) $\frac{AK}{AB} = \frac{3}{8}$; $AK = AB \cdot \frac{3}{8} = 8 \cdot \frac{3}{8} = 3$ см;

$BK = AB - AK = 8 - 3 = 5$ (см).

Аналогично PD = 5 (см).

$KD = \sqrt{AK^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см. Аналогично $BP = 5$ см, следовательно $KBPD$ – ромб.

б) $P_{KBPD}=4 \cdot 5=20$см; $S_{KBPD}=S_{ABCD} - 2S_{AKD} = 8\cdot 4 - 2\cdot \frac{1}{2} \cdot 3\cdot 4=32-12=20$ см^2.

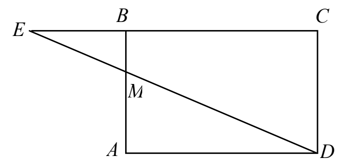
Ответ: 20 см; 20 см^2.

В-4

1. Дано: $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{1}$; $\angle MDA = 40^o$; $AD = 10$ см.

а) Доказать, что $\Delta AMD \sim \Delta ECD$.

б) Найти: $S_{\Delta DCE}$.



Решение: а) $\angle E = \angle ADM$ (накрест лежащие), $\angle A = \angle C$ (прямые). Следовательно $\Delta AMD \sim \Delta ECD$ (по 3 углам).

б) $\frac{AM}{CD} = tg\angle MDA$; $AM = 10 \cdot tg40^o \approx 8,4$ (см); $\frac{AM}{CD} = \frac{AD}{EC}$; $\frac{AD}{EC} = \frac{2}{3}$;

$EC = \frac{3AD}{2} = 15$ (см), $\frac{AM}{CD} = \frac{2}{3}$; $CD = \frac{3AM}{2} = 12,6$ (см).

$S_{\Delta DCE} = \frac{1}{2} CD \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot 12,6 \cdot 15 = 94,5$ (см^2).

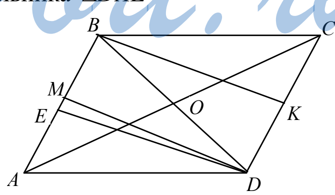
Ответ: 94,5 (см^2)

В-5

Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 5$ см, $BD = 2\sqrt{5}$ см, $\frac{AM}{MB} = \frac{CK}{KD} = \frac{3}{2}$.

а) Доказать, что $MBKD$ – прямоугольник; б) Найти: S_{MBKD}, P_{MBKD}.

Решение: а) Легко доказать, что $MB = KD = 2$ см и $MB \perp KD$. Значит, $MBKD$ – параллелограмм. Далее проведем высоту DE к AB. Тогда из ΔDBE $DE^2 = (2\sqrt{5}) - BE^2$, а из треугольника ΔDAE



$DE^2 = 5^2 - (BE - 5)^2 - BE^2$, т.е. $20 - BE^2=25- (5- BE)^2$, откуда $BE=2$ см. Значит, точки E и M совпадают и, следовательно, $\angle BMD$ =90°,т.е. $MBKD$ – прямоугольник.

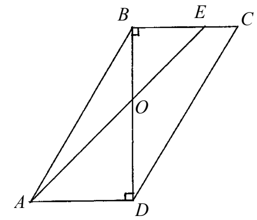
б) DM = DE = 4 (см).

Значит, $P_{MBKD} = 12$ (см), $S_{MBKD} = 8$ (см^2).

В-6

1. Дано: $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{3}$, $BC = 9$ см, $AE = 20$ см, $BD \perp BC$.

Найти: $\angle AOD = ?$

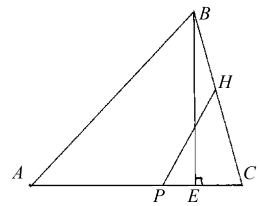


Легко видеть, что $\Delta AOD \sim \Delta BOE$, откуда $\frac{AO}{OE}=\frac{DO}{OB}=3/2$, учитывая, что $AO+OE=AE=$ $= 20$ (см), $AO = 12$ (см). $AD = BC = 9$ (см). Т.о. $\sin\angle AOD=\frac{AD}{AO}=3/4$, откуда $\angle AOD$ =48,35°.

Ответ: $\angle AOD = 48{,}35^o$.

<u>2. Дано:</u> $PC = 8$ см, $\angle HPC = \angle ABC$, $\frac{S_{PHC}}{S_{ABC}}=\frac{4}{25}$, $\cos C=\frac{4}{3}$.

Найти: $BE = ?$



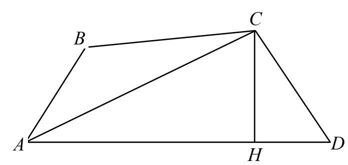
Решение: $\Delta ABC \sim \Delta PHC$, откуда $\frac{BC}{PC}=\sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{PHC}}}=\frac{5}{2}$, т.е. BC = 20 (см). Тогда

$$BE = BC\sin C = BC\sqrt{1-\cos^2 C} = 20\cdot\frac{3}{5}=12.$$

Ответ: 12 см.

В-7

<u>1. Дано:</u> $\angle ABC = \angle ACD$, BC = 2 см, AD = 8 см, $\angle CAD = 40^o$.



Найти: $S_{ABCD} = ?$

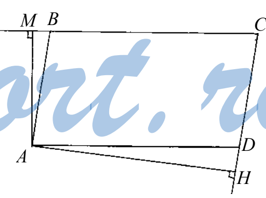
Решение: $\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow$

AC^2 = BC – AD, откуда AC = 4 (см).

Тогда $CH = CA\cdot\sin 40^o = 4\sin 40^o \Rightarrow S_{ABCD} = 5\cdot 4\sin 40^o \approx 12{,}9$ (см^2).

Ответ: 12,9 см^2.

<u>2. Дано:</u> MH : AC = 3 : 4.

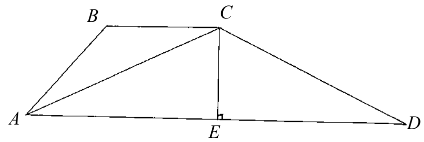


Найти: $\frac{S_{MAH}}{S_{ABC}} = ?$

Решение: Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle MCH = 180^o - \alpha$, $\angle MAH = \alpha$; т.к. сумма углов четырехугольника равна 360^o, то $\angle MAH = \angle ABC$. Известно также, что две высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам параллелограмма, на которые они опущены. Тогда $\frac{AM}{CD}=\frac{AH}{BC}$ или $\frac{AM}{AB}=\frac{AH}{BC}$. Следовательно, $\Delta MAH \sim \Delta ABC$. Коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Тогда $\frac{S_{MAH}}{S_{ABC}}=\frac{9}{16}$.

В-8

1. Дано: $ABCD$ – трапеция, $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40^o$.



Найти: $S_{ABCD} = ?$

$\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow$

$AC^2 = AD \cdot BC = 16$ (см^2) $\Rightarrow$

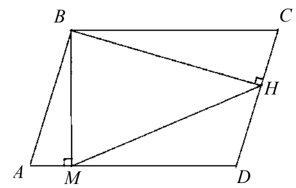
$AC = 4$ (см).

Пусть CE – высота $\Rightarrow$ $CE = 4\sin 40^o = 2{,}57$ (см) $\Rightarrow$

$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} CE = 12{,}9$ (см^2).

Ответ: 12,9 см^2.

2. Дано: $\angle A$ — острый, $\dfrac{MH}{BD} = \dfrac{2}{3}$.



Найти: $\dfrac{S_{MBH}}{S_{BDC}} = ?$

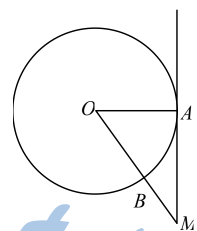
Задача решается аналогично задаче варианта 7 С-38.

Ответ: 4 : 9.

С-39

В-1

1. Дано: $OA = 10$см, $AM = 10\sqrt{3}$ см.



Найти: $\cup AB$.

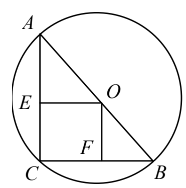
Решение: ΔOAM — прямоугольный, т.к. AM – касательная. Тогда $tg\angle AOM = \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$.

Т.о. $\angle AOM = 60^o$, $\cup AB = \angle AOM = 60^o$.

Ответ: 60^o.

2. Дано: ΔABC — вписанный, $OE = 3$см., $OF = 3\sqrt{3}$ см.

Найти: AO.



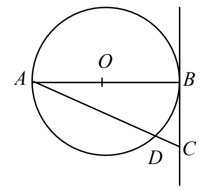
Решение: Т.к. AB проходит через центр окружности, то AB — диаметр, и $AO = OB$; $\angle EAO = \angle FOB$, т.к. $AE \parallel OF$, и $\Delta AEO = \Delta FOB$ (по гипотенузе и углу), $EO = FB = 3$ (см).

$OB = \sqrt{OF^2 + FB^2} = \sqrt{29 + 9} = 6$ (см).

Ответ: 6см.

В-2

<u>1. Дано:</u> $AO = 5$ см, $AC = 10\sqrt{2}$ см.



Найти: $\cup DB$.

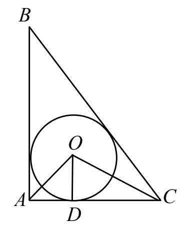
Решение:

$\cup BD = 2\angle A$; $\cos\angle A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\angle A = 45^o$, $\cup BD = 90^o$.

Ответ: 90^o.

<u>2. Дано:</u> $\angle A = 90^o$, $OC = 5$ дм, $AO = 3\sqrt{2}$ дм.



Найти: AD, DC.

Решение: Т.к. AC – касательная, то $OD \perp AC$ и ΔAOD — прямоугольный, равнобедренный, тогда:

$AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{2AD^2} = AD\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (дм).

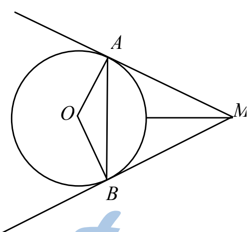
AD = OD= 3 (дм). В прямоугольном ΔODC

$DC = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ (дм).

Ответ: 3 дм, 4 дм.

В-3

<u>1. Дано:</u> $AM = 10$см., $P_{OAMB} = 40$см.



Найти: $\cup AB$.

Решение: $P_{OAMB} = OA + AM + BM + OB$.

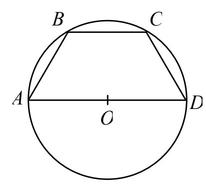
Т.к. $AM = BM = 10$ (см) и $OA = OB = R_{ОКР}$, то $P_{OAMB} = 2OA + 2O = 40$ см, $OA = OB = 10$ см, следовательно $OAMB$-ромб, а т.к. $OA \perp AM$ и $OB \perp BM$, то $OAMB$-квадрат, т.е.

$\angle AOB = \cup AB = 90^o$.

Ответ: 90^o.

<u>2. Дано:</u> $\angle CAD = 30^o$, $AD \ni O$ — центр окружности, $AB = 2$см.

Найти: S_{ABCD}.



Решение: $\angle ACD = 90^o$,т.к. AD – диаметр.

$\angle D = 180^o - 90^o - 30^o = 60^o$, $\Rightarrow \angle BAD = 120^o$.

$\angle B = 180^o - \angle D = 120^o$; $\angle BAD = 180^o - \angle BCD = 60^o$,

$\Rightarrow \angle BAD - \angle CAD = 60^o - 30^o = 30^o$.

Аналогично $\angle BCA = 30°$ $\Rightarrow$ ΔABC - равнобедренный и $AB = BC = 2$ см. По теореме косинусов:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^o} = 2\sqrt{3}$ см

$\dfrac{AC}{CD} = tg\angle CAD$; $CD = \dfrac{AC}{tg30^o} = \dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (см).

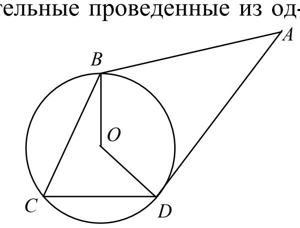
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABD}$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см^2).

$S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot CD \cdot = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см^2). $S_{ABCD} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $3\sqrt{3}$ (см^2).

В-4

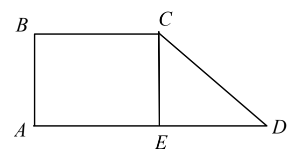
1. Дано: $R_{ОКР} = 5$ см, $AB = 5$ см.
Найти: $\angle BCD$.
Решение: $AD = AB = 5$ (см), т.к. это касательные проведенные из одной точки. $OB = OD = 5$ (см) – радиусы окружности. $OB \perp AB$ и $OD \perp AD$, следовательно $BODA$ – квадрат и $\angle BOD = 90^o$, $\angle C = \dfrac{1}{2}\angle BOD = \dfrac{1}{2} \cdot 90^o = 45^o$.



Ответ: 45^o.

2. Дано: $\angle A = 90^o$, $\angle D = 30^o$, $CD = 12$ см.
Найти: S_{ABCD}.
Решение: проведем высоту CE, $\dfrac{CE}{CD} = \sin\angle D$;

$CE = CD \cdot \sin\angle D = 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$ (см).



$ED = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ (см). Обозначим: $BC = AE = x$, $AD = x + 6\sqrt{3}$. По условию: $AB + CD = BC + AD$. $6 + 12 = x + x + 6\sqrt{3}$, $2x = 12 - 6\sqrt{3}$, $x = 9 - 3\sqrt{3}$ (см). $AD = 9 + 3\sqrt{3}$ (см).

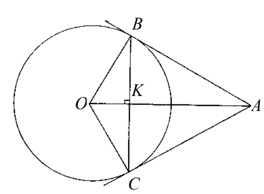
$S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot CE = \dfrac{9 - 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 54$ (см^2).

Ответ: 54 см^2.

В-5

1. Дано: $OA = 8$ см, $OK = 6$ см.
Найти: $\cup BC$.
Решение: Пусть BC пересекает OA в точке K.

$\Delta OBK \sim \Delta KBA \Rightarrow \dfrac{OK}{BK} = \dfrac{BK}{AK} \Rightarrow$



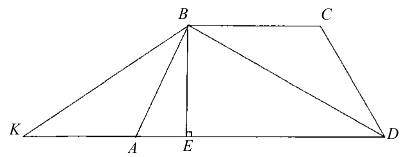
$BK^2 = OK \cdot AK = 12$ (см^2). Т.е. $BK = 2\sqrt{3}$ (см).

Тогда $tg\angle BOK = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle BOK = 30^o \Rightarrow \angle BOC = 60^o = \cup BC$.

Ответ: 60^o.

2. Дано: AD = 24 см, BC = 10 см, BE = 17 см.

Решение: Окружность описанная около данной трапеции, будет также описана около ΔABD. Несложно доказать, что AE=7 см, ED = 17 см. Тогда $\angle DBE = 45^o$. Отложим на луче EA от точки E отрезок EK =17 (см).



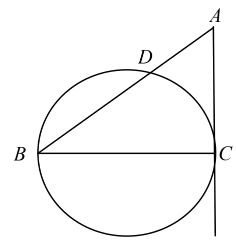
Тогда $\angle KBE$ =45°, а $\angle ABE$ <45°.

Следовательно, $\angle ABD < 90^o$. Таким образом, ΔABD — остроугольный, значит, центр окружности, описанной около него, лежит внутри этого треугольника.

Ответ: внутри трапеции.

В -6

1. Дано: AD = 2 см, BD = 6 см.



Найти: $\cup CD$ = ?

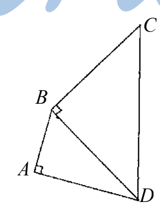
Решение: По свойству касательной и секущей к окружности, проведенных из одной точки, имеем: $AC^2 = AD \cdot AB$ = 16 (см^2), откуда AC = 4 (см).

Тогда $\sin\angle ABC = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\angle ABC = 30^{\circ} \Rightarrow \cup CD = 60^{\circ}$.

Ответ: 60^o.

2. Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $\angle A = 90^o$, $\angle CBD = 90^o$, $\angle BDC = 45^o$, $\angle BDA = 30^o$.



Решение: Если биссектрисы углов данного четырехугольника пересекаются в одной точке, то существует вписанная в него окружность, и, следовательно, AB + CD = BC + AD. Обозначив BD за a получим. $AB = \dfrac{a}{2}$, $BC = a$, $CD = a\sqrt{2}$, $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда видно, что AB + $CD \neq BC$ + AD, т.е. биссектрисы не могут пересекаться в одной точке.

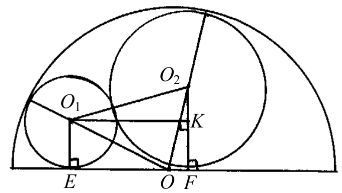
Ответ: нет.

В-7

1. Доказательство:

Пусть радиус окружности с центром O_1 равен 1, а с центром в O_1 – x. Тогда радиус полукруга равен 3, $OO_1 = 2$, $OO_2 = 3 - x$. Из ΔO_1EO имеем $OE = \sqrt{3}$, а из ΔO_2FO $OF = \sqrt{(3-x)^2 - x^2} = \sqrt{9-6x}$; $EF = OE + OF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$.

Рассмотрим ΔO_1KO_2 $(O_1K \perp O_2F)$: $O_2O_1 = 1 + x$, $O_2K = x - 1$, $O_1K = EF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$ $\Rightarrow$



$(\sqrt{3} + \sqrt{9-6x})^2 = (x+1) - (x-1)^2$,

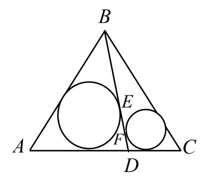
откуда $25x^2 - 42x + 9 = 0$ и, учитывая, что $x > \frac{6}{5}$, $x = \frac{21+6\sqrt{6}}{25}$.

Ответ: $x = \frac{21+6\sqrt{6}}{25}$.

В-8

Дано: $AD = a$, $DC = b$, $AB = BC$.

Найти: $EF = ?$



Решение: Пусть в некоторый ΔMPN вписана окружность и пусть $PN = m$. Тогда расстояние от MP и MN равно $p - m$, где p – полупериметр ΔMPN. В нашем случае, получая этот факт, имеем: $BE = \frac{AB + BD + a}{2} - a$, $BF = \frac{BC + BD + b}{2} - b$,

$EF = |BE - BF| = \frac{|b-a|}{2}$.

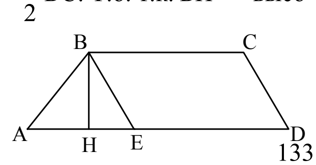
Ответ: $\frac{|b-a|}{2}$.

Контрольные работы

К-1

В-1

1. Т.к. $ED = AE = BC$, то $AD = 2BC$ и $AH = \frac{1}{2}BC$. Т.о. т.к. BH — высота и медиана, то ΔABE (и ΔECD) равнобедренный, а т.к. $\angle A = 60^\circ$, то

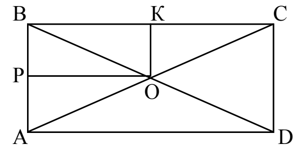


$\angle BEA = \angle BEC = 60^\circ \Rightarrow \angle AEC = 120^\circ$, $\angle BCE = 60^\circ$.

2. Необходимо построить два равных прямоугольных треугольника по трем сторонам (диагональ и две стороны ромба: нарисуем диагональ, затем из двух ее концов проведем окружность радиусом равным стороне. Точка пересечения будет третьей вершиной треугольника.

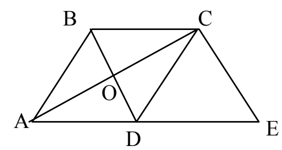
3. Т.к. $AP = PB$ и $BO = OD$, то PO — средняя линия, $\Delta ABO \Rightarrow PO \parallel AD$ (аналогично $OK \parallel AB$). Т.о. $PBKO$ — прямоугольник $\Rightarrow KP = BO = OD$.

4. Рассмотрим ΔATM: $\angle M + \angle ATM = \angle CAT$ (по свойству внешнего угла). Т.о. сумма указанных углов будет равна сумме углов $ACEKT$, т.е. 540°.



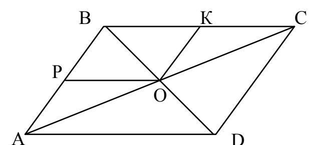
В-2

1. Т.к. диагонали имеют общую середину, то $ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow BC \parallel AD$. ΔDCE — равнобедренный, т.е. $\angle E = \angle CDE = \angle A \Rightarrow ABCE$ — равнобокая трапеция.



2. Необходимо построить два равных прямоугольника (по стороне и углу). Затем соединить их гипотенузами. Построение : нарисуем известный катет, затем из одного его конца проведем перпендикуляр, из другого конца под известным углом нарисуем прямую до пересечения с перпендикуляром.

3. Т.к. $OP \parallel BC$ и $BO = OD$, то $AP = PB$ (аналогично $BK = KC$). Т.е. $PBKO$ — ромб. Т.к. $\angle BPK = 40^\circ$, то $\angle BAC = 40^\circ$, а т.к. $AB = BC$, то $\angle BCA = BAC = 40^\circ$.

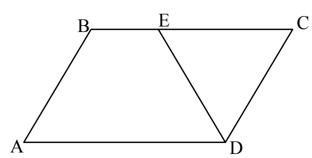


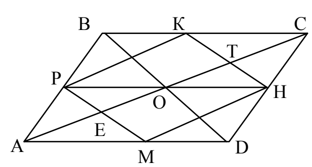
4. Нет, т.к. сумма углов выпуклого шестиугольника равна 720° сумма четырех острых углов меньше 360°, т.о. сумма двух оставшихся углов больше 360°, чего быть не может.

В-3

1. Т.к. $AB = CD$ и $BC = AD$,то $ABCD$ — параллелограмм, т.о. $\angle D = 150^\circ$, а т.к. $\angle EDC = 60^\circ$, то $\angle ADE = 90^\circ$ и т.к. $BC \parallel AD$, то $ABED$ — прямоугольная трапеция.

2. Т.к. нам известен периметр, то разделив его на четыре части получим сторону квадрата. Построим отрезок равный (1/2) периметра, затем проведя две окружности из обоих концов этого отрезка радиусом (1/2) периметра полу-



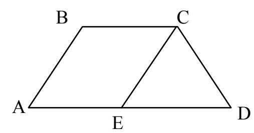


чим две их точки пересечения. Соединив их получим прямую перпендикулярную нашему отрезку и проходящую через его середину. Отложим на ней отрезок, равный (1/4) периметра. Т.о. получили две стороны квадрата, аналогично можно получить две другие стороны. Соединив их, получим квадрат.

3. Т.к. $PM \parallel BD$, то $PM \perp AC$, т.е. $\angle PEC = 90^\circ$ и т.к. $PK \parallel AC$, то $PK \perp BD \Rightarrow PK \perp KH \Rightarrow KTEP$ — прямоугольник, т.е. его диагонали равны. Т.о. $EK = PT$ и $KT \parallel PM \Rightarrow PK \parallel MH \Rightarrow PKHM$ — прямоугольник.

4. $\angle BCD = \angle ACE$, $\angle DEP = \angle CEH$, $\angle TOM = \angle AON$, $\angle MNK = \angle ONH$ (как вертикальные) $\Rightarrow$ сумма отмеченных углов равна сумме углов $ACEHNO$ и равна 720°.

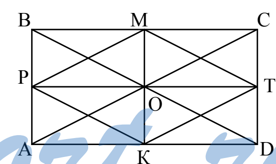
В-4



1. Т.к. $AD \parallel BC$ и $\angle B + \angle BCE = 180^\circ$, то $AB \parallel CE$ и $ABCE$ — параллелограмм. Т.о. AC и BE имеют общую середину.

2. Необходимо построить два равных равнобедренных треугольника по основанию и углу при основании и соединить их: нарисуем отрезок равный диагонали ромба, от обоих его концов, в одну и ту же сторону отложим две прямые под данным углом. Их точка пересечения будет третьей вершиной.

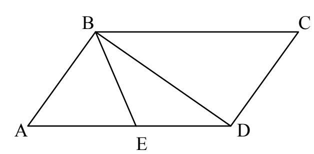
3. Т.к. $MK \parallel AB$ и $MP = PK$, то $OP \perp AB$ и $PT \perp MK$, так что $PMKT$ — ромб. Т.к. $BM = MC$ и $AK = KD$, то точка пересечения диагоналей $ABCD$ и $PMKT$ совпадает. Так что $MK \parallel CD$ и $OK = CT$, то $CTKO$ – параллелограмм и $OC = KT$, а т.к. $MPKT$ – ромб, то $KT = PK = OC$.



4. n=4, т.к. при n=3 сумма двух углов треугольника меньше 180°, а при $n \geq 5$ сумма n – 1углов была бы больше или равна 360°, т.о. $n = 4$.

К-2

В-1

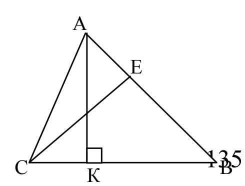


1. По теореме Пифагора: $BD^2 = BE^2 + ED^2$, то ΔBED — прямоугольный и BE — высота параллелограмма, т.о. $S = (4 + 5)12 = 108$ (см^2).

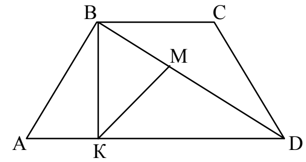
2. По теореме Пифагора:

$CB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ (см).

Т.о. $S = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75$ (см^2).



3. Из ΔABK: $tg30^\circ = \dfrac{BK}{AK}$, т.о. $AK = \sqrt{3}$ (см) $\Rightarrow AD = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см). Т.о. $S = \dfrac{1}{2}(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ (см^2). $S_{BKD} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (см^2).



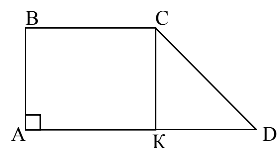
Т.к. $MD : BD = \dfrac{1}{2}$, то $S_{KMD} : S_{KBD} = \dfrac{1}{2}$.

Т.о. $S_{KMD} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ см^2.

4. Т.к. $S_{ABDE} = S_{ACDE}$, то $S_{ABD} = S_{ACD}$, т.о. у них одинаковые высоты $\Rightarrow BC \parallel AD$.

В-2

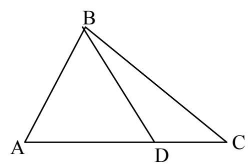
1. По теореме Пифагора:



$KD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см. $AD = 4 + 6 = 10$ см,

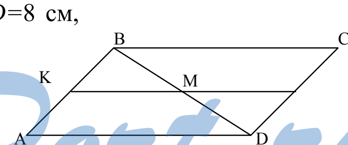
т.о. $S = \dfrac{1}{2} \cdot 8(4 + 10) = 56$ (см).

2. По теореме Пифагора $BC^2 = BD^2 + DC^2$ то $BD \perp AC$, а т.к. $\angle A = 45^\circ$, то $AD = BD = 12$ см,



т.о. $S = \dfrac{1}{2}(12 + 5)12 = 102$ см^2.

3. Т.к. $BM = MD$ и $KM \parallel AD$, то MK — средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow KM = (1/2)AD$. Т.о. $AD = 8$ см, $BD = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48}$ см, т.к. $\angle BDA = 30°$, то $AB = (1/2)AD = 4$ см.



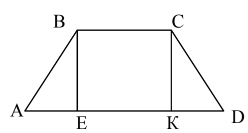
$S = 4 \cdot \sqrt{48} = 16\sqrt{3}$ см^2.

$S_{ABD} = \dfrac{1}{2}S = 8\sqrt{3}$ (см^2). Т.к. $BM = MD$, то $S_{AMD} = \dfrac{1}{2}S_{ABD} = 4\sqrt{3}$ (см^2).

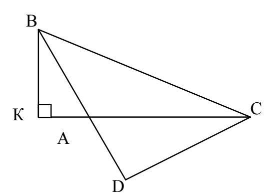
4. Т.к. $BC \parallel KD$, то $KBCD$ — трапеция, а по свойству трапеции $S_{KDB} = S_{KCD}$, т.о. $S_{AKCD} = S_{ABD}$.

В-3

1. По теореме Пифагора : $AB^2 = AE^2 + BE^2$, то ΔABE — прямоугольный, т.о. BE — высота трапеции, т.о. $S = \dfrac{1}{2}(3+6+1+6) \cdot 4 = 32$ см^2.



2. По теореме Пифагора:

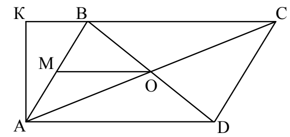


$AB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ см,

т.о. $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$ см^2.

<u>3.</u> По теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (дм).



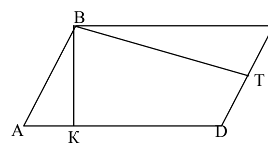
Т.о. $S = 13 \cdot AK = 2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$, т.о. $AK = \frac{120}{13}$ (дм). $S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ (дм^2),

а т.к. $AM=MB$, то $S_{AMO} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ (дм^2).

<u>4.</u> Т.к. $S_{ABCP} = S_{DTBC}$, то $S_{ATD} = S_{APD}$, т.о. т.к. у них одно и то же основание, то у них и одинаковые высоты, т.о. $TP \parallel AD$.

В-4

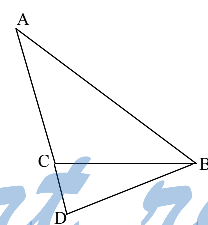
<u>1.</u> По теореме Пифагора:



$BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ (см),

т.о. $S = 10 \cdot 15 = 150$ (см^2).

<u>2.</u> По теореме Пифагора: $BC^2=CD^2 + BD^2$, то ΔCBD — прямоугольный, т.о. BD — высота ΔABD, т.к. $\angle A = 45^\circ$, то $AD = 15$ (см), т.о. $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 = \frac{225}{2}$ (см^2).

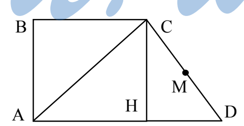


<u>3.</u> $\cos D = \frac{3}{5} = \frac{HD}{3}$, т.о. $HD = 1{,}8$ (см).

$AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см) (по теореме Пифагора);

$\sin D = \frac{4}{5} = \frac{CH}{3}$, т.о. $CH = 2{,}4$ (см);

$BC = 5 - 1{,}8 = 3{,}2$ (см); $S = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4(5 + 3{,}2) =$



$8{,}2 \cdot 1{,}2 = \frac{246}{25}$ (см^2);

$AC = 4$ (см), $S_{ACD} = 6$ (см),

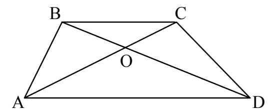
$S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ACD} = 3$ (см^2), (т.к. $CM = MD$).

<u>4.</u> Т.к. $S_{ABOCD} = S_{AODCB}$, то $S_{AOD} = S_{BOC}$, т.е. $S_{ACD} = S_{DBC}$, т.к. у этих треугольников общее основание и равные площади, то у них равные высоты $\Rightarrow AB \parallel DC$.

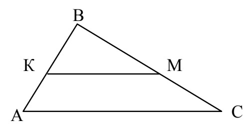
К-3

В-1

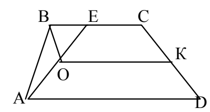
1. $S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15 \cdot \sin BOA = 45\sin BOA$; $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 18\sin COD = 45\sin BOA$. Т.о. $S_{ABO} = S_{COD} \Rightarrow ABCD$ — трапеция $\Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta AOD$ с коэффициентом $k = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, т.о. $S_{BOC} : S_{AOD} = k^2 = \frac{1}{9}$.



2. $\Delta KBM \sim \Delta ABC$ ($\angle B$ — общий, $\angle BMK = 180^\circ - \angle KMC = \angle A$). Т.о. $\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC}$, $\frac{S_{AKMC}}{S_{BMK}} = \frac{S_{ABC}}{S_{BMK}} - 1 = 8$, т.о. $S_{ABC} = 9S_{BMK}$, т.е. $k = 3$, т.о. $AB : BM = 3$.

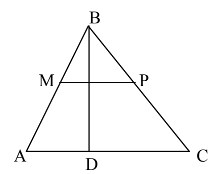


3. Т.к. $EC \parallel AD \parallel OK$, то по теореме Фалеса $\frac{CK}{KD} = \frac{EO}{OA} = \frac{2}{3}$, т.к. BO — биссектриса, то по свойству $\frac{AB}{AO} = \frac{BE}{OE}$, т.о. $\frac{AB}{BE} = \frac{AO}{OE} = \frac{3}{2}$.

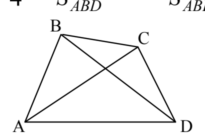


В-2

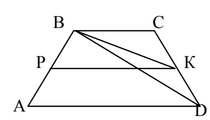
1. Т.к. $MP \perp BD \Rightarrow MP \parallel AC$ (т.к. $BD \perp AC$). Т.о. $\Delta BPM \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BM}{AB}$, $\frac{1}{3} = \frac{5}{AB}$ $\Rightarrow AB = 15$ (см), т.е. $k = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{MBP} : S_{ABC} = k^2 = 1 : 9$.



2. Т.к. $\frac{BD^2}{BC} = AB \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD$ (по двум сторонам и углу между ними). Т.о. $\angle BAD = \angle BDC$, т.к. $DC : AD = 3 : 2 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$, т.о. $\frac{S_{BDC}}{S_{ABD}} = k^2 = \frac{9}{4}$. $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} = 1 + \frac{S_{BDC}}{S_{ABD}} = \frac{13}{4}$.

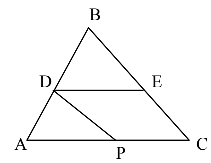


3. Т.к. $BC \parallel AD \parallel PK \Rightarrow$ по теореме Фалеса $\frac{BP}{AP} = \frac{CK}{KD}$, а т.к. BK — биссектриса $\Delta BCD \Rightarrow$



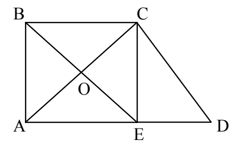
по свойству биссектрисы $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CK}{KD} = \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{3}{4}$.

В-3



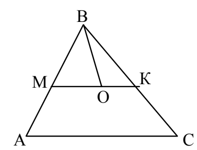
<u>1.</u> $\Delta DBE \sim \Delta ADP$ по трем сторонам (т.к. $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{BE}{DP} = \dfrac{DE}{DP} = k = \dfrac{2}{1}$). Т.о. $\angle A = \angle BDE \Rightarrow$ $DE \parallel AC$; $S_{DBE} : S_{ADP} = k^2 = 4$.

<u>2.</u> Т.к. CE и медиана, и высота $\Rightarrow$ $\angle ACE = \angle ECD$, $\angle BCO = \angle CAD = \angle D$. Т.к. $ABCE$ — прямоугольник $\Rightarrow BO = OC$ $\Rightarrow$ $\Delta BOC \sim \Delta ACD$ (по трем углам) $\Rightarrow$



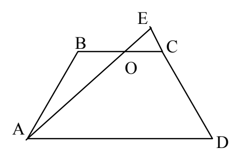
$BO : BC = CD : AD \Rightarrow \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BO}{CD} = \dfrac{1}{2} = k$ (т.к. $BC=AE=ED$) $= \dfrac{S_{BOC}}{S_{ACD}} = k^2 = \dfrac{1}{4}$;

$S = S_{ACD} + \dfrac{1}{4} S_{ACD} \Rightarrow S_{ACD} = \dfrac{4}{5} S$.

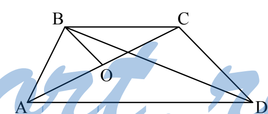


<u>3.</u> $\Delta MBK \sim \Delta ABC$ по трем углам ($\angle B$ — общий, $\angle BMK = \angle A$) $\Rightarrow$ $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{MB}{BK}$, но т.к. BO — биссектриса $\Rightarrow$ $BM : BK = MO : OK = 2 : 3 = BC : AB$.

В-4



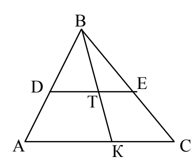
<u>1.</u> $\Delta AED \sim \Delta OEC$, т.к. $OC \parallel AD$, $\angle E$ — общий $\Rightarrow$ $OC : AD = EC : ED = 2 : 6 = \dfrac{1}{3} = k$. Отсюда $EC : CD = 1 : 2 \Rightarrow S_{OEC} : S_{AED} = k^2 = 1 : 9$.



<u>2.</u> $\Delta BOC \sim \Delta ACB$ по трем сторонам (т.к. $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BO}{CD} = \dfrac{1}{2} = k$).

Т.о. $\angle BCO = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD$; $\dfrac{S_{BOC}}{S_{ACD}} = k^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{ACD}}{S_{BOC}} = 4$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AOBCD}}{S_{BOC}} = 5 \Rightarrow S_{BOC} : S_{AOBCD} = 1 : 5$.

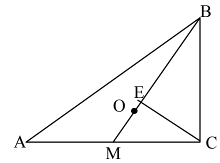


<u>3.</u> По свойству биссектрисы : $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{AB}{CB}$ $\Rightarrow$ т.к. $DE \parallel AC$ и $\angle B$ — общий $\Delta BED \sim \Delta ABC$ $\Rightarrow$ $\angle C = \angle BDE$.

К-4

В-1

1. $\cos EMC = EM : MC = 2/3 = \dfrac{MC}{MB} \Rightarrow MB = 45$ (мм) $\Rightarrow MO = 15$ (мм).



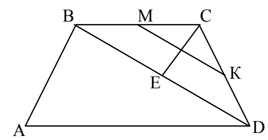
2. Нужно разделить отрезок на 5 равных частей см. С-21 В-1 (2).

3. Т.к. MK — ср. линия ΔABC, то $BD = 2\sqrt{5}$ (см), т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \angle CBD = \angle BDA$ $\cos BDA = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle CBD = 45^0$;

$\text{tg}45^0 = CE/BE \Rightarrow BE = CE;$

$\text{tg}ECD = \dfrac{2\sqrt{5} - BE}{CE} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{5} - CE = 3CE$

$\Rightarrow CE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (см).



4. Пусть внешний прямоугольник имеет стороны а и b ($a > b$), а ширина рамки — c. Тогда если они подобны, то возможно 2 случая:

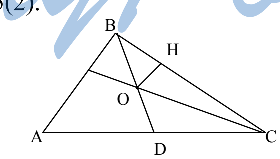
1. $\dfrac{b-2c}{b} = \dfrac{a-2c}{a}$ $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c}{d}$ невозможно;

2. $\dfrac{b-2c}{a} = \dfrac{a-2c}{b}$ $b^2 - 2cb = a^2 - 2ca$; $(b - a)(b+a) = 2c(b - a)$; $b+a = 2c$ также невозможно $\Rightarrow$ не могут.

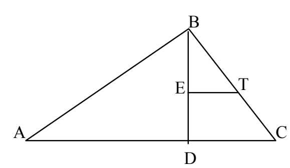
В-2

1. Т.к. ET — ср. линия ΔBDC то $DC = 2ET = 16$ (дм); $\text{tg}A = \dfrac{BD}{25}$ $\Rightarrow BD = 25tgA$; $\dfrac{1}{tgA} = \dfrac{BD}{16} = \dfrac{25tgA}{16} \Rightarrow tgA = \dfrac{4}{5} \Rightarrow BD = 20$ (дм).

2. см. задачу С-21 В-5(2).



3. $\sin 60^0 = \dfrac{OH}{BO} = \dfrac{\sqrt{3}}{BO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BO = 2$ (см) $\Rightarrow BD = \dfrac{3}{2}BO = 3$ (см), т.к. $\angle B = 90^0 \Rightarrow$ по свойству прямоугольного треугольника $BD = AD = DC = 3$ (см) $\Rightarrow \angle A = 30^0$.



$\cos 30^0 = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3}$ (см).

4. Пусть данный прямоугольник имеет стороны a и b, тогда если эти прямоугольники подобны, возможны 2 случая:

1. $\dfrac{a}{2b} = \dfrac{a}{b}$ невозможно;

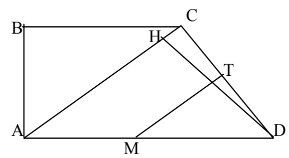
2. $\dfrac{a}{2b} = \dfrac{b}{a}$ $2b^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b \Rightarrow$ они могут быть подобными.

В-3

1. $OB = 2OM = 2\sqrt{2}$ (дм) $\Rightarrow tgOBC = \dfrac{OC}{OB} \Rightarrow OC = OBtgOBC$; $\dfrac{1}{tgOBC} =$

$= ctgOBC = \dfrac{OC}{OM} = \dfrac{OBtgDBC}{OM} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} tgOBC \Rightarrow tgOBC = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $OC = 2$ (дм).

2. См. задачу С-21 В-1 (2).



3. Т.к. MT — средняя линия $\Delta ACD \Rightarrow$
$AC = 2MT = 2\sqrt{18}$ (см).

По т. Пифагора $AB = \sqrt{4 \cdot 10 - 36} = 6$ (см).
Т.о. $\angle BAC = 45^0 = \angle CAD \Rightarrow AH = HD;$

$\text{tg}\angle ACD = \dfrac{HD}{CH} = \dfrac{HD}{(2\sqrt{18} - HD)} = 2$. $HD = 4\sqrt{18} - 2HD \Rightarrow HD = 4\sqrt{2}$ см.

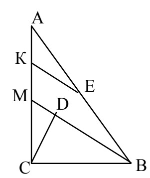
4. Пусть квадрат со стороной c разрезали на 2 прямоугольника со сторонами a, h и $a - b$. Если они подобны, то возможно 2 случая:

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{a-b}$ невозможно;

2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a-b}{a}$; $a^2 = (a - b)b$ невозможно, т.к. $a - b < a$ и $b < a \Rightarrow$ $a^2 > (a - b)b$. Значит нельзя.

В-4

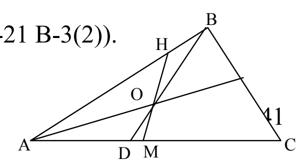
1. Т.к. EK — ср. линия ΔMAB, то $MB = 2EK = 25 \Rightarrow DB = 16$;



$\Delta MBC \sim \Delta CDB$ ($\angle DBC = \angle BCM$) $\Rightarrow \dfrac{MB}{CB} = \dfrac{CD}{DB} \Rightarrow$

$CD = \sqrt{16 - 9} = 12$ (см); $MC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ (см) (по теореме Пифагора) $\sin MBC = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

2. $\dfrac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \dfrac{P_2Q_2}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{P_2Q_2^2}{P_1Q_1} = \dfrac{a^2}{b}$ (см. С-21 В-3(2)).



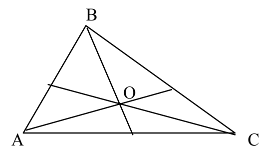
3. $\sin 60^0 = \frac{2\sqrt{3}}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OD = 4$ (дм) $\Rightarrow$ $BD = 3OD = 12$ (дм); $\angle DOM = \angle MOB = 30 \Rightarrow \angle AHO = 180 - \angle OHB =$ $= 180 - 180 + 60 = 60 \Rightarrow \angle A = 30 \Rightarrow AD = DB = 12$ см $\Rightarrow AM = 14$ (дм), т.к. $DM = (1/2)DO = 2$ дм $\Rightarrow \cos 30° = \frac{AH}{AM} = \frac{14}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{28}{\sqrt{3}}$ (дм).

4. Пусть прямоугольник со сторонами a, b разрезан на прямоугольники со сторонами b, c и $a - c$, тогда если они подобны, то:

1. $\frac{b}{c} = \frac{a-c}{b} \Rightarrow b^2 = (a-c)c$. Подбором находим, что при $a = 2{,}5$; $b = 1$; $c = 2$ равенство выполняется $\Rightarrow$ так можно разрезать.

К-5

В-1

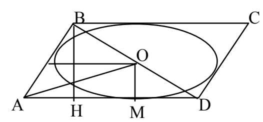


1. $S = (1/2)P \cdot \tau$, $P = 6\sqrt{3}$ (см),

$S = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ (см^2), т.о. $\tau = 1$ (см).

2. Т.к. $\angle AOC = 90°$ (центральный) $\Rightarrow$ $\angle B = \frac{\angle AOC}{2} = 45° \Rightarrow$ т.к. $\angle OBC = 15°$, то $\angle ABO = 30°$, $\sin 30° = (6/R)$ $\Rightarrow R = 12$ (см).

3. По свойству вписанной окружности:



$AD + BC = AB + CD \Rightarrow AB = AD = 10\sqrt{2}$ дм;

$\sin 45° = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = 10$ дм,

$\tau = (1/2)BH = 5$(дм);

$\angle BDA = (180° - 45°)\frac{1}{2} = \frac{135°}{2}$; $\operatorname{tg}\angle BDA = \frac{\tau}{MD} \Rightarrow MD = \frac{\tau}{tgBDA}$.

Сумма расстояний: $2MD = \frac{10}{tg\frac{135^\circ}{2}} \approx 4{,}1$.

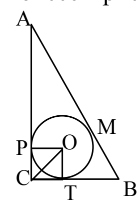
4. Через точку O проведем лучи AO и BO, которые пересекут окружность в точках M и H. Пусть AH и BM пересекаются в точке C. По свойству треугольника вписанного в окружность и построенного, как на диаметре $\angle AHB = \angle AMB = 90° \Rightarrow$ искомый перпендикуляр лежит на прямой CO.

В-2

1. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2R = 4$ (см), $AC = 2\sqrt{3}$ (см).

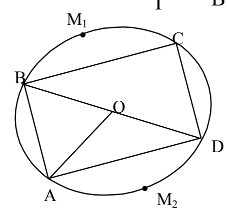
$\angle A = \angle C = 30°$, $\cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 2$ см.

2. Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис,



то $\angle OCT = 45° \Rightarrow CT = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$ (см) $= PO = R$. $\angle POT = \angle C = 90°$ (т.к. $OP \parallel CT$ и $PC \parallel OT$) $\Rightarrow$ $\angle PMT = \angle POT \cdot 1/2 = 45°$ (вписанный угол равен половине центрального).

3. Т.к. $AB \parallel CD$ и $AB = CD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм, но по свойству вписанного четырехугольника $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, т.е. $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$ и $ABCD$ – прямоугольник $\Rightarrow BD = 2R = 8$ см $\Rightarrow \angle ABD = 30° \Rightarrow$ $AD = 4$ см. $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 4\sqrt{3}$ (см). Точка M может иметь два положения: M_1 и M_2.



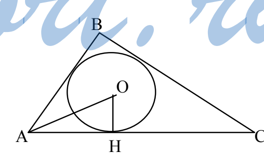
$\angle AOD = 180° – 2 \cdot 60° = 60° \Rightarrow \angle BOC = 60°$ и $\angle BM_1C = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC) = 1/2 \cdot 300^\circ = 150^\circ$, $\angle BM_2C = (1/2) \angle BOC = 30°$; $AB = 4\sqrt{3}$ точка M может иметь два различных положения, $\angle AOD = 180° – 2 \cdot 60° = 60° \Rightarrow$ $\angle BM_1C = 30°$; $\angle BM_2C = 150°$.

4. Построим окружность с диаметром $BD = ET$ и окружность с центром в точке B и радиусом PO. Пусть вторая окружность пересекает первую в точках A и C, тогда $ABCD$ — искомый.

В-3

1. $\angle OAH = (1/2) \angle A = 30°$; $\text{tg} 30° = \frac{OH}{AH} \Rightarrow$

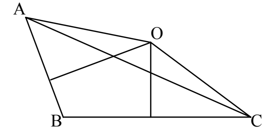
$AH = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (см).



2. Т.к. $AO = OC = R$, то $R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$ (дм).

По теореме синусов $AC : \sin B = 2R \Rightarrow$

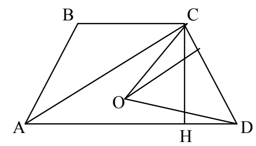
$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ т.к. $\angle B > 90°$, то $\angle B = 135°$.



3. По свойству вписанной окружности AB + CD = BC + AD ; $\angle BCA$ = $= \angle CAD = 45°$, $\angle D = 45° \Rightarrow CH = 2\tau = 12$ см, $AH = HD$ (т.к. $\angle CAD = \angle D$) $\Rightarrow AH = HD = CH = 12$ см $\Rightarrow$ $CD = \sqrt{CH^2 + ND}^2 = 12\sqrt{2}$ см $\Rightarrow CD + AB = 22\sqrt{2}$ см, $AD + BC = AB + CD = 22\sqrt{2}$ (см).

$\angle BCD = 180° - \angle D = 135°$.

$\angle COD = (180^\circ - \frac{\angle D}{2} - \frac{\angle BCD}{2}) = 90^\circ$. Тогда



$S_{OCD} = (1/2) \cdot CD \cdot \tau = 36\sqrt{2}$ (см^2)$= (1/2) CO \cdot OD$

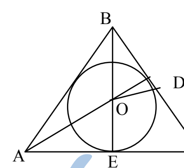
$\Rightarrow$ $CO \cdot OD = 72\sqrt{2}$ см^2.

4. Проведем прямые AO и BO. Пусть они пересекут окружность в точках A_1 и B_1. $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90°$ (по свойству треугольника построенного как на диаметре и вписанного в окружность). Пусть AB_1 и A_1B пересекаются в точке O_1, прямая OO_1 — искомая.

В-4

1. Т.к. $\angle A = \angle B = 45°$ $\Rightarrow$ $\angle C = 90°$ $\Rightarrow$ AB — диаметр (см. предыдущую задачу). Т.о. $AB = 4\sqrt{2}$ (см), $AC = CB = 4$ (см).

2. Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, то $\tau = OE$. Пусть $BE = a$. Тогда $AB = 2a$, т.к. против угла в 30° ($\angle A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 30^\circ$) лежит катет равный половине гипотенузы, $AC = 2\sqrt{3}\, a \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}\, a\, a =$

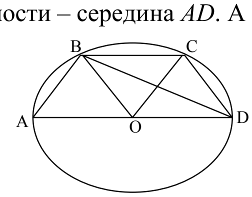


$= a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \tau = \frac{1}{2} a(4 + 2\sqrt{3})2\sqrt{3}$ (см). Т.о.

$a = 4 + 2\sqrt{3}$, т.о. $BO = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4$ (см).

$\cos DOB = \frac{DO}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \angle DOB = 30° \Rightarrow \angle DEB = (1/2) \angle DOB = 15°$.

3. Т.к. $\angle ABD = 90°$, то центр описанной окружности – середина AD. А т.к. $\angle A = 60°$, то $AB = AO = BO = OD = OC = CD$ (т.к. угол $\angle D = \angle A = 60°$) $\Rightarrow R = 4$ (см). Либо $BMC = \frac{1}{2}(360° - \angle BOC)$ (т.к. вписанный угол равен половине центрального).



Т.к. $\angle BOC = 60°$, то $\angle BMC = 30°$ или 15°.

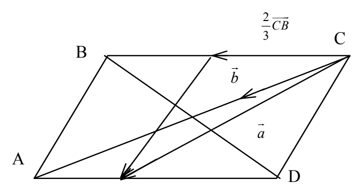
4. Построим окружность с диаметром $BD = BO + OD$. Затем из точки O под углом $\angle H$ проведем прямую. Из точки B радиусом BO прове-

дем окружность. Пусть точки пересечения с первой окружностью будут A_1 и A_2. Проведем лучи BA_1 и BA_2 до пересечения с нашей прямой. Обозначим эти точки за A и C. Т.о. $ABCD$ — искомый.

К-6

В-1

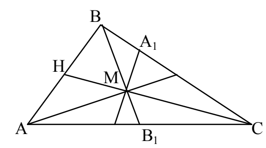
1. $\vec{a} = (2/3)\vec{CB} + \vec{CD}$; $\vec{b} = \frac{1}{4}(\vec{BA} - \vec{BC}) = \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{CB}) = (1/4)\vec{CA}$ 2.



а) $\vec{MB_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{MA} + \vec{MC}\right)$;

б) $\vec{CM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\vec{CA} + \vec{CB}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\vec{CA} + \vec{CB}\right)$;



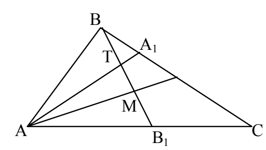
в) т.к. в $\Delta\, CHB$: $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CM}{MH} = 2 : 1 \Rightarrow$

$A_1M \parallel HB \Rightarrow \vec{MA_1} = (2/3)\,\vec{HB} = (1/3)\,\vec{AB}$;

г) Пусть T — середина BB_1 $\Rightarrow$

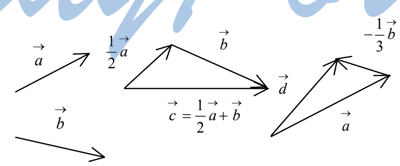
$\vec{AT} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right)$ и $\vec{AA_1} = (2/3)\vec{AB} + (1/3)\vec{AC}$.

Т.о. $\vec{AA_1} = (4/3)\vec{AT} \Rightarrow T \in AA_1$.



В-2

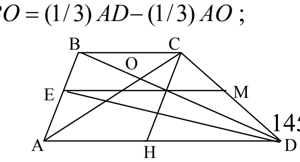
1.



2. а) $\vec{AC} = \vec{AB} + (1/3)\,\vec{AD}$;

б) Т.к. $BC{:}AD = 1{:}3 \Rightarrow CO{:}OA = 1{:}3$, т.о. $\vec{BO} = (1/3)\,\vec{AD} - (1/3)\,\vec{AO}$;

в) Т.к. $CO : OA = \frac{1}{3} \Rightarrow$



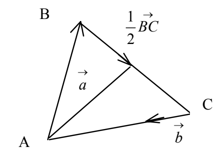
$\overrightarrow{AO} = (3/2)\overrightarrow{DM} - \ (3/2)\overrightarrow{DE}$;

г)

Т.к. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

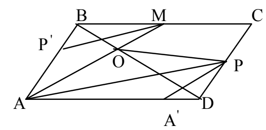
$\Rightarrow$ т.к. $AD \parallel BC$, а $DA \nparallel DC \Rightarrow DE < (2/3)DA + (1/2)DC$.

В-3



1. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + (1/2)\overrightarrow{BC}$;

$\vec{b} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$.



2. а) $\overrightarrow{AM} = (1/2)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$;

б) Т.к. $BO : BD = 1 : 3$,

то $\overrightarrow{BO} = (1/3)\overrightarrow{BA} + (1/3)\overrightarrow{BC}$;

в) $P'M \parallel AP$, $A'P \parallel AM$, $P'M = (1/4)AP$, $A'P=(1/4)AM$.

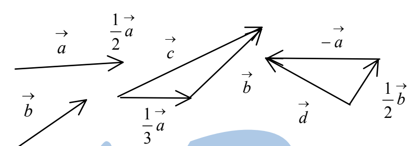
Т.о. $\overrightarrow{OD} = \frac{16}{3}(\overrightarrow{P'M} - \overrightarrow{A'P}) = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{AM} \ \ \frac{4}{3}\overrightarrow{AP} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$;

г) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + (1/2)\overrightarrow{CD} - (2/3)\overrightarrow{AB} - (1/3)\overrightarrow{AD} = (2/3)\overrightarrow{AD} - (1/6)\overrightarrow{AB}$,

т.к. $AD \nparallel AB \Rightarrow OP < (2/3)AD + (1/6)AB$.

В-4

1.

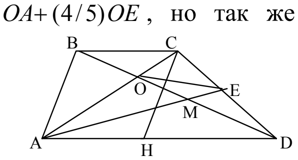


2. а) $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$;

б) Т.к. $BC : AD = 1 : 2$, то $\overrightarrow{BO} = (1/3)\overrightarrow{AD} \ - \ (1/3)\overrightarrow{AB}$;

в) Т.к. $BC:AD = 1:2$, то $CO:AC = 1:3$, т.о. $\overrightarrow{CO} = (-1/3)\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} + (1/2)\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (-1/3)\overrightarrow{AB} - (1/6)\overrightarrow{AD}$;

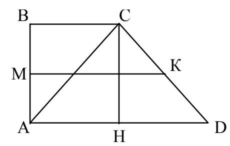
г) Т.к. $AM : AE = 5:1$, то: $\overrightarrow{OM} = (1/5)\overrightarrow{OA} + (4/5)\overrightarrow{OE}$, но так же $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OE}$, т.о. $\overrightarrow{OM} = (1/5)\overrightarrow{OD} \Rightarrow M \in OD$.



К-7

В-1

<u>1.</u> а) Это трапеция, т.к. $AD \parallel DC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot (6+8) \cdot 2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$;



б) $CH = BA = 2\sqrt{3}$, $HD = 8 - 6 = 2$, т.о. $\text{tg}D = \sqrt{3}$
$\Rightarrow \angle D = 60°$, $\angle C = 180° - 60° = 120°$;
в) MK — средняя линия трапеции $\Rightarrow$
$MK = \frac{1}{2}(8+6) = 7$;

г) Если можно вписать, то $AB + CD = CB + AD$, $CD = 2HD = 4$, но $2\sqrt{3} + 4 \neq 14$, т.о. нельзя;

д) Если можно описать окружность, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$, но $90° + 120° \neq 180°$, т.о. нельзя;

е) По теореме Пифагора $AC = \sqrt{12+36} = 4\sqrt{3}$, т.о. т.к.
$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (по трем сторонам);

ж) $\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{CD} + (4/3)\vec{CB}$.

<u>2.</u> Пусть дан отрезок длины a, тогда построем прямоугольный треугольник с катетами a и $2a$, тогда гипотенуза будет равна $a\sqrt{5}$.

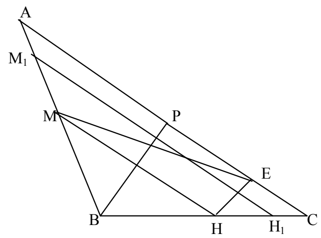
В-2

<u>1.</u> а) $\angle A = (180° - 120°)\,{}^1\!/_2 = 30°$, проведем $BP \parallel AC$. Тогда:

$$AP = (1/2)AC = 2\sqrt{3}.$$

$AB = \frac{AP}{\cos A}$ т.о. $AB = 4$, $\text{tg}30° = \frac{BP}{2\sqrt{3}} \Rightarrow BP = 2$, т.о. $S = {}^1\!/_2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$;

б) Т.к. $\angle B$ — общий, $\frac{AM_1}{AB} = \frac{H_1C}{BC}$, то $\Delta ABC \sim \Delta M_1BH_1$, $M_1H_1 = (3/4)AC = 3\sqrt{3}$;



в) Аналогично $\Delta ABC \sim \Delta BMH$ с $k = \dfrac{1}{2}$, т.о. $S_{MBH} : S_{ABC} = k^2 = \dfrac{1}{4}$;

г) $\vec{MB} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{AC} + 2\vec{HB}\right)$;

д) Можно, т.к. $\angle A + \angle MHC = \angle C + \angle HMA = 180^\circ$ (т.к. $MH \parallel AC$);

е) $HE = (1/2)BP = 1$, $MH = (1/2)\mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$, $ME = \sqrt{12+1} = \sqrt{13} \Rightarrow$

$\sin HME = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$;

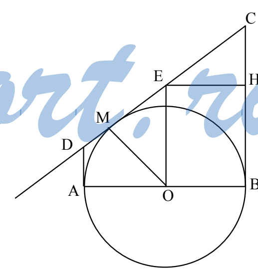
ж) $S = (1/2)P\,\tau$, $P = 2 \cdot (1/2)AB + (1/2)AC = 4 + 2\sqrt{3}$.

$S = (1/4)S_{ABC} = \sqrt{3}$, т.о. $\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

2. Пусть длина данного отрезка равна a, тогда построим прямоугольный треугольник с катетом $2a$ и гипотенузой $4a$, второй катет — искомый.

В-3

1. а) $\angle OCB = (1/2)\angle DCB = 30°$, $\angle ADC = 180° - 60° = 120°$, $\angle ODC = (1/2)\angle ADC = 60°$ (т.к. центр окружности должен лежать на биссектрисе);



б) $\angle ADO = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60°$, т.о. $\mathrm{ctg}60° = \dfrac{AD}{2}$,

т.о. $AD = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\angle OCB = 30°$, $\mathrm{ctg}30° = \dfrac{CB}{OB}$

$\Rightarrow CB = 2\sqrt{3}$;

в) это трапеция, т.к. $AD \parallel BC \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3})4 = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$;

г) $\angle OMC = 90$ (касательная), $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$, $\angle MOB = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$;

д) $\angle OCB = \angle DOA = -\angle ADO + 90° = 30°$, т.о. $\Delta ADO \sim \Delta OCB$ (по острому углу);

е) $\sin 60° = \dfrac{EH}{EC}$, $EC = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $CH = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $MD = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

$BC = 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, т.е. $OE = \dfrac{1}{2}(BC + MD)$;

ж) т.к. $DM : DC = 1 : 4$, то:

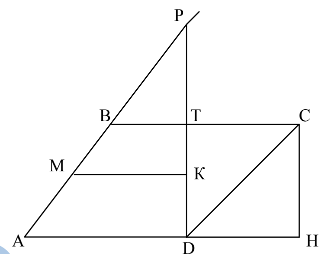
$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE}) = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OC}) = \frac{3}{4}\vec{OD} + \frac{1}{4}\vec{OC}$.

<u>2.</u> Пусть длина исходного равна a, тогда построив отрезок $a\sqrt{5}$ (см. К-7 В-1 (2)), построим прямоугольный треугольник с катетами $a\sqrt{5}$ и $3a$. Гипотенуза будет длиной $a\sqrt{14}$.

В-4

<u>1.</u> а) Т.к. $ABCD$ — параллелограмм, от $AB \parallel DC \Rightarrow \Delta BPT \sim \Delta PTC \Rightarrow$
$\dfrac{DT}{TP} = \dfrac{1}{3} = k \Rightarrow \dfrac{S_{DTC}}{S_{TPB}} = k^2 = \dfrac{1}{9}$;

б) т.к. $\angle A = 45°$, то $PD = 4$, $DT = (1/4)PD = 1 \Rightarrow S = 1 \cdot 4 = 4$;



в) $PK{:}TK = 7{:}1$, т.о. $MK = (7/8)AD = \dfrac{7}{2}$;

г) нет, т.к. $\angle ADP + \angle ABC \neq 180°$;

д) $BT : AD = PT : PD = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

$\vec{AB} = \dfrac{4}{3}\vec{BT} + \vec{AC} = \dfrac{4}{3}\vec{BT} - \vec{CA}$;

е) $BT = (3/4)AD = 3$, $TC = 1 \Rightarrow AH = 5$

$\Rightarrow AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$. Т.о. $\sin CAH = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$;

ж) $BT = 3 = TP$, $BP = 3\sqrt{2}$. Т.к. $BT = TP$, то две точки касания отсекут один прямой угол, а третья разделит оставшийся угол пополам — 90°, 135°, 135°.

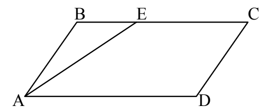
<u>2.</u> Необходимо построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему углу в 30°, тогда другой катет будет искомым.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

МД-1

В-1

1. Сумма углов четырехугольника равна 360°. Пусть равные углы равны α, тогда: $3\alpha + \alpha - 40° = 360°$; $\alpha = 100°$, т.о. 100°, 100°, 100°, 60°.

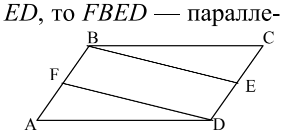


2. Т.к. $\angle A = \angle C$, то AE — биссектриса $\Rightarrow$ $\angle BEA = \angle EAD = 20° \Rightarrow AB = BE = 10$ (см); $BC = AD = 10 + 2 = 12$ (см).

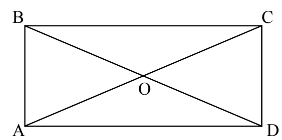
3. Т.к. диагонали в параллелограмме точкой пересечения делятся пополам, то $P_{ABO} = 10 + \frac{1}{2}(14+10) = 22$ (см).

4. Т.к. $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow$ $\angle BDA = \angle DBC = 15°$ (как накрест лежащие).

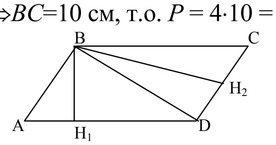
5. Т.к. $AB \parallel CD$ и $FB = AB - AF = CD - CE = ED$, то $FBED$ — параллелограмм$\Rightarrow \angle BED = \angle BFD = 50°$.



6. Т.к. $CO = OD$, то $\angle OCD = \angle ODC = (180° - 60°)\frac{1}{2} = 60° \Rightarrow CD = CO = OD = 10 \Rightarrow$ т.к. $BD = AC = 2OD$, то $BD = AC = 20$.

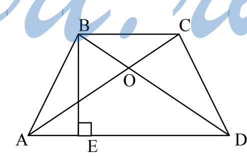


7. $\angle H_1BD = 15°$, $\angle BDH_1 = 90° - \angle H_1BD = 75° = \angle CBD = \angle CBH_2 + 15° \Rightarrow \angle CBH_2 = 60° \Rightarrow \angle C = 30° \Rightarrow BC = 10$ см, т.о. $P = 4 \cdot 10 = 40$ (см).



8. Расстояние в квадрате от центра до стороны равно $\frac{1}{2}$ стороны $\Rightarrow$ $20 = 2a$, т.е. $P = 4a = 40$ (см).

9. $\Delta EBD \sim \Delta AOD$ ($\angle BDE = \angle OAD$, т.к. $AB = CD \Rightarrow \angle EBD = \angle EDB$ и $BE = ED = 4$ (см).

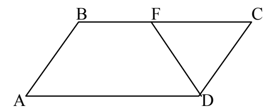


10. EF — средняя линия, т.к. $AE = EB$ и $EB \parallel AC \Rightarrow AC = 20$ (см), т.о., т.к. $\angle A = 45°$, то $CB = 20$ (см).

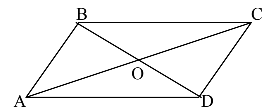
В-2

1. Сумма углов четырехугольника равна 360°, пусть равные углы α, тогда: $3\alpha + \alpha + 80° = 360° \Rightarrow \alpha = 70°$, т.о. 70°, 70°, 70°, 150°.

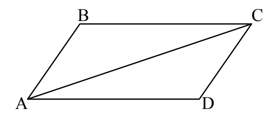
2. $FC = 20 - 5 = 15$ (см), т.к. $\angle B = \angle D = 140°$, то DF — биссектриса$\Rightarrow$ $\angle DFC = \angle CDF = 70° \Rightarrow FC = CD = AB = 15$ (см).



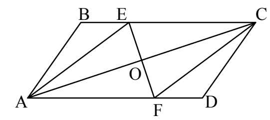
3. Т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам, то $BO = 8$ см $\Rightarrow P=18 + 8 + OC = 38 \Rightarrow OC = 12$ (см) $\Rightarrow AC = 24$(см).



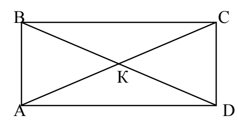
4. Т.к. $BC=AB$, $BC \parallel AB$, то $ABCD$ — параллелограмм. $\angle BAC = \angle ACD = 40°$.



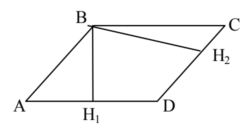
5. Т.к. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, то $EC= BC - BE = AD - FD = AF \Rightarrow AECD$ — параллелограмм $\Rightarrow AO+OF = \frac{1}{2}(AC + EF) = 15$ (см).



6. $\angle CAD = 30°$, т.к. $BD = AC$, то $CD = (1/2)AC = 5$ (см).



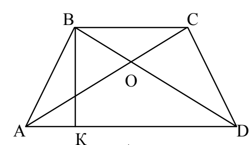
7. BH и высота и медиана $\Rightarrow BH$ и биссектриса $\Rightarrow \angle ABH_1 = \angle H_1BH_2 = \angle H_2BC = \alpha$, т.о. $3\alpha+90° - \alpha=180° \Rightarrow \alpha = 45°$.



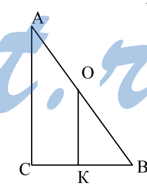
8. см. МД-1 В-1 (8) расстояние равно

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{4}=\frac{P}{8}=10 \text{ (см)}.$$

9. $\Delta AOD \sim \Delta KBD$ (по 3-м углам) $\Rightarrow$
(т.к. $AB = CD$, то $AO = OD$)
$BK = KD = 7$ (см).



10. Т.к. $\angle B=45°$, то $AC= BC = 18$, т.к. $KO = OB$ и $OK \parallel AC$, то OK — средняя линия и $OK = 9$ (см).

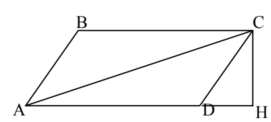


МД-2

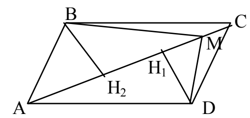
В-1

1. По т. Пифагора диагональ равна $4\sqrt{2}$ см, т.о. $S=(4\sqrt{2})^2=32$ см^2.

2. $\sin 30° = CH / AC \Rightarrow CH = 6$ (см), т.о. $S = 6\cdot 10 = 60$ (см^2).

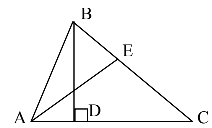


3. Т.к. $S_{ABC}=S_{ACD} \Rightarrow BH_2=DH_1 \Rightarrow S_{BMC}=\frac{1}{2}MC \cdot BH_2 = \frac{1}{2}MC \cdot BH_1 = S_{DMC} = Q$.

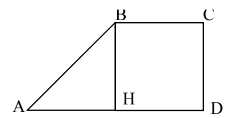


4. Пусть $a_1=a_2$, $h_1 = 3h_2 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}a_1h_1 = \frac{1}{3}S_2$ $\Rightarrow S_1 : S_2 = 1 : 3$.

5. $\Delta AEC \sim \Delta BDC$ (т.к. $\angle C$ — общий) $\Rightarrow$ $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow AE = \frac{8 \cdot 10}{16} = 5$ (см).



6. $AH = AD - BC = 4$ (см), $\text{tg}30° = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (см), т.о. $S=\frac{1}{2}(6+2)\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ (см^2).

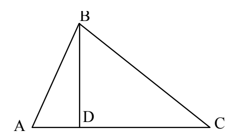


7. Пусть $a = 15$, тогда $b = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$,

$S = 15 \cdot 20 = 300 = \frac{1}{2}a_1^2 \Rightarrow a_1 = 10\sqrt{6} = a_2$.

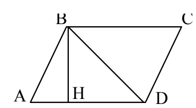
8. По теореме Пифагора:

$AC = \sqrt{m^2 - h^2} + \sqrt{n^2 - h^2}$.



9. $\angle BDA = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 60°$, $\sin 60° = \frac{BH}{BD}$,

$BH = BD \cdot \sin 60° = \frac{3}{2}$.

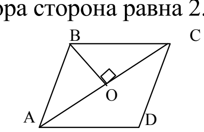


10. Треугольник прямоугольный, т.к. $7^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 = 84$.

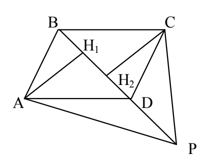
В-2

1. Диагональ равна $\sqrt{8}$ см, затем по теореме Пифагора сторона равна 2.

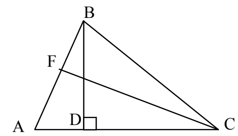
2. $BO = (1/2)AC = 5$ (см) $\Rightarrow$ т.к. $S_{ABC}=S_{ACD}$, то $S_{ABCD}=5 \cdot 10=50$ см^2.



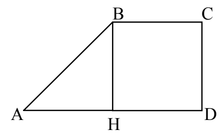
3. Т.к. $S_{ABD} = S_{BDC}$, то $AH_1 = CH_2 \Rightarrow$
$S_{ADP} = (1/2)DP \cdot AH_1 = (1/2)DP \cdot AH_2 = S_{DCP} = S$.



4. $h_1 = h_2$, $a_1 = \frac{a_2}{2}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{a_2}{2}}{\frac{1}{2}h_1 \cdot a_2} = \frac{1}{2}$.

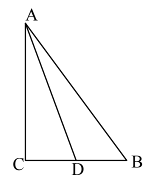


5. $\Delta BDA \sim \Delta AFC$ (т.к. $\angle A$ — общий) $\Rightarrow$
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{FC} \Rightarrow AB = \frac{BD \cdot AC}{FC} = 6.$



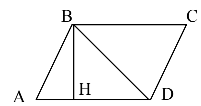
6. $BH = CD = 6 = AH$ (т.к. $\angle A$=45°) $\Rightarrow$
$S = \frac{1}{2}(2+2+6) \cdot 6 = 30.$

7. Т.к. $BH = HC$ и $AO = OC$, то HO — средняя линия и $AB = 2OH = 12$, $BH = \sqrt{6{,}5^2 - 6^2} = 2{,}5$.
$BC = 2BH = 5$, т.о. $S = 5 \cdot 12 = 60 = a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{15}$.



8. По теореме Пифагора: $DB = \sqrt{a^2 - m^2} - \sqrt{b^2 - m^2}$.

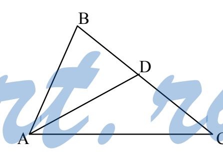
9. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 2$, т.к. $\angle D$=180°– 60°=120°$\Rightarrow$
$\angle BDA$=60°, т.о. $AB = AD = BD = 2$.



10. Этот треугольник прямоугольный, т.к. $8^2 + 15^2 = 17^2$, т.о. $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60$.

МД-3

В-1



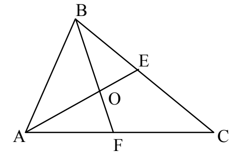
1. По свойству биссектрисы: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$
$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$. Высота у ΔBDA и ΔADC одна и та же, т.о.$S_{BDA} : S_{ADC} = \frac{3}{5}$, т.о. $S_{ADC} = \frac{5}{3} \cdot 9 = 15$.

2. $\Delta ABC \sim \Delta MPL$ (по 3-м углам) $k = \frac{2}{3}$, т.о. $\frac{AC}{ML} = \frac{2}{3} \Rightarrow ML = 15$ (см).

3. $\Delta EBF \sim \Delta ABC$ по 2-м сторонам и общему $\angle B \Rightarrow \angle BFE = \angle A = 40°$.

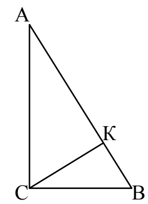
4. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по 3-м сторонам, $k = \frac{5}{2}$, $\begin{cases} S_1 = \frac{25}{4} S_2 \\ S_1 + S_2 = 58 \end{cases}$;

$\frac{29}{4}S_2 = 58 \Rightarrow \begin{cases} S_2 = 8 \\ S_1 = 50 \end{cases}$.

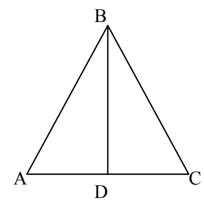


5. Т.к. $BO = \frac{2}{3}BF$, а высота ΔABO и ΔABF одна и та же, то $S_{ABO} = \frac{4}{9}S_{ABF} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}S_{ABC} =$ $= \frac{2}{9}\cdot 12 = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$ (см^2).

6. Т.к. DE — средняя линия, то $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, $k = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{DBE} = \frac{1}{4}\ S_{ABC} =$ $= 3$ см^2. $S_{ADEC} = 12 - 3 = 9$ (см^2).



7. $\Delta ACK \sim \Delta CKB$ ($\angle CAK = \angle KCB = 90º - \angle B$)$\Rightarrow$ $\frac{AC}{CB} = \frac{CK}{KB} = \frac{3}{4} = k \Rightarrow \frac{S_{AKC}}{S_{CKB}} = k^2 = \frac{9}{16}$.



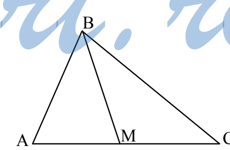
8. $AD = \frac{1}{2}AC = 5$, $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, т.о. $\sin\angle ABD = \cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{13}$.

9. По теореме синусов (пусть сторона равна a):

$$\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin\alpha};\ a = \frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

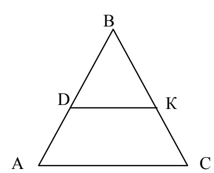
10. $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{n}{2}\sin 60°\cdot 4 = \frac{mn}{4}\sqrt{3}$ (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам).

В-2



1. Т.к. $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM : MC = 1:3$, а по свойству биссектрисы $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 12$ (см).

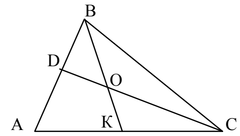
2. $\Delta EPF \sim \Delta CDK$ по 2-м углам и стороне - $DK : PF = 5 : 2 \Rightarrow PF = 4$ (см).



3. $\Delta DBK \sim \Delta ABC$ по 2-м сторонам и общему углу $\Rightarrow \angle BCA = \angle BDK = 50°$.

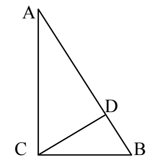
4. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, т.о.:

$$\begin{cases} AC : A_1C_1 = 3:4 \\ AC + A_1C_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{4}A_1C_1 = 14 \Rightarrow A_1C_1 = 8 \text{ (см)}, \ AC = 6 \text{ (см)}.$$



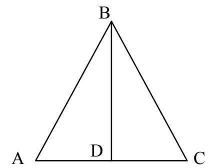
5. $S_{ABC} = 2S_{BKC} = 2\cdot 3S_{COK} = 6\cdot 30 = 180$ (см^2).

6. Т.к EF — средняя линия$\Rightarrow\Delta EFA\sim\Delta ABC$, $k = \frac{1}{2}$, т.о. $S_{ABC} = 4S_{EFA}\Rightarrow S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{ABC} = 9 \Rightarrow$ $S_{ABC} = 12$ (см^2).



7. $\Delta ADC\sim\Delta CDB$ ($\angle B = \angle ACD$).

$k = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{5}{6}$.



8. $AD = {}^1\!/_2\, AC = 24$. По теореме Пифагора: $BD = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$, т.о. $\cos ABD = \sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{7}{25}$.

9. По теореме синусов (пусть d — диагональ) $\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin{}^{\alpha}\!/_2} \Rightarrow d = a\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}$.

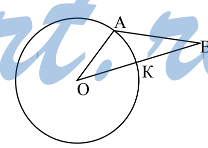
10. Т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам, то:

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cdot\sin 45°\cdot 4 = \frac{\sqrt{2}d_1d_2}{4}$.

МД-4

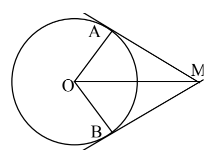
В-1

1. $\angle A = 30° \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$, по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{12-3} = 3 > 2{,}7$ $\Rightarrow$ нет общих точек.

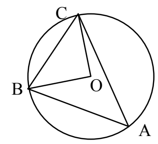


2. По теореме Пифагора: $OB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см, $OK = 5$ см $\Rightarrow KB = 13 - 5 = 8$ (см).

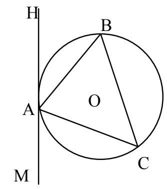
3. Т.к. центр описанной окружности лежит на биссектрисе, то $\angle OMA = 30° \Rightarrow OM = 4\sqrt{3}$, $AM = \sqrt{48-12} = 6$, т.к. $\angle OMA = 30° \Rightarrow$ $AB = \frac{1}{2}AM\cdot 2 = AM = 6$.



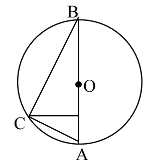
4. $\angle BOC = 2\angle A$ (как центральный) $\Rightarrow$ $\angle BOC = 90° \Rightarrow S_{BOC} = \frac{1}{2}a^2$.



5. $\angle HAB = \angle C = 20° \Rightarrow$
$\angle MAB = 180° - \angle HAB = 160°$.



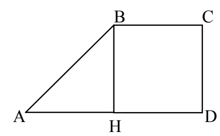
6. $CB \perp CA$ (свойство треугольника, построенного на диаметре). По теореме Пифагора: $CA = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$, $\cos A = \dfrac{KA}{CA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{CA}{AB} \Rightarrow AB = 10$ $\Rightarrow BK = 8$.



7. Гипотенуза равна $\sqrt{5^2+12^2} = 13$, $S = \dfrac{1}{2}Pr \Rightarrow$

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12}{5+12+13} = \frac{60}{30} = 2.$$

8. $BH = CD = 10$ (см), $AB = 20$ (см),
$AH = \sqrt{20^2-10^2} = 10\sqrt{3}$ (см). Т.к. можно вписать окружность $\Rightarrow BC + BC + 10\sqrt{3} = 30$ (см). Откуда $BC = 15 - 5\sqrt{3}$ см $\Rightarrow P = 30 - 10\sqrt{3} + 30 + 10\sqrt{3} = 60$ (см).

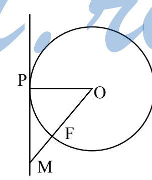


9. По теореме синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

10. Т.к. можно описать окружность $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ и $\angle A = \angle D = 40° \Rightarrow \angle C = \angle B = 140°$ (т.к. трапеция должна быть равнобокой).

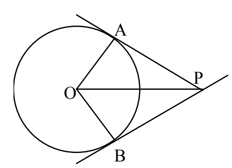
В-2

1. $\mathrm{tg}30° = \dfrac{CB}{2\sqrt{3}} \Rightarrow CB = 2$, $\sin 30° = \dfrac{CB}{AB}$, $AB = 4 \Rightarrow$ окружность имеет с AC одну общую точку.



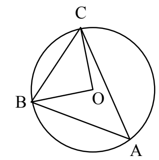
2. Т.к. $OF = 8$ (см), то $OM = 8 + 9 = 17$ (см) $\Rightarrow$
$MP = \sqrt{17^2-8^2} = 15$ (см).

3. Т.к. $AP=PB$ (св-во касательной), то $\sin 45° = \sin APO = \dfrac{\sqrt{5}}{2} : AP \Rightarrow AP = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$
$\Rightarrow \cos 45° = \dfrac{AP}{OP} \Rightarrow OP = \sqrt{5}$.

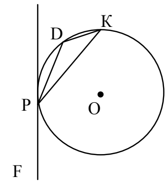


4. $\angle BOC = 2\angle A = 60°$ (как центральный), а т.к. $BO = OC$, то ΔCBO — равносторонний $\Rightarrow$

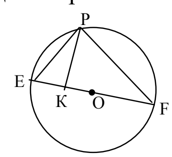
$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.



5. По свойству хорды и касательной:
$\angle PDK = \angle FPK = 160°$.

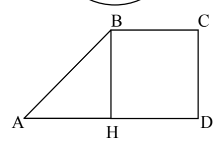


6. По свойству треугольника, построенного как на диаметре $EP \perp PF$,
$\mathrm{tg}F = \frac{PK}{9}$, $\mathrm{ctg}F = \frac{PK}{4} \Rightarrow \frac{9}{PK} = \frac{PK}{4} \Rightarrow PK = 6$.



7. $S = \frac{1}{2}Pr \Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{12\cdot\sqrt{13^2-12^2}}{50} = \frac{6}{5}$.

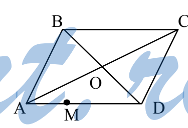
8. Т.к. $ABCD$ описана около окружности $\Rightarrow$ $AB+CD = BC + AD = \frac{P}{2} = 12$ $\Rightarrow AB + CD = 12$, но $2CD = AB \Rightarrow CD = 4$, $AB = 8$.



9. По теореме синусов: $\frac{b}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2\sin\beta}$.

10. Если вокруг трапеции описать окружность, то $\angle A = \angle C$,
$\angle C = \angle B = 160° \Rightarrow \angle A = \angle D = 20°$.

МД-5



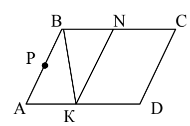
В-1

1. 1) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MD}$; 2) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$.

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = 0$.

3. $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EF}$.

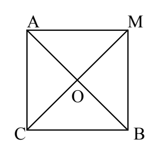
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}) = k(\overrightarrow{DA})$ верно при $k = -1$.



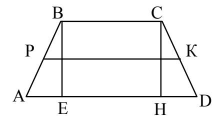
5. $3\vec{a} + 5\vec{b} = x\vec{a} + (2y+1)\vec{b}$, $\begin{cases} x = 3 \\ 2y+1 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

6. $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BA} = (1/3)\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BP}$.

7. Достроим ΔABC до прямоугольника, отсюда видно, что $CM = AB = 10$.



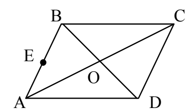
8. $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$.



9. $\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA})\dfrac{1}{2}$.

10. Т.к. KM — средняя линия, то $AE = HD = 2KP$ $\Rightarrow$ т.к. $\angle A = 30° \Rightarrow AB = 2BE \Rightarrow AD + BC = 2PK =$ $= AB + CD = 2AB$; $2AB = 24$, $AB = 12 \Rightarrow BE = 6 \Rightarrow$ $r = \dfrac{BE}{2} = 3$.

В-2

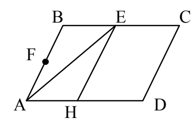


1. 1) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

2. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FC} = 0$.

3. $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PM}$.

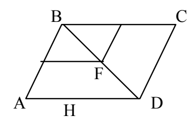
4. $\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{PC} = k(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{CP}$, верно при $k = -1$.



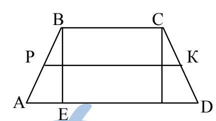
5. $(2x-6)\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{a} + (y-3)\vec{b}$, $\begin{cases} 2x-6=2 \\ y-3=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$.

6. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AF} + (2/3)\overrightarrow{AD}$.

7. $\overrightarrow{BF} = (1/2)\overrightarrow{BA} + (1/2)\overrightarrow{BC} \Rightarrow BF = (1/2)BD = 14$.



8. $\overrightarrow{OM} = -1\left(\vec{m} + \dfrac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right) = -\vec{m} - \dfrac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$.



9. $\overrightarrow{PK} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB})$.

10. $BE = 2r = 12 \sim AB = CD = 24$,

$AD + BC = AB + CD = 48$. $PK = \dfrac{1}{2}(AP + BC) = 24$.