В.Е. Бачурин

Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре за 9 класс

к пособию «Дидактические материалы по алгебре для 9 класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.М. Короткова. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2003».

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1.

С-1.

1. 1) $f(x)=12x-5$; $f(2)=12\cdot 2-5=19$;
$f(0)=12\cdot 0-5=-5$; $f(-1)=12\cdot(-1)-5=-17$;
2) $f(x)=x^2-8x$; $f(10)=10^2-8\cdot 10=20$;
$f(-2)=(-2)^2-8\cdot(-2)=20$; $f(0)=0^2-80=0$;

3) $g(x)=\frac{x-5}{x+3}$; $g(-2)=\frac{-2-5}{-2+3}=-7$; $g(2)=\frac{2-5}{2+3}=-0{,}6$; $g(0)=\frac{0-5}{0+3}=-\frac{5}{3}$.

2. 1) $g(x)=8-3x$; **а)** $8-3x=5$, $3x=3$, $x=1$; **б)** $8-3x=11$, $3x=-3$, $x=-1$;

в) $8-3x=0$; $x=\frac{8}{3}$.

2) $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$; **а)** $-\frac{1}{3}x+2=1$, $-\frac{1}{3}x=-1$, $x=3$;

б) $-\frac{1}{3}x+2=4$, $-\frac{1}{3}x=2$, $x=-6$; **в)** $-\frac{1}{3}x+2=0$, $x=6$.

3. 1) а) $f(x)=19-2x$; $D(f)=R$; **б)** $g(x)=\frac{40}{x}$; $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

в) $\varphi(x)=x^2-4$; $D(\varphi)=R$; **г)** $y=\sqrt{x}$; $D(y)=[0;+\infty]$;

2) а) $g(x)=8-x^2$; $D(g)=R$; **б)** $f(x)=-\frac{5}{x}$; $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

в) $\varphi(x)=x-2$; $D(\varphi)=R$; **г)** $y=\frac{8}{x+2}$; $x+2\neq 0$; $x\neq-2$; $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

4. а) $y=37x+1$; $E(y)=R$; **б)** $y=-23$; $E(y)=-23$; **в)** $y=\frac{19}{8}$;
$E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **г)** $y=\sqrt{x}$; $E(y)=[0;+\infty]$; **д)** $y=|x|$; $E(y)=[0;+\infty]$.

5. а) $f(x)=\frac{5x^2}{x^2+1}$; $f(2)+f(-2)=2f(2)=2\cdot\frac{5\cdot 4}{4+1}=8$;

б) $g(x)=\frac{2x^3-5x}{10}$; $g(3)+g(-3)=g(3)-g(3)=0$.

6. $f(x)=kx+b$; $\begin{cases}7=2k+b\\12=3k+b\end{cases}$; $\begin{array}{l}7-2k=12-3k\\k=5\\b=7-2\cdot 5=-3\end{array}$

7. а) $f(x)=\frac{2}{x-2}+\frac{101}{x-3}$; **б)** $f(x)=\sqrt{x-8}$.

С-2

1.

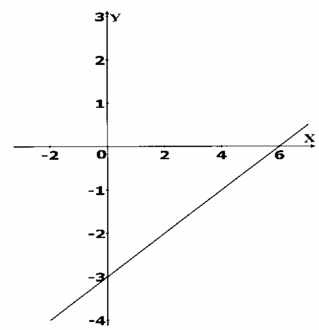
1) а) $f(-3)=-2$; **б)** $f(-2)=2$; **в)** $f(0)=1$; **г)** $f(3)=0$; **2) а)** $f(x)=2$; $x_1=-2$; $x_2=-0{,}5$; $x_3=3{,}5$; **б)** $f(x)=0$; $x_1=-2{,}5$; $x_2=0{,}5$; $x_3=3$; **в)** $f(x)=-2$; $x=-3$; **3)** $f_{\max}=3$, $f_{\min}=-2$; **4)** $E(f)=[-2;\ 3]$.

2.

1)

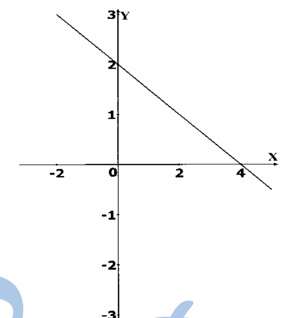
а) $y=0{,}5x-3$;

x	0	6
y	–3	0



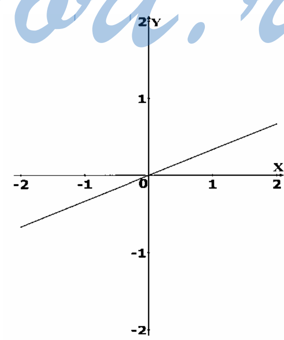
б) $y=-0{,}5x+2$;

x	0	4
y	2	0



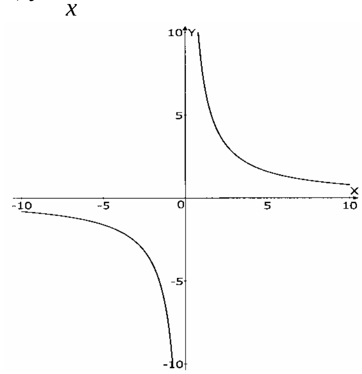
в) $y=\dfrac{x}{3}$;

x	0	3
y	0	1

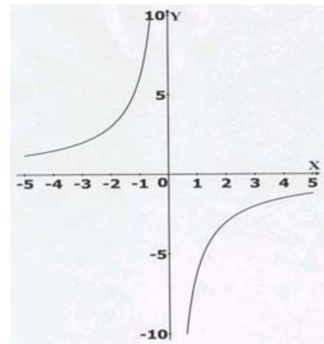


2)

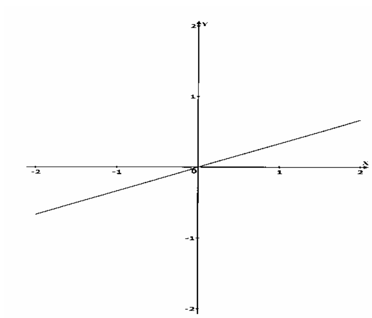
а) $y=\dfrac{8}{x}$;



б) $y=-\dfrac{6}{x}$;

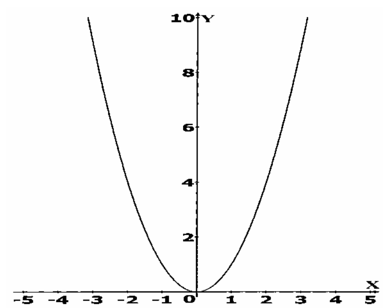


в) $y=\dfrac{x}{3}$;

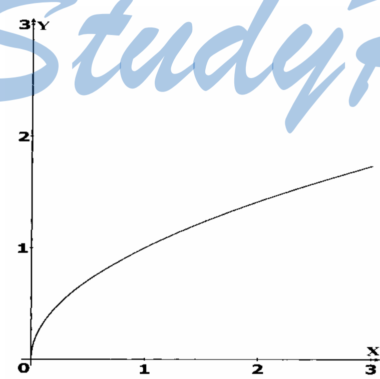


3)

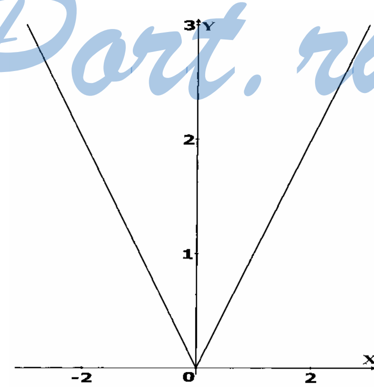
а) $y=x^2$;



б) $y=\sqrt{x}$; $x \geq 0$;



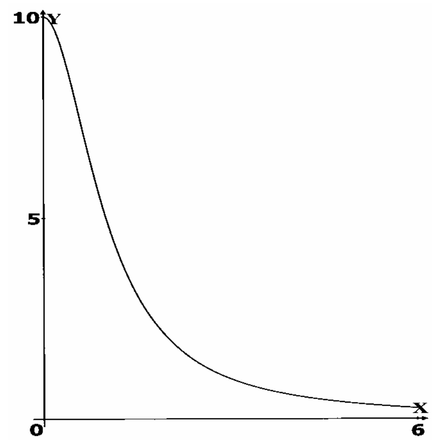
в) $y=|x|$.



3.

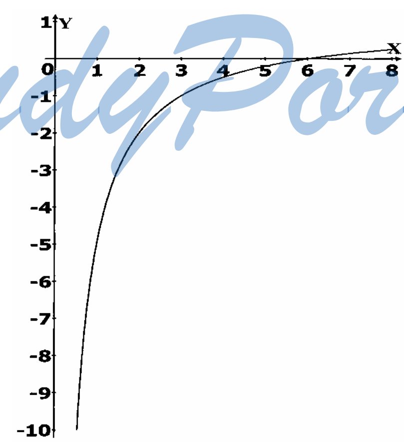
а) $y = \dfrac{10}{x^2+1}$, $0 \le x \le 6$;

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	5	2	1	$\dfrac{10}{17}$	$\dfrac{10}{26}$	$\dfrac{10}{37}$

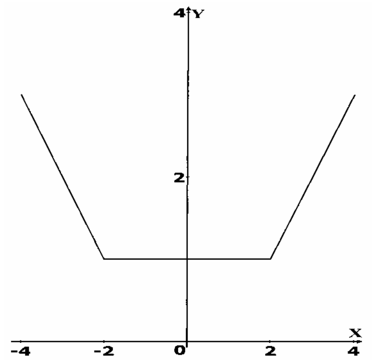


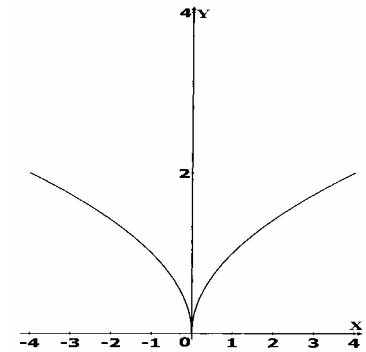
б) $y = \dfrac{x-6}{x} = 1 - \dfrac{6}{x}$, $1 \le x \le 6$.

x	1	2	3	4	5	6
y	–5	–2	–1	–0,5	–0,2	0



4. а) $y=\begin{cases} -x-1, & x<-2 \\ 1, & -2\le x\le 2 \\ x-1, & x>2 \end{cases}$; **б)** $y=\sqrt{|x|}=\begin{cases} \sqrt{x} & x\ge 0 \\ \sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$.

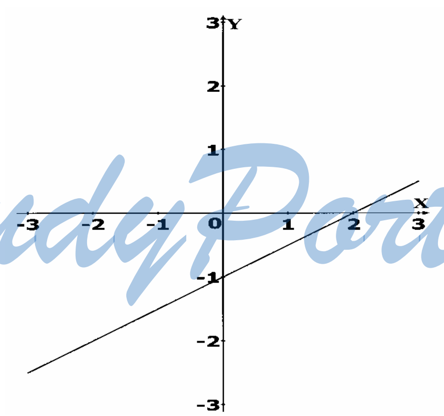




5. $f(x)=\begin{cases} -x, & -3\le x\le 1 \\ 1, & -1<x\le 1 \\ -x+2, & 1<x\le 4 \end{cases}$.

6. $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{2x^2-8}=\dfrac{x^2(x-2)-4(x-2)}{2(x^2-4)}=\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{2(x^2-4)}=\dfrac{x}{2}-1$;

x^2–4 ≠ 0, т.к. знаменатель $x \ne \pm 2$.



7. 1) 1 ч со скоростью, равной 4 км/ч; **2)** 5–1=4 (ч);

3) 7–5=2 (ч) скорость равна $\dfrac{4}{2}$=2(км/ч); **4)** 4 км; 4 км; 2 км;

5) шоссе находится на расстоянии 2 км от дома, значит, от озера до шоссе он шел 1 ч.

8. 1) мотоциклист на 2 ч; **2)** 5 ч; 1,5 ч; **3)** $\frac{75}{5}$=15 (км/ч); $\frac{75}{1,5}$=50 (км/ч) **4)** мотоциклист на 1,5 ч; **5)** через 1 ч; **6)** 75–52,5=22,5 (км).

С-3

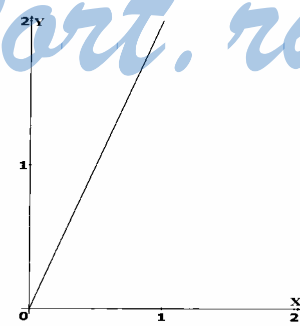
1. 1) а) x_1=–2,5, x_2=1; **б)** $f(x)>0$ при $x\in[-3;-2,5)\cup(1;3]$; $f(x)<0$ при $x\in(-2,5;\ 1)$; **2)** $f(x)$ возрастает при $x\in[-0,25;\ 2]$; $f(x)$ убывает при $x\in[-3;-0,25]$ и $[2;\ 3]$; **3)** $x_{max}=2$, $x_{min}=-0,25$; **4)** $E(f)=[-0,25;\ 2]$.

2. 1) а) $y=28x+35$; $D(y)=R$, $E(y)=R$, $y>0$ при $x>-\frac{35}{28}$, $y<0$ при $x<-\frac{35}{28}$, $y=0$ при $x=-\frac{35}{28}$, $f(x)$ возрастает на R; **б)** $y=-0,38x-19$; $D(y)=R$, $E(y)=R$; $y>0$ при $x<-\frac{19}{0,38}=-50$, $y<0$ при $x>-50$; $y=0$ при $x=-50$, $f(x)$ убывает на R; **в)** $y=38$; $D(y)=R$, $E(y)=38$, $y>0$ на R;

2) а) $y=\frac{25}{x}$; $D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$; $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$, $f(x)$ убывает на $D(y)$; **б)** $y=-\frac{56}{x}$; $D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$; $y>0$ при $x<0$, $y<0$ при $x>0$, $f(x)$ возрастает на $D(y)$.

3. 1) а) $y=\frac{1}{3}x-15$, $\frac{1}{3}x=15$, $x=45$; **б)** $y=-0,2x+46$, $-0,2x=-46$, $x=230$;
в) $y=-24$ нет нулей функции;
2) а) $y=7x(x+4)$, $x_1=0$, $x_2=-4$; **б)** $y=9(x^2+5)$ нет нулей функции;
в) $y=x(x+1)(x-2)$; $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=2$;
3) а) $y=\sqrt{x+2}$; $x=-2$; **б)** $y=\sqrt{x^2-1}$; $x_1=1$, $x_2=-1$;
в) $y=\sqrt{x^2+1}$ нет нулей функции.

4. $f(x)=x+|x|$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x, & x>0\end{cases}$;

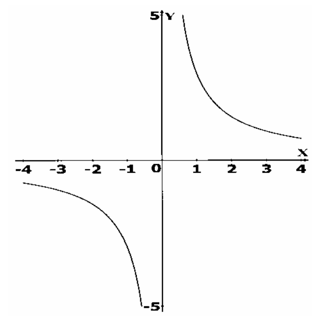


Свойства: $D(f)=R$, $E(f)=[0;+\infty)$.
Нули функции: $x\le0$; $f(x)>0$ при $x>0$; $f(x)$ возрастает при $x\ge0$; $f_{min}=f(0)=0$.

5. $D(g)=R$, $E(g)=[-4;\ 4]$; $g(x) > 0$ при $x > 0$, $g(x) < 0$ при $x < 0$, $g(x)=0$ при $x=0$; $g(x)$ возрастает при $x \in [-2;\ 2]$; $g(x)$ убывает при $x \in (-\infty;-2]$ и $[2;+\infty)$.

С-4

1.



$y=\frac{3}{x}$; $D(y)=(-\infty;\ 0)\ \cup\ (0;+\infty)$; **а)** $y(-4)=-\frac{3}{4}$, $y(-2)=-\frac{3}{2}$, $y(2)=\frac{3}{2}$, $y(4)=\frac{3}{4}$; **б)** $-3=\frac{3}{x}$, $x=-1$; $-2=\frac{3}{x}$, $x=-\frac{3}{2}$; $2=\frac{3}{x}$, $x=\frac{3}{2}$; $3=\frac{3}{x}$, $x=1$;
в) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$.

2. $y=\frac{126}{x}$; **а)** $21=\frac{126}{6}$ –верно, значит, точка A принадлежит графику;

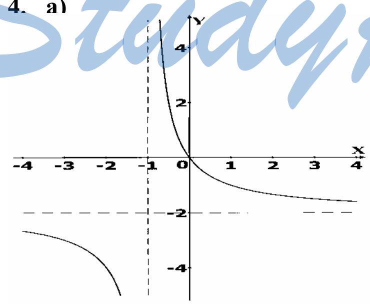
б) $-42=\frac{126}{-3}$ –верно, значит, точка B принадлежит графику;

в) $-126=\frac{126}{0}$ –неверно, значит, точка C не принадлежит графику;

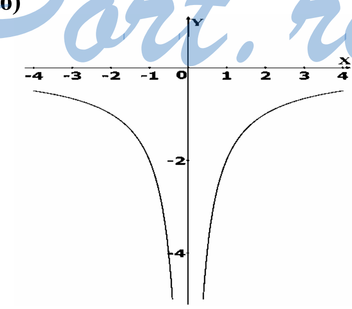
г) $14=\frac{126}{-9}$ –неверно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. $-\frac{4}{x}=-x+1$.

4. а)



б)



5. $y=\frac{k}{x}$, $-0{,}5=\frac{k}{-16}$, $k=8$ $y=\frac{8}{x}$.

С-5

1.

1) а) $x^2–5x+6=0$; $D=25–46=1$; $x_1=\frac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$; **б)** $–y^2–3y+4=0$; $y^2+3y–4=0$;

$D=9+4\cdot4=25$; $y_1=\frac{-3+5}{2}=1$, $y_2=–4$; **в)** $7a^2–21a+14=0$; $a^2–3a+2=0$;

$D=9–4\cdot2=1$; $a_1=\frac{3+1}{2}=2$, $a_2=1$; **г)** $3b^2–12=0$; $b^2–4=0$; $b_{1,2}=\pm2$;

2) а) $2y^2–y–6=0$; $D=1+4\cdot2\cdot6=49$; $y_1=\frac{1+7}{4}=2$, $y_2=–\frac{3}{2}$;

б) $6a^2+5a+1=0$; $D=25–4\cdot6=1$; $a_1=\frac{-5+1}{12}=–\frac{1}{3}$, $a_2=–\frac{1}{2}$;

в) $0{,}3x^2+0{,}1x=0$; $3x^2+x=0$; $x(3x+1)=0$; $x_1=0$, $x_2=–\frac{1}{3}$;

г) $c^2–3=0$; $c_{1,2}=\pm\sqrt{3}$;

3) а) $0{,}5x^2–x–0{,}5=0$; $x^2–2x–1=0$; $D=4+4=8$; $x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$;

б) $–50a^2+5a+1=0$; $50a^2–5a–1=0$; $D=25+4\cdot50=225$;

$a_1=\frac{5+15}{100}=0{,}2$, $a_2=–0{,}1$; **в)** $36b^2+12b–1=0$; $D=144+4\cdot36=2\cdot144$;

$b_{1,2}=\frac{-12\pm12\sqrt{2}}{2\cdot36}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{6}$.

2. 1) а) $x^2–6x+11=x^2–2\cdot3x+9+2=(x–3)^2+2$;

б) $2y^2–4y–1=2(y^2–2y–\frac{1}{2})=2(y^2–2y+1–\frac{3}{2})=2((y–1)^2–\frac{3}{2})=$
$=2(y–1)^2–3$; **в)** $a^2–2a=a^2–2a+1–1=(a–1)^2–1$;

2) а) $–y^2+4y+1=–(y^2–4y–1)=–(y^2–4y+4–5)=–(y–2)^2+5$;

б) $\frac{1}{3}x^2–2x+5=\frac{1}{3}(x^2–6x+15)=\frac{1}{3}(x^2–6x+9+6)=\frac{1}{3}(x–3)^2+2$.

3. а) $y^2–4y+7=y^2–4y+4+3=(y–2)^2+3>0$;
б) $–y^2+6y–12=–(y^2–6y+12)=–(y^2–6y+9+3)=–(y–3)^2–3<0$.

4. а) $a^2–10a+27$; $a_0=\frac{10}{2}=5$; **б)** $–a^2–6a–15$; $a_0=\frac{6}{-2}=–3$.

5. $(3+a)$ см и $(5–a)$ см — новые стороны;
$(3+a)(5–a)$ см^2 — площадь полученного прямоугольника;

$(3+a)(5–a)=–a^2+2a+15$; $a_0=\frac{-2}{-2}=1$.

Ответ: 1.

С-6

1. 1) а) $x^2-7x+12=0$; $D=49-4\cdot12=1$; $x_1=\frac{7+1}{2}=4$; $x_2=3$; $x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$;

б) $5x^2-5x-10=0$; $x^2-x-2=0$; $D=1+4\cdot2=9$;

$x_1=\frac{1+3}{2}=2$; $x_2=-1$; $5x^2-5x-10=5(x-2)(x+1)$;

в) $4x^2-144=(2x-12)(2x+12)$; **г)** $10x^2+29x-30=0$; $D=841+40\cdot30$;

2) а) $x^2-2x-63=x^2-2x+1-64=(x-1)^2-8^2=(x-1-8)(x-1+8)=(x-9)(x+7)$;

б) $6x^2+5x-4=0$; $D=25+4\cdot6\cdot4=121$; $x_1=\frac{-5+11}{12}$; $x_2=-\frac{3}{2}$;

$6x^2+5x-4=6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$; **в)** $17x^2-425=17(x^2-25)=17(x-5)(x+5)$;

г) $5x^2-30x+35=0$; $x^2-6x+7=0$; $D=36-4\cdot7=2\cdot4$;

$x_{1,2}=\frac{6\pm2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$; $5x^2-30x+35=5(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$.

2. 1) а) $x^2-3x+4=0$; $D=9-4\cdot4<0$; **б)** $-2x^2+4x-7=0$; $2x^2-4x+7=0$; $D=16-4\cdot2\cdot7<0$; **2) а)** $x^2-10x+27=0$; $D=100-4\cdot27<0$; **б)** $-7x^2+6x-2=0$; $7x^2-6x+2=0$; $D=36-47\cdot2<0$; **в)** $x^2+1=0$; $D=-4<0$.

3. 1) а) $\frac{a^2-4}{7a+14}=\frac{(a-2)(a+2)}{7(a+2)}=\frac{a-2}{7}$; **б)** $\frac{b^2-b-6}{9b+18}=\frac{(b-3)(b+2)}{9(b+2)}=\frac{b-3}{9}$;

$b^2-b-6=0$; $D=1+4\cdot6=25$; $b_1=\frac{1+5}{2}=3$; $b_2=-2$;

в) $\frac{7+6c-c^2}{21-3c}=\frac{c^2-6c-7}{3c-21}=\frac{c^2-6c+9-16}{3(c-7)}=\frac{(c-3)^2-4^2}{3(c-7)}=$

$=\frac{(c-3-4)(c-3+4)}{3(c-7)}=\frac{(c-7)(c+1)}{3(c-7)}=\frac{c+1}{3}$;

2) а) $\frac{y^2-49}{y^2+5y-14}=\frac{(y-7)(y+7)}{(y-2)(y+7)}=\frac{y-7}{y-2}$;

$y^2+5y-14=0$; $D=25+4\cdot14=81$; $y_1=\frac{-5+9}{2}=2$, $y_2=-7$;

б) $\frac{x^3+x^2-72x}{9x-72}=\frac{x(x^2+x-72)}{9(x-8)}=\frac{x(x-8)(x+9)}{9(x-8)}=\frac{x(x+9)}{9}$;

$x^2+x-72=0$; $D=1+4\cdot72=289$; $x_1=\frac{-1+17}{2}=8$, $x_2=-9$;

в) $\frac{5a-a^2}{5+34a-7a^2}=\frac{a^2-5a}{7a^2-34a-5}=\frac{a(a-5)}{7(a-5)\left(a+\frac{1}{7}\right)}=\frac{a}{7a+1}$;

$7a^2-34a-5=0$; $D=1156+4\cdot7\cdot5=1296$; $a_1=\frac{34+36}{14}=5$; $a_2=-\frac{1}{7}$.

4. **1)** $\frac{y^2-11y-26}{9y+18}=\frac{(y-13)(y+2)}{9(y+2)}=\frac{y-13}{9}=f(y)$;

$y^2-11y-26=0$; $D=121+4\cdot 26=225$; $y_1=\frac{11+15}{2}=13$, $y_2=-2$;

$f(-5)=\frac{-5-13}{9}=-2$; $f(31)=\frac{31-13}{9}=2$; $f(112)=\frac{112-13}{9}=9$;

2) $\frac{x^2-18x+80}{5x-50}=\frac{x^2-18x+81-1}{5(x-10)}=\frac{(x-9)^2-1}{5(x-10)}=$

$=\frac{(x-9-1)(x-9+1)}{5(x-10)}=\frac{(x-10)(x-8)}{5(x-10)}=\frac{x-8}{5}=f(x)$;

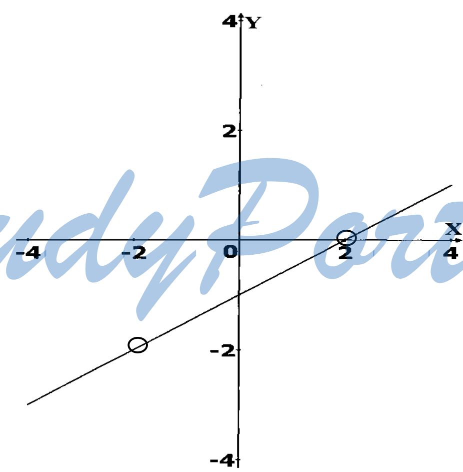
$f(-12)=\frac{-12-8}{5}=-4$; $f(8,5)=\frac{8,5-8}{5}=0,1$; $f(48)=\frac{48-8}{5}=8$.

5. $\frac{8a-3}{a+5}-\frac{40-27a}{a^2+2a-15}=\frac{8a-3}{a+5}+\frac{27a-40}{(a-3)(a+5)}=$

$=\frac{(8a-3)(a-3)+27a-40}{(a-3)(a+5)}=\frac{8a^2-27a+9+27a-40}{(a-3)(a+5)}=\frac{8a^2-31}{(a-3)(a+5)}$.

6. $y=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{2x^2-8}=\frac{x^2(x-2)-4(x-2)}{2(x^2-4)}=$

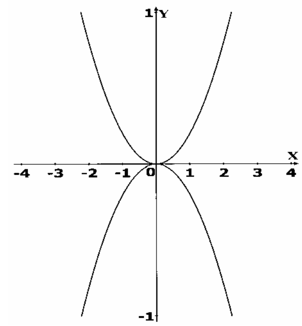
$=\frac{(x-2)(x^2-4)}{2(x^2-4)}=\frac{x-2}{2}$, $x\neq\pm 2$.



С-7

1. $f(x)=\frac{1}{5}x^2$;

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
$f(x)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	5



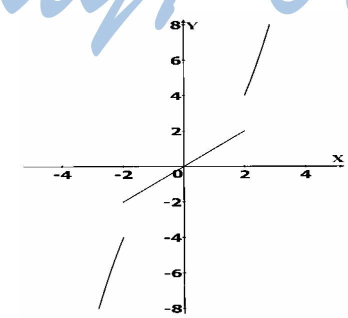
$f(-2{,}5)=f(2{,}5)=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$; $f(-3{,}5)=f(3{,}5)=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{20}$; $g(x)=-\frac{1}{5}x^2$;

$g(-2{,}5)=g(2{,}5)=-f(2{,}5)=-\frac{5}{4}$; $g(-3{,}5)=g(3{,}5)=-f(3{,}5)=-\frac{49}{20}$.

2. $y=2x^2$; **а)** $y=200$, $200=2x^2$, $x^2=100$, $x_{1,2}=\pm10$; (10, 200), (–10, 200);
б) $y=800$, $800=2x^2$, $x^2=400$, $x_{1,2}=\pm20$; (20, 800), (–20, 800); **в)** $y=50x$, $50x=2x^2$, $x_1=0$, $x_2=25$; (0, 0), (25, 1250); **г)** $y=-3200x$, $-3200x=2x^2$, $x_1=0$, $x_2=-1600$; (0, 0); (–1600, 5120000).

3. $y=-25x^2$; **а)** $A(-2;-100)$; $-100=-25(-2)^2$–верно, значит, принадлежит;
б) $B(2, 100)$; $100=-25\cdot2^2$–неверно, значит, не принадлежит;
в) $C(\frac{1}{5};-1)$; $-1=-25\cdot\frac{1}{5^2}$ –верно, значит, принадлежит.

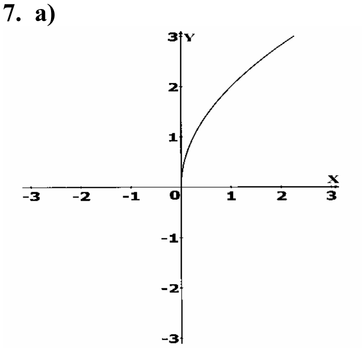
4.



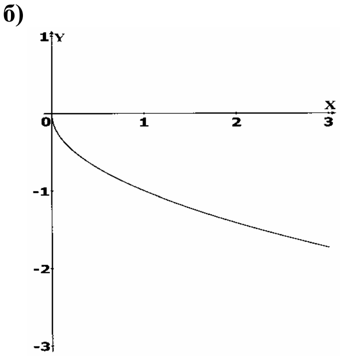
5. а) $y=\frac{1}{3}x^2$, $x \in [-3;\ 6]$; $y_{\min}=y(0)=0$; $y_{\max}=y(6)=\frac{1}{3}\cdot 6^2=12$; **б)** $y=-\frac{1}{4}x^2$, $x \in [-2;\ 8]$; $y_{\min}=y(8)=-\frac{1}{4}\cdot 8^2=-16$, $y_{\max}=y(0)=0$.

6. $h=\frac{9t^2}{2}$; $120=\frac{10\cdot t^2}{2}$; $12=\frac{t^2}{2}$; $t^2=24$ $t=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ (с)

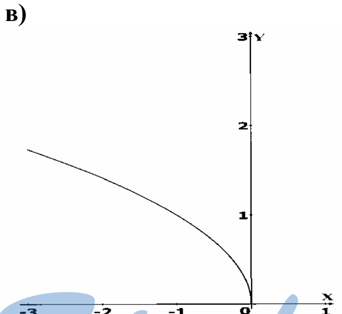
7. а)



б)

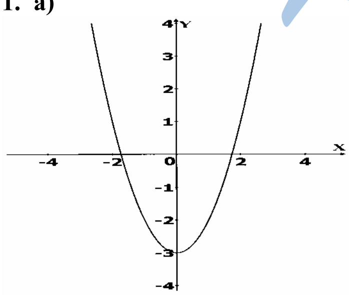


в)

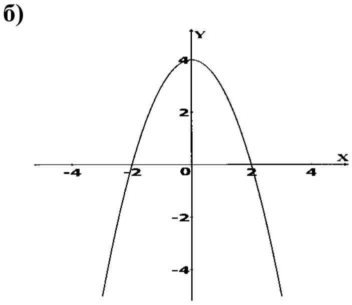


С-8

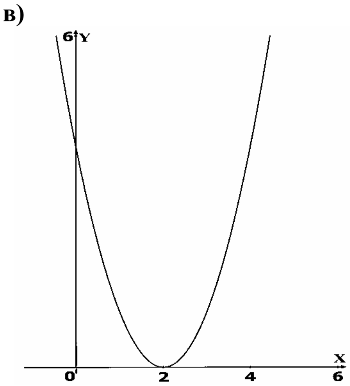
1. а)



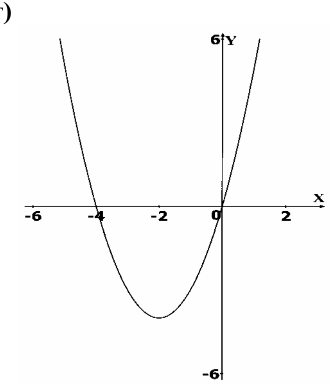
б)



в)



г)



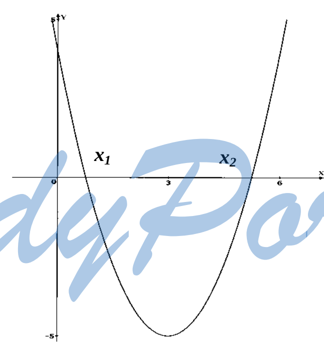
2.

а) $f(x)=x^2-6x+4$; $m=\dfrac{6}{2}=3$, $n=f(3)=9-18+4=-5$; $(3;-5)$;

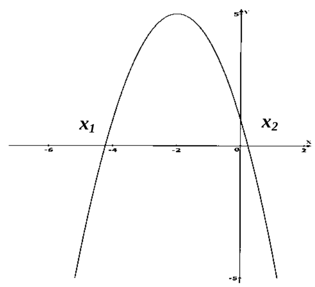
б) $f(x)=-x^2-4x+1$; $m=\dfrac{4}{-2}=-2$, $n=f(-2)=-4+8+1=5$; $(-2;\ 5)$;

в) $f(x)=3x^2-12x+2$; $m=\dfrac{12}{2\cdot 3}=2$, $n=f(2)=3\cdot 4-24+2=-10$; $(2;-10)$.

3. $f(x)=x^2-6x+4$;



а) $x_1 \approx 0{,}7$ $x_2 \approx 5{,}2$;
$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;+\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (x_1;\ x_2)$;
б) $f(x)$ возрастает при $x \in [3;+\infty)$, убывает при $x \in (-\infty;\ 3]$; $f_{\min}=-5$.
4. $f(x)=-x^2-4x+1$;



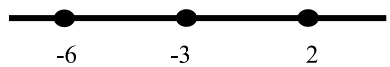
а) $x_1 \approx -4{,}2$; $x_2 \approx 0{,}2$; $f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$; **б)** $f(x)$ возрастает при $x \in [-\infty;-2)$, убывает при $x \in (-2;+\infty]$; $f_{max}=5$.

5. $y=x^2+6x+5$, $x \in [-6; 2]$;

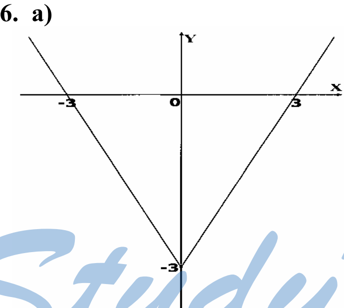
$m=-\dfrac{6}{2}=-3$, $n=f(-3)=9-18+5=-4$; $(-3;-4)$;

$y(2)=4+12+5=21$;

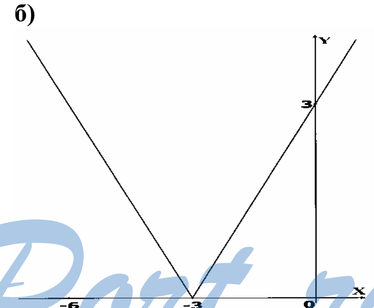
$E(y)=[-4; 21]$.



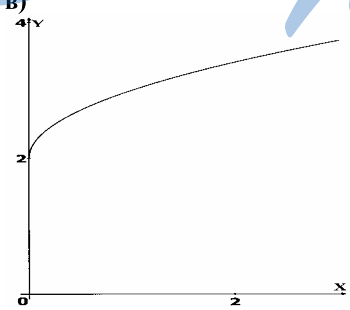
6. а)



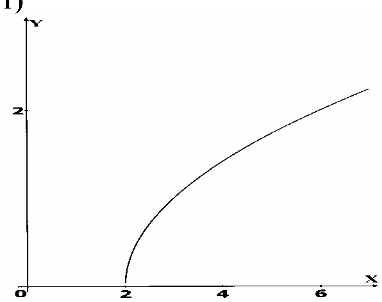
б)



в)

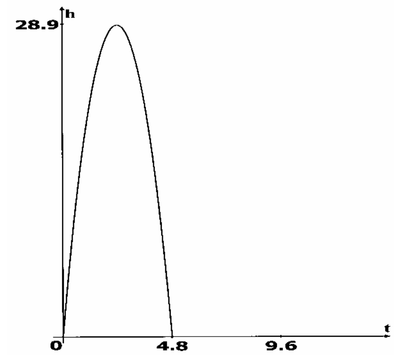


г)



7. $y=x^2+bx+c$; $M(5, 7)$; $5=m=-\dfrac{b}{2}$, $b=-10$; $7=n=f(5)=25-50+c=c-25$; $c=32$.

8. $h=24t-5t^2$;



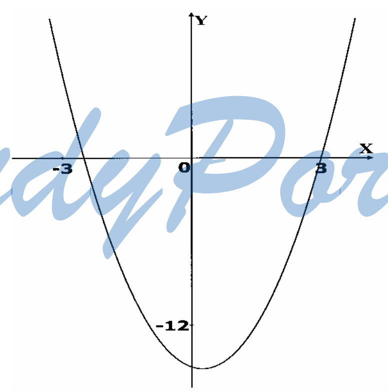
1) $h_0=28{,}8$; **2)** мяч поднимался вверх при $t \in [0; 2{,}4]$, опускался вниз при $t \in [2{,}4; 4{,}8]$; **3)** через 4,8 с.

С-9

1.
1) $y=2x^2-x-15$; **а)** вверх;

б) $2x^2-x-15=0$; $D=1+4 \cdot 2 \cdot 15=121$; $x_2=\dfrac{1+11}{4}=3$; $x_1=-2{,}5$;

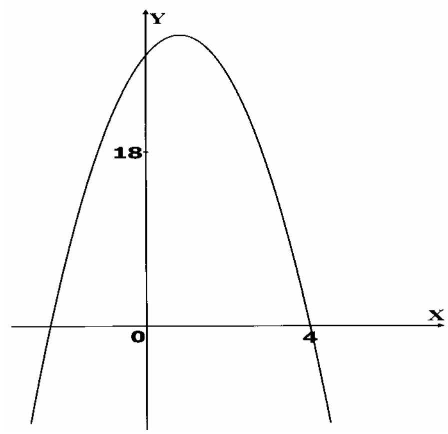
в)



г) $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$; $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;
2) $y=-3x^2+5x+28$; **а)** вниз;

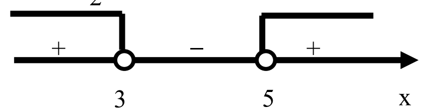
б) $3x^2-5x-28=0$; $D=25+12 \cdot 28=19^2$; $x_2=\dfrac{5+19}{6}=4$; $x_1=-\dfrac{7}{3}$;

в)



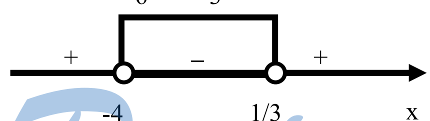
г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$.

2. а) $x^2-8x+15 > 0$; $D=64-60=4$; $x_1=\dfrac{8+2}{2}=5$; $x_2=3$.



Ответ: $(-\infty; 3) \cup (5;+\infty)$.

б) $3x^2+11x-4 < 0$; $D=121+12 \cdot 4=169$; $x_1=\dfrac{-11+3}{6}=\dfrac{1}{3}$; $x_2=-4$.

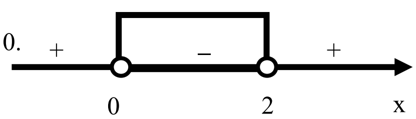


Ответ: $(-4; \dfrac{1}{3})$.

в) $x^2-9 > 0$ $(x-3)(x+3) > 0$

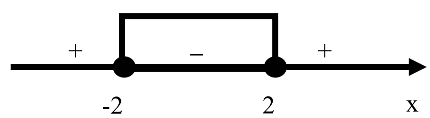
Ответ: $(-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

г) $2x-x^2 > 0$; $x^2-2x < 0$; $x(x-2) < 0$.



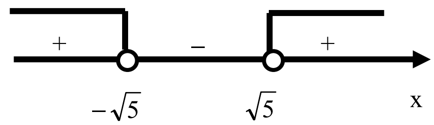
Ответ: $(0; 2)$.

3. а) $x^2 \leq 4$; $(x-2)(x+2) \leq 0$.



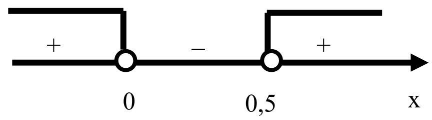
Ответ: $[-2; 2]$.

б) $x^2 > 5$, $x^2–5 > 0$; $(x–\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) > 0$.



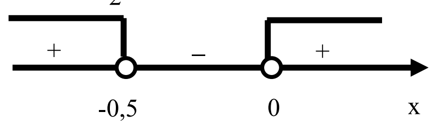
Ответ: $(–\infty;–\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};+\infty)$.

в) $2x^2 \geq x$; $x^2–\frac{x}{2} \geq 0$; $x(x–\frac{1}{2}) \geq 0$.



Ответ: $(–\infty; 0) \cup (0,5;+\infty)$

г) $–3x < 6x^2$; $-\frac{x}{2} < x^2$; $x^2+\frac{x}{2} > 0$; $x(x+\frac{1}{2}) > 0$.



Ответ: $(–\infty;–0,5) \cup (0;+\infty)$.

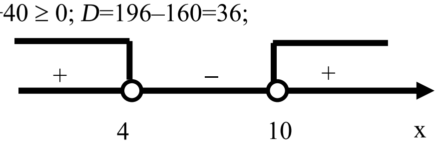
4.

а) $5a^2–2a+1 > 0$; $D=4–4 \cdot 5 < 0$; т.к. $b=5 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

б) $6a < a^2+10 > 0$; $a^2–6a+10 > 0$; $D=36–4 \cdot 10 < 0$;
т.к. $b=1 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

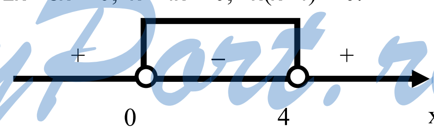
5. а) $y=\sqrt{x^2-14x+40}$; $x^2–14x+40 \geq 0$; $D=196–160=36$;

$x_1=\frac{14+6}{2}=10$; $x_2=4$.



Ответ: $(–\infty; 4] \cup [10;+\infty)$.

б) $y=\frac{9}{\sqrt{8x-2x^2}}$; $8x–2x^2 > 0$; $2x^2–8x < 0$; $x^2–4x < 0$; $x(x–4) < 0$.



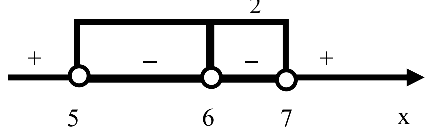
Ответ: $(0; 4)$.

6. $x^2–6x+c < 0$; **а)** $D=36–4c$; чтобы $(1; 5)$ был решением, нужно $x_1=1$, $x_2=5$, т.е. $1–6+c=0$; $c=5$.

б) Ответ: ни при каких c.

7. $\frac{x^2-12x+35}{(x-6)^2} < 0$; $x^2–12x+35=0$; $D=144–140=4$; $x_1=\frac{12+2}{2}=7$;

$x_2=5$; $\frac{(x-7)(x-5)}{(x-6)^2} < 0$.

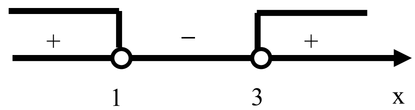


Ответ: $(5; 6) \cup (6; 7)$.

С-10

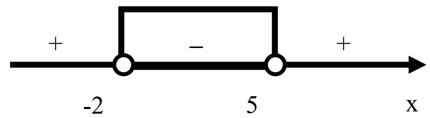
1.

1) **а)** $(x-1)(x-3) > 0$.



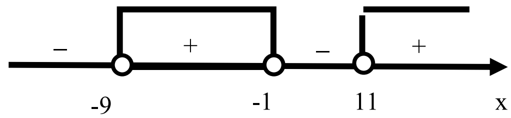
Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3;+\infty)$.

б) $(x+2)(x-5)$.



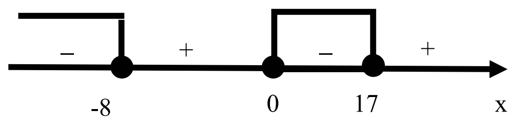
Ответ: $(-2; 5)$.

в) $(x+9)(x+1)(x-11) > 0$.



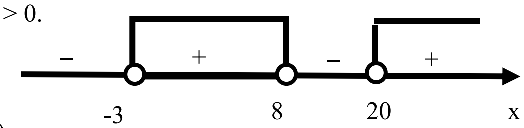
Ответ: $(-9;-1) \cup (11;+\infty)$.

г) $x(x+8)(x-17) \le 0$.



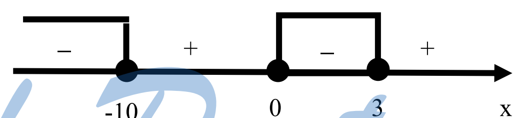
Ответ: $(-\infty;-8] \cup [0; 17]$.

2) **а)** $(x+3)(x-8)(x-20) > 0$.



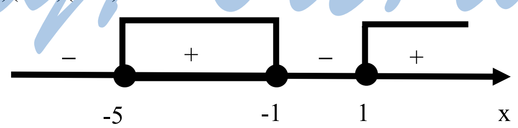
Ответ: $(-3; 8) \cup (20;+\infty)$.

б) $x(x+10)(x-3) \le 0$.



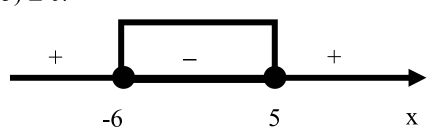
Ответ: $(-\infty;-10] \cup [0; 3)$.

в) $(x^2-1)(x+5) \ge 0$; $(x-1)(x+1)(x+5) \ge 0$.



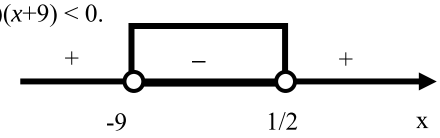
Ответ: $[-5;-1] \cup [1;+\infty)$.

г) $(x^2+1)(x+6)(x-5) \le 0$; $(x+6)(x-5) \le 0$.



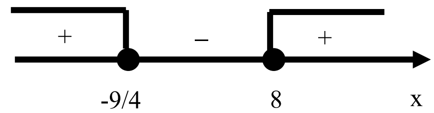
Ответ: $[-6; 5]$.

2. 1) а) $(2x-1)(x+9) < 0$; $(x-\frac{1}{2})(x+9) < 0$.



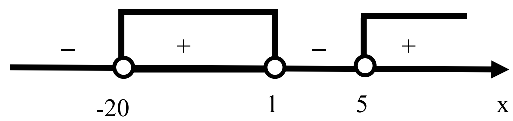
Ответ: $(-9;\ \frac{1}{2})$.

б) $(8-x)(4x+9) \le 0$; $(x-8)(x+\frac{9}{4}) \ge 0$.



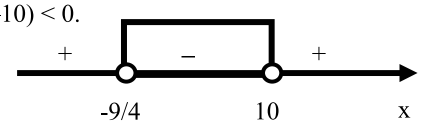
Ответ: $(-\infty;-\frac{9}{4}] \cup [8;+\infty)$.

в) $-(x-1)(5-x)(x+20) > 0$ $(x-1)(x-5)(x+20) > 0$.



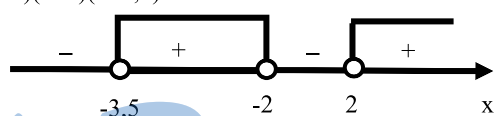
Ответ: $(-20;\ 1) \cup (5;+\infty)$.

2) а) $(4x+9)(10-x) > 0$; $(x+\frac{9}{4})(x-10) < 0$.



Ответ: $(-\frac{9}{4};\ 10)$.

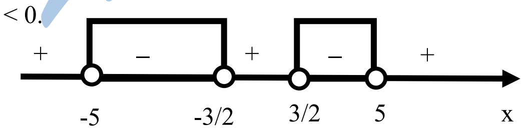
б) $(4-x^2)(10x+35) < 0$; $(x-2)(x+2)(x+3{,}5) > 0$.



Ответ: $(-3{,}5;-2) \cup (2;+\infty)$.

в) $(4x^2-9)(25-x^2)(3x^2+2) > 0$; $(x^2-\frac{9}{4})(x^2-25) < 0$;

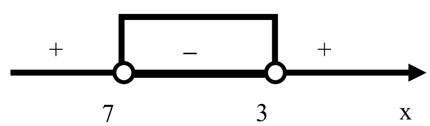
$(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})(x-5)(x+5) < 0$.



Ответ: $(-5;-\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2};\ 5)$.

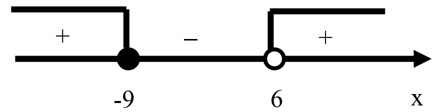
3.

1)   **а)** $\frac{x-3}{x+7} < 0$.



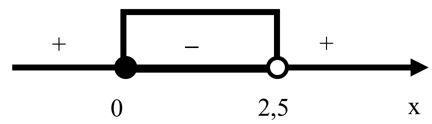
Ответ: $(-7;\ 3)$.

б) $\frac{x+9}{x-6} \geq 0$.



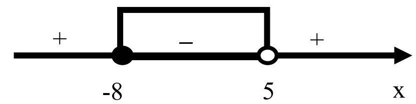
Ответ: (–∞;–9] ∪ [6;+∞).

в) $\frac{7x}{4x-10} \leq 0$; $\frac{x}{x-2{,}5} \leq 0$.



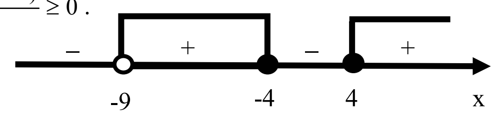
Ответ: [0; 2,5].

2) а) $\frac{2x-10}{x+8} < 0$; $\frac{x-5}{x+8} < 0$.



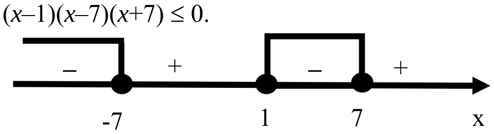
Ответ: (–8; 5).

б) $\frac{x^2-16}{x+9} \geq 0$; $\frac{(x-4)(x+4)}{x+9} \geq 0$.



Ответ: (–9;–4] ∞ [4;+∞).

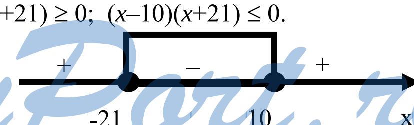
в) $\frac{(x-1)(x^2-49)}{x^2+8} \leq 0$; $(x–1)(x–7)(x+7) \leq 0$.



Ответ: (–∞;–7] ∪ [1; 7].

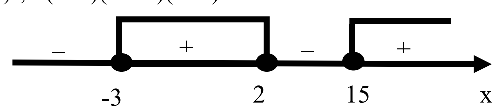
4.

а) $y=\sqrt{(10-x)(x+21)}$; $(10–x)(x+21) \geq 0$; $(x–10)(x+21) \leq 0$.



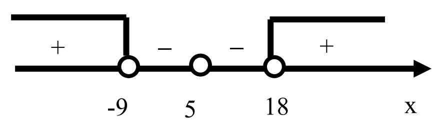
Ответ: [–21; 10].

б) $y=\sqrt{(x-2)(x-15)(x+3)}$; $(x–2)(x–15)(x+3) \geq 0$.



Ответ: [–3; 2] ∪ [15;+∞].

5. а) $(x+9)(x–5)^2(x–18) > 0$.

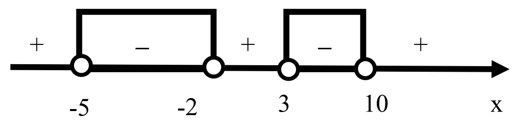


Ответ: (–∞;–9) ∪ (18;+∞).

б) $\frac{x^2-13x+30}{x^2+7x+10}<0$; $x^2–13x+30=0$; $D=169–4 \cdot 30=49$; $x_1=\frac{13+7}{2}=10$;

$x_2=3$; $x^2+7x+10=0$; $D=49–4 \cdot 10=9$; $x_1=\frac{-7+3}{2}=–2$; $x_2=–5$;

$\frac{(x-10)(x-3)}{(x+2)(x+5)}<0$.

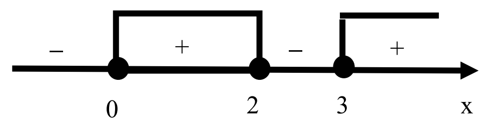


Ответ: $(–5;–2) \cup (3; 10)$.

в) $x^3–5x^2+6x \geq 0$; $x(x^2–5x+6) \geq 0$; $x^2–5x+6=0$;

$D=25–24=1$ $x_1=\frac{5+1}{2}=3$;

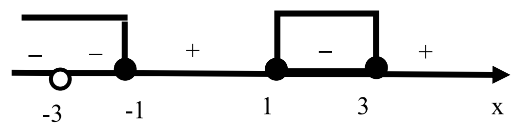
$x_2=2$; $x(x–2)(x–3) \geq 0$.



Ответ: $[0; 2] \cup [3;+\infty]$.

г) $\frac{x^4-10x^2+9}{4x+12}\leq 0$; $x^4–10x^2+9=0$; $D=100–4 \cdot 9=64$;

$x_1^2=\frac{10+8}{2}=9$; $x_2^2=1$; $\frac{(x^2-9)(x^2-1)}{x+3}\leq 0$; $\frac{(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)}{x+3}\leq 0$



Ответ: $(–\infty;–3) \cup (–3;–1] \cup [1; 3]$.

С-11

1. а) $x^5+3x^6–x^3+1=0$; $3x^6+x^5–x^3+1=0$ шестая степень;
б) $(x+4)(x–7)(x+8)=0$ третья степень; **в)** $x^2(x+4)–(x–2)(x^2+1)=3$;
$x^3+4x^2–(x^3–2x^2+x–2)–3=0$; $6x^2–x–1=0$ вторая степень;
г) $(x^3–2)(3x^2+1)–3(x^5–2)=4$; $3x^5–6x^2+x^3–2–3x^5+6–4=0$;
$x^3–6x^2=0$ третья степень;

2. а) $x^3–4x=0$ $x(x^2–4)=0$ $x(x–2)(x+2)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$;
б) $x^2(x+1)+(x+4)=4$ $x^2(x+1)+x=0$; $x_1=0$, $x(x+1)+1=0$ $x^2+x+1=0$ $D=1–4<0$
нет корней; **в)** $x^4–5x^2+4=0$; $D=25–4 \cdot 4=9$;

$x_1^2=\frac{5+3}{2}=4$; $x_2^2=1$; $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 1$.

3. 1) а) $(12x+1)(3x–1)–(6x+2)^2=10$; $36x^2+3x–12x–1–(36x^2+24x+4)–10=0$;

$–9x–1–24x–4–10=0$ $33x=–15$; $x=–\frac{15}{33}$; **б)** $(3x+7)(3x–7)–3x(3x+1)=5$;

$9x^2–49–9x^2–3x–5=0$; $3x=–54$; $x=–18$;

в) $\frac{6x-1}{4}-\frac{3x+1}{3}=\frac{1}{4}$; $18x-3-12x-4-3=0$; $6x=10$, $x=\frac{5}{3}$;

г) $\frac{x(2-x)}{2}+\frac{x(3+2x)}{4}=1$; $2x(2-x)+x(3+2x)-4=0$;

$4x-2x^2+3x+2x^2-4=0$; $7x-4=0$; $x=\frac{4}{7}$;

2) а) $(6x-1)(x+1)=20$; $6x^2+5x-21=0$; $D=25+4\cdot 6\cdot 21=529$;
$x_1=\frac{-5+23}{12}=\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{28}{12}=-\frac{7}{3}$; **б)** $(x-7)(x+7)-11x-30=(x+5)^2+(x-2)^2$;
$x^2-49-11x-30=x^2+10x+25+x^2-4x+4$; $x^2+17x+108=0$; $D=289-4\cdot 108<0$
нет корней; **в)** $\frac{x^2}{16}-\frac{x}{8}=\frac{x+1}{3}$; $\frac{x^2-2x}{16}=\frac{x+1}{3}$; $3x^2-6x-16x-16=0$;

$3x^2-22x-16=0$; $D=484+12\cdot 16=676$; $x_1=\frac{22+26}{6}=8$; $x_2=-\frac{2}{3}$;

2) $17-2x+\frac{x(3x+4)}{2}=54\frac{1}{2}$; $34-4x+3x^2+4x-109=0$; $3x^2=75$, $x^2=25$, $x_{1,2}=\pm 5$.

4. а) $x-13=0$; **б)** $(x-4)(x+11)=0$, $x^2+7x-44=0$; **в)** $(x-2)(x+2)(x-5)=0$;
$(x^2-4)(x-5)=0$; $x^3-4x-5x^2+20=0$; $x^3-5x^2-4x+20=0$.

5. а) $\frac{x(x-1)}{4}+\frac{(x-3)^2}{2}=\frac{(4-x)^2}{3}-\frac{1}{3}$; $3x(x-1)+6(x-3)^2=4(4-x)^2-4$;
$3x^2-3x+6(x^2-6x+9)=4(x^2-8x+16)-4$; $3x^2-3x+6x^2-36x+54-4x^2+32x-64+4=0$;
$5x^2-7x-6=0$; $D=49+4\cdot 5\cdot 6=169$; $x_1=\frac{7+13}{10}=2$; $x_2=-\frac{3}{5}$;

б) $x+1=\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{x(x+2)}{4}+\frac{x-1}{2}$; $4x+4=2(x^2-6x+9)+x^2+2x+2x-2$;
$2x^2-12x+18+x^2+4x-2-4x-4=0$; $3x^2-12x+12=0$; $x^2-4x+4=0$; $(x-2)^2=0$; $x=2$.

6. а) $x^6+6x^4+7x^2+8=0$; уравнение не имеет корней , т.к. $x^6+6x^4+7x^2+8>0$ при всех x. **б)** $12x^5+11x^3+10x-4=140$; верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля, а правая $140>0$);
в) $9x(x-1)-(3x+4)(3x-4)=51-9x$; $9x^2-9x-9x^2+16=51-9x$; $16=51$ — нет корней;
г) $7x^5+14x^4-21x^2-49x=13$; уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 7, а левая — нет.

С-12

1. а) $3(x-4)-5(x+2)=cx-6$; $3(6-4)-5(6+2)=6c-6$; $6-40=6c-6$; $6c=-34+6$;
$6c=-28$; $c=-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}$; **б)** $16x^2+2(b-4)x+(2-3b)=0$; $16\cdot 16+2(b-4)\cdot 4+2-3b=0$;

$256+8b-32+2-3b=0$; $5b=-226$; $b=-\frac{226}{5}$.

2. $bx–1=0$; $bx=1$; $x=\dfrac{1}{b}$; $b=\pm1$.

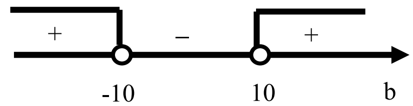
3. $5x–3a=2$, $x=\dfrac{2+3a}{5}$.

а) $\dfrac{2+3a}{5}>0$, $2+3a>0$, $a>-\dfrac{2}{3}$; **б)** $\dfrac{2+3a}{5}<0$, $a<-\dfrac{2}{3}$;

в) $\dfrac{2+3a}{5}>10$; $2+3a>50$; $3a>48$; $a>16$;

г) $\begin{cases}\dfrac{2+3a}{5}>1; \\ \dfrac{2+3a}{5}<2;\end{cases}$ $\begin{cases}2+3a>5; \\ 2+3a<10;\end{cases}$ $\begin{cases}3a>3; \\ 3a<8;\end{cases}$ $\begin{cases}a>1 \\ a<\dfrac{8}{3}\end{cases}$; $1<a<\dfrac{8}{3}$.

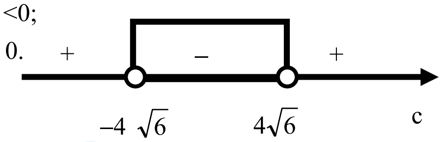
4. а) $4x^2+8x+b=0$; $D=64–4\cdot4b>0$; $64–16b>0$; $16b<64$; $b<4$;
б) $5x^2+bx+5=0$; $D=b^2–4\cdot5\cdot5>0$; $b^2–100>0$; $(b–10)(b+10)>0$;



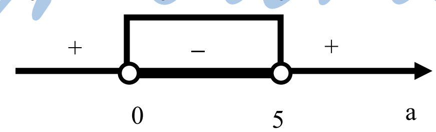
$b\in(–\infty;–10)\cup(10;+\infty)$.

5. а) $2x^2–6x+t=0$; $D=36–4\cdot2\cdot t=0$; $36=8t$; $t=\dfrac{36}{8}=4{,}5$;

б) $x^2+tx+4=0$; $D=t^2–4\cdot4=0$; $t^2=16$; $t_{1,2}=\pm4$.
6. а) $4x^2+cx+6=0$; $D=c^2–4\cdot4\cdot6<0$;
$c^2–96<0$; $(c–4\sqrt{6})(c+4\sqrt{6})<0$.



$c\in(–4\sqrt{6};4\sqrt{6})$.
б) $x^2+6x+c=0$; $D=36–4c<0$; $4c>36$, $c>9$.
7. $a(x+1)=5$; $x+1=\dfrac{5}{a}$; $x=\dfrac{5}{a}–1$; $\dfrac{5}{a}–1>0$; $\dfrac{5-a}{a}>0$; $\dfrac{a-5}{a}<0$.



$a=1; 2; 3; 4$.

8. $x^2+bx=0$ при $b=0$, $x=0$ –единственный корень;
$x^2–bx–5=0$; $D=b^2+4\cdot5>0$ при любом b имеет два корня;
$x^2+bx+5=0$; $D=b^2–4\cdot5>0$ не при любом b;
$x^2–2b=0$ при $b=0$, $x=0$–единственный корень;
$bx^2–2=0$ при $b=0$ нет корней; $x^2–4x+b=0$; $D=16–4b>0$ не при любом b.
Ответ: $x^2–bx–5=0$.

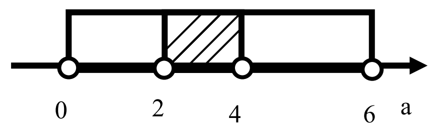
9. $x^2+n^2(x-1)-x=0$, пусть a и $-a$ корни уравнения, тогда

$\begin{cases} a^2+n^2(a-1)-a=0 \\ a^2+n^2(-a-1)+a=0 \end{cases}$; $n^2(a-1)-a=n^2(-a-1)+a$; $an^2-n^2-a=-an^2-n^2+a$;

$2an^2=2a$; $n^2=1$, $n=\pm1$.

10. $x^2-2ax+a^2-1=0$; $D=4a^2-4(a^2-1)=4$;

$x_1=\frac{2a+2}{2}=a+1$, $x_2=a-1$; $\begin{cases} 1<a+1<5 \\ 1<a-1<5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 0<a<4 \\ 2<a<6 \end{array} \right.$.



Ответ: $a \in (2; 4)$.

С-13

1) а) $9x^3-27x^2=0$; $x^3-3x^2=0$; $x^2(x-3)=0$; $x_1=0$, $x_2=3$;
б) $x^3-64x=0$; $x(x^2-64)=0$; $x(x-8)(x+8)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm8$;
в) $x^3+0{,}8x=0$; $x(x^2+0{,}8)=0$; $x=0$;
2) а) $x^3-4x^2-9x+36=0$; $x^2(x-4)-9(x-4)=0$; $(x-4)(x^2-9)=0$;
$(x-4)(x-3)(x+3)=0$; $x_1=4$, $x_{2,3}=\pm3$; **б)** $x^6+3x^4-x^2-3=0$; $x^4(x^2+3)-(x^2+3)=0$;
$(x^2+3)(x^4-1)=0$; $x^4=1$; $x_{1,2}=\pm1$; **в)** $y^3-2y^2=y-2$; $y^3-2y^2-y+2=0$; $y^2(y-2)-(y-2)=0$;
$(y-2)(y-1)(y+1)=0$; $y_1=2$, $y_{2,3}=\pm1$.
2. а) $(x^2-7)^2-4(x^2-7)-45=0$; $x^2-7=y$, $y^2-4y-45=0$; $D=16+4\cdot45=196$;

$y_1=\frac{4+14}{2}=9$; $y_2=-5$; $x^2-7=9$, $x_2=16$, $x_{1,2}=\pm4$; $x^2-7=-5$, $x^2=2$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$;

б) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$; $x^2+2x=y$, $y^2-2y-3=0$; $D=4+4\cdot3=16$;

$y_1=\frac{2+4}{2}=3$, $y_2=-1$; $x^2+2x=3$; $x^2+2x-3=0$; $D=4+4\cdot3=16$; $x_1=\frac{-2+4}{2}=1$,
$x_2=-3$; $x^2+2x=-1$; $x^2+2x+1=0$; $(x+1)^2=0$; $x_3=-1$;
в) $(x^2-x+1)(x^2-x-7)=65$; $x^2-x=y$; $(y+1)(y-7)-65=0$; $y^2-6y-72=0$;

$D=36+4\cdot72=324$; $y_1=\frac{6+18}{2}=12$, $y_2=-6$; $x^2-x=12$; $x^2-x-12=0$; $D=1+4\cdot12=49$;

$x_1=\frac{1+7}{2}=4$; $x_2=-3$; $x^2-x=-6$; $x^2-x+6=0$; $D=1-4\cdot6<0$ нет корней.

Ответ: -3; 4.

3. а) $x^4-13x^2+36=0$; $D=169-4\cdot36=25$; $x_1^2=\frac{13+5}{2}=9$ и $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm2$;

б) $x^4-5x^2+4=0$; $D=25-4\cdot4=9$; $x^2=\frac{5+3}{2}=4$ и $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm2$, $x_{3,4}=\pm1$;

в) $x^4+5x^2-6=0$; $D=25+4\cdot6=49$; $x^2=\frac{-5+7}{2}=1$ и $x^2=-6$ $x_{1,2}=\pm1$;

г) $x^4+7x^2-44=0$; $D=49+4\cdot44=225$; $x^2=\frac{-7+15}{2}=4$ и $x^2<0$, $x_{1,2}=\pm2$;

д) $x^4+9x^2+8=0$; $D=81-4\cdot8=49$; $x_1^2=\frac{-9+7}{2}<0$; $x_2^2<0$ нет корней;

е) $x^4+16x^2=0$, $x^2(x^2+16)=0$, $x^2=0$, $x=0$;

4. $y=x^4-8x^2-9$; $x^4-8x^2-9=0$; $D=64+4\cdot9=100$;

$x^2=\frac{8+10}{2}=9$ и $x^2=-1<0$; $x_{1,2}=\pm3$; (3; 0) и (–3; 0).

5. $x^5+x^4+3x^3+3x^2+2x+2=0$; $x^4(x+1)+3x^2(x+1)+2(x+1)=0$;
$(x+1)(x^4+3x^2+2)=0$; $x_1=-1$; $x^4+3x^2+2=0$; $D=9-4\cdot2=1$;

$x^2=\frac{-3+1}{2}<0$ и $x^2=-2<0$. Ответ: –1.

6. $\frac{x^2-4}{x}+\frac{x}{x^2-4}=3\frac{1}{3}$; $\frac{x^2-4}{x}=t$; $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$; $3t+\frac{3}{t}=10$; $3t^2-10t+3=0$;

$D=100-4\cdot3\cdot3=64$; $t_1=\frac{10+8}{6}=3$; $t_2=\frac{1}{3}$; $\frac{x^2-4}{x}=3$; $x^2-4=3x$; $x^2-3x-4=0$;

$D=9+4\cdot4=25$; $x_1=\frac{3+5}{2}=4$; $x_2=-1$; $\frac{x^2-4}{x}=\frac{1}{3}$; $3x^2-x-12=0$;

$D=1+4\cdot12\cdot3=145$; $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{145}}{6}$.

7. а) x^3-7x+6; $x^3-x-6x+6=0$; $x(x^2-1)-6(x-1)=0$; $x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$;

$(x-1)(x^2+x-6)=0$; $x_1=1$; $x^2+x-6=0$ $D=1+4\cdot6=25$; $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ $x_3=-3$;

б) $x^3-43x+42$ $x^3-x-42x+42=0$; $x(x-1)(x+1)-42(x-1)=0$; $(x-1)(x^2+x-42)=0$;

$x_1=1$; $x^2+x-42=0$; $D=1+4\cdot42=169$; $x_1=\frac{-1+13}{2}=6$; $x_3=-7$.

8. а) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=360$; $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-360=0$; $x^2+5x+4=y$;

$y(y+2)-360=0$; $y^2+2y-360=0$; $D=4+4\cdot360=4\cdot361$; $y_1=\frac{-2+38}{2}=18$, $y_2=-20$;

$x^2+5x+4=18$; $x^2+5x-14=0$; $D=25+2\cdot14=81$; $x_1=\frac{-5+9}{2}=2$, $x_2=-7$; $x^2+5x+4=-20$;

$x^2+5x+24=0$; $D=25-4\cdot24<0$ нет корней. Ответ: –7; 2.

б) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=105$; $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-105=0$; $x^2-8x=y$;
$(y+7)(y+15)-105=0$; $y^2+22y=0$; $y_1=0$, $y_2=-22$; $x^2-8x=0$, $x_1=0$, $x_2=8$;
$x^2-8x=-22$, $x^2-8x+22=0$; $D=64-4\cdot22<0$ нет корней. Ответ: 0; 8.

9. а) $x^4-6x^2+a=0$; $x^2=y$; $y^2-6y+a=0$; $f(y)=y^2-6y+a$;

$D=36-4a<0$ или $\begin{cases} f(0)>0 \\ m=\frac{6}{2}=3<0 \end{cases}$ –нет решений;

$36-4a<0$; $4a>36$; $a>9$.
Ответ: $a>9$.

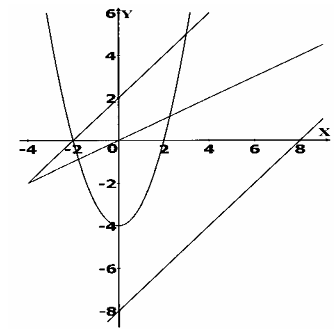
б) $x^4+ax^2+9=0$, $x^2=y$, $y^2+ay+9=0$;
$D=a^2-36<0$; $(a-6)(a+6)<0$; $-6<a<6$ или

$\begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}<0 \\ f(0)=9>0 \end{cases}$; $-a<0$, $a>0$. Ответ: $a>-6$.

С-14

1. $\begin{cases} y=-0{,}5x^2+8 \\ xy=6 \end{cases}$. Три решения: (–4,4;–1,5), (0,8; 7,8), (3,5; 1,8).

2. $y=x^2-4$;

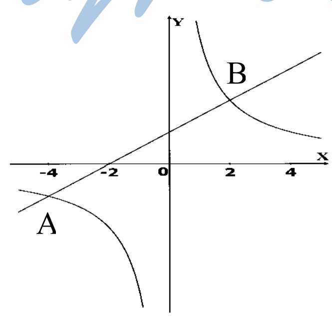


а) $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=x+2 \end{cases}$; две точки пересечения: $A(-2;\ 0)$, $B(3;\ 5)$;

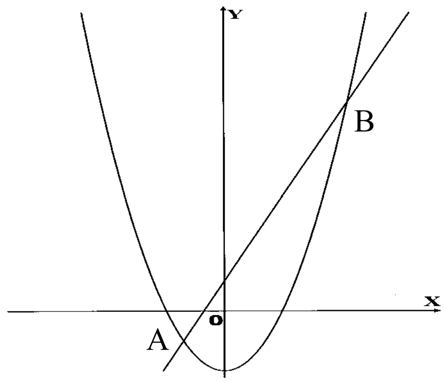
б) $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=0{,}5x \end{cases}$; две точки пересечения: $C(-1{,}8;-0{,}8)$, $D(2{,}2;\ 1{,}2)$;

в) $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=x-8 \end{cases}$; нет точек пересечения. Ответ: нет решений.

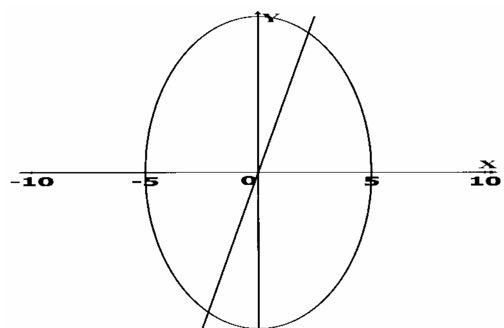
3. а) $\begin{cases} y=\dfrac{8}{x} \\ y=x+2 \end{cases}$. Ответ: (–4;–2), (2; 4).



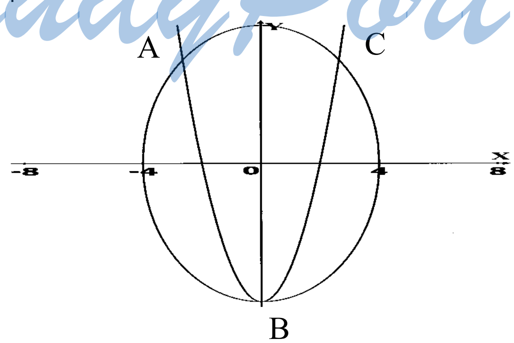
б) $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.   Ответ: (–1;–1), (3; 7).



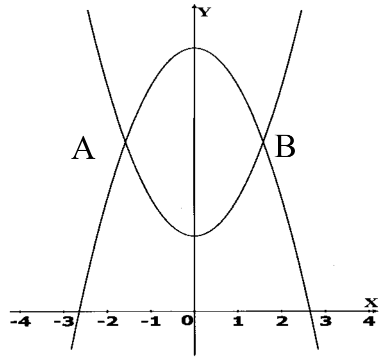
в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$. Ответ: (–2,2;–4,4), (2,2; 4,4).



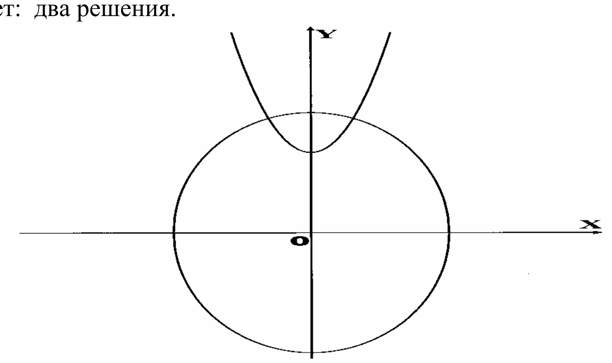
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$. Ответ: (–3,2; 2,5), (3,2; 2,5), (0;–4).



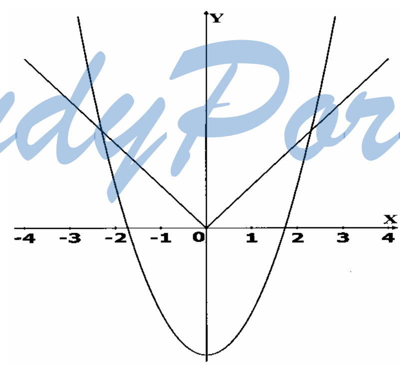
4. а) Ответ: два решения.



б) Ответ: два решения.



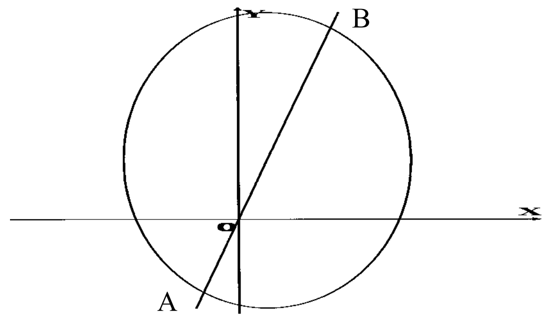
5. а)



$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = |x| \end{cases}$;   две точки пересечения: $A(-2{,}2;\ 2{,}2)$, $B(2{,}2;\ 2{,}2)$.

Ответ: (–2,2; 2,2), (2,2; 2,2).

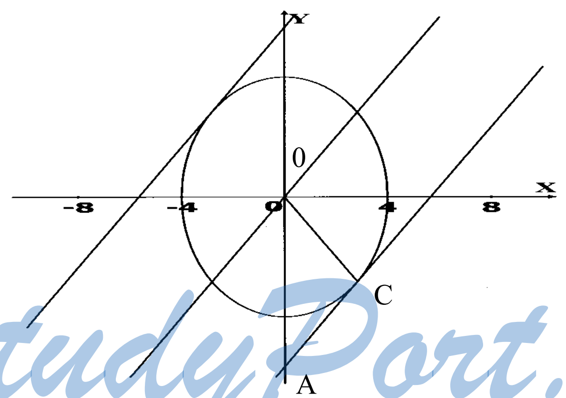
б)



$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=25\\ y=2x\end{cases}$;

две точки пересечения: $A(-1{,}2;-2{,}4)$, $B(3{,}2;\ 6{,}4)$.
Ответ: $(-1{,}2;-2{,}4)$, $(3{,}2;\ 6{,}4)$.

6. $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ x-y=k\end{cases}$.



Изобразим графики функций на рисунке.
Рассмотрим ΔOAC: $\angle C=90°$, $\angle A=\angle O=45°$.

$OC=4$ (радиус окружности); $AC=4$; $OA=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

Ясно, что при $k=\pm 4\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $k\in(-4\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$–две точки; при $|k|>4\sqrt{2}$ решения нет.

Ответ: а) $k=\pm 4\sqrt{2}$; б) $(-4\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$ в) $(-\infty;-4\sqrt{2})\cup(4\sqrt{2};+\infty)$.

С-15

1. $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 3x+2y-2=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6^2+(-8)^2=100 \\ 3\cdot 6+2\cdot(-8)-2=0 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} 36+64=100 \\ 18-16-2=0 \end{matrix} \right.$; верно, значит, является.

2. $\begin{cases} x^2-3y+12=0 \\ y=x+4 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} x^2-3(x+4)+12=0 \\ x^2-3x=0 \end{matrix} \right.$; $x(x–3)=0$;

$x_1=0$, $y_1=4$; (0; 4); $x_2=3$, $y_2=7$; (3; 7).

Проверка: (0; 4); $\begin{cases} 0^2-3\cdot 4+12=0 \\ 4=0+4 \end{cases}$ — верно;

(3; 7); $\begin{cases} 3^2-3\cdot 7+12=0 \\ 7=3+4 \end{cases}$ — верно.

3. 1) а) $\begin{cases} x^2+2y=6 \\ y=x-1 \end{cases}$; $\left| \begin{matrix} x^2+2(x-1)=6 \\ x^2+2x-2=6 \end{matrix} \right.$; $x^2+2x–8=0$; $D=4+4\cdot 8=36$;

$x_1=\dfrac{-2+6}{2}=2$; $x_2=–4$; $y_1=1$, $y_2=–5$. Ответ: (2; 1), (–4;–5).

б) $\begin{cases} x=y-2 \\ xy-y=10 \end{cases}$ $\Big|$; $y(y–2)–y=10$, $y^2–3y–10=0$; $D=9+4\cdot 10=49$;

$y_1=\dfrac{3+7}{2}=5$, $y_2=–2$; $x_1=3$, $x_2=–4$. Ответ: (3; 5), (–4;–2).

в) $\begin{cases} xy+x^2=4 \\ y=x+2 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} x(x+2)+x^2=4 \\ 2x^2+2x-4=0 \end{matrix} \right.$; $x^2+x–2=0$; $D=1+4\cdot 2=9$;

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $x_2=–2$; $y_1=3$, $y_2=0$. Ответ: (1; 3), (–2; 0).

2) а) $\begin{cases} x^2-y^2=24 \\ x-2y=7 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} (7+2y)^2-y^2=24 \\ x=7+2y \end{matrix} \right.$; $49+28y+4y^2–y^2–24=0$;

$3y^2+28y+25=0$; $D=784–12\cdot 25=484$; $y_1=\dfrac{-28+22}{6}=-1$; $y_2=–\dfrac{25}{3}$;

$x_1=7–2=5$; $x_2=7–\dfrac{50}{3}=-\dfrac{29}{3}$. Ответ: (5; –1), $\left(-\dfrac{29}{3}; -\dfrac{25}{3}\right)$.

б) $\begin{cases} x+3y=11 \\ 2x+y^2=14 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} x=11-3y \\ 2(11-3y)+y^2-14=0 \end{matrix} \right.$;

$y^2–6y+8=0$; $D=36–4\cdot 8=4$; $y_1=\dfrac{6+4}{2}=5$, $y_2=1$; $x_1=–4$, $x_2=8$.
Ответ: (–4; 5), (8; 1).

в) $\begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y^2 \text{ - y(3y10)12} = 0 \\ x = 3y - 10 \end{array} \right.$; $y^2–3y^2+10–12=0$;

$–2y^2+10y–12=0$; $y^2–5y+6=0$; $D=25–4\cdot6=1$; $y_1=\frac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$; $x_1=–1$; $x_2=–4$.

Ответ: (–1; 3), (–4; 2).

3) а) $\begin{cases} (x-2)(y-1) = 30 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} (x-2)(2x-11) = 30 \\ y = 2x - 10 \end{array} \right.$; $2x^2–15x–8=0$;

$D=225+4 \cdot 2 \cdot 8=289$; $x_1=\frac{15+17}{4}=8$, $x_2=–\frac{1}{2}$; $y_1=6$; $y_2=–11$.

Ответ: (8; 6), ($–\frac{1}{2}$;–11).

б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 14 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} (10+3y)^2 - y(10+3y) + y^2 = 14 \\ x = 10 + 3y \end{array} \right.$;

$100+60y+9y^2–10y–3y^2+y^2–14=0$; $7y^2+50y+86=0$; $D=2500–4 \cdot 7 \cdot 86=92$;

$y_{1,2}=\frac{-50 \pm 2\sqrt{23}}{2 \cdot 7}=\frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7}$; $x_{1,2}=10+\frac{-75 \pm 3\sqrt{23}}{7}=\frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}$.

Ответ: $\left(\frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}, \quad \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7} \right)$.

4. $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 12 \\ x^2 + y^2 - xy - y = 6 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x = \frac{11-2y}{3} \\ \frac{55-10y}{3} - 3y = 12 \end{array} \right.$; $55–10y–9y=36$, $19y=19$, $y=1$,

$x=3$; $3^2+1^2–3 \cdot 1–1=6$; $10–3–1=6$–верно. Ответ: (3; 1).

5. а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x^2 - \frac{400}{x^2} = 9 \\ y = \frac{20}{x} \end{array} \right.$; $x^4–9x^2–400=0$; $D=81+4\cdot400=1681$;

$x^2=\frac{9+41}{2}=25$; $x_{1,2}=\pm5$; $y_{1,2}=\pm4$. Ответ: (±5; ±4).

б) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 22 \\ x^2 + 3y^2 = 28 \end{cases}$ $\left| \; 22 + 3y^2 = 28 - 3y^2 \right.$; $6y^2=6$; $y_{1,2}=\pm1$; $x^2=22+3=25$; $x=\pm5$.

Ответ: (5; ±1), (–5; ±1).

в) $\begin{cases} x^2 + 2x + 3y = 3 \\ x^2 + x + 2y = 4 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y = \frac{3 - x^2 - 2x}{3} \\ x^2 + x + \frac{6 - 2x^2 - 4x}{3} = 4 \end{array} \right.$; $3x^2+3x+6–2x^2–4x=12$;

$x^2–x–6=0$; $D=1+4 \cdot 6=25$, $x_1=\frac{1+5}{2}=3$, $x_2=–2$;

$y_1=\frac{3-9-6}{3}=-4$, $y_2=\frac{3-4+4}{3}=1$. Ответ: (3;–4), (–2; 1).

6. $x^2+(x^2-1-2)^2=5$; $x^2+(x^2-3)^2=5$; $x^2+x^4-6x^2+9=5$;

$x^4-5x^2+4=0$; $D=25-4\cdot4=9$; $x_1^2=\frac{5+3}{2}=4$; $x_2^2=1$;

$x_{1,2}=\pm2$; $x_{3,4}=\pm1$; $y_{1,2}=3$; $y_{3,4}=0$. Ответ: (±2; 3); (±1; 0).

7. $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\\ 2y-x=1\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2y-1}+\frac{1}{y}-\frac{5}{6}=0\\ x=2y-1\end{array}\right.$; $6y+12y-6-5y(2y-1)=0$;

$18y-6-10y^2+5y=0$; $10y^2-23y+6=0$ $D=529-40\cdot6=289$; $y_1=\frac{23+17}{20}=2$;

$y_2=\frac{3}{10}$; $x_1=3$; $x_2=-0{,}4$. Ответ: (3; 2), (–0,4; 0,3).

б) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{16}{3}\\ x-y=6\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{16}{3}\\ x=6+y\end{array}\right.$; $\frac{x}{y}=a$, $a+\frac{1}{a}-\frac{16}{3}=0$;

$3a^2-16a+3=0$; $D=256-4\cdot3\cdot3=220$; $a_{1,2}=\frac{16\pm2\sqrt{55}}{2\cdot3}=\frac{8\pm\sqrt{55}}{3}$;

$\frac{6+y}{y}=\frac{8\pm\sqrt{55}}{3}$; $18+3y=8y\pm\sqrt{55}\,y$; $y_{1,2}=\frac{18}{5\pm\sqrt{55}}$; $x_{1,2}=\frac{48\pm6\sqrt{55}}{5\pm\sqrt{55}}$.

Ответ: $\left(\frac{48\pm6\sqrt{55}}{5\pm\sqrt{55}},\ \frac{18}{5\pm\sqrt{55}}\right)$.

С-16

1. Пусть x–первое число, y — второе число, тогда $\begin{cases}x-y=5\\ xy=84\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}x=5+y\\ y(5+y)=84\end{array}\right.$;

$y^2+5y-84=0$; $D=25+4\cdot84=361$; $y_1=\frac{-5+19}{2}=7$; $y_2=-12$; $x_1=12$; $x_2=-7$.

Ответ: 12 и 7 или –7 и–12.

2. Пусть x см–один катет, тогда $(x+7)$ см–другой катет.
Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2+(x+7)^2=13^2$;
$x^2+x^2+14x+49-169=0$; $2x^2+14x-120=0$; $x^2+7x-60=0$; $D=49+4\cdot60=289$;
$x_1=\frac{-7+17}{2}=5$, $x_2<0$; 5 см–первый катет, 5+7=12 (см)–второй катет.
Ответ: 5 и 12 см.

3. Пусть x м — длина, y м — ширина, тогда xy м^2 — площадь или 2080 м^2;
$2(x+y)$ м — периметр или 184 м.

Получаем систему: $\begin{cases} xy = 2080 \\ 2(x+y) = 184 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y(92-y) = 2080 \\ x = 92 - y \end{array} \right.$;

$y^2-92y+2080=0$; $D=8464-4\cdot 2080=144$; $y_1=\dfrac{92+12}{2}=52$; $y_2=40$; $x_1=40$; $x_2=52$.

Ответ: 40 и 52 м.

4. Пусть x см–длина, y см–ширина, тогда $2(x+y)$ см–периметр или 20 см; (x^2+y^2) см^2–сумма площадей квадратов или 104 см^2.

Получаем систему: $\begin{cases} 2(x+y) = 20 \\ x^2 + y^2 = 104 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x = 10 - y \\ (10-y)^2 + y^2 = 104 \end{array} \right.$;

$100-2y+2y^2-104 > 0$; $2y^2-2y-4=0$; $y^2-y-2=0$; $D=1+4\cdot 2=9$; $y_1=\dfrac{1+3}{2}=2$;

$y_2=-1 < 0$; $x=8$; 8 см — длина, 2 см — ширина. Ответ: 8 и 2 см.

5. Пусть x–первое число, y–второе число, тогда xy — их произведение, $(x+y)$–их сумма.

Получаем систему: $\begin{cases} x + 2y = 19 \\ xy = x + y + 29 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x = 19 - 2y \\ y(19-2y) = 19 - 2y + y + 29 \end{array} \right.$;

$-2y^2+19y=48-y$; $2y^2-20y+48=0$;

$y^2-10y+24=0$; $D=100-4\cdot 24=4$; $y_1=\dfrac{10+2}{2}=6$; $y_2=4$;

$x_1=7$, $x_2=11$. Ответ: 7 и 6 или 11 и 4.

6. Пусть x км/ч–скорость первой группы, y км/ч–скорость второй группы, тогда $(x+y)$ км/ч — скорость сближения;

$\dfrac{18}{x+y}$ ч–прошли вместе 18 км или 2ч. $\dfrac{18}{x}$ ч и $\dfrac{18}{y}$ ч–проходит весь путь первая и вторая группа соответственно. Известно, что $\dfrac{18}{x}=\dfrac{18}{y}+\dfrac{9}{10}$.

Получаем систему: $\begin{cases} \dfrac{18}{x+y} = 2; & \dfrac{9}{x+y} = 1 \\ \dfrac{18}{x} = \dfrac{18}{y} + \dfrac{9}{10}; & \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{10} \end{cases}$; $x+y=9$, $y=9-x$;

$\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{9-x}+\dfrac{1}{10}$; $20(9-x)-20x-x(9-x)=0$; $180-20x-20x-9x+x^2=0$;

$x^2-49x+180=0$; $D=2401-4\cdot 180=1681$; $x_1=\dfrac{49+41}{2}=45$; $x_2=4$; $y_1 < 0$; $y_2=5$;

4 и 5 км/ч — скорости I и II групп соответственно. Ответ: 4 и 5 км/ч.

7. Пусть 1 — вся работа, x ч — выполняет всю работу I машинистка, тогда $(x+3)$ ч — выполняет всю работу II;

$\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+3}$ часть работы–производительность I и II.

Известно, что за $6\frac{2}{3}$ ч обе машинистки, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{20}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1$; $\frac{2x+3}{x(x+3)}-\frac{3}{20}=0$;

$40x+60-3x(x+3)=0$; $40x+60-3x^2-9x=0$; $3x^2-31x-60=0$;

$D=961+4\cdot3\cdot60=1681$; $x_1=\frac{31+41}{6}=12$, $x_2<0$; 12 ч и 15 ч — требуется I и II машинистке, чтобы выполнить всю работу. Ответ: 12 и 15 ч.

С-17

1. а) 10, 11, 12, 13, 14; **б)** 1, 4, 9, 16, 25; **в)** 4, 7, 10, 13, 16.

2. $a_n=5n-2$; **а)** $a_1=5\cdot1-2=3$; **б)** $a_6=5\cdot6-2=28$; **в)** $a_{10}=5\cdot10-2=48$; **г)** $a_{100}=5\cdot100-2=498$; **д)** $a_k=5k-2$; **е)** $a_{k+1}=5(k+1)-2=5k+3$.

3. а) $x_n=n+6$; $x_2=2+6=8$; $x_5=5+6=11$; $x_{10}=10+6=16$;

б) $x_n=\frac{2n-1}{3}$; $x_2=\frac{2\cdot2-1}{3}=1$; $x_5=\frac{2\cdot5-1}{3}=3$; $x_{10}=\frac{2\cdot10-1}{3}=\frac{19}{3}$;

в) $x_n=n^2$; $x_2=2^2=4$; $x_5=5^2=25$; $x_{10}=10^2=100$; **г)** $x_n=n(n-1)$; $x_2=2(2-1)=2$; $x_5=5(5-1)=20$; $x_{10}=10(10-1)=90$; **д)** $x_n=n^3-n$; $x_2=2^3-2=6$; $x_5=5^3-5=120$; $x_{10}=10^3-10=990$; **е)** $x_n=(-1)^n\cdot n$; $x_2=(-1)^2\cdot2=2$; $x_5=(-1)^5\cdot5=-5$; $x_{10}=(-1)^{10}\cdot10=10$.

4. $a_n=55-4n$, $15=55-4n$, $4n=40$, $n=10$. Ответ: 10.

5. а) $C_1=3$, $C_{n+1}=C_n+4$; $C_2=C_1+4=7$, $C_3=C_2+4=11$, $C_4=C_3+4=15$, $C_5=C_4+4=19$;
б) $C_1=4$, $C_{n+1}=2C_n$; $C_2=2C_1=8$, $C_3=2C_2=16$, $C_4=2C_3=32$, $C_5=2C_4=64$.

6. 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; 0,42857.

7. $a_n=n^2-2n+3$; **а)** $3=n^2-2n+3$; $n^2-2n=0$; $n=2$, значит, $3=a_2$;

б) $66=n^2-2n+3$; $n^2-2n-63=0$; $D=4+4\cdot63=4\cdot64$; $n=\frac{2+2\cdot8}{2}=9$, значит, $66=a_9$; **в)** $103=n^2-2n+3$; $n^2-2n-100=0$; $D=4+4\cdot100=4\cdot101$;

$n=\frac{2+2\sqrt{101}}{2}\notin N$, значит, 103–не член $\{a_n\}$.

8. а) $b_1=4$, $b_{n+1}=b_n+4$, $b_n=4n$; **б)** $b_1=1$, $b_{n+1}=5b_n$, $b_n=5^{n-1}$.

С-18

1. $a_1=3{,}4$; $a_2=-0{,}2$; $d=a_2-a_1=-0{,}2-3{,}4=-3{,}6$;
$a_3=a_2+d=-0{,}2-3{,}6=-3{,}8$; $a_4=a_2+2d=-0{,}2-2\cdot3{,}6=-7{,}4$;
$a_5=a_2+3d=-0{,}2-3\cdot3{,}6=-11$; $a_6=a_5+d=-11-3{,}6=-14{,}6$.

2. $b_1=-0{,}8$, $d=4$; $b_3=b_1+2d=-0{,}8+2\cdot4=7{,}2$;
$b_7=b_1+6d=-0{,}8+6\cdot4=23{,}2$; $b_{24}=b_1+23d=-0{,}8+23\cdot4=91{,}2$;
$b_{k+1}=b_1+d(k+1-1)=b_1+kd$.

3. а) $a_1=16$, $a_8=37$; $a_8=a_1+7d$, $7d=a_8-a_1$, $d=\frac{a_8-a_1}{7}=\frac{37-16}{7}=3$;

б) $a_1=4$, $a_{18}=-11$; $a_{18}=a_1+17d$, $d=\dfrac{a_{18}-a_1}{17}=\dfrac{-11-4}{17}=-\dfrac{15}{17}$;

в) $a_1=0{,}5$, $a_{23}=-2{,}3$;

$a_{23}=a_1+22d$, $d=\dfrac{a_{23}-a_1}{22}=\dfrac{-2{,}3-0{,}5}{22}=-\dfrac{2{,}8}{22}=-\dfrac{1{,}4}{11}=-\dfrac{14}{110}=-\dfrac{7}{55}$.

4. $a_1=106$, $d=12$; $a_6=a_1+5d=106+5\cdot 12=166$; $a_{12}=a_1+11d=106+11\cdot 12=238$.
5. $x_1=14$, $d=0{,}5$ **а)** $x_n=17{,}5=x_1+d(n-1)=14+0{,}5(n-1)=13{,}5+0{,}5n$; $0{,}5n=17{,}5-13{,}5$; $0{,}5n=4$; $n=8$, значит, $17{,}5=x_8$;
б) $x_n=19=x_1+d(n-1)=13{,}5+0{,}5n$; $19=13{,}5+0{,}5n$; $0{,}5n=5{,}5$; $n=11$, значит, $19=x_{11}$; **в)** $x_n=34=13{,}5+0{,}5n$; $0{,}5n=20{,}5$; $n=41$, значит, $34=x_{41}$.
6. $a_1=18$, $d=a_2-a_1=4-18=-14$; **а)** $-38=a_1+d(n-1)=18-14(n-1)=32-14n$; $14n=70$, $n=5$, значит, $-38=a_5$; **б)** $-64=32-14n$, $14n=96$,

$n=\dfrac{48}{7}\notin N$, значит, -64 не встретится среди данных чисел.

в) $-80+32-14n$, $14n=112$, $n=8$, значит, $-80=a_8$.

7. 2 a_2 a_3 a_4 a_5 22; $2=a_1$, $22=a_6$; $a_6=a_1+5d$, $d=\dfrac{a_6-a_1}{5}=\dfrac{22-2}{5}=4$;

поэтому: $a_2=a_1+d=2+4=6$, $a_3=a_1+2d=2+2\cdot 4=10$,
$a_4=a_1+3d=2+3\cdot 4=14$, $a_5=a_1+4d=2+4\cdot 4=18$.
8. a_n–арифметическая прогрессия; $a_5=a_1+4d$, $a_2=a_1+d$, $a_{n-2}=a_1+d(n-2-1)=a_1+d(n-3)$, $a_{n-5}=a_1+d(n-5-1)=a_1+d(n-6)$, $a_2+a_{n-2}=a_1+d+a_1+d(n-3)=2a_1+d(n-2)$, $a_5+a_{n-5}=a_1+4d+a_1+d(n-6)=2a_1+(n-2)$, значит, $a_2+a_{n-2}=a_5+a_{n-5}$, что и требовалось доказать.
9. $a_1=7$; Пусть $a_2=x^2$, $a_3=(x+1)^2$, где x–натуральное число.
Тогда $a_2-a_1=a_3-a_2$; Получаем: $x^2-7=(x+1)^2-x^2$; $x^2-7=2x+1$; $x^2-2x-8=0$;

$D=4+4\cdot 8=36$; $x_1=\dfrac{2+6}{2}=4$; $x_2\notin N$. Значит, $a_2=4^2=16$, $a_3=(4+1)^2=25$.

Ответ: 16 и 25.

10. По свойству арифметической прогрессии $b^2-a^2=c^2-b^2$, $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$.

Нужно доказать, что $\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)=$

$=\dfrac{a+b+b+c}{2(a+b)(b+c)}=\dfrac{a+2b+c}{2(a+b)(b+c)}$, $(a+c)(a+2b+c)=2(a+b)(b+c)$.

Т.е. надо доказать, что: $a^2+ac+2ab+2bc+ac+c^2=2(ab+b^2+ac+bc)$;

$a^2+2ac+2ab+2bc+c^2=2ab+2b^2+2ac+2bc$; $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$.

Т.е. мы видим, что равенство $\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)$;

равносильно равенству $b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2}$.

Значит, числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ также составляют арифметическую прогрессию, что и требовалось доказать.

С-19

1. a_1=–16, a_2=–13, d=a_2–a_1=3;

а) $S_6 = \dfrac{2a_1 + d(6-1)}{2} \cdot 6 = \dfrac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = (-32+15) \cdot 3 = -51$;

б) $S_{16} = \dfrac{2a_1 + 15d}{2} \cdot 16 = (-32+45) \cdot 8 = 104$;

в) $S_{25} = \dfrac{2a_1 + 24d}{2} \cdot 25 = \dfrac{(-32 + 72)}{2} \cdot 25 = 500$;

г) $S_{k+1} = \dfrac{2a_1 + d(k+1-1)}{2} \cdot (k+1) = \dfrac{-32 + kd}{2} \cdot (k+1)$.

2. а) a_1=4, d=2; $S_{12} = \dfrac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = \dfrac{2 \cdot 4 + 11 \cdot 2}{2} \cdot 12 = 180$;

б) a_1=–5, d=3; S_{12}=(2 · (–5)+11 · 3) · 6=23 · 6=138; **в)** a_1=16,5, d=–1,5;
S_{12}=(2 · 16,5+11 · (–1,5)) · 6=99; **г)** $a_1 = 1+\sqrt{3}$, $d = -\sqrt{3}$;
$S_{12} = (2(1+\sqrt{3})+11 \cdot (-\sqrt{3})) \cdot 6 = (2-9\sqrt{3}) \cdot 6 = 12-54\sqrt{3}$.

3. a_n=3n+2; a_1=3+2=5, a_2=3 · 2+2=8, d=a_2–a_1=3;

$S_5 = \dfrac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \dfrac{10+12}{2} \cdot 5 = 55$, $S_{40} = \dfrac{2a_1 + 39d}{2} \cdot 40 = (10+117) \cdot 20 = 2540$,

$S_k = \dfrac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = \dfrac{10 + 3(k-1)}{2} \cdot k = \dfrac{7+3k}{2} \cdot k$.

4. а) a_1=1, d=1, S_{80}–?; $S_{80} = \dfrac{2a_1 + 79d}{2} \cdot 80 = 81 \cdot 40 = 3240$;

б) a_1=10, d=1, S_{90}–?; $S_{90} = \dfrac{2a_1 + 89d}{2} \cdot 90 = (20+89) \cdot 45 = 4905$;

в) a_1=2, d=2, S_{50}–?; $S_{50} = \dfrac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = (4+98) \cdot 25 = 2550$.

5. а) a_1=8, a_7=24; a_7=a_1+6d; $d = \dfrac{a_7 - a_1}{6} = \dfrac{24-8}{6} = \dfrac{8}{3}$;

$S_{10} = \dfrac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (16+24) \cdot 5 = 200$;

б) a_4=16, a_{12}=88; $\begin{cases} 16 = a_1 + 3d \\ 88 = a_1 + 11d \end{cases}$ $\Bigg|$ $16 - 3d = 88 - 11d$; 8d=72, d=9;

$a_1=16-3\cdot 9=-11$; $S_{10}=\frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10=(-22+81)\cdot 5=295$.

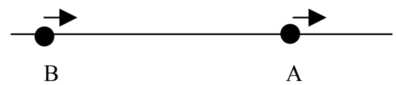
6. $a_1=15$, $d=2$; $S_{26}=\frac{2a_1+25d}{2}\cdot 26=(30+50)\cdot 13=1040$.

7. $S_3=48$, $S_6=141$; $\begin{cases}48=\frac{2a_1+2d}{2}\cdot 3\\ 141=\frac{2a_1+5d}{2}\cdot 6\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}16=a_1+d\\ 47=2a_1+5d\end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l}d=16-a_1\\ 47=2a_1+5(16-a_1)\end{array}\right.$;

$47=-3a_1+80$; $3a_1=33$; $a_1=11$; $d=16-11=5$.

8.

Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 10 км, за второй час на 15 км, за третий час на 20 км.



Поэтому $a_1=10$, $d=5$, $S_n=135$, n–?; $135=\frac{2\cdot 10+5\cdot(n-1)}{2}\cdot n$;

$270=(20+5n-5)\cdot n$, $n(5n+15)-270=0$, $n(n+3)-54=0$; $n^2+3n-54=0$;

$D=9+4\cdot 54=225$; $n_1=\frac{-3+15}{2}=6$; $n_2<0$–не удовлетворяет условию задачи;

Итак, через 6 ч легковой автомобиль догонит грузовой.

9. а) $3+7+11+...+x=289$, $d=4$, $a_1=3$; $S_n=289=\frac{2\cdot 3+4(n-1)}{2}\cdot n$;

$289=(3+2(n-1))\cdot n$; $289=(2n+1)\cdot n$; $2n^2+n-289=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 289=2313$;

б) $8+5+2+...+x=270$, $d=-3$, $a_1=8$; $S_n=270=\frac{16-3(n-1)}{2}\cdot n$; $540=n(19-3n)$;

$3n^2-19n+540=0$; $D=361-4\cdot 3\cdot 540<0$. Ответ: нет корней.

10. а) $S_n=5n^2+3n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\left(a_1+\frac{d}{2}(n-1)\right)\cdot n$;

$5n^2+3n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$; $\begin{cases}\frac{d}{2}=5; & d=10\\ a_1-\frac{d}{2}=3; & a_1=8\end{cases}$;

Значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

б) $S_n=3n^2$; $3n^2=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$; $\frac{d}{2}=3$, $d=6$; $a_1-\frac{d}{2}=0$, $a_1=3$.

Значит, $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия.

в) $S_n=(4n-1)n=4n^2-n$; $4n^2-n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$;

$\begin{cases}\frac{d}{2}=4, & d=8\\ a_1-\frac{d}{2}=-1, & a_1=3\end{cases}$. Значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

С-20

1. $b_1=0{,}3$; $b_2=1{,}8$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1{,}8}{0{,}3}=6$; $b_3=b_2\cdot q=1{,}8\cdot 6=10{,}8$;
$b_4=b_3\cdot q=10{,}8\cdot 6=64{,}8$; $b_5=b_4\cdot q=64{,}8\cdot 6=388{,}8$;
$b_6=b_5\cdot q=388{,}8\cdot 6=2332{,}8$.

2. $b_1=1{,}6$; $q=2$; $b_3=b_1q^2=1{,}6\cdot 4=6{,}4$; $b_5=b_3q^2=6{,}4\cdot 4=25{,}6$;
$b_7=b_5q^2=25{,}6\cdot 4=102{,}4$; $b_k=b_1q^{k-1}=1{,}6\cdot 2^{k-1}=0{,}8\cdot 2^k$.

3. а) $a_1=3$, $q=2$; $a_6=a_1q^5=3\cdot 2^5=96$; **б)** $a_1=64$, $q=-\frac{1}{4}$;
$a_7=a_1q^6=64\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{1}{64}$; **в)** $a_1=125$, $q=\frac{1}{5}$; $a_5=a_1q^4=5^3\cdot\frac{1}{5^4}=\frac{1}{5}$;
г) $a_1=2\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $a_8=a_1q^7=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2^{7/2}}=\frac{1}{4}$.

4. а) $b_6=\frac{1}{27}$, $q=\frac{1}{3}$; $b_6=b_1\cdot q^5$; $\frac{1}{27}=b_1\cdot\frac{1}{3^5}$; $b_1=\frac{3^5}{3^3}=9$;
б) $b_7=256$, $q=-2$; $b_7=b_1\cdot q^6$, $256=b_1\cdot 2^6$; $b_1=\frac{256}{64}=4$.

5. а) $b_3=12$, $b_5=48$; $b_5=b_3q^2$, $q^2=\frac{b_5}{b_3}$, $q=\sqrt{\frac{b_5}{b_3}}=\sqrt{\frac{48}{12}}=2$;
б) $b_4=25$, $b_6=16$; $b_6=b_4q^2$, $q=\sqrt{\frac{b_6}{b_4}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

6. $\frac{1}{9}$, b_2, b_3, b_4, b_5, 27; $b_1=\frac{1}{9}$, $b_6=27$; $b_6=b_1\cdot q^5$; $q=\sqrt[5]{\frac{b_6}{b_1}}=\sqrt[5]{27\cdot 9}=3$;
$b_2=\frac{1}{9}\cdot 3=\frac{1}{3}$; $b_3=\frac{1}{3}\cdot 3=1$; $b_4=1\cdot 3=3$; $b_5=3\cdot 3=9$.

7. a_n — геометрическая прогрессия.
а) $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$— очевидно, геометрическая прогрессия с тем же самым знаменателем.
б) a_1+3, a_2+3, a_3+3 — не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n=2^n$.
Тогда $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=8$, но $a_1+3=5$, $a_2+3=7$, $a_3+3=11$;
$\frac{7}{5}\neq\frac{11}{7}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.
в) $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ –геометрическая прогрессия, т.к. $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}=\frac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}}$.

8. $\begin{cases} b_4-b_2=18 \\ b_5-b_3=36 \end{cases}$ $\left|\begin{array}{l} b_1q^3-b_1q=18 \\ b_1q^4-b_1q^2=36 \end{array}\right.$; $\frac{b_1(q^4-q^2)}{b_1(q^3-q)}=\frac{36}{18}$;

$\frac{q^3-q}{q^2-1}=2$; $\frac{q(q^2-1)}{q^2-1}=2$; $q=\pm1$ или $q=2$;

$q=1$–не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1=b_2=b_3=b_4$ и $b_4-b_2=0\neq$ $\neq 18$. Разберем случай $q=-1$. $b_2=-b_1$, $b_3=b_1$, $b_4=-b_1$, $b_5=b_1$, $b_4-b_2=0\neq 18$;

Значит, $q=-1$ не подходит. Остается $q=2$. Тогда $b_1=\frac{18}{q^3-q}=\frac{18}{8-2}=3$.

Ответ: $b_1=3$; $q=2$.

9. b_1, b_2, b_3, b_4; $\begin{cases} b_1+b_4=52 \\ b_2+b_3=16 \end{cases}$; $\left|\begin{matrix} b_1+b_1q^3=52 \\ b_1q+b_1q^2=16 \end{matrix}\right.$; $\frac{b_1(1+q^3)}{b_1(q+q^2)}=\frac{52}{16}$;

$\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)}=\frac{13}{4}$; $q=-1$ или $4q^2-4q+4=13q$; $4q^2-17q+4=0$;

$D=289-4\cdot16=225$; $q_1=\frac{17+15}{8}=4$; $q_2=\frac{1}{4}$. Если $q=-1$, то $b_2=-b_1$, $b_3=b_1$,

$b_4=-b_1$; $b_1+b_4=0\neq 52$, значит, $q=-1$ — не подходит $b_1=\frac{52}{1+q^3}=\frac{52}{63}=\frac{4}{5}$;

$b_2=\frac{4}{5}\cdot4=\frac{16}{5}$; $b_3=\frac{16}{5}\cdot4=\frac{64}{5}$, $b_4=\frac{64}{5}\cdot4=\frac{256}{5}$, Если же $q=\frac{1}{4}$, то $b_1=\frac{52}{1+\frac{1}{64}}=\frac{52\cdot64}{65}=\frac{4}{5}\cdot64=\frac{256}{5}$, $b_2=\frac{256}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{64}{5}$, $b_3=\frac{64}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{16}{5}$,

$b_4=\frac{4}{5}$. Ответ: $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{64}{5}$, $\frac{256}{5}$.

10. a, b, c — геометрическая прогрессия, т.е. $b^2=ac$. Надо доказать, что $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$, т.е., что $a^2+ab+ac-cb-b^2-bc+ac+bc+c^2=$ $=a^2+b^2+c^2$; $b^2=ac$. Видно, что оба данных равенства эквивалентны, значит, требуемое равенство–тождество. Ч.т.д.

С-21

1. а) $b_1=32$, $q=\frac{1}{4}$; $S_5=\frac{b_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{32\left(\frac{1}{4^5}-1\right)}{-\frac{3}{4}}=\frac{1023\cdot32\cdot4}{4^5\cdot3}=\frac{1023}{8\cdot3}=\frac{341}{8}$;

б) $b_1=-4$, $q=2$; $S_5=\frac{-4(2^5-1)}{2-1}=-124$; **в)** $b_1=27$, $q=-\frac{1}{3}$;

$S_5=\frac{27\left(-\frac{1}{3^5}-1\right)}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{244\cdot27\cdot3}{4\cdot243}=\frac{4941}{243}=\frac{183}{9}=\frac{61}{3}$;

г) $b_1=2\sqrt{3}$, $q=\sqrt{3}$; $S_5=\dfrac{2\sqrt{3}\left(3^{5/2}-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{54-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

2. а) $b_1=3$, $q=\dfrac{6}{3}=2$; $S_6=\dfrac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\dfrac{3\cdot 63}{1}=189$; **б)** $b_1=5$, $b_2=-\dfrac{2{,}5}{5}=-\dfrac{1}{2}$;

$S_6=\dfrac{5\left(\dfrac{1}{64}-1\right)}{-\dfrac{3}{2}}=\dfrac{5\cdot 63\cdot 2}{64\cdot 3}=\dfrac{5\cdot 21}{32}=\dfrac{105}{32}$; **в)** $b_1=4$, $q=\dfrac{4^2}{4}=4$;

$S_6=\dfrac{4(4^6-1)}{4-1}=\dfrac{4\cdot 4095}{3}=5460$; **г)** $b_1=\sqrt{3}$, $q=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$; $S_6=\dfrac{\sqrt{3}(27-1)}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

3. а) $a_1=64$, $q=\dfrac{1}{4}$; $S_5=\dfrac{64\cdot\left(\dfrac{1}{4^5}-1\right)}{\dfrac{1}{4}-1}=\dfrac{64\cdot 1023\cdot 4}{4^5\cdot 3}=\dfrac{341}{4}$;

б) $a_1=10$, $q=\dfrac{1}{2}$; $S_8=\dfrac{10\left(\dfrac{1}{2^8}-1\right)}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{10\cdot 255\cdot 2}{2^8}=\dfrac{5\cdot 255}{2^6}=\dfrac{1275}{64}$;

в) $a_1=3$, $q=-2$, $S_4=\dfrac{3(16-1)}{-3}=-15$; **г)** $a_1=3\sqrt{2}$, $q=\sqrt{2}$, $S_6=\dfrac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{21\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

4. а) $b_3=\dfrac{1}{25}$, $b_4=\dfrac{1}{125}$, $q=\dfrac{b_4}{b_3}=\dfrac{1}{5}$, $b_3=b_1q^2$; $b_1=\dfrac{b_3}{q^2}=1$,

$S_4=\dfrac{\dfrac{1}{5^4}-1}{\dfrac{1}{5}-1}=\dfrac{624\cdot 5}{625\cdot 4}=\dfrac{156}{125}$; **б)** $b_2=6$, $b_4=24$, $b_4=b_2q^2$, $q=\sqrt{\dfrac{b_4}{b_2}}=2$, $b_2=b_1q$,

$b_1=\dfrac{b_2}{q}=3$, $S_4=\dfrac{3(16-1)}{2-1}=45$.

5. а) $q=2$, $S_5=93$, $93=\dfrac{b_1(32-1)}{2-1}=31b_1$, $b_1=3$;

б) $q=\dfrac{2}{3}$, $S_4=65$, $65=\dfrac{b_1\left(\dfrac{16}{81}-1\right)}{\dfrac{2}{3}-1}=\dfrac{b_1\cdot 65\cdot 3}{81}$, $b_1=27$.

6. а) $x_n=2\cdot 3^n$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{2\cdot 3^{n+1}}{2\cdot 3^n}=3$, $\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\dfrac{2\cdot 3^{n+2}}{2\cdot 3^{n+1}}=3$, т.е. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$ для любого n, значит, $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия;

б) $x_n=2^n$ $\quad \frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=2$, значит, $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия;

в) $x_n=3^n-3$ $\quad x_1=0$, значит, $\{x_n\}$–не геометрическая прогрессия, т.к. у геометрической прогрессии $x_1 \neq 0$.

7. $\begin{cases} b_6-b_4=72 \\ b_3-b_5=9 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} b_1q^5-b_1q^3=72 \\ b_1q^2-b_1q^4=9 \end{array} \right.$; $\frac{b_1(q^5-q^3)}{b_1(q^2-q^4)}=8$; $\frac{q^3-q}{1-q^2}=8$;

$\frac{q(q^2-1)}{1-q^2}=8$; $q=\pm 1$ или $q=-8$.

Если $q=\pm 1$, то $b_6=b_4$ и $b_6-b_4=0 \neq 72$, значит, $q=\pm 1$ — не подходит;

$b_1=\frac{9}{q^2(1-q^2)}=-\frac{9}{64\cdot 63}=-\frac{1}{448}$; $S_8=\frac{8^8-1}{448\cdot 9}=\frac{1864135}{448}$.

8. $\begin{cases} b_1+b_2+b_3=13 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=91 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} b_1+b_1q+b_1q^2=13 \\ b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4=91 \end{array} \right.$; $\frac{b_1(1+q+q^2)}{b_1^2(1+q^2+q^4)}=\frac{1}{7}$;

$7(1+q+q^2)=b_1(1+q^2+q^4)$.

С-22

1. а) $b_1=36$, $b_2=12$, $q=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, $|q|<1$, $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{36\cdot 3}{2}=54$;

б) $b_1=\frac{1}{8}$, $b_2=\frac{1}{4}$, $q=2$, $q>1$, значит, это не бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

в) $b_1=0{,}6$; $b_2=-0{,}06$; $q=-\frac{0{,}06}{0{,}6}=-0{,}1$; $S=\frac{0{,}6}{1+0{,}1}=\frac{6}{11}$;

г) $b_1=\sqrt{2}$, $b_2=1$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|q|<1$; $S=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}$;

д) $b_1=3\sqrt{3}$, $b_2=3$, $q=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $|q|<1$; $S=\frac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{9}{\sqrt{3}-1}$;

е) $b_1=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $b_2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, $q=\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $|q|<1$;

$S=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\left(1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot 2}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

2. а) $S=8$, $q=\frac{1}{2}$, $8=\frac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=2b_1$, $b_1=4$; **б)** $S=54$, $q=-\frac{1}{3}$, $54=\frac{b_1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3b_1}{4}=$

$=b_1=72$; **в)** $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{1}{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{b_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3b_1}{2}$, $b_1=\sqrt{3}$; **г)** $S=2(\sqrt{2}+1)$,

$q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2(\sqrt{2}+1)=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{b_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $b_1=\sqrt{2}\,(2-1)=\sqrt{2}$.

3. а) $0{,}8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$; **б)** $0{,}(17)=0{,}171717\ldots=0{,}17+0{,}0017+0{,}000017+\ldots=$

$=\frac{0{,}17}{1-0{,}01}=\frac{0{,}17}{0{,}99}=\frac{17}{99}$; **в)** $2{,}(4)=2{,}4444\ldots=2+0{,}4+0{,}04+0{,}004+\ldots=2+\frac{0{,}4}{1-0{,}1}=$

$=2+\frac{0{,}4}{0{,}9}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9}$;

г) $3{,}(16)=3{,}161616\ldots=3+0{,}16+0{,}0016+\ldots=3+\frac{0{,}16}{1-0{,}01}=3+\frac{16}{99}=\frac{313}{99}$;

д) $0{,}4(5)=0{,}4555\ldots=0{,}4+0{,}05+0{,}005+\ldots=\frac{2}{5}+\frac{0{,}05}{1-0{,}1}=\frac{2}{5}+\frac{0{,}05}{0{,}9}=\frac{2}{5}+\frac{5}{90}=\frac{41}{90}$;

е) $0{,}6(12)=0{,}61212\ldots=0{,}6+0{,}012+0{,}00012+\ldots=\frac{3}{5}+\frac{0{,}012}{1-0{,}01}=$

$=\frac{3}{5}+\frac{0{,}012}{0{,}99}=\frac{3}{5}+\frac{12}{990}=\frac{3}{5}+\frac{6}{495}=\frac{3}{5}+\frac{2}{165}=\frac{101}{165}$.

4. $q=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $S=\frac{6(\sqrt{30}+5)}{5}$, $\frac{6(\sqrt{30}+5)}{5}=\frac{b_1}{1-\frac{\sqrt{3}}{6}}=\frac{6b_1}{6-\sqrt{3}}$,

$b_1=\frac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{30}+5)}{5}$, $b_3=b_1q^2=\frac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{30}+5)}{5}\cdot\frac{3}{36}=\frac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{30}+5)}{60}$.

5. Если сторона I квадрата a см, то сторона II квадрата $\frac{a}{\sqrt{2}}$ см (находится по теореме Пифагора), сторона III-го $\frac{a}{2}$ см и т.д. Т.е. периметры образуют геометрическую прогрессию. $b_1=4a$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a=8$ см;

$S=\frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{4a\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{4\cdot 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{32\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=32(2+\sqrt{2})$.

6. $b_2=24$, $S=108$, $b_1=\frac{b_2}{q}$, $S=b_1+\frac{b_2}{1-q}=\frac{b_2}{q}+\frac{b_2}{1-q}=b_2\cdot\frac{1}{q(1-q)}$,

$108=\frac{24}{q(1-q)}$, $9q(1-q)=2$, $9q^2-9q+2=0$, $D=81-4\cdot9\cdot2=9$, $q_1=\frac{9+3}{18}=\frac{2}{3}$,

$q_2=\frac{1}{3}$, $b_1=\frac{24\cdot3}{2}=36$ или $b_1=24\cdot3=72$. Ответ: 36 и $\frac{2}{3}$ или 72 и $\frac{1}{3}$

С-23

1. 1) а) $\sqrt{x}=9$, $x=81$; **б)** $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{4}$; **в)** $\sqrt{x}=0$, $x=0$.

2) а) $\sqrt{x-1}=2$, $x-1=4$, $x=5$; **б)** $\sqrt{2x+1}=0{,}5$, $2x+1=\frac{1}{4}$, $2x=-\frac{3}{4}$, $x=-\frac{3}{8}$;

в) $\sqrt{2-x}=0$, $2-x=0$, $x=0$.

3) а) $\sqrt{x+6}=x$, $x\geq0$, $x+6=x^2$, $x^2-x-6=0$, $D=1+4\cdot6=25$, $x_1=\frac{1+5}{2}=3$, $x_2<0$.

б) $\sqrt{3-2x}=x$, $x\geq0$, $3-2x=x^2$, $x^2+2x-3=0$, $D=4+4\cdot3=16$, $x_1=\frac{-2+4}{2}=1$, $x_2<0$.

в) $\sqrt{40-x^2}=3x$, $x\geq0$, $40-x^2=9x^2$, $10x^2=40$, $x^2=4$, $x=2$.

2. а) $\sqrt{x}=-1$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty]$; **б)** $\sqrt{2x}=0$ — есть корни;

в) $\sqrt{x-1}=-\sqrt{2}$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty]$;

г) $\sqrt{-5-x^2}=10$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty]$;

д) $\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{7x}=-0{,}5$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty]$;

е) $\sqrt{x-4}-3=0$ — есть корни.

3. 1) а) $\sqrt{3x^2+2x-8}=\sqrt{x^2+x-2}$, $3x^2+2x-8=x^2+x-2$, $2x^2+x-6=0$,

$D=1+4\cdot2\cdot6=49$, $x_1=\frac{-1+7}{4}=\frac{3}{2}$, $x_2=-2$.

Проверка: $x_1=\frac{3}{2}$, $\sqrt{3\cdot\frac{9}{4}+3-8}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}-2}$ — верно,

$x_2=-2$, $\sqrt{12-4-8}=\sqrt{4-2-2}$ — верно. Ответ: -2; $\frac{3}{2}$.

б) $\sqrt{5-4x}=2-x$, найдем $D(x):\begin{cases}5-4x\geq0\\2-x\geq0\end{cases}$; $\begin{cases}x\leq1{,}25\\x\leq2\end{cases}$, значит, $x\in(-\infty;1{,}25]$.

$5-4x=4-4x+x^2$; $x^2-1=0$; $x^2=1$; $x\pm1$.

Проверка: $x_1=1$, $\sqrt{5-4\cdot1}=2-1$ – верно,

$x_2=-1$, $\sqrt{5-4(-1)}=2+1$ – верно. Ответ: ±1.

2) а) $\sqrt{4x^2+7x}=x-2$, $4x^2+7x=x^2-4x+4$, $3x^2+11x-4=0$, $D=121+4\cdot3\cdot4=169$,

$x_1=\dfrac{-11+13}{6}=\dfrac{1}{3}$, $x_2=-4$.

Проверка: $x_1=\dfrac{1}{3}$, $\sqrt{4\cdot\dfrac{1}{9}+7\cdot\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}-2$ — ложно,

$x_2=-4$, $\sqrt{4\cdot16-7\cdot4}=-4-2$ — ложно. Ответ: нет корней.

б) $\sqrt{11x^2+24x-2}=2x+1$, $11x^2+24x-2=4x^2+4x+1$, $7x^2+20x-3=0$,

$D=400+4\cdot7\cdot3=484$, $x_1=\dfrac{-20+22}{14}=\dfrac{1}{7}$, $x_2=-3$.

Проверка: $x_1=\dfrac{1}{7}$, $\sqrt{11\cdot\dfrac{1}{49}+24\cdot\dfrac{1}{7}-2}=\dfrac{2}{7}+1$ — верно,

$x_2=-3$, $\sqrt{11\cdot9-24\cdot3-2}=-6+1$ — ложно. Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

4. а) $\sqrt{2-x}+0{,}01=0$, $\sqrt{2-x}=-0{,}01$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-3}=-2$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

в) $\sqrt{-x^2-5}=25$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

г) $\sqrt{2x-x^2-3}=7$, $-x^2+2x-3\geq0$, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$, $x^2-2x+3\leq0$,
$D=4-4\cdot3<0$, значит, у неравенства нет решений, следовательно нет корней и у уравнения.

5. 1) а) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}=2$, $\sqrt{x+13}=2+\sqrt{x+1}$, $x+13=4+x+1+4\sqrt{x+1}$,

$2=\sqrt{x+1}$, $x+1=4$, $x=3$.

Проверка: $\sqrt{3+13}-\sqrt{3+1}=2$ — верно. Ответ: 3.

б) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$, $3x+4+x-4+2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=4x$,

$\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0$, $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=4$.

Проверка: $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $\sqrt{-4+4}+\sqrt{-\dfrac{4}{3}-4}=2\sqrt{-\dfrac{4}{3}}$ — не имеет смысла,

$x_2=4$ $\sqrt{16}+0=2\sqrt{4}$ — верно. Ответ: 4.

2) а) $\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}$, $(4+x)(5-x)=8$, $20+x-x^2=8$, $x^2-x-12=0$,

$D=49$, $x_1=\dfrac{1+7}{2}=4$, $x_2=-3$. Проверка: $x_1=4$, $\sqrt{8}\cdot\sqrt{1}=2\sqrt{2}$ — верно,

$x_2=-3$, $\sqrt{1}\cdot\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ — верно. Ответ: –3; 4.

б) $\sqrt{8+x}\cdot\sqrt{8-x}=x$, $64-x^2=x^2$, $x^2=32$, $x_{1,2}=\pm 4\sqrt{2}$

Проверка: $x_1=4\sqrt{2}$, $\sqrt{8+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8-4\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ — верно,

$x_2=-4\sqrt{2}$, $\sqrt{8-4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8+4\sqrt{2}}=-4\sqrt{2}$ — ложно. Ответ: $4\sqrt{2}$

3) а) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$, $7-\sqrt{x+1}=4$, $\sqrt{x+1}=3$, $x+1=9$, $x=8$.

Проверка: $\sqrt{7-3}=2$ — верно. Ответ: 8.

б) $\sqrt{17+\sqrt{x}}=\sqrt{20-2\sqrt{x}}$, пусть $\sqrt{x}=y$, $y\ge 0$, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$. Тогда $\sqrt{17+y}=\sqrt{20-2y}$, $17+y=20-2y$, $3y=3$, $y=1$, $\sqrt{x}=1$, $x=1$.

Проверка: $\sqrt{17+1}=\sqrt{20-2}$ — верно. Ответ: 1.

С-24

1. 1) а) $f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
б) $f(-x)=(-x)^8-3(-x)^4=x^8-3x^4=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
в) $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
2) а) $g(-x)=-4(-x)^4+(-x)^2=-4x^4+x^2=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;
б) $g(-x)=(-x+2)(-x-3)-x=x^2+x-6-x=x^2-6$;
$g(x)=(x+2)(x-3)+x=x^2-x-6+x=x^2-6$; $g(-x)=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

в) $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)^4-(-x)^2-1}=\dfrac{1}{x^4-x^2-1}=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная.

2. 1) а) $f(-x)=(-x)^7=-x^7=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

б) $f(-x)=\dfrac{12}{-x}=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

в) $f(-x)=(-x)^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

2) а) $g(-x)=(-x)^9+\dfrac{1}{(-x)^5}=-(x^9+\dfrac{1}{x^5})=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

б) $g(-x)=(-x+2)^2-(-x-2)^2=(x-2)^2-(x+2)^2=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

в) $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)^9-x}=-\dfrac{1}{x^9+x}=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная.

3. $f(-3)=13$; **а)** $f(8)=f(-8)=13$; **б)** $f(8)=-f(-8)=-13$.

4. 1) а) $y(-x)=\dfrac{8}{(-x)^4}=\dfrac{8}{x^4}=y(x)$, значит, y — четная;

б) $y(-x)=-\dfrac{7}{(-x)^9}=\dfrac{7}{x^9}=-y(x)$, значит, y — нечетная;

в) $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^3-1}=\dfrac{1}{-x^3-1}\ne\pm y(x)$, значит, y — ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x)=\frac{1}{(-x)^4+1}=\frac{1}{x^4+1}=y(x)$, значит, y — четная;

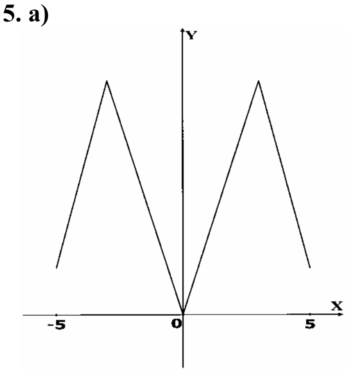
2) а) $y=\frac{x^4}{5x}=\frac{x^3}{5}$, $y(-x)=\frac{(-x)^3}{5}=\frac{-x^3}{5}=-y(x)$, значит, y — нечетная;

б) $y=\frac{7x}{x^5}=\frac{7}{x^4}$, $y(-x)=\frac{7}{(-x)^4}=\frac{7}{x^4}=y(x)$, значит, y — четная;

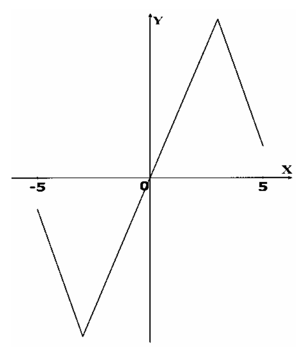
в) $y=\frac{x^3-2x^2}{3x-6}=\frac{x^2(x-2)}{3(x-2)}=\frac{x^2}{3}$, $y(-x)=\frac{(-x)^2}{3}=\frac{x^2}{3}=y(x)$, значит, y–четная

г) $y=\frac{5x+15}{x^2+3x}=\frac{5(x+3)}{x(x+3)}=\frac{5}{x}$, $y(-x)=\frac{5}{-x}=-\frac{5}{x}=-y(x)$, значит, y—нечетная.

5. а)

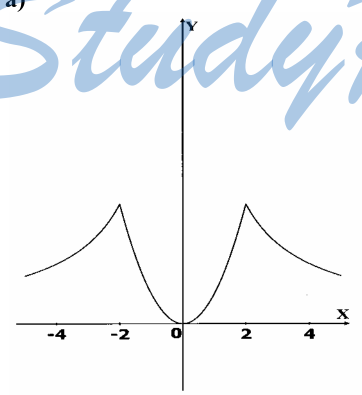


б)

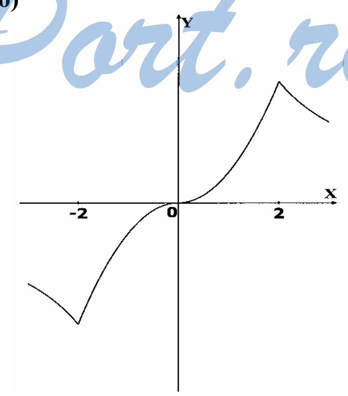


6. $g(x)=\begin{cases} 0{,}5x^2, & 0 \le x \le 2 \\ \frac{4}{x}, & x > 2 \end{cases}$.

а)



б)



7. а) $f(-x)=|-x+5|+|-x-5|=|x-5|+|x+5|=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
б) $f(-x)=|-x+5|-|-x-5|=|x-5|-|x+5|=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

в) $f(-x)=\dfrac{5(-x)^2}{(-x)^2-4}=\dfrac{5x^2}{x^2-4}=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;

г) $f(-x)=\dfrac{6(-x)^3}{(-x)^2-9}=-\dfrac{6x^3}{x^2-9}=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

д) $f(-x)=\dfrac{2(-x)^4}{(-x-2)^2}=\dfrac{2x^4}{(x+2)^2}\neq\pm f(x)$, значит, $f(x)$–ни четная, ни нечетная;

е) $f(-x)=\dfrac{(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{(-x)^2+4x+3}=\dfrac{-(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)}=-(x+2)$,

$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)}=x-2$, $f(-x)\neq\pm f(x)$, значит, $f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

С-25

1. $f(x)=x^{100}$; **1) а)** $f(0{,}125) < f(0{,}13)$, т.к. $|0{,}125| < |0{,}13|$;
б) $f(-245) > f(-239)$, т.к. $|-245| > |-239|$; **в)** $f(-5{,}7)=f(5{,}7)$, т.к. $|-5{,}7|=|5{,}7|$;
г) $f(-12{,}4) > f(10{,}7)$, т.к. $|-12{,}4| > |10{,}7|$; **2) а)** $f\left(\dfrac{2}{3}\right)>f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, т.к. $\left|\dfrac{2}{3}\right|>\left|\dfrac{3}{5}\right|$;

б) $f\left(-\dfrac{3}{7}\right)>f\left(-\dfrac{2}{5}\right)$, т.к. $\left|-\dfrac{3}{7}\right|>\left|-\dfrac{2}{5}\right|$; **в)** $f(-0{,}325)=f\left(\dfrac{13}{40}\right)$, т.к.$|-0{,}325|=\left|\dfrac{13}{40}\right|$;

г) $f\left(-\dfrac{4}{7}\right)>f(0{,}57)$, т.к. $\left|-\dfrac{4}{7}\right|>|0{,}57|$.

2. $g(x)=x^{105}$; **1) а)** $g(1{,}023) < g(1{,}13)$, т.к. $1{,}023 < 1{,}13$;
б) $g(-2{,}7) < g(-2{,}2)$, т.к.$-2{,}7 <-2{,}2$; **в)** $g(-4{,}1) < g(4{,}1)$, т.к.$-4{,}1 < 4{,}1$;
г) $g(20{,}8) > g(-21{,}3)$, т.к. $20{,}8 >-21{,}3$; **2) а)** $g\left(\dfrac{4}{7}\right)<g\left(\dfrac{3}{5}\right)$, т.к. $\dfrac{4}{7}<\dfrac{3}{5}$;

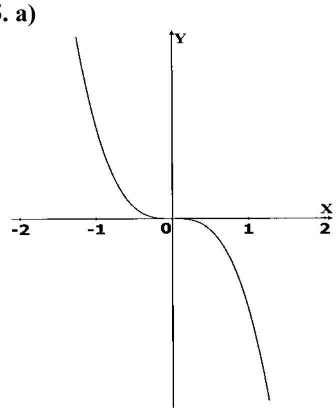
б) $g\left(-\dfrac{8}{11}\right)<g(-0{,}7)$, т.к. $-\dfrac{8}{11}<-0{,}7$; **в)** $g\left(-\dfrac{5}{7}\right)<\left(\dfrac{9}{13}\right)g$, т.к. $-\dfrac{5}{7}<\dfrac{9}{13}$;

г) $g\left(-\dfrac{19}{25}\right)=-g(0{,}76)$, т.к. $-\dfrac{19}{25}=-0{,}76$.

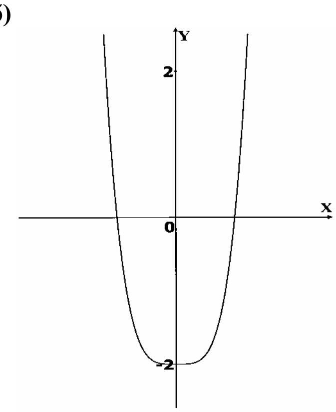
3. $x^n=2500$; **а)** 2 корня; **б)** 1 корень.

4. а) $x^3=-27$, $x=-3$; **б)** $x^3=\dfrac{8}{125}$, $x=\dfrac{2}{5}$;
в) $x^4=-81$ нет корней, т.к. $E(x^4)=[0;+\infty)$;
г) $x^4=625$; $x=\pm5$.

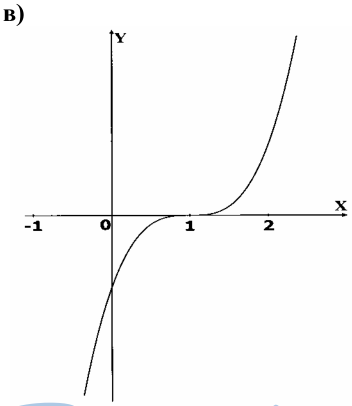
5. а)



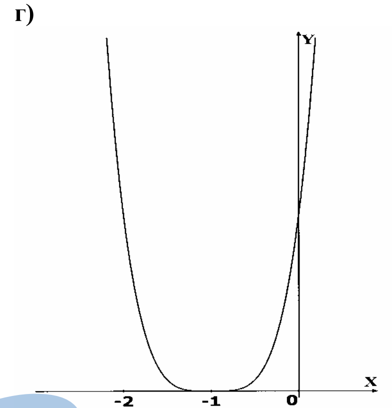
б)



в)



г)



6. а) $x^4=32x+5$ два корня; **б)** $x^4=0,5x-8$ нет корней; **в)** $x^3=32x+5$ три корня; **г)** $x^3=0,5x-8$ один корень.

7. а) $y=x^9$; $548,471=(-2,1)^9$ — ложно, значит, точка A не принадлежит графику; $-10,8973=(-0,973)^9$ — ложно, значит, точка B не принадлежит графику; **б)** $y=x^8$; $0,98746=1,2^8$ — ложно, значит, точка C не принадлежит графику; $250,4781=(-2,01)^8$ — ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

С-26

1. 1) а) $\sqrt{0,16}=0,4$; **б)** $\sqrt[3]{216}=6$; **в)** $\sqrt[4]{0,0001}=0,1$; **г)** $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$;

2) а) $6\sqrt[3]{0,125}=6\cdot 0,5=3$; **б)** $0,7\sqrt[4]{81}=0,7\cdot 3=2,1$;

в) $4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = 4\cdot\frac{3}{2} = 6$; **г)** $6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} = 6\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -8$.

2. 1) а) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; **б)** $\sqrt[5]{0{,}00032} + \sqrt[3]{-0{,}008} = 0{,}2 - 0{,}2 = 0$;

в) $1{,}5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = 1{,}5\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$;

2) а) $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$; **б)** $\sqrt[3]{0{,}216} - \sqrt[5]{-0{,}01024} = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$;

в) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt{12{,}25} = \frac{3}{5} + 3{,}5 = 0{,}6 + 3{,}5 = 4{,}1$.

3. а) $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$; **б)** $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{27} = 3$; **в)** $0 < \sqrt[4]{0{,}8} < 1$;

г) $1 < \sqrt[5]{30} < \sqrt[5]{32} = 2$.

4. 1) а) $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$; **б)** $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$; **в)** $\left(-\sqrt[4]{21}\right)^4 = 21$; **г)** $-\sqrt[4]{21^4} = -21$;

д) $\left(-\sqrt[5]{2}\right)^5 = -2$;

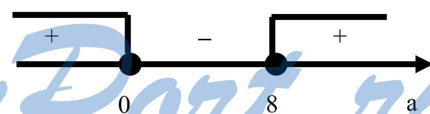
2) а) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3 = 8\cdot 3 = 24$; **б)** $\left(-3\sqrt[4]{5}\right)^4 = 81\cdot 5 = 405$; **в)** $\left(-\sqrt[5]{14}\right)^5 = -14$;

г) $-2\sqrt[5]{7^5} = -14$; **д)** $\left(-\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$.

5. а) $x^3=5$, $x=\sqrt[3]{5}$; **б)** $x^6=17$, $x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{17}$; **в)** $\frac{1}{8}x^2-2=0$, $x^4=16$, $x_{1,2}=\pm 2$;

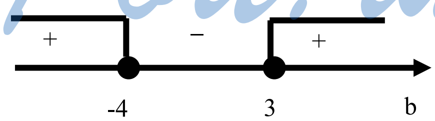
г) $\frac{1}{2}x^5+16=0$, $x^5=-32$, $x=-2$.

6. а) $\sqrt[10]{y-3}$, $y-3\ge 0$, $y\ge 3$; **б)** $\sqrt[9]{x+5}$, x–любое; **в)** $\sqrt[6]{a(a-8)}$, $a(a-8)\ge 0$;



$a \in (-\infty; 0] \cup [8;+\infty)$;

г) $\sqrt[8]{b^2+b-12}$, $b^2+b-12 \ge 0$,



$D=1+4\cdot 12=49$,

$b_1=\frac{-1+7}{2}=3$, $b_2=-4$;

$b \in (-\infty;-4] \cup [3;+\infty)$.

7. а) $x^{10}-31x^5-32=0$ $x^5=y$, тогда $y^2-31y-32=0$, $D=961+4\cdot 32=1089$,

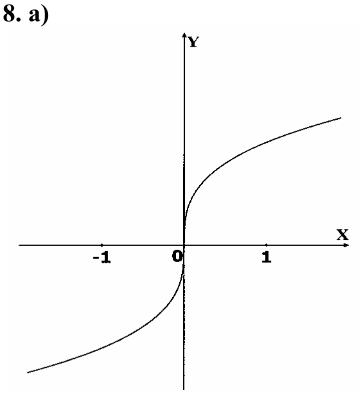
$y_1=\frac{31+33}{2}=32$, $y_2=-1$, $x^5=32$, $x=2$, $x^5=-1$, $x=-1$. Ответ: -1 ; 2.

б) $x^8-82x^4+81=0$, $x^4=y$, тогда $y^2-82y+81=0$, $D=6724-4\cdot 81=6400$,

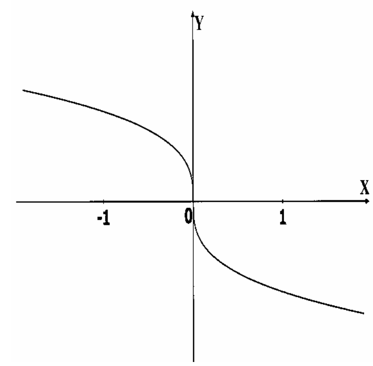
$y_1=\frac{82+80}{2}=81$, $y_2=1$, $x^4=81$, $x_{1,2}=\pm 3$, $x^4=1$, $x_{3,4}=\pm 1$. Ответ: ± 3 ; ± 1.

в) $x^4+2x^2-15=0$ $x^2=y$, тогда $y^2+2y-15=0$, $D=4+4\cdot15=64$,
$y_1=\frac{-2+8}{2}=3$, $y_2=-5$, $x^2=3$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x^2=-5$ – нет корней. Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

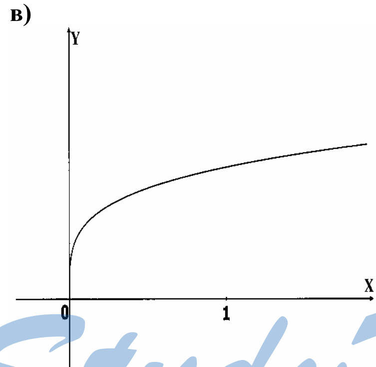
8. а)



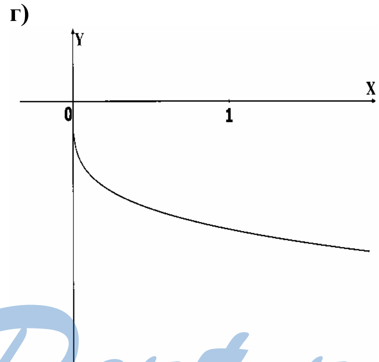
б)



в)



г)



С-27

1. а) $\sqrt[4]{16\cdot81}=2\cdot3=6$; **б)** $\sqrt[3]{2^6\cdot5^3}=2^2\cdot5=20$; **в)** $\sqrt[5]{0{,}00032\cdot5^{10}}=0{,}2\cdot5^2=5$;
г) $\sqrt[6]{\frac{3^6}{5^{12}}}=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$; **д)** $\sqrt[4]{\frac{7^8}{0{,}0625}}=\frac{7^2}{0{,}5}=98$; **е)** $\sqrt[7]{\frac{2^7\cdot3^{21}}{5^{14}}}=\frac{2\cdot3^3}{5^2}=\frac{54}{25}$.

2. а) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{4\cdot8}=\sqrt[5]{2^5}=2$; **б)** $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot3}=\sqrt[4]{3^4}=3$;
в) $\sqrt[3]{50}\cdot\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{50\cdot20}=\sqrt[3]{1000}=10$; **г)** $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}=\frac{3}{5}$;

д) $\sqrt[5]{9^5\cdot 2^3}\cdot\sqrt[5]{2^7}=9\cdot\sqrt[5]{2^3\cdot 2^7}=9\cdot\sqrt[5]{2^{10}}=9\cdot 2^2=36$;

е) $\sqrt[8]{3^{13}}\cdot\sqrt[8]{5^8\cdot 3^3}=5\cdot\sqrt[8]{3^{13}\cdot 3^3}=5\cdot\sqrt[8]{3^{16}}=5\cdot 3^2=45$.

3. а) $\sqrt{36x^2}=6x$; **б)** $\sqrt[3]{27y^6}=3y^2$; **в)** $\sqrt[5]{32x^5y^{15}}=2xy^3$; **г)** $\sqrt[4]{\dfrac{16x^8y^4}{625}}=\dfrac{2x^2y}{5}$.

4. а) $\sqrt{16a}=4\sqrt{a}$; **б)** $\sqrt{50b^3}=5b\sqrt{2b}$; **в)** $\sqrt[3]{40\cdot c^5}=\sqrt[3]{8\cdot 5\cdot c^3\cdot c^2}=2c\sqrt[3]{5c^2}$;

г) $\sqrt[4]{243x^7}=\sqrt[4]{81\cdot 3x^4\cdot x^3}=3x\sqrt[4]{3x^3}$.

5. а) $4\sqrt{3x}=\sqrt{16\cdot 3x}=\sqrt{48x}$; **б)** $2\sqrt[3]{2y}=\sqrt[3]{8\cdot 2y}=\sqrt[3]{16y}$;

в) $a\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3a^4}$; **г)** $b\sqrt[5]{4b^2}=\sqrt[5]{b^5\cdot 4b^2}=\sqrt[5]{4b^7}$.

6. а) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}=\sqrt{16-7}=3$;

б) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}=\sqrt[3]{\left(7-\sqrt{22}\right)\left(7+\sqrt{22}\right)}=\sqrt[3]{49-22}=3$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt{629}-2}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{629}+2}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{629}-2\right)\left(\sqrt{629}+2\right)}=\sqrt[4]{629-4}=5$.

7. а) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ — верно при $a, b\ge 0$;

б) $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$ — верно при $a\le 0$, $b\ge 0$;

в) $\sqrt{a^3b^3}=ab\sqrt{ab}$ — верно при $ab\ge 0$, т.е. при $a, b\ge 0$ или $a, b\le 0$.

8. а) $\sqrt{8xy^2}=-2y\sqrt{2x}$; **б)** $\sqrt[4]{-81a^5}=\sqrt[4]{-3^4\cdot a^4\cdot a}=-3a\sqrt[4]{-a}$;

в) $\sqrt[6]{a^7b^7}=\sqrt[6]{a^6\cdot b^6ab}=|a||b|\sqrt[6]{ab}=ab\sqrt[6]{ab}$.

9. а) $x\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{x^2}}=\sqrt[3]{2x}$; **б)** $ax\sqrt{\dfrac{7}{ax}}=\sqrt{\dfrac{7a^2x^2}{ax}}=\sqrt{7ax}$;

в) $by\sqrt[4]{\dfrac{3}{b^2y^3}}=\sqrt[4]{\dfrac{3b^4y^4}{b^2y^3}}=\sqrt[4]{3b^2y}$.

10. $8b\sqrt[5]{3b^{-4}}-3\sqrt[5]{96b}-b^2\sqrt[5]{3b^{-9}}=8\sqrt[5]{3b^5\cdot b^{-4}}-3\sqrt[5]{32\cdot 3b}-\sqrt[5]{b^{10}\cdot 3b^{-9}}=$

$=8\sqrt[5]{3b}-3\cdot 2\sqrt[5]{3b}-\sqrt[5]{3b}=\sqrt[5]{3b}$.

С-28

1. а) $\sqrt{\dfrac{3}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; **б)** $\sqrt[3]{\dfrac{4}{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{5}$; **в)** $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^4}}=\dfrac{1}{a}$; **г)** $\sqrt[5]{\dfrac{8}{b^{15}}}=\dfrac{\sqrt[5]{8}}{b^3}$.

2.а) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$; **б)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$;

в) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{7\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}}=\dfrac{7}{4}\cdot\sqrt[3]{16}$; **г)** $\dfrac{4}{\sqrt[4]{125}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[4]{125^3}}{\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[4]{125^3}}=\dfrac{4}{125}\cdot\sqrt[4]{1953125}$;

д) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{16}}=\dfrac{6\cdot\sqrt[5]{16^4}}{\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{16^4}}=\dfrac{6\sqrt[5]{65536}}{16}=\dfrac{3}{8}\sqrt[5]{65536}$.

3. а) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$; **б)** $\sqrt[4]{\sqrt{2}}=\sqrt[8]{2}$; **в)** $\sqrt[10]{6^5}=\sqrt{6}$; **г)** $\sqrt[7]{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{81}}=\sqrt[3]{3}$;

д) $\sqrt[6]{c^3}=\sqrt{c}$; **е)** $\sqrt{a\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt{a^3}}=\sqrt[4]{a^3}$; **ж)** $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^5}}=\sqrt[12]{b^5}$;

з) $\sqrt[9]{x^2\sqrt[4]{x}}=\sqrt[9]{\sqrt[4]{x^8\cdot x}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{x^9}}=\sqrt[4]{x}$.

4. а) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[6]{15}$, $\sqrt[6]{4^2}>\sqrt[6]{15}$, $\sqrt[6]{16}>\sqrt[6]{15}$; **б)** $\sqrt[5]{3}>\sqrt[15]{26}$, $\sqrt[15]{3^3}>\sqrt[15]{26}$, $\sqrt[15]{27}>\sqrt[15]{26}$; **в)** $\sqrt[6]{4}=\sqrt[9]{8}$, $\sqrt[18]{4^3}=\sqrt[18]{8^2}$, $\sqrt[18]{64}=\sqrt[18]{64}$; **г)** $\sqrt[4]{3}<\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$, $\sqrt[12]{3^3}<\sqrt[12]{\left(2\sqrt{7}\right)^2}$, $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{28}$.

5. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{3^2}$, $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{4}$ значит, $\sqrt[6]{4}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.

6. а) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-\left(\sqrt[6]{y}\right)^3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}=\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}}$.

7. а) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}=0$, $\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-5\right)=0$, $\sqrt[4]{x}=0$, $x=0$, $\sqrt[4]{x}-5=0$, $\sqrt[4]{x}=5$ $x=625$; **б)** $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=0$, $\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[6]{x}+2\right)=0$, $\sqrt[6]{x}=0$, $\sqrt[6]{x}=-2$ — нет корней. $x=0$.

в) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0$; $\sqrt[4]{x}=y$, тогда $y^2-5y+6=0$; $D=1$, $y_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$;

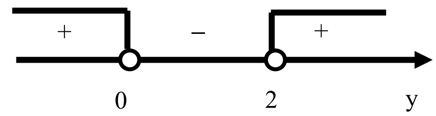
$\sqrt[4]{x}=3$, $x_1=81$, $\sqrt[4]{x}=2$, $x_2=16$;

г) $\sqrt[5]{x}+3\sqrt[10]{x}-10=0$, $\sqrt[10]{x}=y$, тогда $y^2+3y-10=0$, $D=49$, $y_1=\dfrac{-3+7}{2}=2$, $y_2=-5$, $\sqrt[10]{x}=2$, $x=2^{10}=1024$, $\sqrt[10]{x}=-5$ — нет корней. Ответ: 1024.

8. а) $x-2\sqrt{x}>0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2-2y>0$, $y(y-2)>0$, $y<0$, $y>2$,

$\sqrt{x} < 0$ — нет решений,

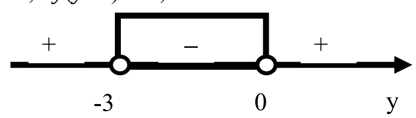
$\sqrt{x} > 2$, $x > 4$.



Ответ: $(4;+\infty)$.

б) $x + 3\sqrt{x} < 0$, $\sqrt{x} = y$, $y^2 + 3y < 0$, $y(y+3) < 0$,

$-3 < y < 0$, $-3 < \sqrt{x} < 0$,



нет решений.

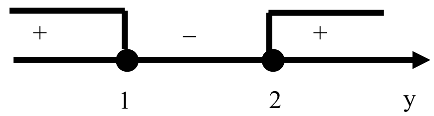
Ответ: нет решений.

в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 \geq 0$, $\sqrt[4]{x} = y$, $y^2 - 3y + 2 \geq 0$,

$D=1$, $y_1 = \frac{3+1}{2} = 2$, $y_2 = 1$,

$\sqrt[4]{x} \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$,

$\sqrt[4]{x} \geq 2$, $x \geq 16$.



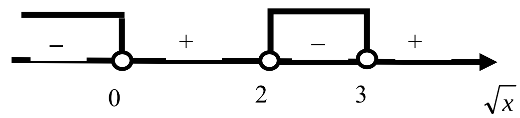
Ответ: $[0; 1] \cup [16;+\infty)$.

г) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} - 3\right) < 0$,

$\sqrt{x} < 0$ — нет решений,

$2 < \sqrt{x} < 3$, $4 < x < 9$.

Ответ: $(4; 9)$.



С-29

1. а) $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$; **б)** $3^{-1} = \frac{1}{3}$; **в)** $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; **г)** $2b^{-1}c = \frac{2c}{b}$;

д) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$.

2. 1) а) $\frac{1}{3^7} = 3^{-7}$; **б)** $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$; **в)** $\frac{1}{2} = 2^{-1}$; **г)** $\frac{1}{100} = 10^{-2}$;

д) $0{,}000001 = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$;

2) а) $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{12^3} = 12^{-3}$; **б)** $\frac{1}{a^5b^5} = \frac{1}{(ab)^5} = (ab)^{-5}$;

в) $\frac{1}{(x-y)(x+y)} = \left((x-y)(x+y)\right)^{-1}$; **г)** $\frac{1}{(x+y)(x+y)} = \frac{1}{(x+y)^2} = (x+y)^{-2}$.

3. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{4}\right)^5 > 1$; **б)** $0{,}127^\circ = 1$; **в)** $10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} < 1$;

г) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{11}\right)^2 < 1$.

4. 1) а) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$; **б)** $(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$; **в)** $1^{-7}=\frac{1}{1^7}=1$;

г) $(-5{,}3)^0=1$; **д)** $-13{,}1^0=-1$;

2) а) $(-0{,}2)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}2)^3}=-\frac{1}{0{,}008}$; **б)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16$;

в) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{4}$; **г)** $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{10}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{10}\right)^{2}=0{,}3^2=0{,}09$;

3) а) $3^4\cdot 3^{-13}\cdot 3^{-5}\cdot 3^{11}=3^{4-13-5+11}=3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$; **б)** $8^{-6}:8^{-7}=8^{-6+7}=8$;

в) $(0{,}1)^2:(0{,}1)^{-2}=0{,}1^{2+2}=0{,}1^4=0{,}0001$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-7+5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$.

4) а) $2^{-1}+(-3)^{-3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{27}=\frac{25}{54}$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-4^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}-\frac{1}{4^2}=\frac{27}{8}-\frac{1}{16}=\frac{53}{16}$;

в) $(-0{,}1)^{-4}+(-0{,}2)^{-4}=\frac{1}{(-0{,}1)^4}+\frac{1}{(-0{,}2)^4}=\frac{1}{0{,}0001}+\frac{1}{0{,}0016}=$

$=10000+625=10625$;

г) $(0{,}2)^{-2}+(0{,}5)^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=5^2+2^2=25+4=29$;

5) а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-4^{-3}:4^{-5}=4^2-4^{-3+5}=4^2-4^2=0$;

б) $2^{-2}:2^{-4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=2^{-2+4}-2^4=2^2-2^4=4-16=-12$;

в) $2{,}7\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^4=2{,}7\cdot 2\cdot 10^{-4+4}=5{,}4\cdot 10^0=5{,}4$.

5. а) $(a^{-1}+a^{-2})^2-\frac{2}{a^3}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)^2-\frac{2}{a^3}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}+\frac{2}{a^3}-\frac{2}{a^3}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}$;

б) $(x^{-2}-x^{-1})^3=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^3=\left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)^3=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{(1-x)^3}{x^3}=\frac{(1-x)^3}{x^6}$;

в) $(a^{-2}-b^{-2}):(a^{-2}+b^{-2})=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=$

$=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}:\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

С-30

1. а) $(x-y)^{-3}=\dfrac{1}{(x-y)^3}$; **б)** $2(bc)^{-1}=\dfrac{2}{bc}$; **в)** $a-a^{-1}=a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}$;

г) $a^{-2}-a^{-1}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-a}{a^2}$; **д)** $a^{-3}-b^{-3}=\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}=\dfrac{b^3-a^3}{a^3b^3}$.

2. а) $(a^2)^{-2}=a^{2\cdot(-2)}=a^{-4}$; **б)** $(cb^{-2})^{-2}=c^{-2}\cdot b^4$; **в)** $(2c^{-3})^3=8c^{-9}$; **г)** $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^{-1}=\dfrac{b^2}{a^3}$;

д) $\left(\dfrac{2x^{-4}}{y^3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{y^3}{2x^{-4}}\right)^2=\left(\dfrac{x^4y^3}{2}\right)^2=\dfrac{x^8y^6}{4}$.

3. а) $16^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-6}=(4^2)^{-5}\cdot 4^6=4^{-4}\cdot 4^6=4^2=16$;

б) $9^{-2}\cdot 27^2=(3^2)^{-2}\cdot(3^3)^2=3^{-4}\cdot 3^6=3^2=9$;

в) $15^{-3}:5^{-4}=(3\cdot 5)^{-3}:5^{-4}=3^{-3}\cdot 5^{-3}:5^{-4}=3^{-3}\cdot 5=\dfrac{5}{27}$;

г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-7}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{7}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}=\dfrac{8}{27}$;

д) $\dfrac{3^{-2}\cdot 9^3}{27}=\dfrac{3^{-2}\cdot(3^2)^3}{3^3}=\dfrac{3^{-2}\cdot 3^6}{3^3}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$.

4. а) $(a^{-2}-b^{-2})a^2b^2=\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)a^2b^2=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot a^2b^2=b^2-a^2$;

б) $(x+y)^2\cdot(x+y)^{-1}=x+y$; **в)** $a^8(a^{-2}-a^{-4})(a^4+a^5)^{-1}=\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^4}\right)\cdot\dfrac{1}{a^4+a^5}=$

$=a^8\cdot\dfrac{a^2-1}{a^4}\cdot\dfrac{1}{a^4+a^5}=a^4\cdot\dfrac{(a-1)(a+1)}{a^4(1+a)}=a-1$.

5. $(9x^{-3}-x^{-3}y^{-2})\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3}=x^{-3}(9-y^2)\cdot\dfrac{1}{x^{-3}}=9-y^2=9-5^2=9-25=-16$.

6. 1) а) $10000^3=(10^4)^3=10^{12}$; **б)** $0{,}002^2=(2\cdot 10^{-3})^2=4\cdot 10^{-6}$;

в) $2000^{-2}=(2\cdot 10^3)^{-2}=\dfrac{1}{4}\cdot 10^{-6}=0{,}25\cdot 10^{-6}=2{,}5\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-6}=25\cdot 10^{-7}$;

г) $0{,}001^{-3}=(10^{-3})^{-3}=10^9$.

2) а) $0{,}000021=2{,}1\cdot 10^{-5}$; **б)** $0{,}0000002081=2{,}081\cdot 10^{-7}$;

в) $\dfrac{1}{64}=0{,}015625=1{,}5625\cdot 10^{-2}$; **г)** $\dfrac{1}{256}=0{,}00390625=3{,}90625\cdot 10^{-3}$.

7. а) $(3x^{-2}-2)(2+3x^{-2})=\left(\frac{3}{x^2}-2\right)\left(\frac{3}{x^2}+2\right)=\left(\frac{3}{x^2}\right)^2-2^2=\frac{9}{x^4}-4$;

б) $(a^{-1}-3)(a^{-2}+(\frac{1}{3}a)^{-1}+9)=(a^{-1}-3)((a^{-1})^2+3\cdot a^{-1}+3^2)=(a^{-1})^3-3^3=a^{-3}-27$;

в) $(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-(ab)^{-1}+b^{-2})=(a^{-1}+b^{-1})((a^{-1})^2-a^{-1}b^{-1}+(b^{-1})^2)=(a^{-1})^3+(b^{-1})^3=$
$=a^{-3}+b^{-3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}$.

С-31

1. 1) а) $5^{1/2}=\sqrt{5}$; $3^{2/3}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$; $10^{-1/4}=\sqrt[4]{10^{-1}}=\sqrt[4]{0,1}$;
$17^{-1/5}=\sqrt[5]{17^{-1}}=\sqrt[4]{0,1}$; **б)** $x^{0,5}=x^{1/2}=\sqrt{x}$; $y^{1,5}=y^{3/2}=\sqrt{y^3}$;
$b^{-0,5}=b^{-1/2}\sqrt{b^{-1}}$;

2) а) $5x^{1/4}=5\sqrt[4]{x}$; $-3y^{2/3}=-3\sqrt[3]{y^2}$; $(2a)^{0,5}=(2a)^{1/2}=\sqrt{2a}$;
$(3b)^{-1,5}=(3b)^{-3/2}=\sqrt{(3b)^{-3}}$; **б)** $(a-b)^{3/5}=\sqrt[5]{(a-b)^3}$;
$a^{3/4}-b^{3/4}=\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}$; $ax^{1,5}+b^{1,5}=ax^{3/2}+b^{3/2}=a\sqrt{x^3}+\sqrt{b^3}$.

2. 1) а) $\sqrt{3}=3^{1/2}$; $\sqrt[3]{5}=5^{1/3}$; $\sqrt[4]{2}=2^{1/4}$; $\sqrt[5]{9^2}=9^{2/5}$;
б) $\sqrt[3]{a^2}=a^{2/3}$; $\sqrt[10]{b^3}=b^{3/10}=b^{0,3}$; $\sqrt[8]{2x}=(2x)^{1/8}$;
$\sqrt[6]{8x^3}=(8x^3)^{1/6}=((2x)^3)^{1/6}=(2x)^{1/2}$;

2) а) $\sqrt[4]{3^{-1}}=3^{-1/4}$; $\sqrt[7]{27}=\sqrt[7]{3^3}=3^{3/7}$; $\sqrt[15]{8^2}=8^{2/15}=(2^3)^{2/15}=2^{2/5}$;
$\sqrt[20]{25^3}=25^{3/20}=(5^2)^{3/20}=5^{0,3}$; **б)** $\sqrt[4]{x^{-3}}=x^{-3/4}$; $\sqrt[5]{(a+b)^2}=(a+b)^{2/5}$;
$\sqrt[5]{a^2+b^2}=(a^2+b^2)^{1/5}$.

3. а) $9^{1/2}=(3^2)^{1/2}=3$; **б)** $36^{-1/2}=\frac{1}{36^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{36}}=\frac{1}{6}$;

в) $2\cdot125^{-1/3}=2\cdot\frac{1}{125^{1/3}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{125}}=\frac{2}{5}$;

г) $-4\cdot0,01^{-3/2}=-4\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{-3/2}=-4\cdot100^{3/2}=-4\cdot(10^2)^{3/2}=-4\cdot10^3=-4000$;

2) а) $0,125^{-1/3}=(0,5^3)^{-1/3}=0,5^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$; **б)** $0,00032^{0,4}=(0,2^5)^{0,4}=0,2^2=0,04$;

в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-2/3}=\left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right)^{-2/3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}$;

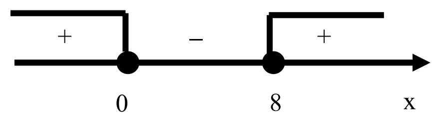
г) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-1/6}=\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/6}=\left(\frac{27}{64}\right)^{1/6}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right)^{1/6}=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. а) $0 \le x \le 0{,}00032$; $0 \le x^{0,4} \le (0{,}00032)^{0,4}$; $0 \le x^{0,4} \le 0{,}04$;
б) $1 \le x \le 243$; $1 \le x^{0,4} \le 243^{0,4}$; $243^{0,4}=(3^5)^{2/5}=9$; $1 \le x^{0,4} \le 9$;
в) $0{,}00001 \le x \le 1$; $(0{,}00001)^{0,4} \le x^{0,4} \le 1$; $0{,}00001^{0,4}=(10^{-5})^{2/5}=10^{-2}=0{,}01$; $0{,}01 \le x^{0,4} \le 1$; **г)** $243 \le x \le 1024$; $243^{0,4} \le x^{0,4} \le 1024^{0,4}$; $1024^{0,4}=(2^{10})^{2/5}=2^4=16$; $9 \le x^{0,4} \le 16$.

5. а) $y=x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$, $D(y)=R$; **б)** $y=x^{-0,6}=x^{-3/5}=\frac{1}{x^{3/5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$,

$D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$; **в)** $y=(x-8)^{-0,9}=\frac{1}{(x-8)^{0,9}}=\frac{1}{\sqrt[10]{(x-8)^9}}$,

$(x-8)^9>0$, $x-8>0$, $x>8$, значит, $D(y)=(8;+\infty)$; **г)** $y=(x^2-8x)^{1/4}=\sqrt[4]{x^2-8x}$,
$x^2-8x \ge 0$, $x(x-8)\ge 0$.



$D(y)=(-\infty;\,0]\cup[8;+\infty)$.

6. а) $x^{1/2}=3$, $\sqrt{x}=3$, $x=9$; **б)** $x^{1/5}=2$, $\sqrt[5]{x}=2$, $x=32$; **в)** $(x-3)^{1/2}=5$, $\sqrt{x-3}=5$, $x-3=25$, $x=28$; **г)** $(x+2)^{1/3}=0$, $x+2=0$, $x=-2$; **д)** $(x^2-9)^{0,5}=\sqrt{7}$, $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}$, $x^2-9=7$, $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm 4$; **е)** $(x^2-6x)^{1/3}=3$, $\sqrt[3]{x^2-6x}=3$, $x^2-6x=27$, $x^2-6x-27=0$, $D=36+4\cdot 27=144$, $x_1=\frac{6+12}{2}=9$, $x_2=-3$.

С-32

1. 1) а) $x^{1/2}\cdot x^{1/3}=x^{1/2+1/3}=x^{5/6}$; **б)** $(x^{1/2})^{1/3}=x^{1/6}$; **в)** $x^{1/2}:x^{1/3}=x^{1/2-1/3}=x^{1/6}$;
г) $y:y^{2/3}=y^{1-2/3}=y^{1/3}$; **д)** $x^{1/2}\,x^{1/6}\,x^{-1/3}=x^{1/2+1/6-1/3}=x^{1/3}$;

2) а) $(y^{0,7})^{0,5}\cdot y^{0,15}=y^{0,35}\cdot y^{0,15}=y^{0,5}$; **б)** $(y^{5/7})^{1,4}\cdot(y^{-3/8})^{2,4}=y\cdot y^{-\frac{3\cdot 2,4}{8}}=y\cdot y^{-0,9}=y^{0,1}$;

в) $\frac{y^{5/6}\cdot y^{2/3}}{y^{-0,5}}=\frac{y^{3/2}}{y^{-1/2}}=y^2$; **г)** $\frac{y^{3,5}\cdot y^{-2,7}}{y^{2,9}\cdot y^{-3,1}}=\frac{y^{0,8}}{y^{-0,2}}=y$.

2. 1) а) $(2^{0,5})^{-0,5}\cdot(0{,}5)^{-1,25}=2^{-0,25}\cdot(2^{-1})^{-1,25}=2^{-0,25}\cdot 2^{1,25}=2$;
б) $(3^{-1/9})^{1,8}\cdot 9^{0,1}=3^{-0,2}\cdot(3^2)^{0,1}=3^{-0,2}\cdot 3^{0,2}=1$;

2) а) $16^{0,125}\cdot 8^{-5/6}\cdot 4^{2,5}=(2^4)^{0,125}\cdot(2^3)^{-5/6}\cdot(2^2)^{2,5}=2^{0,5}\cdot 2^{-5/2}\cdot 2^5=2^3=8$;

б) $\dfrac{81^{0,4}\cdot 3^{0,5}}{9^{0,3}\cdot 27^{1/6}}=\dfrac{(3^4)^{0,4}\cdot 3^{0,5}}{(3^2)^{0,3}\cdot(3^3)^{1/6}}=\dfrac{3^{1,6}\cdot 3^{0,5}}{3^{0,6}\cdot 3^{0,5}}=3$.

3. $a^4=(a^2)^2$; $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2$; $a^3=(a^{3/2})^2$; $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$; $a^{1/2}=(a^{1/4})^2$;
$a^{1/3}=(a^{1/6})^2$; $a^{3/7}=(a^{3/14})^2$.

4. $b^6=(b^2)^3$; $b^{-9}=(b^{-3})^3$; $b^{1/2}=(b^{1/6})^3$; $b^{1/3}=(b^{1/9})^3$; $b^{2/5}=(b^{2/15})^3$.

5. а) $(x^{1/2}-3)\cdot 2x^{1/2}+6x^{1/2}=x^{1/2}(2x^{1/2}-6+6)=2x$;

б) $(x^{0,5}-y^{0,5})(x^{0,5}+y^{0,5})=(x^{0,5})^2-(y^{0,5})^2=x-y$;

в) $(1-x^{0,5})^2+2x^{0,5}=1-2x^{0,5}+x+2x^{0,5}=1+x$;

г) $(y^{1/3}-1)(y^{2/3}+y^{1/3}+1)=(y^{1/3})^3-1^3=y-1$.

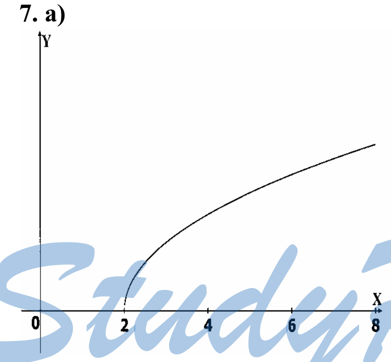
6. а) $x=a^{0,25}$, $y=a^{-0,25}$; $x\cdot y=a^{0,25}\cdot a^{-0,25}=a^0=1$, т.е. $\underline{xy=1}$; **б)** $x=a^{1/3}$, $y=a^{1/6}$;
$x\cdot y^{-2}=a^{1/3}\cdot(a^{1/6})^{-2}=a^{1/3}\cdot a^{-1/3}=1$, т.е. $xy^{-2}=1$; $x=y^2$;

в) $x=a^{1/4}$, $y=\sqrt{1-a^{0,5}}$; $x^2+y^2=(a^{1/4})^2+\left(\sqrt{1-a^{0,5}}\right)^2=a^{0,5}+1-a^{0,5}=1$,

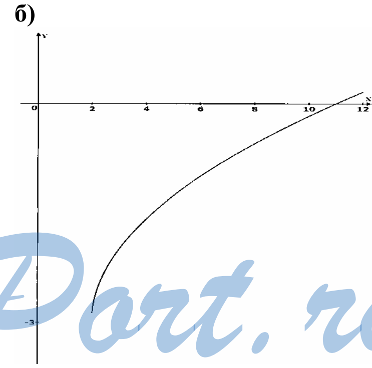
т.е. $\underline{x^2+y^2=1}$;

г) $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{a-3}$; $x^2-y^2=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{a-3}\right)^2=a-(a-3)=3$, т.е. $\underline{x^2-y^2=3}$.

7. а)



б)



С-33

1. 1) а) $x+3x^{1/2}=x^{1/2}(x^{1/2}+3)$; **б)** $y^{1/2}-2y^{1/4}=y^{1/4}(y^{1/4}-2)$;

в) $(a^{1/2})^2-4=(a^{1/2}-2)(a^{1/2}+2)$; **г)** $(b^{1/2})^3+8=(b^{1/2}+2)(b-2b^{1/2}+4)$;

д) $x^{2/3}-y^{2/3}=(x^{1/3}-y^{1/3})(x^{1/3}+y^{1/3})$;

е) $a^{3/2}-b^{3/2}=(a^{1/2})^3-(b^{1/2})^3=(a^{1/2}-b^{1/2})(a+a^{1/2}\,b^{1/2}+b)$;

2) а) $a^{1/2}-2a^{1/4}=a^{1/4}(a^{1/4}-2)$; **б)** $b^{3/4}+b^{1/2}=b^{1/2}\,(b^{1/4}+1)$;

в) $ax^{1/6}-ax^{1/3}=ax^{1/6}(1-x^{1/6})$; **г)** $y^{2/7}+y^{1/7}=y^{1/7}(y^{1/7}+1)$;

д) $a-4=(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)$; **е)** $b+27=(b^{1/3})^3+3^3=(b^{1/3}+3)(b^{2/3}-3b^{1/3}+9)$. **2. 1) а)**

$$\frac{x+7x^{1/2}}{x^{1/2}+7}=\frac{x^{1/2}(x^{1/2}+7)}{x^{1/2}+7}=x^{1/2};$$

б) $$\frac{3y^{1/4}}{y^{1/2}-5y^{1/4}}=\frac{3y^{1/4}}{y^{1/4}\left(y^{1/4}-5\right)}=\frac{3}{y^{1/4}-5};$$

в) $$\frac{a-b}{a^{0,5}+b^{0,5}}=\frac{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}{a^{0,5}+b^{0,5}}=a^{0,5}-b^{0,5};$$

г) $$\frac{a^{1,5}b-ab^{1,5}}{ab^{0,5}-a^{0,5}b}=\frac{ab(a^{0,5}-b^{0,5})}{a^{0,5}b^{0,5}(a^{0,5}-b^{0,5})}=a^{0,5}b^{0,5};$$

д) $$\frac{x^{3/2}-c^{3/2}}{x+x^{1/2}\cdot c^{1/2}+c}=\frac{(x^{1/2}-c^{1/2})(x+x^{1/2}\cdot c^{1/2}+c)}{x+x^{1/2}\cdot c^{1/2}+c}=x^{1/2}-c^{1/2};$$

е) $$\frac{m+n}{m^{1/3}+n^{1/3}}=\frac{(m^{1/3}+n^{1/3})(m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3})}{m^{1/3}+n^{1/3}}=$$

$$=m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3};$$

2) а) $$\frac{a-2a^{1/2}}{a^{3/2}-2a}=\frac{a^{1/2}(a^{1/2}-2)}{a(a^{1/2}-2)}=a^{1/2};$$

б) $$\frac{b^{5/6}-b^{1/3}}{b^{5/6}+b^{1/3}}=\frac{b^{1/3}(b^{1/2}-1)}{b^{1/3}(b^{1/2}+1)}=\frac{b^{1/2}-1}{b^{1/2}+1};$$

в) $$\frac{4x-y}{2x+x^{0,5}y^{0,5}}=\frac{(2x^{0,5}-y^{0,5})(2x^{0,5}+y^{0,5})}{x^{0,5}(2x^{0,5}+y^{0,5})}=\frac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}};$$

г) $$\frac{m^{2/3}-n^{2/3}}{m-m^{2/3}n^{1/3}}=\frac{(m^{1/3}-n^{1/3})(m^{1/3}+n^{1/3})}{m^{2/3}(m^{1/3}-n^{1/3})}=\frac{m^{1/3}+n^{1/3}}{m^{2/3}};$$

д) $$\frac{x^{3/2}-y^{3/2}}{x^{3/2}y^{1/2}+xy+x^{1/2}y^{3/2}}=\frac{(x^{1/2}-y^{1/2})(x+x^{1/2}y^{1/2}+y)}{x^{1/2}y^{1/2}(x+x^{1/2}y^{1/2}+y)}=\frac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}};$$

е) $$\frac{a^{0,3}+b^{0,3}}{a^{0,1}+b^{0,1}}=\frac{(a^{0,1}+b^{0,1})(a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2})}{a^{0,1}+b^{0,1}}=a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2}.$$

3. $$\frac{x-9x^{1/2}}{x^{3/4}+3x^{1/2}}=\frac{x^{1/2}(x^{1/2}-9)}{x^{1/2}(x^{1/4}+3)}=\frac{x^{1/2}(x^{1/4}-3)(x^{1/4}+3)}{x^{1/2}(x^{1/4}+3)}=x^{1/4}-3=$$

$$=(20,25)^{1/4}-3=\sqrt{4,5}-3=3\sqrt{0,5}-3.$$

4. а) $$\frac{x^{0,5}}{x^{0,5}-5}-\frac{5}{x^{0,5}+5}+\frac{x}{25-x}=\frac{x^{0,5}}{x^{0,5}-5}-\frac{5}{x^{0,5}+5}-\frac{x}{(x^{0,5}-5)(x^{0,5}+5)}=$$

$$=\frac{x^{0,5}(x^{0,5}+5)-5(x^{0,5}-5)-x}{x-25}=\frac{x+5x^{0,5}-5x^{0,5}+25-x}{x-25}=\frac{25}{x-25};$$

б) $\left(\frac{5a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-5b^{0,5}}+\frac{5a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+5b^{0,5}}\right)\cdot\frac{a-25b}{a+b}=$

$$=\frac{(5a^{0,5}+b^{0,5})(a^{0,5}+5b^{0,5})+(5a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}-5b^{0,5})}{(a^{0,5}-5b^{0,5})(a^{0,5}+5b^{0,5})}\cdot$$

$\cdot\frac{(a^{0,5}-5b^{0,5})(a^{0,5}+5b^{0,5})}{a+b}=(5a+a^{0,5}\cdot b^{0,5}+25a^{0,5}\cdot b^{0,5}+5b+5a-a^{0,5}\cdot b^{0,5}-$
$-25a^{0,5}\,b^{0,5}+5b):(a+b)=(10a+10b):(a+b)=10.$

С-34

1. а) $\frac{\pi}{4}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$; **б)** $\frac{\pi}{10}=\frac{180^\circ}{10}=18^\circ$; **в)** $\frac{3}{4}\pi=3\cdot\frac{\pi}{4}=3\cdot45^\circ=135^\circ$;

г) $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\cdot180^\circ=72^\circ$; **д)** $3\pi=3\cdot180^\circ=540^\circ$.

2. а) $25^\circ=25\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5}{36}\pi$; **б)** $40^\circ=40\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$; **в)** $150^\circ=150\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$;

г) $90^\circ=90\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$; **д)** $18^\circ=18\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10}$.

3.

Градусы	60°	45°	105°	120°	135°	36°	144°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

$105^\circ=105\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{12}\pi$; $\frac{\pi}{5}=\frac{180^\circ}{5}=36^\circ$;

$70^\circ=70\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{9}=\frac{7}{9}\cdot180^\circ=140^\circ$.

Градусы	70°	140°	540°
Радианы	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$	3π

4. а) $\pi\approx3{,}1$; **б)** $\frac{\pi}{2}\approx1{,}6$; **в)** $\frac{3}{4}\pi\approx2{,}4$; **г)** $\frac{3\pi}{2}\approx4{,}7$; **д)** $2\pi\approx6{,}3$.

5. а) $\frac{\pi}{2}>1{,}5$, $1{,}6>1{,}5$; **б)** $\pi<3\frac{1}{3}$, $3{,}14<3{,}33$; **в)** $-\frac{\pi}{2}>-2$, $-1{,}6>-2$.

6. Длина окружности равна $2\pi R\approx2\cdot3{,}14\cdot2{,}6\approx16{,}33$ (см).
За 20 мин. конец стрелки пройдет одну треть окружности, т.е.
$\frac{1}{3}\cdot16{,}33\approx5{,}44$ (см). Ответ: 5,44 см.

7. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$, и $4x$ — углы треугольника. Их сумма равна π, т.е. $2x+3x+4x=\pi$, $9x=\pi$, $x=\frac{\pi}{9}$,

$\frac{2\pi}{9}$ — I угол треугольника, $3\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}$ — II угол, $\frac{4\pi}{9}$ — III угол.

Ответ: $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$.

8. Пусть x см — радиус. Тогда πx^2 см^2 — площадь круга, $\frac{\pi x^2}{2\pi}\cdot 2$ см^2 — площадь сектора или 7,29 см^2. Получаем уравнение: $\frac{\pi x^2\cdot 2}{2\pi}=7{,}29$; $x^2=7{,}29$; $x=2{,}7$; 2,7 см–радиус. Ответ: 2,7.

9. $36°=\frac{\pi}{5}$ — I угол; $\frac{\pi-\frac{\pi}{5}}{2}=\frac{4\pi}{2\cdot 5}=\frac{2\pi}{5}$ — II и III углы.

Ответ: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$.

10. Внутренний угол правильного n-угольника равен $\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$.

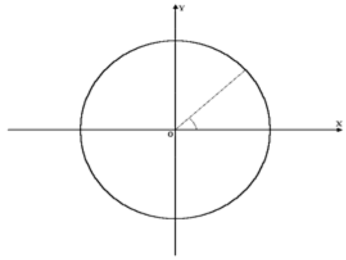
Поучаем: $\frac{4\pi}{5}=\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi$; $\frac{4}{5}=1-\frac{2}{n}$; $\frac{2}{n}=\frac{1}{5}$; $n=10$. Ответ: 10.

С-35

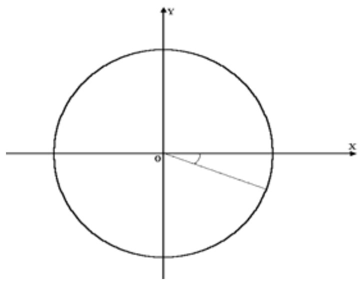
1. 1) а) (0; 1); **б)** (–1; 0); **в)** (0;–1); **г)** (1; 0); **д)** (–1; 0);
2) а) (0;–1); **б)** (–1; 0); **в)** (0; 1); **г)** (1; 0); **д)** (0; 1).
2. а) II; б) I ; в) III; г) I; д) III.
3. а) $\pi+2\pi n$, $n\in z$; **б)** $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$; **в)** $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in z$.
4. а) (0; 1); **б)** (0; 1); **в)** (1; 0).
5. а) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in z$; **б)** $\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in z$.

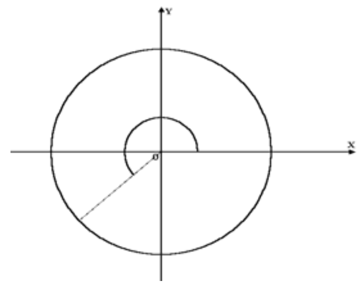
С-36

1) а) 45°;

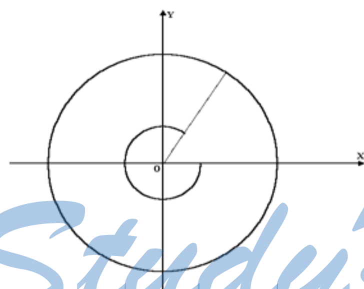


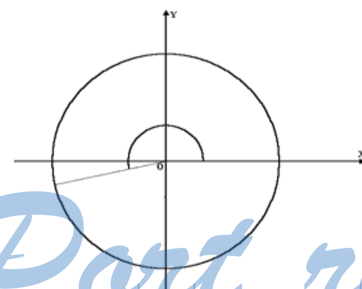
б)–30°; **в)** 225°;



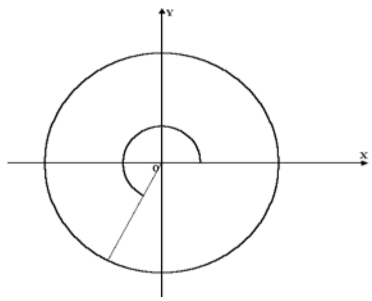


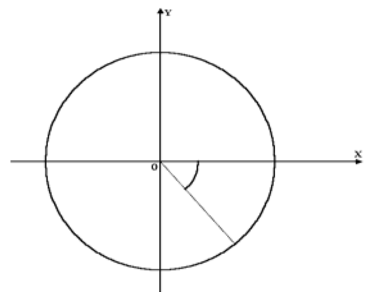
г)–315°; **2) а)** 210°**;**



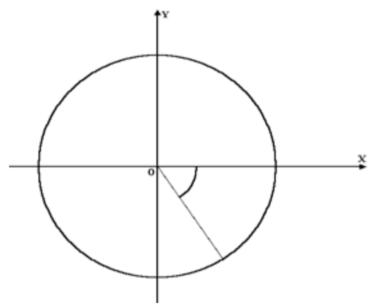


б) 590°; **в)**–50°;





г)–410°.



2. 1) а) I; **б)** III; **в)** III; **г)** II;
2) а) IV; **б)** I; **в)** I; **г)** IV.
3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
sinα	0	1	0	–1	0
cosα	1	0	–1	0	1
tgα	0	–	0	–	0
ctgα	–	0	–	0	–

4. 1) а) β=360°; **б)** β=450°; **в)** β=630°;
2) а) β=450°; **б)** β=360°; **в)** β=540°.
5. а)$-1 \le \sin\alpha \le 1$; $3-1 \le 3+\sin\alpha \le 3+1$; $2 \le 3+\sin\alpha \le 4$;
б)$-1 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le -\sin\alpha \le 1$; $2 \le 3-\sin\alpha \le 4$;
в)$-1 \le \cos\alpha \le 1$; $5-1 \le 5+\cos\alpha \le 5+1$; $4 \le 5+\cos\alpha \le 6$;
г)$-1 \le \cos\alpha \le 1$; $-1 \le -\cos\alpha \le 1$; $4 \le 5-\cos\alpha \le 6$.

6. а) нет, т.к. $-1 \le \sin\alpha \le 1$, а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$; **б)** нет, т.к. $-1 \le \cos\alpha \le 1$, а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$;
в) да; **г)** да.
7. 1) а) $\cos 0° + 3\sin 90° = 1 + 3 = 4$; **б)** $\sin 270° - 2\cos 180° = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$;
в) $6\,\mathrm{tg}\, 180° + 3\,\mathrm{ctg}\, 90° = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$; **г)** $1 + \mathrm{ctg}\, 270° - 5\,\mathrm{tg}\, 360° = 1 + 0 - 5 \cdot 0 = 1$;
2) а) $\sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; **б)** $\sin 60° + \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;
в) $\sin 45° + \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; **г)** $\mathrm{tg}\,30° + \mathrm{ctg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
8. а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in z$; **б)** $\sin x = -1$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$;
в) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$; **г)** $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;
д) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$; **е)** $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in z$.
9. а) $\sin^2 60° + \cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1{,}5$;
б) $\mathrm{tg}^2 45° + \mathrm{ctg}^2 45° = 1^2 + 1^2 = 2$; **в)** $\sin 45° \cdot \cos 60° \cdot \mathrm{ctg}\, 90° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.
10. $0° < \beta < 90°$, $\cos\beta > 0$, $\cos\beta < 2$, значит, $\cos^2\beta < 2\cos\beta$.
11. $\alpha = 90°$; **а)** $\sin 3\alpha = \sin 270° = -1$; **б)** $3\sin\alpha = 3\sin 90° = 3$;
в) $\cos 2\alpha = \cos 180° = -1$; $2\cos\alpha = 2\cos 90° = 0$.

С-37

1. а) $\sin 36° > 0$, $\sin 117° > 0$, $\sin 197° < 0$, $\sin 311° < 0$;
б) $\cos 16° > 0$, $\cos 108° < 0$, $\cos 288° > 0$, $\cos 304° > 0$;
в) $\mathrm{tg}\, 5° > 0$, $\mathrm{tg}\, 91° < 0$, $\mathrm{tg}\, 183° > 0$, $\mathrm{tg}\, 303° < 0$;
г) $\mathrm{ctg}\, 77° > 0$, $\mathrm{ctg}\, 97° < 0$, $\mathrm{ctg}\, 209° > 0$, $\mathrm{ctg}\, 281° < 0$.
2. 1) а) $\sin 185° < 0$; **б)** $\mathrm{tg}\, 116° < 0$; **в)** $\cos 210° < 0$; **г)** $\mathrm{ctg}\, 310° < 0$;
2) а) $\sin 510° > 0$; **б)** $\cos 388° > 0$; **в)** $\mathrm{tg}\, 456° < 0$; **г)** $\mathrm{ctg}\, 373° > 0$;
3) а) $\sin(-16°) < 0$; **б)** $\cos(-88°) > 0$; **в)** $\mathrm{tg}\,(-110°) > 0$; **г)** $\mathrm{ctg}\,(-93°) > 0$.
3.

α	135°	216°	400°	460°	–16°	–127°
sinα	+	–	+	+	–	–
cosα	–	–	+	–	+	–
tgα	–	+	+	–	–	+
ctgα	–	+	+	–	–	+

4. а) $\sin 92° \cdot \cos 200° =$ «+» · «–» < 0; **б)** $\sin 143° \cdot \cos 311° =$ «+» · «+» > 0;

в) $\dfrac{\sin 167^\circ}{\cos 267^\circ} = \dfrac{«+»}{«–»} < 0$; **г)** $\dfrac{\cos 131^\circ}{\sin 88^\circ} = \dfrac{«–»}{«+»} < 0$;

д) sin 116° · cos 116° · tg 197°=«+» · «–» · «+» < 0;

е) cos 225° · sin 83° · tg 100°=«–» · «+» · «–» > 0.

5. а) sin α < 0 и tg α > 0, III или IV, I или III, значит, III четверть;

б) cos α > 0 и tg α > 0, I или IV, I или III, значит, I четверть.

6. 1) а) sin (–60°)=–sin 60°=$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** cos (–90°)=cos 90°=0;

в) tg (–45°)=–tg 45°=–1; **г)** ctg (–30°)=–ctg 30°=$-\sqrt{3}$;

2) а) sin (–30°)+tg 45°=$-\dfrac{1}{2}$+1=0,5; **б)** sin (–90°)–cos 0°=–1–1=–2;

в) cos (–180°) sin (–30°)=–cos 180° sin 30°=–(–1) · $\dfrac{1}{2}$=0,5;

г) sin (–60°) tg(–30°)=sin 60° tg 30°=$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}$=0,5.

7. а) sin 390°=sin (360°+30°)=sin 30°=0,5;

б) cos 405°=cos (360°+45°)=cos 45°=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) tg 420°=tg (360°+60°)=tg 60°=$\sqrt{3}$;

г) ctg 750°=ctg (720°+30°)=ctg 30°=$\sqrt{3}$;

д) sin 780°=sin (720°+60°) sin 60°=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

е) cos 390°=cos (360°+30°)=cos 30°=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8. $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; **а)** sin α–cos α=«+» · «–» < 0; **б)** $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{«+»}{«–»} < 0$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}^3\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{«–»}{«+»} < 0$; **г)** sin α–cos α=«+»–«–» > 0.

9. sin α=*a*; **а)** 1–sin α=1–*a*; **б)** 1–sin (–α)=1+sin α=1+*a*;

в) sin (α+360°)=sin α=*a*; **г)** sin (α–360°)=–sin (360°–α)=sin α=*a*;

д) sin (720°+α)=sin α=*a*; **е)** sin (720°–α)=–sin α=–*a*.

10. sin α+cos α=–1,01; III четверти.

11. β ∈ II четверти; **а)** |cos β|+cos β=–cos β+cos β=0;

б) |sin β|–sin β=sin β–sin β=0; **в)** |tg β|+tg β=–tg β+tg β=0;

г) |sin β|–|cos β|=sin β+cos β.

С-38

1. 1) а) $2\sin 30°+6\cos 60°-3\mathrm{ctg}\, 30°+9\mathrm{tg}\, 30°=$

$=2\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{2}-3\sqrt{3}+9\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1+3-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=4;$

б) $\sin(-45°)+\cos(-45°)+2\sin(-30°)-4\cos(-60°)=$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-1-2=-3;$

в) $4\sin(-30°)+\mathrm{tg}(-45°)\,\mathrm{ctg}(-45°)-3\cos 90°=-4\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1-3\cdot 0=-2+1=-1;$

2) а) $3\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+4\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}-1+4\cdot 1=1{,}5-1-1+4=3{,}5;$

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-4\sin\pi=-1-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3\frac{\sqrt{2}}{2}-4\cdot 0=-1-3\sqrt{2};$

в) $2\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot 1\cdot 1-3+5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}-1.$

2. а) $\sin 0+\cos 0=0+1=1;$ $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1+0=1;$ $\sin\pi+\cos\pi=0-1=-1;$

$\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=-1+0=-1;$ **б)** $\sin 0+2\cos 0=0+2\cdot 1=2;$

$\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2};$ $\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\frac{\pi}{2}=0+2\cdot 0=0;$

$\sin 2\pi+2\cos\pi=0+2\cdot(-1)=-2;$ **в)** $2\sin 0-\cos 0=0-1=-1;$

$2\sin\frac{\pi}{6}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-0=1;$ $2\sin\frac{\pi}{3}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)=\sqrt{3}+1;$

$2\sin\pi-\cos 3\pi=2\cdot 0-(-1)=1;$ **г)** $3\sin 0-2\cos 0=3\cdot 0-2\cdot 1=-2;$

$3\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 0=1{,}5;$

$3\sin\frac{\pi}{3}-2\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot(-1)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+2;$ $3\sin\frac{\pi}{2}-2\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 1-2\cdot 0=3.$

3. 1) а) $\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0;$

б) $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4};$

в) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{9}$;

г) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=\frac{3}{4}$;

2) а) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1{,}5$;

б) $2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 1^2=1$;

в) $\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=6$;

г) $\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=1$.

4. а) $\dfrac{0{,}3+\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{0{,}3+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{2\cdot 0{,}5}=0{,}3$;

б) $\dfrac{1{,}5-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1{,}5-\left(\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1{,}5-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

5. а) $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin(15^\circ+\alpha)-2\sin\alpha}=\dfrac{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ-2\sin 30^\circ}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})\cdot 2}{2(\sqrt{2}-2)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}-2}$;

б) $\dfrac{\sin(30^\circ+60^\circ)}{\sin(30^\circ-60^\circ)+\cos(30^\circ+60^\circ)}=\dfrac{1}{-0{,}5}=-2$;

в) $\dfrac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}=1$;

г) $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(3-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}}{1-0}=1{,}5$.

6. а) $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>1$; **б)** $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}+0<1$;

в) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1$;

г) $2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}<2$.

7. $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}-1=\frac{3}{2}-1=0{,}5$;

$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=0{,}5$,

значит, $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-1=\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)$, что и требовалось доказать.

С-39

1. а) $\sin\alpha=0{,}6$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-0{,}8$;

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{0{,}6}{0{,}8}=-\frac{3}{4}$; **б)** $\cos\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}6}{0{,}8}=\frac{3}{4}$;

в) $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{49}{625}}=-\frac{24}{25}$;

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{7\cdot 25}{25\cdot 24}=\frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{24}{7}$; **г)** $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{49}{625}}=-\frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{24\cdot 25}{25\cdot 7}=-\frac{24}{7}$;

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{7}{24}$; **д)** $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{7}{24}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{49}{576}}}=-\frac{24}{25}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{576}{625}}=\frac{7}{25}$;

е) $\operatorname{ctg}\alpha=3\frac{3}{7}=\frac{24}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{576}{49}}}=-\frac{7}{25}$;

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{49}{625}}=-\frac{24}{25}$.

2. а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(-1)^2+(-1)^2=2\neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}\neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

3. а) $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$; $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\frac{8}{9}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$; $\frac{8}{9}=\frac{4}{5}$ — ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$; $\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; $\frac{4}{9}=\frac{1}{1+2{,}5}$; $\frac{4}{9}=\frac{2}{7}$ — ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

4. а) $\cos\beta=\frac{40}{41}$, $0<\beta<\pi$; т.к. $\cos\beta>0$, то $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1600}{1681}}=\frac{9}{41}$; $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{9\cdot 41}{41\cdot 40}=\frac{9}{40}$;

$\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}=\frac{40}{9}$; **б)** $\sin\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}$;

т.к. $\sin\beta<0$, то $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$; $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$;

$\mathrm{tg}\,\beta=\frac{4\cdot 5}{5\cdot 3}=\frac{4}{3}$; $\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{3}{4}$; **в)** $\mathrm{tg}\,\beta=2$, $0<\beta<\pi$; т.к. $\mathrm{tg}\,\beta>0$, то $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{1}{2}$;

г) $\mathrm{ctg}\,\beta=-1$, $\pi<\beta<2\pi$; т.к. $\mathrm{ctg}\,\beta<0$, то $\frac{3\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$;

$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta}}=-\frac{1}{\sqrt{1+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$;

$\mathrm{tg}\,\beta=-1$.

5. $\cos\alpha$; $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

tg α=±$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$; ctg α=±$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$.

6. 0° ≤ α ≤ 90°,   sin α=1+b;

cos α=$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(1+b)^2}=\sqrt{1-1-2b-b^2}=\sqrt{-2b-b^2}$;

0 ≤ sin α ≤ 1   при 0° ≤ α ≤ 90°; 0 ≤ 1+b ≤ 1; –1 ≤ b ≤ 0.

Ответ: cos α=$\sqrt{-2b-b^2}$, –1 ≤ b ≤ 0

7. sin α=$\dfrac{a}{a+2}$,   cos α=$\dfrac{2\sqrt{1+a}}{a+2}$;

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{a^2}{(a+2)^2}+\dfrac{4(1+a)}{(a+2)^2}=\dfrac{a^2+4a+4}{(a+2)^2}=\dfrac{(a+2)^2}{(a+2)^2}=1$,

значит, могут.

Ответ: могут.

С-40

1. 1) а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $\cos^2\alpha\,(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=\cos^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$;

в) $1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-\mathrm{tg}^2\alpha$; **г)** tg α · ctg α+1=1+1=2;

2) а) $\sin^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\beta=\sin^2\beta\,(1-\cos^2\beta)=\sin^2\beta\sin^2\beta=\sin^4\beta$;

б) $\cos^4\beta+\cos^2\beta\sin^2\beta=\cos^2\beta\,(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=\cos^2\beta$;

в) $\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{ctg}^2\beta-\cos^2\beta=1-\cos^2\beta=\sin^2\beta$; **г)** $\dfrac{1-\sin^2\beta}{\cos^2\beta-1}=\dfrac{\cos^2\beta}{-\sin^2\beta}=-\mathrm{ctg}^2\beta$.

2. 1) а) sin α ctg α=sin α $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$=cos α, ч.т.д.

б) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}+1=\dfrac{\sin\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\alpha}+1=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\mathrm{tg}^2\beta+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, ч.т.д.

2) а) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}}=\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\beta$, ч.т.д.

б) $\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha}=\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}}=\dfrac{(1+\mathrm{tg}\alpha)\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}$=tg α, ч.т.д.

3. 1) а) $(1-\sin(-\alpha))(1-\sin\alpha)=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

б) $tg(-\alpha)\,ctg\alpha+\sin^2(-\alpha)=-tg\,\alpha\,ctg\,\alpha+\sin^2\alpha=-1+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;
в) $\cos(-\alpha)+\cos\alpha\,tg^2(-\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha\,tg^2\alpha=$

$=\cos\alpha\,(1+tg^2\alpha)=\cos\alpha-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

2) а) $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-tg(-\beta)=\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}+tg\beta=\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{1}{\cos\beta}$;

б) $\dfrac{\cos^2(-\beta)-\cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta)}=\dfrac{\cos^2\beta-\cos^4\beta}{\sin^2\beta}=\dfrac{\cos^2\beta(1-\cos^2\beta)}{\sin^2\beta}=$

$=\dfrac{\cos^2\beta\cdot\sin^2\beta}{\sin^2\beta}=\cos^2\beta$;

в) $\dfrac{\cos(-\alpha)}{1+\sin(-\alpha)}+tg(-\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-tg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

4.

$$\frac{1+tg\varphi+tg^2\varphi}{1+ctg\varphi+ctg^2\varphi}-tg^2\varphi=\frac{1+tg\varphi+tg^2\varphi}{1+\frac{1}{tg\varphi}+\frac{1}{tg^2\varphi}}-tg^2\varphi=\frac{(1+tg\varphi+tg^2\varphi)tg^2\varphi}{1+tg\varphi+tg^2\varphi}-tg^2\varphi=$$

$=tg^2\varphi-tg^2\varphi=0$ т.е. значение выражения не зависит от φ, ч.т.д.

5. а) $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{3\sin\alpha+3\sin^3\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)}{3\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)}=\dfrac{\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$;

б) $\sin^3\alpha\,ctg^3\alpha+7\cos^3\alpha=\sin^3\alpha\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}+7\cos^3\alpha=8\cos^3\alpha$; $-1\le\cos\alpha\le 1$;

$-1\le\cos^3\alpha\le 1$; $-8\le 8\cos^3\alpha\le 8$; т.е. наибольшее значение равно 8.

6. $\dfrac{tg\varphi+ctg\varphi}{tg\varphi-ctg\varphi}=\dfrac{tg\varphi+\frac{1}{tg\varphi}}{tg\varphi-\frac{1}{tg\varphi}}=\dfrac{tg^2\varphi+1}{tg^2\varphi-1}$; $\sin\varphi=\dfrac{2}{3}$, $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$;

$tg^2\varphi=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-1=\dfrac{9}{5}-1=\dfrac{4}{5}$. Значит, наше выражение равно

$$\frac{tg^2\varphi+1}{tg^2\varphi-1}=\frac{\frac{4}{5}+1}{\frac{4}{5}-1}=-\frac{9\cdot 5}{5\cdot 1}=-9$$

С-41

1. 1) а) $\frac{\sin\alpha+tg\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}=tg\alpha$;

б) $(1-\sin^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha$;

в) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=$

$=\frac{2+2\sin\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{2(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{2}{\cos\alpha}$;

г) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=$

$=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=-2ctg\alpha$;

2) а) $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$

$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$;

б) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin^2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha=$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

в) $\frac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha+ctg^2\alpha}=\frac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha+\frac{1}{tg^2\alpha}}=\frac{(1+tg^4\alpha)tg^2\alpha}{1+tg^4\alpha}=tg^2\alpha$;

г) $\frac{\sin^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

2. а) $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha\sin^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$, ч.т.д.

3. $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$;

$\text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) =$

$= \cos^2\alpha\ \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{16^2 \cdot 25}{25^2 \cdot 9} = \dfrac{256}{225}$

4. а) $\dfrac{\sin^2\alpha}{ctg^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha} =$

$= \dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)} = \dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} = \text{tg}^4\alpha$, ч.т.д.

б) $\dfrac{3\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{1 + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha} = \dfrac{3\cos^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha)^2}{1 + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha} =$

$= \dfrac{3\cos^2\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{1 + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha} = 1$, ч.т.д.

5. $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \dfrac{1}{\text{ctg}\alpha} = \dfrac{1}{0{,}125} = 8$.

6. $\dfrac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{1 - \sin^6\varphi - \cos^6\varphi} = \dfrac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{1 - (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)} =$

$= \dfrac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{1 - (\sin^4\varphi + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi)} =$

$= \dfrac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{1 - (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 + 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \dfrac{1}{3}$, ч.т.д.

7. $y = 3\sin^2 x - 2\cos^2 x = 3\sin^2 x - 2(1 - \sin^2 x) = 3\sin^2 x - 2 + 2\sin^2 x = 5\sin^2 x - 2$;
т.к. $0 \le \sin^2 x \le 1$, то $y_{\max} = 5 - 2 = 3$, $y_{\min} = -2$.

8. $2\sin x = \sqrt{3}$, $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = 2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{3}$. Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{7\pi}{3}$.

С-42

1. 1) а) $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = \cos 180° \cdot \cos 45° - \sin 180° \cdot \sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\dfrac{3}{4}\pi = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\pi \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\pi \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) а) $\cos 63° \cos 18° + \sin 63° \sin 18° = \cos(63° - 18°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}=\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{13\pi}{9}\right)=\cos 2\pi=1;$

в) $\cos 32°30' \cos 27°30' – \sin 32°30' \sin 27°30' =$
$=\cos(32°30'+27°30')=\cos 60°=0{,}5;$

3) а) $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6;$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(0{,}6+0{,}8)=\frac{7\sqrt{2}}{10};$

б) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}6^2}=0{,}8;$

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=0{,}6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0{,}8\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\sqrt{3}+8}{20}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10};$

в) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-0{,}96$; $\cos\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-0{,}6$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0{,}96\cdot0{,}8+0{,}28\cdot0{,}6=0{,}936;$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0{,}96\cdot0{,}8-0{,}28\cdot0{,}6=0{,}6.$

2. а) $\cos\alpha\cos2\alpha+\sin(-\alpha)\sin2\alpha=\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos3\alpha;$

б) $\cos2\alpha\cos3\alpha+\sin2\alpha\sin3\alpha=\cos(2\alpha-3\alpha)=\cos\alpha;$

в) $\cos\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{5}+\alpha+\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)=\cos\frac{5\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{2}=0;$

г) $\sin\left(\frac{9}{7}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{7}\pi+\alpha\right)-\cos\left(\frac{9}{7}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{2}{7}\pi+\alpha\right)=$

$=\cos\left(\frac{9}{7}\pi+\alpha-\frac{2}{7}\pi-\alpha\right)=\cos\pi=-1;$

д) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)=$

$=\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta.$

3. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$
$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=$
$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-1+\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$, ч.т.д.

4. а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha$, ч.т.д.

б) $\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cdot\cos\alpha-\sin\pi\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha$, ч.т.д.

5. а) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\alpha-\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}+$

$+\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=0;$

б) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta}=tg\alpha\cdot tg\beta$.

С-43

1. 1) а) $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cdot\cos 30°+\cos 45°\cdot\sin 30°=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ **;**

б) $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ **;**

2) а) $\sin 80°\cdot\cos 20°-\cos 80°\sin 20°=\sin(80°-20°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)=\sin\pi=0;$

в) $\sin 43°30'\cdot\cos 88°30'-\cos 43°30'\sin 88°30'=$

$=\sin(43°30'-88°30')=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) а) $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{269}}=-\frac{12}{13}$;

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$;

б) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-0{,}8$;

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(-0{,}8+0{,}6)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$;

в) $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{-4\sqrt{7}-9}{20}$;

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{\sqrt{7}\cdot 4}{20}+\frac{9}{20}=\frac{9-4\sqrt{7}}{20}$.

2. а) $\sin2\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha\sin\alpha=\sin(2\alpha-\alpha)=\sin\alpha$;

б) $\sin\alpha\cdot\cos2\alpha-\cos(-\alpha)\sin(-2\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin3\alpha$;

в) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$;

г) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$.

3. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=tg\alpha+tg\beta$, ч.т.д.

4. $tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$

$=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$, ч.т.д.

5. $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1\cdot9}{7}=1\frac{2}{7}$.

6. а) $\frac{tg43^\circ+tg17^\circ}{1-tg43^\circ tg17^\circ}=tg(43^\circ+17^\circ)=tg60^\circ=\sqrt{3}$;

б) $\frac{tg\frac{9\pi}{16}-tg\frac{5\pi}{16}}{1+tg\frac{9\pi}{16}tg\frac{5\pi}{16}}=tg\left(\frac{9\pi}{16}-\frac{5\pi}{16}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1$.

7. а) $tg135^\circ=tg(180^\circ-45^\circ)=\frac{tg180^\circ-tg45^\circ}{1+tg180^\circ tg45^\circ}=\frac{-1}{1}=-1$;

б) $ctg120^\circ=ctg(90+30^\circ)=\frac{ctg90^\circ\cdot ctg30^\circ-1}{ctg90^\circ+ctg30^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $tg(-240^\circ)=-tg240^\circ=-tg(180^\circ+60^\circ)=-\frac{tg180^\circ+tg60^\circ}{1-tg180^\circ tg60^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$.

С-44

1. 1) а) $2\sin75°\cos75°=\sin(2\cdot75°)=\sin150°=\sin(180°-30°)=\sin30°=0{,}5$;

б) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin15°\cos15°=\frac{1}{2}\sin(2\cdot15°)=\frac{1}{2}\sin30°=0{,}25$;

г) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1+\sin\frac{\pi}{4}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\left(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right)^2=\sin^2\frac{\pi}{12}-2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\sin\frac{\pi}{6}=0{,}5$;

е) $\cos^2 75°-\sin^2 75°=\cos(2\cdot75°)=\cos150°=\cos(180°-30°)=-\cos30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)\ \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

з) $1-2\cos^2\frac{\pi}{12}=-(2\cos^2\frac{\pi}{12}-1)=-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) а) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-0{,}8$;

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot0{,}6\cdot0{,}8=0{,}96$;

б) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\frac{8}{17}$; $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-2\cdot\frac{8}{17}\cdot\frac{15}{17}=-\frac{240}{289}$;

в) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+2{,}4^2}}=\frac{1}{2{,}6}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{2{,}6^2}}=\frac{2{,}4}{2{,}6}$;

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\cdot2{,}4}{2{,}6\cdot2{,}6}=\frac{12}{13\cdot1{,}3}=\frac{120}{169}$;

3) а) $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\frac{25}{169}=\frac{119}{169}$; **б)** $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{9}-1=-\frac{7}{9}$;

в) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+2{,}25}}=\frac{1}{\sqrt{3{,}25}}$;

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{3{,}25}-1=-\frac{1{,}25}{3{,}25}=-\frac{5}{13}$.

2. 1) а) $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot1{,}5}{1-2{,}25}=\frac{3}{-1{,}25}=-\frac{12}{5}$; **б)** $tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}=\frac{3}{\sqrt{2}}$;

$\text{tg}2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{9}{4}}=-\dfrac{6\cdot4}{\sqrt{2}\cdot5}=-\dfrac{24}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{24\sqrt{2}}{5\cdot2}=-\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$;

2) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{4}{25}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$;

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-2\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{5}\cdot\dfrac{2}{5}=-\dfrac{4\sqrt{21}}{5}$; $\text{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{2\cdot5}{5\cdot\sqrt{21}}=-\dfrac{2}{\sqrt{21}}$;

$\text{tg}2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=-\dfrac{4}{\sqrt{21}\left(1-\dfrac{4}{21}\right)}=-\dfrac{4\cdot21}{17\sqrt{21}}=-\dfrac{4\sqrt{21}}{17}$.

3. а) $\dfrac{2tg75^\circ}{1-tg^2 75^\circ}=\text{tg}(2\cdot75^\circ)=\text{tg}150^\circ=\text{tg}(180^\circ-30^\circ)=-\text{tg}30^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}}{\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. а) $\cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$; $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$; $\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$;

$1-\sin2\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\sin2\alpha=\dfrac{3}{4}$; **б)** $\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$; $\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$;

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$; $1+\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\sin\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

С-45

1. а) $1-\cos2\alpha=\cos^2+\sin^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=2\sin^2\alpha$;

б) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha$, вероятно, в задачнике опечатка, упростите следующее выражение: $\dfrac{1+\cos2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$;

в) $1-2\sin^2\alpha+\cos2\alpha=\cos2\alpha+\cos2\alpha=2\cos2\alpha$; **г)** $\dfrac{1-\cos2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=2$;

д) $(1-\cos2\alpha)\text{ctg}\alpha=2\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$;

е) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\sin2\alpha$;

ж) $\cos^2\alpha-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha$;

з) $\cos^2\alpha-\cos2\alpha=\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha$;

и) $tg^2\alpha(1+\cos2\alpha)^2=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(2\cos^2\alpha)^2=\dfrac{4\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$
$=4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=\sin^2 2\alpha$;

к) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos2\alpha-\sin2\alpha+2\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha-\sin2\alpha+2\sin^2\alpha}=$
$=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\dfrac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

2. а) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$
$=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$, ч.т.д.

б) $\dfrac{1-\cos4\alpha}{1+\cos4\alpha}=\dfrac{2\sin^2 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}=tg^2 2\alpha$, ч.т.д.

3. а) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$;

б) $\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$.

4. а) $\dfrac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

б) $\sin20°\cdot\sin70°=\sin20°\cdot\sin(90°-20°)=\sin20°-\cos20°=\dfrac{1}{2}\sin40°$;

в) $\sin\alpha\sin(90-\alpha)=\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha$;

г) $\dfrac{\sin160^\circ}{\cos^4 10^\circ-\sin^4 10^\circ}=\dfrac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ)}=\dfrac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=tg20^\circ$;

д) $\dfrac{1-tg^2 15^\circ}{2tg15^\circ}=\dfrac{1}{tg30^\circ}=ctg30^\circ=\sqrt{3}$.

5. а) $\dfrac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=tg\alpha$,
ч.т.д.

б) $\dfrac{tg^2(45^\circ+\alpha)-1}{tg^2(45^\circ+\alpha)+1}=\cos^2(45°+\alpha)\left(\dfrac{\sin^2(45^\circ+\alpha)}{\cos^2(45^\circ+\alpha)}-1\right)=\sin^2(45°+\alpha)-\cos^2(45°+$
$+\alpha)=-\cos(2(45°+\alpha))=-\cos(90°+2\alpha)=\sin2\alpha$, ч.т.д.

6. а) $\sin18°\cdot\sin36°=\dfrac{2\sin18^\circ\cdot\cos18^\circ\cdot\cos36^\circ}{2\cos18^\circ}=\dfrac{2\sin36^\circ\cdot\cos36^\circ}{4\cos18^\circ}=\dfrac{\sin72^\circ}{4\cos18^\circ}=$

$=\frac{\sin(90^\circ-18^\circ)}{4\cos 18^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{1}{4}$, ч.т.д.

б) $8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{8\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=$

$=\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=-1$, ч.т.д.

С-46

1. а) $\sin 945^\circ=\sin(720^\circ+225^\circ)=\sin 225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\mathrm{tg}225=\mathrm{tg}(180^\circ+45^\circ)=\mathrm{tg}45^\circ=1$; **г)** $\mathrm{ctg}210^\circ=\mathrm{ctg}(270^\circ-60^\circ)=\mathrm{tg}60^\circ=\sqrt{3}$;

д) $\sin\frac{15\pi}{4}=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **ж)** $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}=\mathrm{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

з) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

и) $\sin(-960^\circ)=-\sin 960^\circ=-(720^\circ+240^\circ)=-\sin 240^\circ=-\sin(180^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-0{,}5$;

л) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}=-\mathrm{tg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

м) $\mathrm{ctg}(-420^\circ)=-\mathrm{ctg}420^\circ=-\mathrm{ctg}(360^\circ+60^\circ)=-\mathrm{ctg}60^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. а) $\sin(-570^\circ)+\sqrt{3}\cos 150^\circ+\mathrm{tg}315^\circ=-\sin(360^\circ+210^\circ)+\sqrt{3}\cos(180^\circ-30^\circ)+$
$+\mathrm{tg}(360^\circ-45^\circ)=-\sin(180^\circ+30^\circ)-\sqrt{3}\cos 30^\circ-\mathrm{tg}45^\circ=\sin 30^\circ-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=$
$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-1=-2$;

б) $\sin 210°+\cos(-480°)-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}480°=\sin(180°+30°)+\cos 120°-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}120°=$
$=-\sin 30°+\cos(90°+30°)-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(90°+30°)=-0,5-\sin 30°+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}30°=$
$=-1+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0;$

в) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{4}+\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)-2\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\mathrm{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$
$=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{\pi}{6}=-1+0,5-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-0,5-\sqrt{3}.$

3. а) $1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)=1-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha;$

б) $\cos(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)+\cos^2\alpha=-\cos\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=0;$

в) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$ **г)** $\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha;$

д) $\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha;$

е) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-2\alpha)}{2tg(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha\sin 2\alpha}{2tg\alpha}=-\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}=-\cos^3\alpha;$

ж) $\cos(2\pi-\alpha)\cos(2\pi+\alpha)-\sin^2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha;$

з) $\cos^2(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos 2\alpha.$

4. а) $\frac{\sin(x-\pi)\sin(0,5\pi+x)}{\mathrm{ctg}(0,5\pi-x)\cos(1,5\pi-x)\cos(0,5\pi+x)}=\frac{-\sin x\cos x}{\mathrm{tg}x\sin x\sin x}=$
$=-\frac{\cos x\cos x}{\sin x\sin x}=-\mathrm{ctg}^2x,$ ч.т.д.

б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha)=0,$ ч.т.д.

6. $\cos\alpha=-0,6;\ \cos\beta=\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha=0,6.$

7. Пусть α и β–острые углы прямоугольного треугольника. Тогда:
$\alpha+\beta=90°,\ \beta=90°-\alpha,\ \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1.$ Ответ: 1.

С-47

1. 1) а) $\sin 36°+\sin 24°=2\sin\frac{36°+24°}{2}\cos\frac{36°-24°}{2}=2\sin 30°\cos 6°=\cos 6°;$

б) $\sin18°+\sin11°=2\sin\frac{18^\circ+11^\circ}{2}\cos\frac{18^\circ-11^\circ}{2}=2\sin14{,}5°\cos3{,}5°$;

в) $\sin6°+\sin14°=2\sin\frac{6^\circ+14^\circ}{2}\cos\frac{14^\circ-6^\circ}{2}=2\sin10°\cos4°$;

г) $\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}{2}=2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$;

2) а) $\sin72°-\sin52°=2\sin\frac{72^\circ-52^\circ}{2}\cos\frac{72^\circ+52^\circ}{2}=2\sin10°\cos62°$;

б) $\sin16°-\sin7°=2\sin\frac{16^\circ-7^\circ}{2}\cos\frac{16^\circ+7^\circ}{2}=2\sin4{,}5°\cos11{,}5°$;

в) $\sin13°-\sin23°=2\sin\frac{13^\circ-23^\circ}{2}\cos\frac{13^\circ+23^\circ}{2}=-2\sin5°\cos18°$;

г) $\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}$;

3) а) $\cos18°+\cos8°=2\cos\frac{18^\circ+8^\circ}{2}\cos\frac{18^\circ-8^\circ}{2}=2\cos13°\cos5°$;

б) $\cos7°+\cos4°=2\cos\frac{7^\circ+4^\circ}{2}\cos\frac{7^\circ-4^\circ}{2}=2\cos5{,}5°\cos1{,}5°$;

в) $\cos16°+\cos66°=2\cos\frac{16^\circ+66^\circ}{2}\cos\frac{16^\circ-66^\circ}{2}=2\cos41°\cos25°$;

г) $\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}}{2}=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}$;

4) а) $\cos36°-\cos26°=-2\sin\frac{36^\circ+26^\circ}{2}\sin\frac{36^\circ-26^\circ}{2}=-2\sin31°\sin5°$;

б) $\cos17°-\cos10°=-2\sin\frac{17^\circ+10^\circ}{2}\sin\frac{17^\circ-10^\circ}{2}=-2\sin13{,}5°\sin3{,}5°$;

в) $\cos5°-\cos15°=-2\sin\frac{5^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{5^\circ-15^\circ}{2}=2\sin10°\sin5°$;

г) $\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}=-2\sin\frac{\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{5}}{2}\sin\frac{\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}}{2}=-2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$.

2. 1) а) $\sin5\alpha+\sin3\alpha=2\sin4\alpha\cos\alpha$; **б)** $\sin8\alpha-\sin4\alpha=2\sin2\alpha\cos6\alpha$;

в) $\cos27\alpha+\cos17\alpha=2\cos22\alpha\cos5\alpha$; **г)** $\cos4\alpha-\cos\alpha=-2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}$;

2) а) $\sin(15°+\alpha)+\sin(15°-\alpha)=$

$=2\sin\frac{15^\circ+\alpha+15^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{15^\circ+\alpha-15^\circ+\alpha}{2}=2\sin15^\circ\cos\alpha;$

б) $\sin(60^\circ-\beta)-\sin(60^\circ+\beta)=2\sin\frac{60^\circ-\beta-60^\circ-\beta}{2}\cos\frac{60^\circ-\beta+60^\circ+\beta}{2}=$

$=2\sin\beta\cos60^\circ=-\sin\beta;$

в) $\cos(17^\circ+x)+\cos(17^\circ-x)=$

$=2\cos\frac{17^\circ+x+17^\circ-x}{2}\cos\frac{17^\circ+x-17^\circ+x}{2}=2\cos17^\circ\cos x;$

г) $\cos(40^\circ-\alpha)-\cos(40^\circ+\alpha)=$

$=-2\sin\frac{40^\circ-\alpha+40^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{40^\circ-\alpha-40^\circ-\alpha}{2}=2\sin40^\circ\sin\alpha;$

д) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=2\sin\alpha\cos\beta;$

е) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}=-2\sin\beta\sin\alpha.$

3. а) $\frac{\sin7\alpha+\sin\alpha}{\cos7\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\sin4\alpha\cos3\alpha}{2\cos4\alpha\cos3\alpha}=\mathrm{tg}4\alpha;$

б) $\frac{\cos4\alpha+\cos6\alpha}{\cos\alpha+\cos9\alpha}=\frac{2\cos5\alpha\cos\alpha}{2\cos5\alpha\cos4\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos4\alpha};$

в) $\frac{\sin11\alpha-\sin\alpha}{\cos11\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\sin5\alpha\cos6\alpha}{-2\sin5\alpha\sin6\alpha}=-\mathrm{ctg}6\alpha;$

г) $\frac{\cos7\alpha-\cos3\alpha}{\sin7\alpha+\sin3\alpha}=\frac{-2\sin2\alpha\sin5\alpha}{2\sin5\alpha\cos2\alpha}=-\mathrm{tg}2\alpha.$

4. а) $\sin^2 43^\circ-\sin^2 13^\circ=(\sin43^\circ-\sin13^\circ)(\sin43^\circ+\sin13^\circ)=$
$=2\sin15^\circ\cos28^\circ\cdot2\sin28^\circ\cdot\cos15^\circ=\sin30^\circ\cdot\sin56^\circ=0{,}5\sin56^\circ;$

б) $\cos^2 37^\circ-\cos^2 17^\circ=(\cos37^\circ-\cos17^\circ)(\cos37^\circ+\cos17^\circ)=$
$=-2\sin10^\circ\cdot\sin27^\circ\cdot2\cos27^\circ\cdot\cos10^\circ=-\sin20^\circ\cdot\sin54^\circ.$

5. а) $\frac{\sin56^\circ+\sin14^\circ}{\cos56^\circ+\cos14^\circ}=\frac{2\sin35^\circ\cos21^\circ}{2\cos35^\circ\cos21^\circ}=\mathrm{tg}35^\circ=\mathrm{tg}(90^\circ-55^\circ)=\mathrm{ctg}55^\circ,$
т.е. равенство верно.

б) $\frac{\sin72^\circ-\sin62^\circ}{\cos72^\circ+\cos62^\circ}=\frac{2\sin5^\circ\cos67^\circ}{2\cos67^\circ\cos5^\circ}=\mathrm{tg}5^\circ=\mathrm{tg}(90^\circ-85^\circ)=\mathrm{ctg}85^\circ,$
т.е. равенство верно.

6. а) $\frac{\sin3\alpha+\sin7\alpha}{\cos3\alpha+\cos7\alpha}=\frac{2\sin5\alpha\cos2\alpha}{2\cos5\alpha\cos2\alpha}=\mathrm{tg}5\alpha=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-5\alpha\right),$ ч.т.д.

б) $\frac{\sin\beta+\sin3\beta+\sin5\beta+\sin7\beta}{\cos\beta+\cos3\beta+\cos5\beta+\cos7\beta}=\frac{2\sin4\beta\cos3\beta+2\sin4\beta\cos\beta}{2\cos4\beta\cos3\beta+2\cos4\beta\cos\beta}=$

$=\frac{\sin4\beta(\cos3\beta+\cos\beta)}{\cos4\beta(\cos3\beta+\cos\beta)}=\mathrm{tg}4\beta,$ ч.т.д.

в) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\alpha}=\dfrac{2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=$

$=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ч.т.д.

г) $\dfrac{ctg\alpha+1}{ctg\alpha-1}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\alpha}=\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, ч.т.д.

д) $\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))=$
$=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\sin2\alpha\cdot\sin2\beta$, ч.т.д.

С-48

1. а) $\alpha=30°$, $\alpha=45°$, $\alpha=60°$; **б)** $\alpha=60°$, $\alpha=45°$, $\alpha=30°$.

2. $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$.

3. $a_n=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $b_n=\frac{\pi}{2}-\pi n$; $\cos a_n=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi n\right)=\sin\pi n=0$;

$\cos b_n=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi n\right)=\sin\pi n=0$, значит, любое число, являющееся членом (a_n) или (b_n) — корень данного уравнения.

4. 1) а) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in z$; **б)** $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in z$;

в) $\text{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in z$;

2) а) $\sin x-1=0$, $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$; **б)** $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$;

в) $2\text{tg}x=0$, $\text{tg}x=0$, $\frac{\sin x}{\cos x}=0$, $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in z$.

5. а) $\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5\pi}{6}$; **б)** $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$.

6. 1) а) $\sin2x=1$ $\quad 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$ $\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in z$;

б) $\cos3x=0$ $\quad 3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in z$;

2) а) $\sin^2x-\sin x=0$, $\sin x(\sin x-1)=0$; $\sin x=0$, $\sin x=1$

$x_1=\pi n$, $n\in z$ $\quad x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in z$;

б) $\cos^2x+\cos x=0$ $\quad \cos x(\cos x+1)=0$; $\cos x=0$, $\cos x=-1$;

$x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$ $\quad x_2=\pi+2\pi k$, $k\in z$;

3) а) $\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x=0$; $\sin(2x-x)=0$, $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in z$;

б) $\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x=0$; $\cos(x-2x)=0$, $\cos x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$;

4) а) $\cos^2x=\cos 2x$; $\quad \cos^2x=2\cos^2x-1$;
$\cos^2x=1$; $\quad \cos x=1$, $\quad \cos x=-1$;
$x_1=2\pi n$, $n\in z$ $\quad x_2=\pi+2\pi k$, $k\in z$;
б) $2\sin x=\sin 2x$; $\quad 2\sin x=2\sin x\cdot\cos x$;
$\sin x=0$, $\cos x=1$; $\quad x_1=\pi n$, $n\in z$; $\quad x_2=2\pi k$, $k\in z$.

7. а) $\cos x\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1$; $\quad \cos x\cdot\sin x=1$; $\quad \dfrac{1}{2}\cdot 2\sin x\cdot\cos x=1$;

$\sin 2x=2$ –нет корней, т.к. $-1\le\sin\alpha\le 1$ для любого α.

б) $\dfrac{\cos 2x}{2\cos^2x-1}=0$; $\quad \dfrac{2\cos^2x-1}{2\cos^2x-1}=0$;
1=0 – нет корней.

Вариант 2.

С-1.

1. 1) $f(x)=21x-7$, $f(3)=21\cdot 3-7=56$; $f(0)=21\cdot 0-7=-7$; $f(-2)=21\cdot(-2)-7=-49$;
2) $g(x)=x^2-10x$; $g(8)=8^2-108=-16$; $g(-3)=(-3)^2-10\cdot(-3)=39$; $g(0)=0^2-10\cdot 0=0$;
3) $\varphi(x)=\dfrac{x-6}{x+4}$; $\varphi(-3)=\dfrac{-3-6}{-3+4}=-9$; $\varphi(6)=\dfrac{6-6}{6+4}=0$; $\varphi(0)=\dfrac{0-6}{0+4}=-1{,}5$.

2. 1) $f(x)=12-5x$; **а)** $12-5x=2$, $5x=10$, $x=2$; **б)** $12-5x=24$, $5x=-12$, $x=-\dfrac{12}{5}$;

в) $12-5x=0$; $5x=12$, $x=\dfrac{12}{5}$;

2) $g(x)=\dfrac{1}{4}x+9$; **а)** $\dfrac{1}{4}x+9=10$, $\dfrac{1}{4}x=1$, $x=4$; **б)** $\dfrac{1}{4}x+9=1$, $\dfrac{1}{4}x=-8$, $x=-32$;

в) $\dfrac{1}{4}x+9=0$, $\dfrac{1}{4}x=-9$, $x=36$.

3. 1) а) $f(x)=37-3x$, $D(f)=R$; **б)** $g(x)=\dfrac{53}{x}$, $D(g)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

в) $\varphi(x)=x^2-7$, $D(\varphi)=R$; **г)** $y=\sqrt{x}$, $D(y)=[0;+\infty]$;

2) а) $g(x)=10-x^2$, $D(g)=R$; **б)** $f(x)=-\frac{42}{x}$, $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$;

в) $\varphi(x)=\sqrt{x-3}$, $x-3\geq 0$, $x\geq 3$, $D(\varphi)=[3;+\infty]$; **г)** $y=\frac{12}{x+4}$, $x+4\neq 0$; $x\neq -4$,

$D(y)=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$.

4. а) $y=-24x+5$, $E(y)=R$; **б)** $y=41$, $E(y)=41$; **в)** $y=-\frac{22}{x}$, $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

г) $y=\sqrt{x}$, $E(y)=[0;+\infty)$; **д)** $y=|x|$, $E(y)=[0;+\infty)$.

5. а) $f(x)=\frac{x^2+5}{6x^2}$, $f(5)+f(-5)=2f(5)=2\cdot\frac{5^2+5}{6\cdot 5^2}=0{,}4$;

б) $g(x)=\frac{4x^3-x}{9}$, $g(-2)+g(2)=-g(2)+g(2)=0$.

6. $g(x)=kx+b$, $\begin{cases}5=k+b\\ -1=3k+b\end{cases}$, $\begin{cases}k=5-b\\ -1=3(5-b)+b\end{cases}$; $-1=15-3b+b$;

$2b=16$; $b=8$; $k=5-8=-3$.

7. а) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-4}$; **б)** $g(x)=\sqrt{x-6}$.

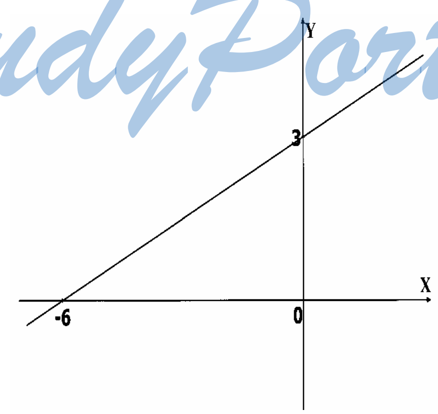
С-2

1. 1) а) $g(-1)=-3$; **б)** $g(0)=-1$; **в)** $g(1)=0$; **г)** $g(3)=1{,}5$;
2) а) $g(x)=3$, $x=-3$; **б)** $g(x)=0$, $x_1=-2{,}5$; $x_2=1$; $x_3=3{,}5$; **в)** $g(x)=-2$, $x_1=-2$; $x_2=-0{,}5$; **3)** $g_{max}=3$, $g_{min}=-3$; **4)** $E(g)=[-3;\ 3]$.

2. 1)

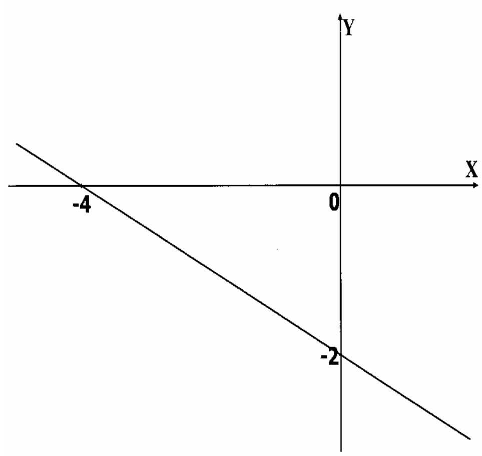
а) $y=0{,}5x+3$;

x	0	–6
y	3	0



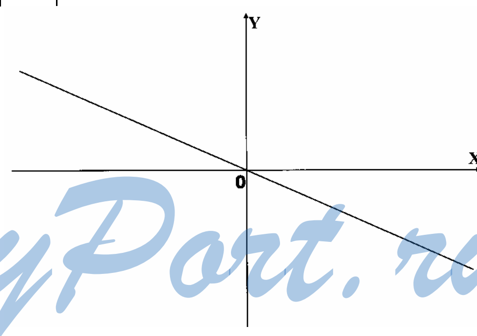
б) $y=-0{,}5x-2$;

x	0	–4
y	–2	0

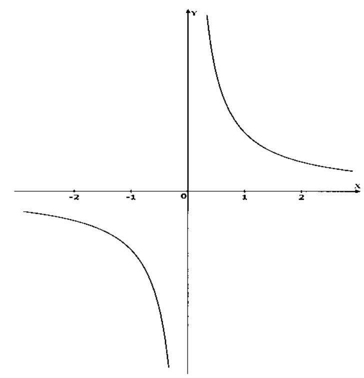


в) $y=-\frac{1}{3}x$;

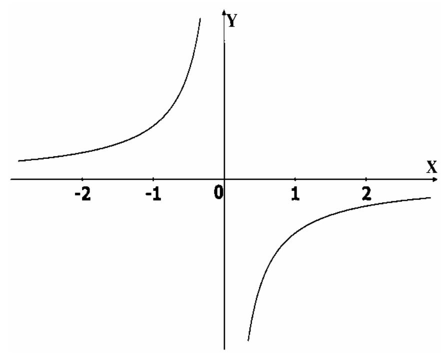
x	0	–3
y	0	1



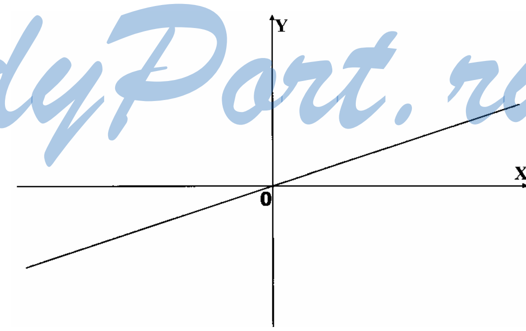
2) а) $y=\frac{6}{x}$;



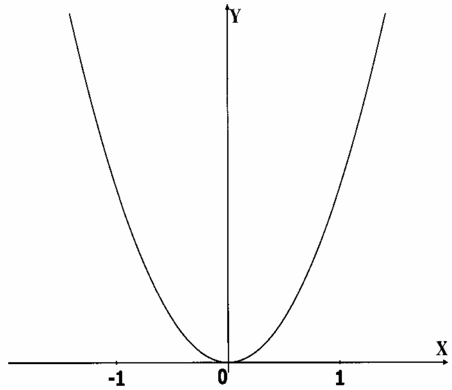
б) $y=-\dfrac{8}{x}$;



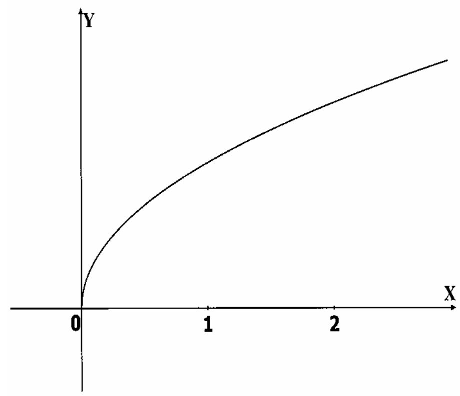
в) $y=\dfrac{x}{4}$;



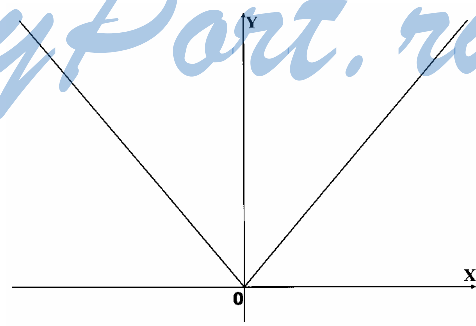
3) а) $y=x^2$;



б) $y=\sqrt{x}$, $x \geq 0$;

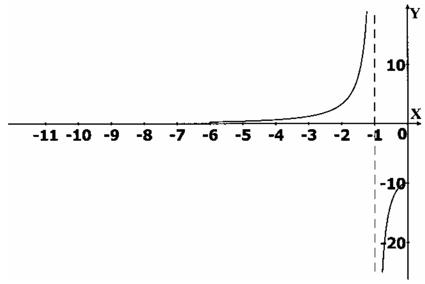


в) $y=|x|$.



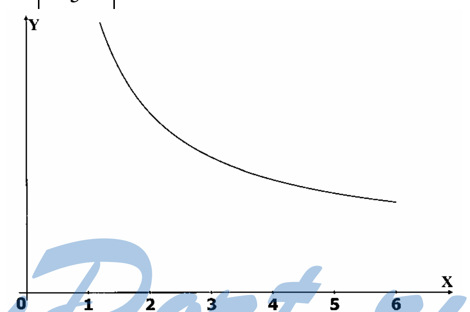
3. а) $y = \dfrac{10}{x^2 - 1}$, $-6 \le x \le 0$;

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
y	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{3}$	–	–10

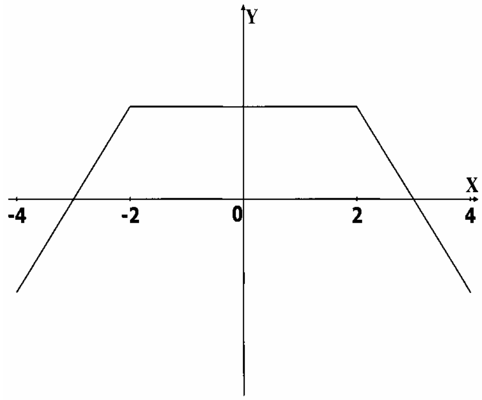


б) $y = \dfrac{x+6}{x}$, где $1 \le x \le 6$.

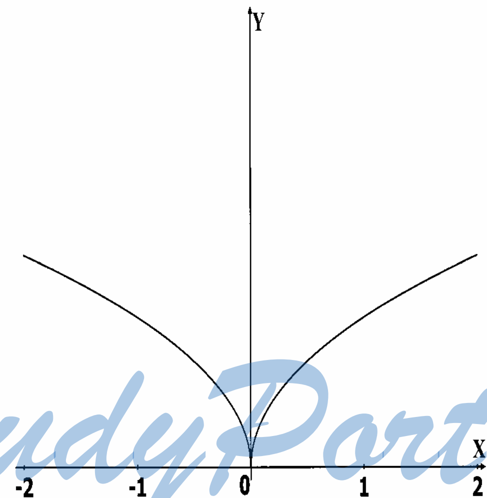
x	1	2	3	4	5	6
y	7	4	3	2,5	$\frac{11}{5}$	1



4. а) $y = \begin{cases} x+3, & \text{если} \quad x < -2 \\ 1, & \text{если} \quad -2 \le x \le 2; \\ -x+3, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$



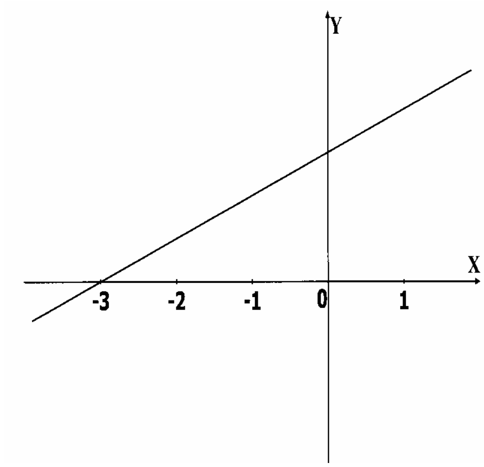
б) $y=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$.



5. $f(x)=\begin{cases}2x+4, & -2\le x\le -1\\ 2, & -1<x\le 2\\ 2x-2, & 2<x\le 3\end{cases}$.

6. $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{2(x^2-1)}=\dfrac{x^2(x+3)-(x+3)}{2(x^2-1)}=\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{2(x^2-1)}=\dfrac{x}{2}+1{,}5$;

$x^2-1\neq 0$, т.к. знаменатель $x\neq\pm1$.



7. 1) два привала–30 мин и 1 ч; **2)** 6 км;   6 км;   6 км;

3) 6 км/ч; $\frac{6}{2}$=3 (км/ч); $\frac{6}{1,5}$=4 (км/ч); **4)** 6 ч; **5)** 7,5 км; 10,5 км; 12 км.

8. 1) велосипедист на 3 ч; **2)** 6,5 ч;   2,5 ч;

3) $\frac{35}{6,5}=\frac{70}{13}$ (км/ч); $\frac{35}{2,5}$=14 (км/ч); **4)** велосипедист на 1 ч;

5) через 2 ч; **6)** 10 (км).

С-3

1. 1) а) x_1=–2, x_2=1, x_3=3; **б)** $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 1) \cup (3; 4]$;
$f(x) < 0$ при $x \in [-3;-2] \cup (1; 3)$;
2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-3;-1]$ и $[2; 4]$;
$f(x)$ убывает при $x \in [-1; 2]$;
3) $x_{max}=-1$, $x_{min}=-3$;
4) $E(f)=[-2; 3]$.

2. 1) а) $y=25x-18$, $D(y)=E(y)=R$, $y > 0$ при $x > \frac{18}{25}$, $y < 0$ при $x < \frac{18}{25}$,

$y=0$ при $x=\frac{18}{25}$, $y(x)$ возрастает на R;

б) $y=-0,83x+16,2$; $D(y)=E(y)=R$;

$y>0$ при $x<\frac{16,2}{0,83}=\frac{1620}{83}$, $y<0$ при $x>\frac{1620}{83}$; $y=0$ при $x=\frac{1620}{83}$, $y(x)$ убывает

на R; **в)** $y=-27$ $D(y)=R$, $E(y)=-27$, $y < 0$ на R; **2) а)** $y=\frac{36}{x}$;

$D(y)=E(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$; $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$,

$y(x)$ убывает на $D(y)$; **б)** $y=-\dfrac{63}{x}$, $D(y)=E(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$;

$y>0$ при $x<0$, $y<0$ при $x>0$, $y(x)$ возрастает на R.

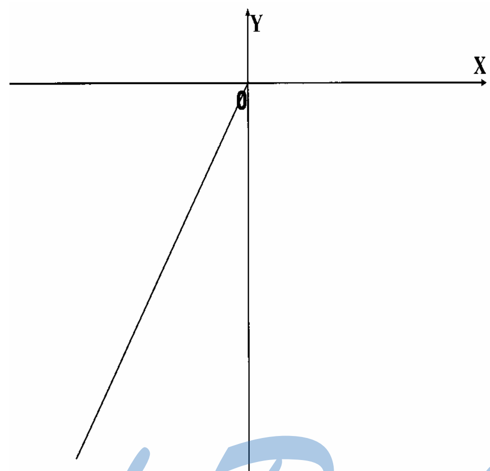
3. 1) а) $y=\dfrac{1}{5}x-8$, $\dfrac{1}{5}x=8$, $x=40$; **б)** $y=-0{,}4x+32$, $0{,}4x=32$, $x=80$;

в) $y=47$ нет нулей функции; **2) а)** $y=9x(x-5)$, $x_1=0$, $x_2=5$;
б) $y=16(x^2+2)$ нет нулей функции; **в)** $y=x(x-1)(x+2)$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-2$;

3) а) $y=\sqrt{x-3}$, $x=3$; **б)** $y=\sqrt{x^2-4}$, $x_1=2$, $x_2=-2$;

в) $y=\sqrt{x^2+4}$ нет нулей функции.

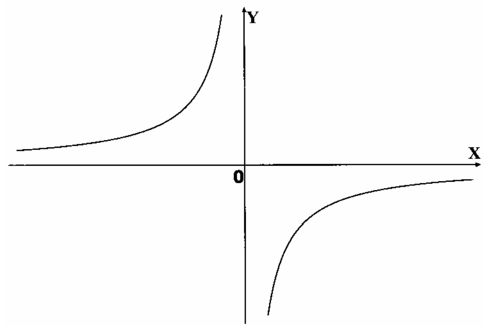
4. $g(x)=x-|x|$; $g(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$.



Свойства: $D(g)=R$, $E(g)=(-\infty;\,0]$.
Нули функции: $x\ge 0$, $g(x)<0$ при $x<0$,
$g(x)$ возрастает при $x\le 0$, $g_{max}=g(0)=0$.
5. $D(f)=R$, $E(f)=[-4;\,4]$; $f(x)>0$ при $x<0$, $f(x)<0$ при $x>0$, $f(x)=0$ при $x=0$
$f(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;-2]$ и $[2;+\infty)$; $f(x)$ убывает при $x\in[-2;\,2]$.

С-4

1.



$y=-\frac{3}{x}$; $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$;

а) $y(-2)=-1{,}5$, $y(-1{,}5)=2$, $y(1{,}5)=-2$, $y(2)=-1{,}5$;

б) $-4=-\frac{3}{x}$, $x=\frac{3}{4}$; $-3=-\frac{3}{x}$, $x=1$; $x=-\frac{3}{4}$; $x=-1$;

в) $y>0$ при $x<0$, $y<0$ при $x>0$.

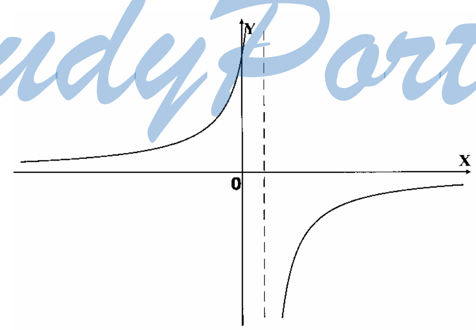
2. $y=\frac{144}{x}$; **а)** $20\frac{4}{7}=\frac{144}{-7}$ — ложно, значит, точка A не принадлежит графику; **б)** $24=\frac{144}{6}$ — верно, значит, точка B принадлежит графику;

в) $144=\frac{144}{0}$ — ложно, значит, точка C не принадлежит графику;

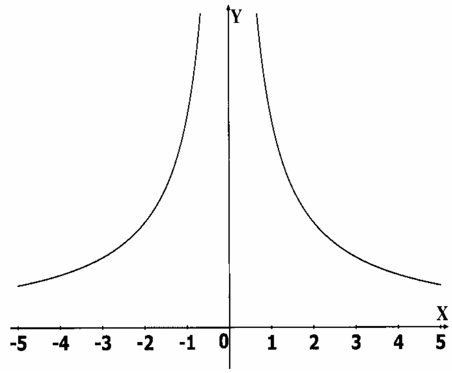
г) $-12=\frac{144}{12}$ — ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. $\frac{2}{x}=x+1$.

4. а)



б)



5. $y=\dfrac{k}{x}$, $0{,}25=\dfrac{k}{4}$, $k=1$, $y=\dfrac{1}{x}$.

С-5

1. 1) а) $x^2–8x+15=0$; $D=64–60=4$; $x_1=\dfrac{8+2}{2}=5$; $x_2=3$;

б) $–y^2+3y–10=0$, $y^2–3y+10=0$, $D=9–4\cdot 10<0$, значит, нет корней;

в) $4b^2–16b+12=0$, $b^2–4b+3=0$, $D=16–4\cdot 3=4$, $b_1=\dfrac{4+2}{2}=3$, $b_2=1$;

г) $2a^2–a=0$, $a(2a–1)=0$, $a_1=0$, $a_2=0{,}5$;

2) а) $5y^2+14y–3=0$, $D=196+4\cdot 5\cdot 3=256$, $y_1=\dfrac{-14+16}{10}=0{,}2$, $y_2=–3$;

б) $10b^2–7b+1=0$, $D=49–4\cdot 10=9$, $b_1=\dfrac{7+3}{20}=0{,}5$, $b_2=0{,}2$;

в) $–0{,}4c^2+0{,}8=0$, $0{,}4c^2=0{,}8$, $c^2=2$, $c_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; **г)** $7x^2–28=0$, $x^2=4$, $x_{1,2}=\pm 2$;

3) а) $0{,}5x^2–x–1=0$, $x^2–2x–2=0$, $D=4+4\cdot 2=4\cdot 3$, $x_{1,2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$;

б) $–100c^2+20c+3=0$, $100c^2–20c–3=0$, $D=400+4\cdot 100\cdot 3=1600$, $c_1=\dfrac{20+40}{200}=0{,}3$;

$c_2=–\dfrac{20}{200}=–0{,}1$; **в)** $–25a^2+10a–1=0$, $25a^2–10a+1=0$, $D=100–4\cdot 25=0$,

$a=\dfrac{10}{50}=0{,}2$.

2. 1) а) $x^2+4x+1=x^2+4x+4–3=(x+2)^2–3$;

б) $3b^2–12b+11=3(b^2–4b+\dfrac{11}{3})=3(b^2–4b+4–\dfrac{1}{3})=3(b–2)^2–1$;

в) $y^2+2y=y^2+2y+1–1=(y+1)^2–1$;

2) а) $-b^2+6b-8=-(b^2-6b+8)=-(b^2-6b+9-1)=-(b-3)^2+1$;

б) $\frac{1}{4}y^2-y+2=\frac{1}{4}(y^2-4y+8)=\frac{1}{4}(y^2-4y+4+4)=\frac{1}{4}(y-2)^2+1$.

3. а) $x^2-10x+28=x^2-10x+25+3=(x-5)^2+3 > 0$;
б) $-x^2+4x-6=-(x^2-4x+6)=-(x^2-4x+4+2)=-(x-2)^2-2 < 0$.

4. а) b^2-4b+9, $b_0=\frac{4}{2}=2$; **б)** $-b^2+6b-14$, $b_0=\frac{-6}{-2}=3$.

5. $(12-b)$ см, $(8+b)$ см — новые стороны; $(12-b)(8+b)$ см^2 — площадь полученного прямоугольника; $(12-b)(8+b)=-b^2+4b+96$, $b_0=\frac{-4}{-2}=2$.

С-6

1. 1) а) $x^2-7x+10=0$, $D=49-40=9$, $x_1=\frac{7+3}{2}=5$, $x_2=2$, $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$;

б) $3x^2+3x-6=0$, $x^2+x-2=0$, $D=1+4\cdot 2=9$, $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$, $x_2=-2$,

$3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2)$; **в)** $7x^2-63=7(x^2-9)=7(x-3)(x+3)$;

г) $5x^2+19x-4=0$, $D=361+4\cdot 5\cdot 4=441$, $x_1=\frac{-19+21}{10}=\frac{1}{5}$, $x_2=-4$,

$5x^2+19x-4=5(x-\frac{1}{5})(x+4)=(5x-1)(x+4)$;

2) а) $x^2+x-72=0$, $D=1+4\cdot72=289$, $x_1=\frac{-1+17}{2}=8$, $x_2=-9$, $x^2+x-72=(x-8)(x+9)$;

б) $7x^2+20x-3=0$, $D=400+4\cdot 7\cdot 3=484$, $x_1=\frac{-20+22}{14}=\frac{1}{7}$, $x_2=-3$,

$7x^2+20x-3=7(x-\frac{1}{7})(x+3)=(7x-1)(x+3)$; **в)** $12x^2-588=12(x^2-49)=12(x-7)(x+7)$;

г) $3x^2-12x+3=3(x^2-4x+1)=3(x^2-4x+4-3)=3((x-2)^2-3)=3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.
2. 1) а) $x^2-5x+7=0$, $D=25-4\cdot7<0$; **б)** $-3x^2+2x-1=0$, $3x^2-2x+1=0$, $D=4-4\cdot3<0$;
2) а) $x^2-12x+39=0$, $D=144-4\cdot39<0$; **б)** $-4x^2+4x-3=0$, $4x^2-4x+3=0$, $D=16-4\cdot4\cdot3<0$;
в) $x^2+3=0$, $D=-4\cdot 3<0$.

3. 1) а) $\frac{4b+12}{b^2-9}=\frac{4(b+3)}{(b-3)(b+3)}=\frac{4}{b-3}$; **б)** $\frac{c^2+c-6}{7c+21}=\frac{(c-2)(c+3)}{7(c+3)}=\frac{c-2}{7}$,

$c^2+c-6=0$, $D=1+4\cdot 6=25$, $c_1=\frac{-1+5}{2}=2$, $c_2=-3$;

в) $\frac{16-2x}{8+7x-x^2}=\frac{2(8-x)}{-(x-8)(x+8)}=\frac{2}{x+1}=x^2-7x-8=0$, $D=49+4\cdot8=81$,

$x_1=\frac{7+9}{2}=8$; $x_2=-1$;

2) а) $\dfrac{a^2-16a+63}{a^2-81}=\dfrac{(a-9)(a-7)}{(a-9)(a+9)}=\dfrac{a-7}{a+9}$, a^2–$16a$+63=0, D=256–4 · 63=4,

a_1=$\dfrac{16+2}{2}$=9, a_2=7;

б) $\dfrac{y^3+7y^2-60y}{10y-50}=\dfrac{y(y^2+7y-60)}{10(y-5)}=\dfrac{y(y-5)(y+12)}{10(y-5)}=\dfrac{y(y+2)}{10}$,

y^2+7y–60=0, D=49+4 · 60=289, y_1=$\dfrac{-7+17}{2}$=5, y_2=–12;

в) $\dfrac{3+14b-5b^2}{3b-b^2}=\dfrac{-(b-3)\left(b+\frac{1}{5}\right)\cdot 5a}{b(3-b)}=\dfrac{5b+1}{b}$, $5b^2$–14b–3=0,

D=196+4 · 5 · 3=256, b_1=$\dfrac{14+16}{10}$=3; b_2=–$\dfrac{1}{5}$.

4. 1) $\dfrac{x^2-8x-33}{10x+30}=\dfrac{(x-11)(x+3)}{10(x+3)}=\dfrac{x-11}{10}$=$f(x)$, x^2–8x–33=0,

D=64+4 · 33=196, x_1=$\dfrac{8+14}{2}$=11, x_2=–3,

$f(-9)$=$\dfrac{-9-11}{10}$=–2; $f(12)$=$\dfrac{12-11}{10}$=0,1; $f(111)$=$\dfrac{111-11}{10}$=10;

2) $\dfrac{8y-56}{y^2-27y+140}=\dfrac{8(y-7)}{(y-20)(y-7)}=\dfrac{8}{y-20}$=$f(y)$, y^2–27y+140=0,

D=729–4·140=169, y_1=$\dfrac{27+13}{2}$=20; y_2=7,

$f(-4)$=$\dfrac{8}{-4-20}$=–$\dfrac{1}{3}$; $f(22{,}5)$=$\dfrac{8}{22{,}5-20}$=3,2; $f(24)$=$\dfrac{8}{24-20}$=2.

5. $\dfrac{9b-4}{b+7}-\dfrac{44-16b}{b^2+5b-14}=\dfrac{9b-4}{b+7}-\dfrac{44-16b}{(b-2)(b+7)}=$

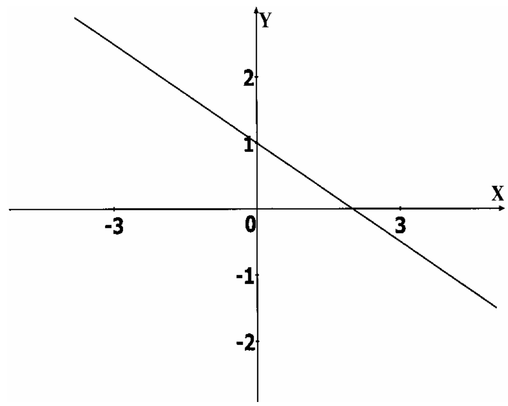
$=\dfrac{(9b-4)(b-2)-44+16b}{(b-2)(b+7)}=\dfrac{9b^2-4b-18b+8-44+16b}{(b-2)(b+7)}=\dfrac{9b^2-6b-36}{(b-2)(b+7)}$,

b^2+5b–14=0, D=25+4·14=81, b_1=$\dfrac{-5+9}{2}$=2; b_2=–7.

6.

$y(x)$=$\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{18-2x^2}=\dfrac{x^2(x-2)-9(x-2)}{2(9-x^2)}=-\dfrac{(x-2)(x^2-9)}{2(x^2-9)}=\dfrac{2-x}{2}=-\dfrac{x}{2}+1$,

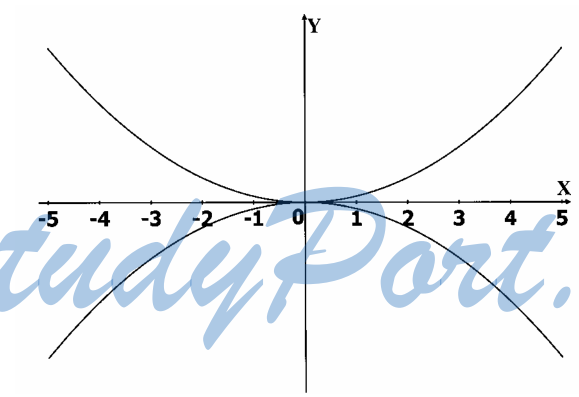
$x\neq\pm 3$.



C-7

1. $g(x)=\frac{1}{10}x^2$;

x	0	±1	±2	±4	±6	±8
$g(x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{32}{5}$



$g(-3)=g(3)=0{,}9$, $g(-5)=g(5)=2{,}5$, $f(x)=-\frac{1}{10}x^2$, $f(-3)=f(3)=-0{,}9$, $f(-5)=f(5)=-2{,}5$.

2. $y=-2x^2$; **а)** $y=-200$, $-200=-2x^2$, $x^2=100$, $x=\pm10$, $(10,-200)$, $(-10,-200)$;
б) $y=-3200$, $-3200=-2x^2$, $x^2=1600$, $x=\pm40$; $(40,-3200)$, $(-40,-3200)$;
в) $y=40x$, $40x=-20x^2$, $x_1=0$, $x_2=-2$; $(0, 0)$, $(-2,-80)$;
г) $y=-1400x$, $-1400x=-2x^2$, $x_1=0$, $x_2=700$; $(0, 0)$; $(700,-980000)$.

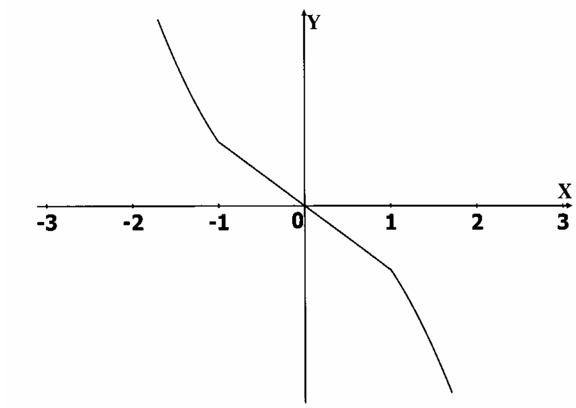
3. $y=40x^2$;

а) $A(-2;-160)$; $-160=40\cdot4$ — ложно, значит, не принадлежит;

б) $B(2, 160)$; $160=40\cdot4$ — верно, значит, принадлежит;

в) $C(0,1; 0,4)$; $0,4=40\cdot0,01$ — верно, значит, принадлежит.

4.



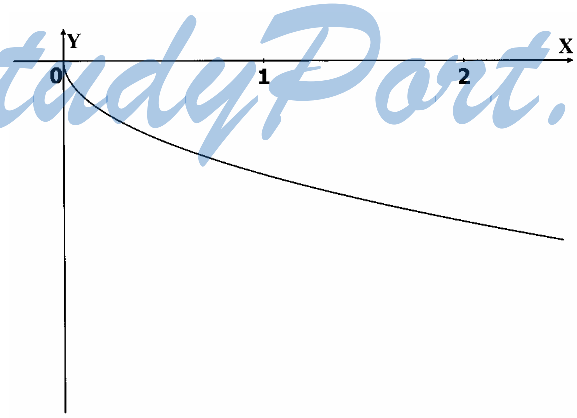
5.

а) $y=\frac{1}{4}x^2$, $x\in[-4; 8]$, $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(8)=16$;

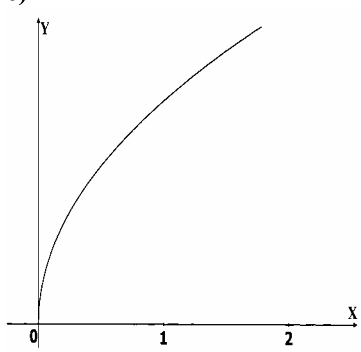
б) $y=-\frac{1}{3}x^2$, $x\in[-6; 3]$, $y_{\min}=y(-6)=-\frac{1}{3}\cdot36=-12$, $y_{\max}=y(0)=0$.

6. $S=\frac{gt^2}{2}$; $560=\frac{10\cdot t^2}{2}$; $t^2=112$; $t=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ (с).

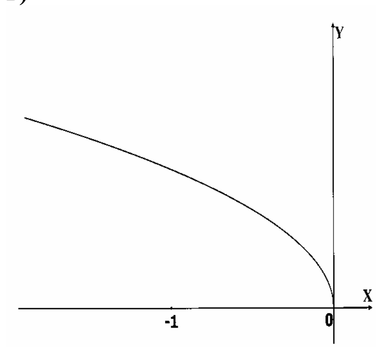
7. а)



б)

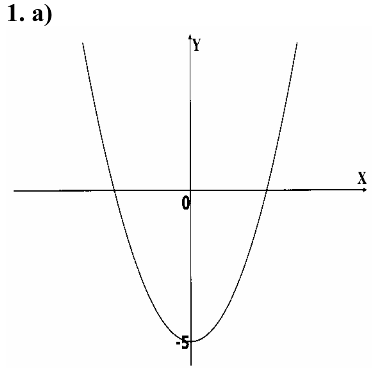


в)

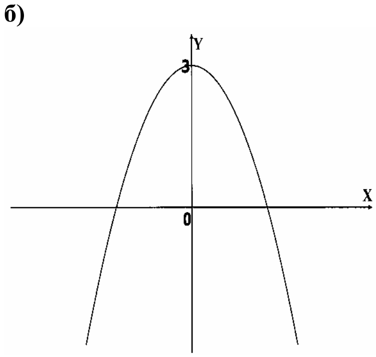


С-8

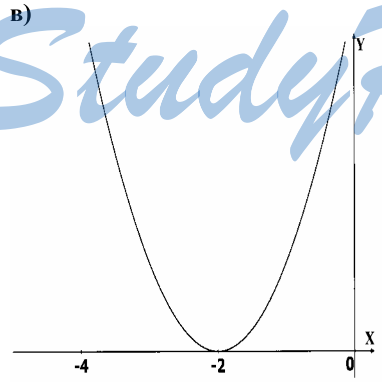
1. а)



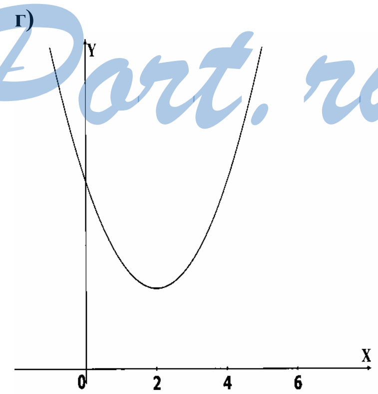
б)



в)



г)

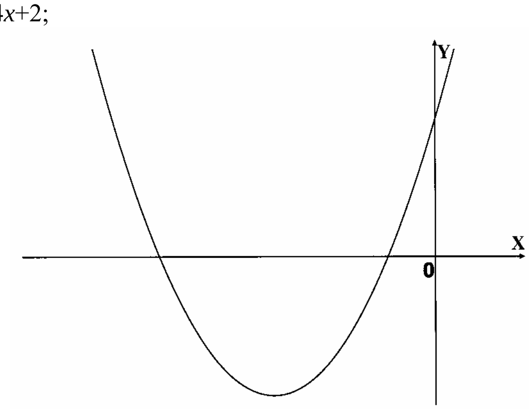


2. а) $g(x)=x^2+4x+2$, $m=-\dfrac{4}{2}=-2$, $n=f(-2)=4-8+2=-2$, $(-2;-2)$;

б) $g(x)=-x^2-6x+3$, $m=\dfrac{6}{-2}=-3$, $n=f(-3)=-9+18+3=12$, $(-3;\ 12)$;

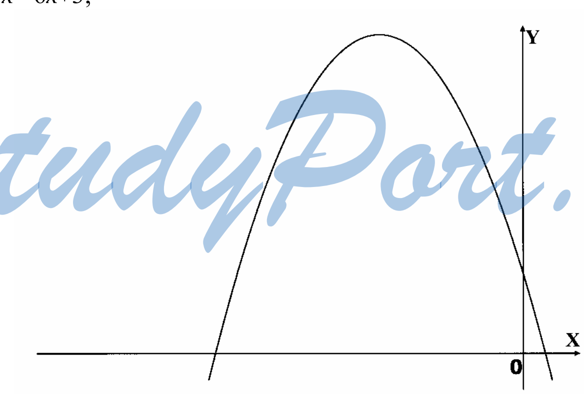
в) $g(x)=4x^2-8x-1$, $m=\dfrac{8}{8}=1$, $n=f(1)=4-8-1=-5$, $(1;-5)$.

3. $g(x)=x^2+4x+2$;



а) $x_1\approx-3{,}4$ $x_2\approx-0{,}6$, $g(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;+\infty)$,
$g(x)<0$ при $x\in(x_1;\ x_2)$; **б)** $g(x)$ возрастает при $x\in[-2;+\infty)$, убывает при $x\in(-\infty;-2]$, $g_{min}=-2$.

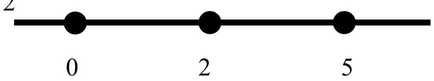
4. $g(x)=-x^2-6x+3$;



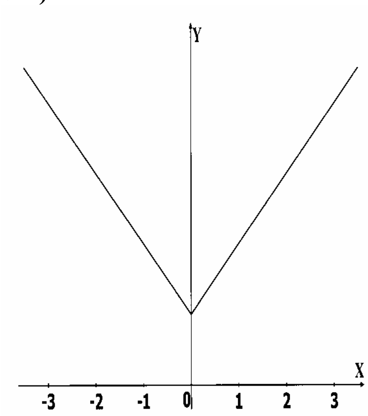
а) $x_1\approx-6{,}4$ $x_2\approx0{,}4$, $g(x)>0$ при $x\in(x_1;\ x_2)$,
$g(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;+\infty)$;
б) $g(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;-3]$, убывает при $x\in[-3;+\infty)$,
$g_{max}=12$.

5. $y=-x^2+4x+3$, $x \in [0; 5]$, $m=\frac{-4}{-2}=2$, $n=y(2)=-4+8+3=7$,

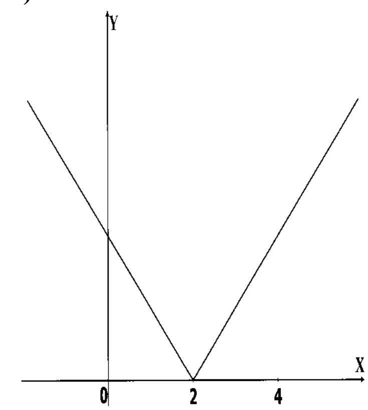
$y(5)=-25+20+3=-2$,
$E(y)=[-2; 7]$.



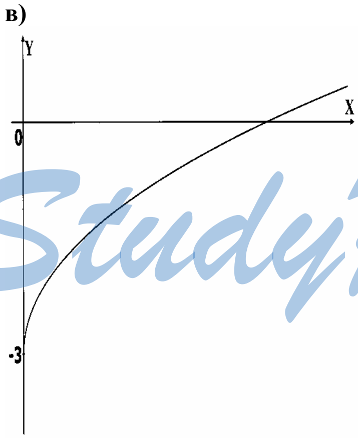
6. а)



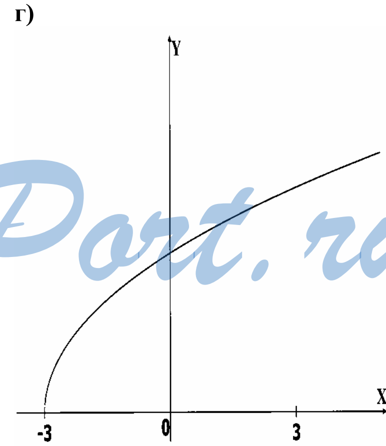
б)



в)



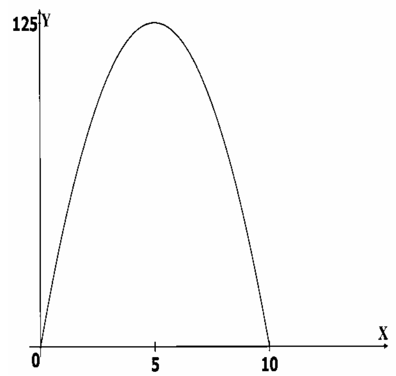
г)



7. $y=x^2+bx+c$, $K(7, 2)$, $m=-\frac{b}{2}=7$, $b=-14$,

$2=n=f(7)=49-14\cdot 7+c=c-49$, $c=51$.

8. $S(t)=50t-5t^2$;

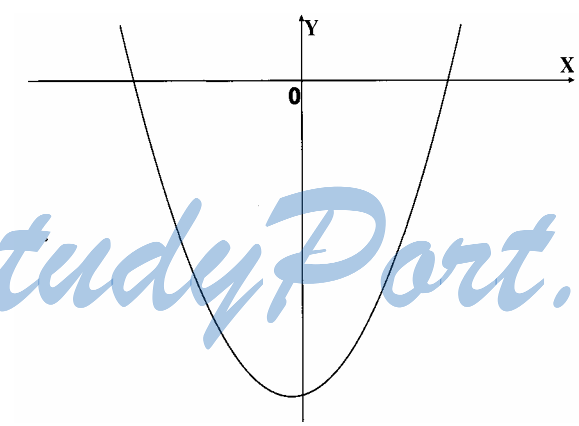


1) 125 м; **2)** стрела поднималась вверх при $t \in [0;\ 5]$, опускалась вниз при $t \in [5;\ 10]$; **3)** через 10 с.

С-9

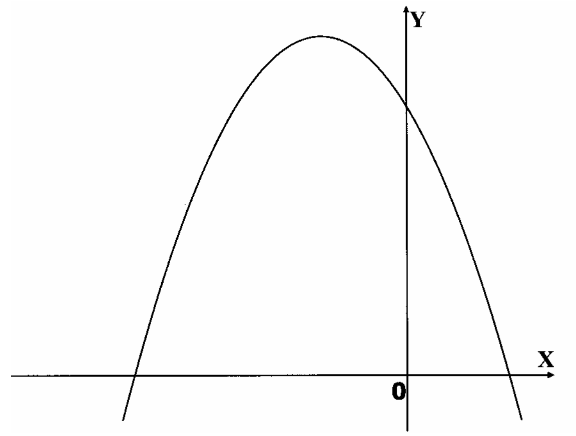
1. 1) $y=3x^2+x-17$; **а)** вверх; **б)** $3x^2+x-17=0$, $D=1+4\cdot3\cdot17=205$, $x_{2,1}=\dfrac{-1\pm2\sqrt{51}}{6}$;

в)



г) $y>0$ при $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;+\infty)$, $y<0$ при $x \in (x_1;\ x_2)$;
2) $y=-2x^2-5x+12$;
а) вниз;
б) $2x^2+5x-12=0$ $\quad D=25+8\cdot12=121$ $\quad x_2=\dfrac{-5+11}{4}=1{,}5$; $x_1=-4$;

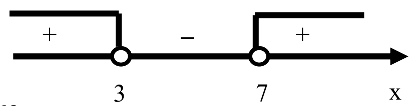
в)



г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

2. а) $x^2-10x+21 > 0$, $D=100-4\cdot 21=16$,

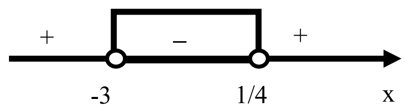
$x_1=\dfrac{10+4}{2}=7$; $x_2=3$.



Ответ: $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.

б) $4x^2+11x-3 < 0$, $D=121+16\cdot 3=169$,

$x_1=\dfrac{-11+3}{8}=\dfrac{1}{4}$; $x_2=-3$.

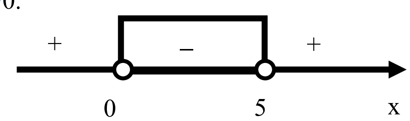


Ответ: $(-3; \dfrac{1}{4})$.

в) $x^2-16 > 0$ $(x-4)(x+4) > 0$.

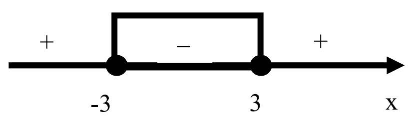
Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

г) $5x-x^2 > 0$, $x^2-5x < 0$, $x(x-5) < 0$.



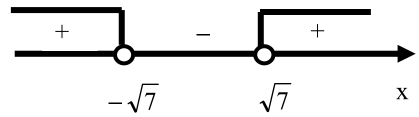
Ответ: $(0; 5)$.

3. а) $x^2 \le 9$, $(x-3)(x+3) \le 0$.



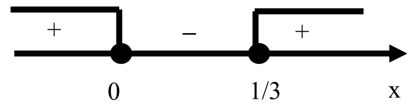
Ответ: $[-3; 3]$.

б) $x^2 > 7$, $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) > 0$.



Ответ: $(-\infty;-\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7};+\infty)$.

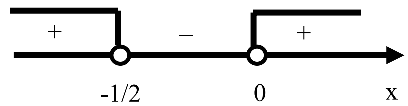
в) $3x^2 \geq x$, $x^2-\frac{x}{3} \geq 0$, $x(x-\frac{1}{3}) \geq 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{3};+\infty)$.

г) $-4x < 8x^2$, $8x^2+4x > 0$,

$x^2+\frac{x}{2} > 0$, $x(x+\frac{1}{2}) > 0$.



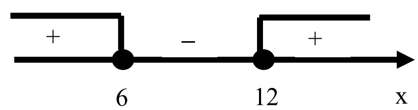
Ответ: $(-\infty;-\frac{1}{2}) \cup (0;+\infty)$.

4. а) $7b^2-4b+1 > 0$, $D=16-4 \cdot 7 < 0$ т.к. $a=7 > 0$, то любое b — решение, ч.т.д. **б)** $8b < b^2+17$, $b^2-8b+17 > 0$, $D=64-4 \cdot 17 < 0$ т.к. $a=1 > 0$, то любое b — решение, ч.т.д.

5. а) $y=\sqrt{x^2-18x+72}$, $x^2-18x+72 \geq 0$,

$D=324-4\cdot 72=36$,

$x_1=\frac{18+6}{2}=12$; $x_2=6$.

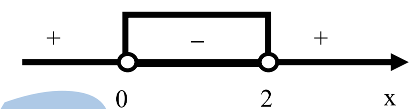


Ответ: $(-\infty; 6] \cup [12;+\infty)$.

б) $y=\frac{7}{\sqrt{6x-3x^2}}$,

$6x-3x^2 > 0$, $3x^2-6x < 0$,

$x^2-2x < 0$ $x(x-2) < 0$.



Ответ: $(0; 2)$.

6. $x^2-8x+c < 0$

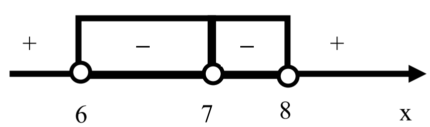
а) $D=64-4c$, чтобы $(3; 5)$ был решением, нужно $x_1=3$, $x_2=5$, т.е. $9-24+c=0$; $c=15$. Ответ: 15.

б) Ответ: ни при каких c.

7. $\frac{x^2-14x+48}{(x-7)^2} < 0$, $\frac{(x-6)(x-8)}{(x-7)^2} < 0$,

$x^2-14x+48=0$, $D=196-4\cdot 48=4$;

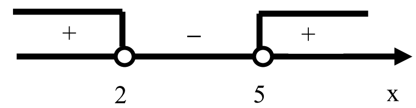
$x_1=\frac{14+2}{2}=8$; $x_2=6$.



Ответ: $(6; 7) \cup (7; 8)$.

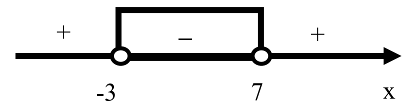
С-10

1. 1). а) $(x-2)(x-5) > 0$.



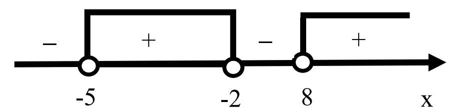
Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5;+\infty)$.

б) $(x+3)(x-7) < 0$.



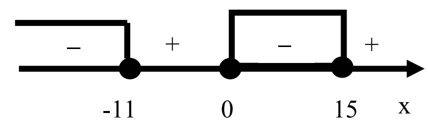
Ответ: $(-3; 7)$.

в) $(x+5)(x+2)(x-8) > 0$.



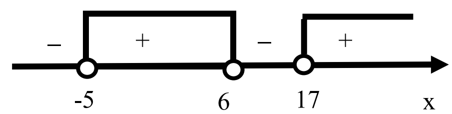
Ответ: $(-5;-2) \cup (8;+\infty)$.

г) $x(x+11)(x-15) \le 0$.



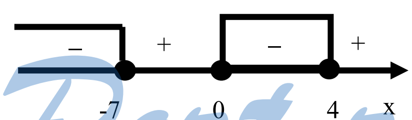
Ответ: $(-\infty;-11] \cup [0; 15]$.

2) а) $(x+5)(x-6)(x-17) > 0$.



Ответ: $(-5; 6) \cup (17;+\infty)$.

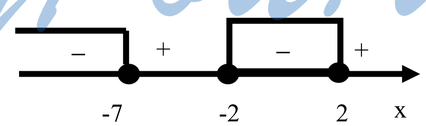
б) $x(x+7)(x-4) \le 0$.



Ответ: $(-\infty;-7] \cup [0; 4]$.

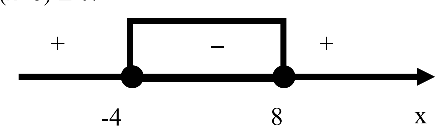
в) $(x^2-4)(x+7) \le 0$,

$(x-2)(x+2)(x+7) \le 0$.



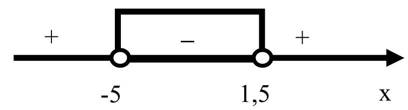
Ответ: $(-\infty;-7] \cup [-2; 2]$.

г) $(x^2+4)(x+4)(x-8) \le 0$, $(x+4)(x-8) \le 0$.



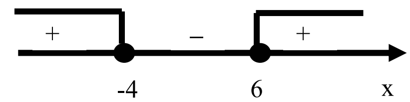
Ответ: $[-4; 8]$.

2. 1) а) $(2x–3)(x+5) < 0$,
$(x–1,5)(x+5) < 0$.



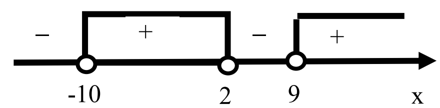
Ответ: $(–5; 1,5)$.

б) $(6–x)(3x+12) \le 0$,
$(x–6)(x+4) \ge 0$.



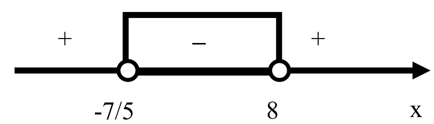
Ответ: $(–\infty;–4] \cup [6;+\infty)$.

в)$–(x–2)(9–x)(x+10) >0$,
$(x–2)(x–9)(x+10) > 0$.



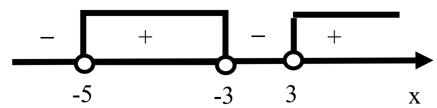
Ответ: $(–10; 2) \cup (9;+\infty)$.

2) а) $(5x+7)(8–x) > 0$,
$(x+\frac{7}{5})(x–8) < 0$.



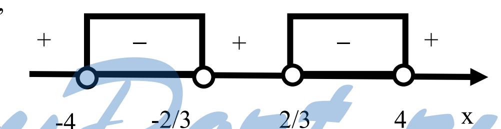
Ответ: $(–\frac{7}{5}; 8)$.

б) $(9–x^2)(6x+30) < 0$,
$(x–3)(x+3)(x+5) > 0$.



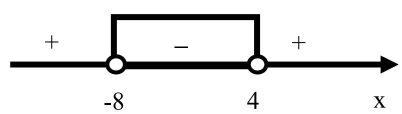
Ответ: $(–5;–3) \cup (3;+\infty)$.

в) $(9x^2–4)(16–x^2)(2x^2+3) > 0$,
$(x^2–\frac{4}{9})(x^2–16) < 0$,
$(x–\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})(x–4)(x+4) < 0$.



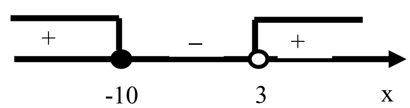
Ответ: $(–4;–\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 4)$.

3. 1). а) $\frac{x-4}{x+8} < 0$.



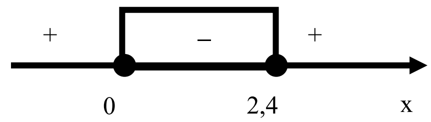
Ответ: $(–8; 4)$.

б) $\frac{x+10}{x-3} \ge 0$.



Ответ: $(–\infty;–10] \cup [3;+\infty)$.

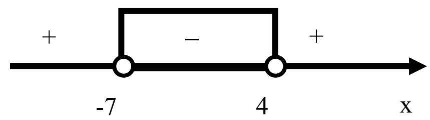
в) $\dfrac{9x}{5x-12} \le 0$,



$\dfrac{x}{x-2{,}4} \le 0$.

Ответ: [0; 2,4].

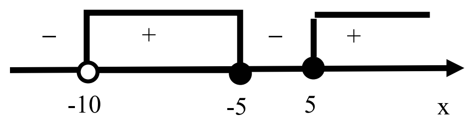
2) а) $\dfrac{3x-12}{x+7} < 0$,



$\dfrac{x-4}{x+7} < 0$.

Ответ: (–7; 4).

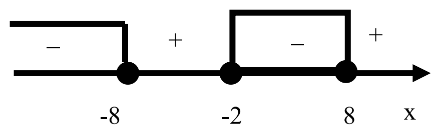
б) $\dfrac{x^2-25}{x+10} \ge 0$,



$\dfrac{(x-5)(x+5)}{x+10} \ge 0$.

Ответ: (–10;–5] ∞ [5;+∞).

в) $\dfrac{(x+2)(x^2-64)}{x^2+15} \le 0$,



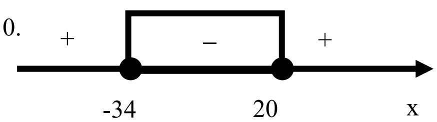
$(x+2)(x-8)(x+8) \le 0$.

Ответ: (–∞;–8] ∪ [–2; 8].

4.

а) $y=\sqrt{(x+34)(20-x)}$,

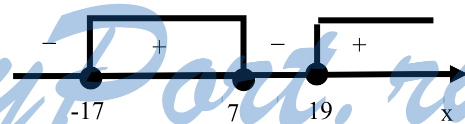
$(x+34)(20-x) \ge 0$, $(x+34)(x-20) \le 0$.



Ответ: [–34; 20].

б) $y=\sqrt{(x-7)(x+17)(x-19)}$,

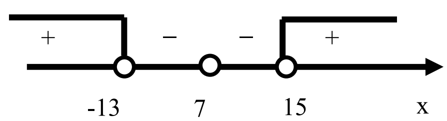
$(x-7)(x+17)(x-19) \ge 0$.



Ответ: [–17; 7] ∪ [19;+∞].

5.

а) $(x+13)(x-7)^2(x-15) > 0$.



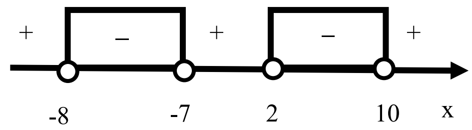
Ответ: (–∞;–13) ∪ (15;+∞).

б) $\dfrac{x^2+15x+56}{x^2-12x+20} < 0$, $x^2+15x+56=0$,

$D=225-4 \cdot 56=1$,

$x_1=\frac{-15+1}{2}=-7$; $x_2=-8$, $x^2-12x+20=0$, $D=144-4\cdot 20=64$,

$x_1=\frac{12+8}{2}=10$, $x_2=2$,



$\frac{(x+7)(x+8)}{(x-2)(x-10)}<0$.

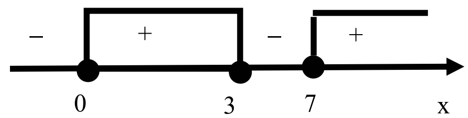
Ответ: $(-8;-7)\cup(2;\,10)$.

в) $x^3-10x^2+21x\geq 0$,

$x(x^2-10x+21)\geq 0$, $x^2-10x+21=0$,

$D=100-4\cdot 21=16$,

$x_1=\frac{10+4}{2}=7$; $x_2=3$,



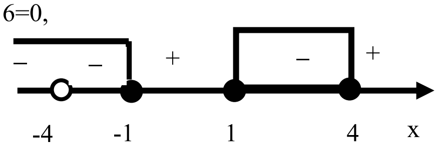
$x(x-7)(x-3)\geq 0$.

Ответ: $[0;\,3]\cup[7;+\infty]$.

г) $\frac{x^4-17x^2+16}{5x+20}\leq 0$, $x^4-17x^2+16=0$,

$D=289-4\cdot 16=225$,

$x_1^2=\frac{17+15}{2}=16$, $x_2^2=1$,



$\frac{(x^2-16)(x^2-1)}{x+4}\leq 0$, $\frac{(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)}{x+4}\leq 0$.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-4;-1]\cup[1;\,4]$.

С-11

1. а) $x^4-x^3+2x^5-2=0$, $2x^5+x^4-x^3-2=0$ пятая степень;

б) $(2x-1)(x+4)(x-8)=0$ третья степень;

в) $(x^2+6)(x-5)-x(x+1)(x-1)=0$, $x^3+6x-5x^2-30-x^3+x=0$,

$-5x^2+7x-30=0$ вторая степень;

г) $(5x^4-1)(5x^2-2)-(5x^3+1)^2=0$, $25x^6-5x^2-10x^4+2-25x^6-10x^3-1=0$,

$-10x^4-10x^3-5x^2+1=0$ четвертая степень.

2. а) $x^3-9x=0$, $x(x^2-9)=0$, $x(x-3)(x+3)=0$, $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm3$;

б) $x^2(x-7)+7(x^2-x)=-6$, $x^3-7x^2+7x^2-7x+6=0$, $x^3-7x+6=0$,

$(x-1)(x^2+x-6)=0$, $(x-1)(x-2)(x+3)=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$;

в) $x^4-13x^2+36=0$, $D=169-4\cdot 36=25$, $x_1^2=\frac{13+5}{2}=9$, $x_2^2=4$, $x_{1,2}=\pm3$; $x_{3,4}=\pm2$.

3. 1) а) $(8x+1)(2x-3)-(4x-2)^2=1$, $16x^2+2x-24x-3-16x^2+16x-4-1=0$,

$-6x=8$, $x=-\frac{4}{3}$; **б)** $5x(5x-1)-(5x+3)(5x-3)=x-3$, $25x^2-5x-25x^2+9=x-3$,

$6x=12$, $x=2$; **в)** $\frac{2x-1}{5}-\frac{x+1}{2}=1$, $4x–2–5x–5=10$, $x=–17$;

г) $\frac{x(2x-5)}{6}-\frac{x(x-2)}{3}=1$, $2x^2–5x–2x^2+4x–6=0$, $x=–6$;

2) а) $(2x–3)(x+1)=x^2+17$, $2x^2–3x+2x–3=x^2+17$, $x^2–x–20=0$, $D=1+4\cdot 20=81$,

$x_1=\frac{1+9}{2}=5$, $x_2=–4$; **б)** $(x–7)(x+7)+(x–2)^2=11x+30–(x+5)^2$,

$x^2–49+x^2–4x+4=11x+30–x^2–10x–25$, $3x^2–5x–50=0$, $D=25+4\cdot 3\cdot 50=625$,

$x_1=\frac{5+25}{6}=5$, $x_2=–\frac{10}{3}$; **в)** $\frac{x^2}{27}+\frac{x}{3}=\frac{x+9}{3}$, $\frac{x^2}{27}=3$, $x^2=81$, $x_{1,2}=\pm 9$;

г) $\frac{x^2-6x-4}{3}=\frac{11x}{10}+1$ $10x^2–60x–40=33x+30$, $10x^2–93x–70=0$, $D=107^2$,

$x_1=\frac{93+107}{10}=20$, $x_2=–1{,}4$.

4. а) $x+11=0$; **б)** $(x–2)(x+9)=0$, $x^2+7x–18=0$; **в)** $(x–4)(x–7)(x+7)=0$,
$(x–4)(x^2–49)=0$, $x^3–4x^2–49x+196=0$.

5. а) $\frac{x(2-x)}{2}+\frac{3(x-3)^2}{2}=2\frac{1}{2}-\frac{2(4-x)^2}{3}$,

$3x(2–x)+9(x^2–6x+9)=15–4(16–8x+x^2)$, $6x–3x^2+9x^2–54x+81=15–64+32x–4x^2$,

$10x^2–80x+130=0$, $x^2–8x+13=0$, $D=64–4\cdot 13=4\cdot 3$, $x_{1,2}=\frac{8\pm 2\sqrt{3}}{2}=4\pm\sqrt{3}$;

б) $x=\frac{(3-x)^2}{9}-\frac{x(x-12)}{18}+\frac{(3-x)(x-2)}{36}$,

$36x=4(9–6x+x^2)–2x(x–12)+(3x–x^2–6+2x)$, $36x=36–24x+4x^2–2x^2+24x–x^2–6+5x$,

$x^2–31x+30=0$, $D=961–4\cdot 30=841$, $x_1=\frac{31+29}{2}=30$, $x_2=1$.

6. а) $x^6+3x^4+x^2=–16$, $x^6+3x^4+x^2+16=0$, уравнение не имеет корней , т.к. $x^6+3x^4+x^2+16>0$ при всех x;
б) $25x(x+2)–(5x–1)(5x+1)=25(2x–1)+26$, $25x^2+50x–25x^2+1=50x–25+26$;
$1=1$ — у этого уравнения корень — любое число;
в) $6x^5+8x^3+12x–41=0$, $6x^5+8x^3+12x=41$, верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля), а правая $41>0$;
г) $5x^5+25x^4–20x^3+10x^2–5x=17$, уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 5, а левая — нет.

С-12

1. а) $5(x–2)–4(3+x)=2+ax$, $5(6–2)–4(3+6)=2+6a$, $20–36=2+6a$, $6a=–18$, $a=–3$;
б) $9x^2+3(c+2)–(3–2c)=0$, $9\cdot 25+3(c+2)–(3–2c)=0$, $3c+6–3+2c+225=0$,

$5c=-228,\ c=-\dfrac{228}{5}=-45{,}6,\ x_1=5,\ x_2=-5.$

2. $kx+1=7,\quad kx=6;\ x=\dfrac{6}{k},\ k=\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6.$

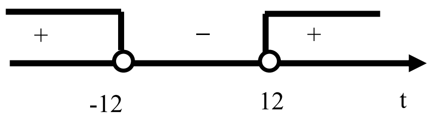
3. $4x-2b=5,\ x=\dfrac{2b+5}{4}$; **а)** $\dfrac{2b+5}{4}>0,\ 2b>-5,\ b>-2{,}5;$

б) $\dfrac{2b+5}{4}<0,\ b<-2{,}5;$ **в)** $\dfrac{2b+5}{4}>8;\quad 2b+5>32;\quad 2b>27;\quad b>13{,}5;$

г) $\begin{cases}\dfrac{2b+5}{4}>1; & 2b+5>4; \quad b>-0{,}5\\ \dfrac{2b+5}{4}<3; & 2b+5<12; \quad b<3{,}5\end{cases}\quad -0{,}5<b<3{,}5.$

4. а) $2x^2+4x+t=0,\quad D=16-4\cdot2\cdot t>0,\ 16-8t>0,\quad 8t<16;\quad t<2;$

б) $6x^2+tx+6=0,\quad D=t^2-4\cdot6\cdot6>0,\ t^2-144>0,\quad (t-12)(t+12)>0.$



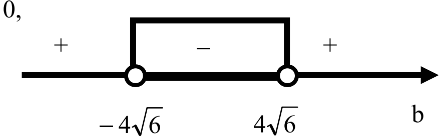
$t\in(-\infty;-12)\cup(12;+\infty).$

5. а) $4x^2-8x+c=0,\quad D=64-4\cdot4\cdot c=0,\ 64=16c,\ c=4;$

б) $x^2+cx+16=0,\ D=c^2-4\cdot16=0,\quad c^2=64,\ c_{1,2}=\pm8.$

6. а) $6^2+bx+4=0,\ D=b^2-4\cdot6\cdot4<0,$

$b^2-96<0,\quad (b-4\sqrt{6})(b+4\sqrt{6})<0,$



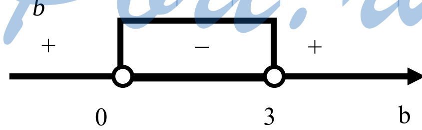
$-4\sqrt{6}<b<4\sqrt{6}.$

б) $x^2+8x+b=0,\ D=64-4b<0,$

$4b>64,\quad b>16.$

7. $b(2-x)=6,\ 2-x=\dfrac{6}{b},\ x=2-\dfrac{6}{b},\ x=\dfrac{2b-6}{b},$

$\dfrac{2b-6}{b}<0,\qquad \dfrac{b-3}{b}<0.$



$b=1;\ 2.$

8. $x^2+ax=0$ при $a=0,\quad x=0$ — единственный корень;

$x^2+ax-1=0,\quad D=a^2+4>0$ при любом a имеет два корня;

$x^2+ax+1=0,\quad D=a^2-4>0$ не при любом a;

$x^2-a=0$ при $a=0\ \ x=0$ — единственный корень.

Ответ: $x^2+ax-1=0.$

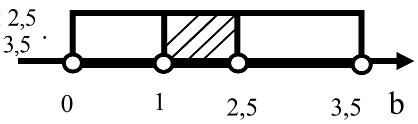
9. $2x^2+nx-(18-x)=0$, пусть a и $-a$ корни уравнения, тогда

$\begin{cases} 2a^2+na-(18-a)=0 \\ 2a^2-na-(18+a)=0 \end{cases}$, $na-(18-a)+na+(18+a)=0$,

$2na+2a=0$, $n+1=0$, $n=-1$.

10. $x^2-4bx+4b^2-1=0$, $D=16b^2-4(4b^2-1)=4$, $x_1=\dfrac{4b+2}{2}=2b+1$, $x_2=2b-1$,

$\begin{cases} 1<2b+1<6 \\ 1<2b-1<6 \end{cases}\begin{cases} 0<2b<5 \\ 2<2b<7 \end{cases}\begin{cases} 0<b<2{,}5 \\ 1<b<3{,}5 \end{cases}$.



Ответ: $(1;\ 2{,}5)$.

С-13

1) а) $18y^3-36y^2=0$, $y^2(y-2)=0$, $y_1=0$ $y_2=2$;
б) $x^3-144x=0$, $x(x^2-144)=0$, $x(x-12)(x+12)=0$, $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm12$;
в) $x^2+0{,}9x=0$, $x(x+0{,}9)=0$, $x_1=0$, $x_2=-0{,}9$;
2) а) $16x^3-32x^2-x+2=0$, $16x^2(x-2)-(x-2)=0$, $(16x^2-1)(x-2)=0$,

$(4x-1)(4x+1)(x-2)=0$, $x_{1,2}=\dfrac{1}{4}$, $x_3=2$; **б)** $x^6-x^4+5x^2-5=0$, $x^4(x^2-1)+5(x^2-1)=0$,

$(x^2-1)(x^4+5)=0$, $(x-1)(x+1)=0$, $x_{1,2}=\pm1$, **в)** $y^6+4y^4=y^2+4$, $y^4(y^2+4)=y^2+4$,
$y^4=1$, $y_{1,2}=\pm1$.
2. а) $(x^2-10)^2-3(x^2-10)+4=0$, $x^2-10=y$, $y^2-3y+4=0$, $D=9-4\cdot4=<0$ нет корней;

б) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)+6=0$, $x^2+x=y$, $y^2-5y+6=0$, $D=25-4\cdot6=1$, $y_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$;

$x^2+x=3$, $x^2+x-3=0$, $D=1+4\cdot3=13$, $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, $x^2+x=2$, $x^2+x-2=0$,

$D=1+4\cdot2=9$, $x_3=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $x_4=-2$; **в)** $(x^2+x+6)(x^2+x-4)=144$, $x^2+x+6=y$,

$y(y-10)=144$, $y^2-10y-144=0$, $D=100+4\cdot144=676$, $y_1=\dfrac{10+26}{2}=18$, $y_2=-8$,

$x^2+x+6=18$, $x^2+x-12=0$, $D=1+4\cdot12=49$, $x_1=\dfrac{-1+7}{2}=3$; $x_2=-4$,

$x^2+x+6=-8$, $x^2+x+14=0$, $D=1-4\cdot14<0$ нет корней. Ответ: 3; –4.

3. а) $x^4-10x^2+9=0$, $D=100-4\cdot9=64$, $x_1^2=\dfrac{10+8}{2}=9$, $x_2^2=1$, $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm1$;

б) $x^4-18x^2+32=0$, $D=324-4\cdot32=196$, $x_1^2=\dfrac{18+14}{2}=16$, $x_2^2=2$, $x_{1,2}=\pm4$,

$x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; **в)** $x^4-x^2-12=0$, $D=1+4\cdot12=49$, $x_1^2=\dfrac{1+7}{2}=4$, $x_2^2=<0$, $x_{1,2}=\pm2$;

г) $x^4+6x^2-27=0$, $D=36+4\cdot 27=144$, $x_1^2=\dfrac{-6+12}{2}=3$, $x_2^2<0$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$;

д) $x^4+15x^2+54=0$, $D=225-4\cdot 54=9$, $x_1^2=\dfrac{-15+3}{2}<0$, $x_2^2<0$ нет корней;

е) $x^4+25x^2=0$, $x^2(x^2+25)=0$, $x^2=0$, $x=0$.

4. $y=x^4-3x^2-4$, $x^4-3x^2-4=0$, $D=9+4\cdot 4=25$, $x_1^2=\dfrac{3+5}{2}=4$, $x_2^2<0$, $x_{1,2}=\pm 2$.

Ответ: $(\pm 2;\ 0)$.

5. $x^5+x^4+3x^3+3x^2+4x+4=0$, $x^4(x+1)+3x^2(x+1)+4(x+1)=0$, $(x+1)(x^4+3x^2+4)=0$, $x_1=-1$, $x^4+3x^2+4=0$, $D=9-4\cdot 4=<0$, нет корней. Ответ: -1.

6. $\dfrac{x^2-3}{x}+\dfrac{x}{x^2-3}=2\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x^2-3}{x}=t$, $t+\dfrac{1}{t}-\dfrac{5}{2}=0$, $2t^2-5t+2=0$, $D=25-4\cdot 2\cdot 2=9$,

$t_1=\dfrac{5+3}{4}=2$, $t_2=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x^2-3}{x}=2$, $x^2-2x-3=0$, $D=4+4\cdot 3=16$, $x_1=\dfrac{2+4}{2}=3$, $x_2=-1$,

$\dfrac{x^2-3}{x}=\dfrac{1}{2}$, $2x^2-x-6=0$, $D=1+4\cdot 2\cdot 6=49$, $x_3=\dfrac{1+7}{4}=2$, $x_4=-1{,}5$.

7. а) $x^3-13x+12$, $x^3-x-12x+12=0$, $x(x^2-1)-12(x-1)=0$, $x(x-1)(x+1)-12(x-1)=0$,

$(x-1)(x^2+x-12)=0$, $x_1=1$, $x^2+x-12=0$, $D=49$, $x_2=\dfrac{-1+7}{2}=3$, $x_3=-4$;

б) $x^3-31x+30=0$, $x^3-x-30x+30=0$, $x(x^2-1)-30(x-1)=0$,
$x(x-1)(x+1)-30(x-1)=0$, $(x-1)(x^2+x-30)=0$, $x_1=1$, $x^2+x-30=0$, $D=121$,
$x_2=\dfrac{-1+11}{2}=5$, $x_3=-6$.

8. а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=840$, $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=840$, $x^2-5x+4=y$,

$y(y+2)=840$, $y^2+2y-840=0$, $D=4+4\cdot 840=4\cdot 841$, $y_1=\dfrac{-2+58}{2}=28$, $y_2=-30$,

$x^2-5x+4=28$, $x^2-5x-24=0$, $D=25+4\cdot 24=121$, $x_1=\dfrac{5+11}{2}=8$, $x_2=-3$,

$x^2-5x+4=-30$, $x^2-5x+34=0$, $D=25-4\cdot 34<0$ нет корней. Ответ: -3; 8.

б) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=945$, $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=945$, $x^2+8x+7=y$,

$y(y+8)=945$, $y^2+8y-945=0$, $D=64+4\cdot 945=62^2$, $y_1=\dfrac{-8+62}{2}=27$, $y_2=-35$,

$x^2+8x+7=27$, $x^2+8x-20=0$, $D=64+4\cdot 20=144$, $x_1=\dfrac{-8+12}{2}=2$, $x_2=-10$,

$x^2+8x+7=-35$, $x^2+8x+42=0$, $D=64-4\cdot 42<0$ нет корней. Ответ: -10; 2.

9. а) $x^4-8x^2+a=0$, $x^2=y$, $y^2-8y+a=0$, $f(y)=y^2-8y+a$, $D=64-4a<0$ или

$\begin{cases} f(0)>0 \\ m=\dfrac{8}{2}=4<0 \end{cases}$ — нет решений, $64<4a$, $a>16$. Ответ: $a>16$.

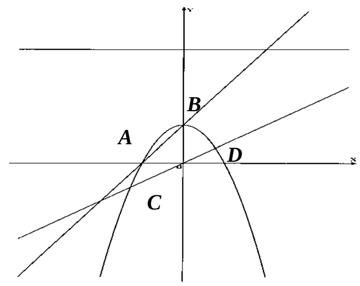
б) $x^4+ax^2+25=0$, $x^2=y$, $y^2+ay+25=0$, $f(y)=y^2+ay+25$, $D=a^2-4\cdot 25<0$,

$(a-10)(a+10)<0$, $-10<a<10$ или $\begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}<0 \\ f(0)=25>0 \end{cases}$, $a>0$. Ответ: $a>-10$.

С-14

1. $\begin{cases} xy=6 \\ y=0{,}5x^2-8 \end{cases}$. Три решения: (–3,6;–1,8), (–0,8;–7,8), (4,2; 1,3).

2. $y=-x^2+1$.



а) $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases}$, две точки пересечения: $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$.

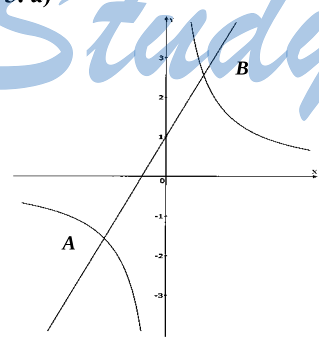
Ответ: (–1; 0), (0; 1).

б) $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=0{,}5x \end{cases}$, две точки пересечения: $C(-1{,}4;-0{,}8)$, $D(0{,}8;\ 0{,}5)$.

Ответ: (–1,4;–0,8), (0,8; 0,5).

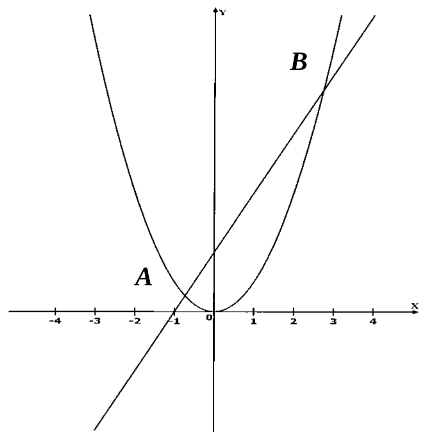
в) $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=3 \end{cases}$, нет точек пересечения. Ответ: нет решения.

3. а)



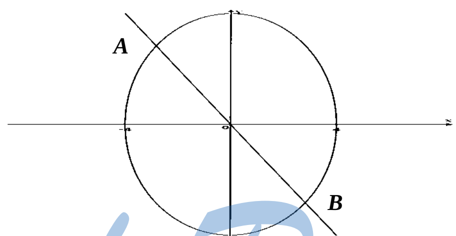
$\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ y=x+1 \end{cases}$. Ответ: (1,6; 2,6), (–2,6;–1,6).

б) $\begin{cases} y = 0{,}5x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$.

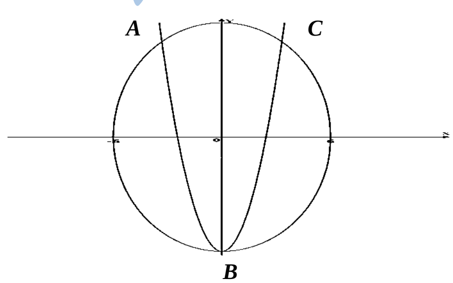


Ответ: (–0,8; 0,2), (2,5; 3,5).

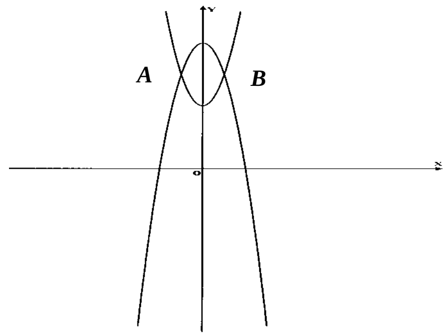
в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x \end{cases}$. Ответ: (2,9;–2,9), (–2,9; 2,9).



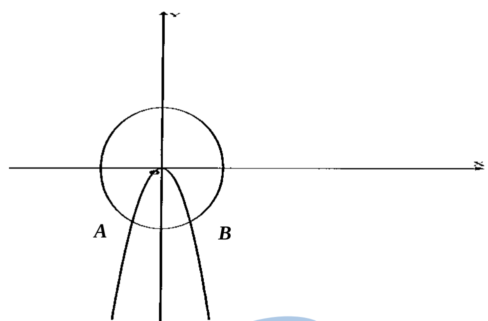
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$. Ответ: (0;–6), (3,4; 5), (–3,4; 5).



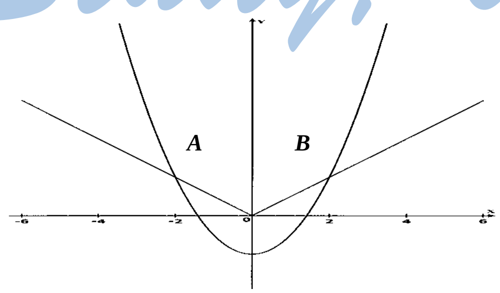
4. а) $\begin{cases} y = -x^2 + 8 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$. Ответ: два решения.



б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x^2 \end{cases}$. Ответ: два решения.

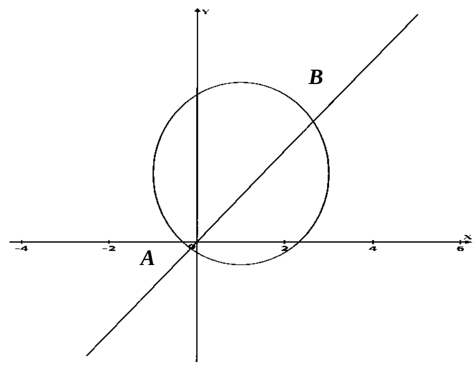


5. а) $\begin{cases} y = |x| \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$, две точки пересечения: $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$.



Ответ: (–2; 2), (2; 2).

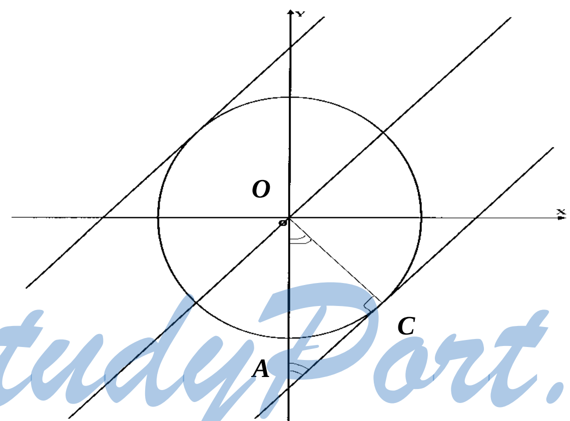
б)



$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=16\\ y=x\end{cases}$, две точки пересечения: $A(-0{,}5;-0{,}5)$, $B(5{,}2;\ 5{,}2)$.

Ответ: (–0,5;–0,5), (5,2; 5,2).

6. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ x-y=m; \quad y=x-m\end{cases}$.



Изобразим графики функций.
Рассмотрим ΔAOC: $\angle C=90°$, $\angle A=\angle O=45°$.

$OC=3$ (радиус) $AC=3$ $OA=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

Ясно, что при $m=\pm 3\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;
при $m\in(-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$–две точки; при $|m|>3\sqrt{2}$ решений нет.
Ответ: а) $m=\pm 3\sqrt{2}$; б) $(-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$ в) $(-\infty;-3\sqrt{2})\cup(3\sqrt{2};+\infty)$.

С-15

1. $\begin{cases} xy+42=0 \\ x^2-2y-61=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 7\cdot(-6)+42=0 \\ 49-2\cdot(-6)-61=0 \end{cases}$ верно, значит, является.

2. $\begin{cases} x^2-5y-24=0 \\ y=x-2 \end{cases}$, $x^2-5(x-2)-24=0$; $x^2-5x+10-24=0$; ,

$x^2–5x–14=0$, $D=25+4\cdot 14=81$,

$x_1=\dfrac{5+9}{2}=7$, $y_1=7–2=5$, (7; 5), $x_2=–2$, $y_2=–2–2=–4$, (–2;–4).

Проверка: (7; 5) $\begin{cases} 7^2-5\cdot 5-24=0 \\ 5=7-2 \end{cases}$ — верно,

(–2;–4) $\begin{cases} (-2)^2-5\cdot(-4)-24=0 \\ -4=-2-2 \end{cases}$ — верно.

Ответ: (7; 5), (–2;–4).

3. 1) а) $\begin{cases} x^2-2y=54 \\ y=x-3 \end{cases}$;

$\begin{matrix} x^2-2(x-3)=54 \\ x^2-2x-48=0 \end{matrix}$;

$D=4+4\cdot 48=196$, $x_1=\dfrac{-2+14}{2}=8$, $x_2=–6$, $y_1=8–3=5$, $y_2=–6–3=–9$.

Ответ: (8; 5), (–6;–9).

б) $\begin{cases} x=y+3 \\ xy-y=7 \end{cases}$, $y(y+3)-y=7$, $y^2+2y–7=0$, $D=4+4\cdot 7=32$,

$y_{1,2}=\dfrac{-2\pm 4\sqrt{2}}{2}=–1\pm 2\sqrt{2}$,

$x_{1,2}=–1\pm 2\sqrt{2}+3=2\pm 2\sqrt{2}$. Ответ: $(2\pm 2\sqrt{2}; –1\pm 2\sqrt{2})$.

в) $\begin{cases} xy+x^2=4 \\ y=x+2 \end{cases}$, $x(x+2)+x^2=4$; $2x^2+2x-4=0$; $x^2+x–2=0$, $D=9$,

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $x_2=–2$, $y_1=1+2=3$, $y_2=–2+2=0$. Ответ: (1; 3), (–2; 0).

2) а) $\begin{cases} 4y+x=0 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ $\left|\ \begin{matrix} x=-4y \\ 16y^2+y^2=17 \end{matrix}\right.$, $17y^2=17$, $y_{1,2}=\pm 1$, $x_{1,2}=\mp 4$.

Ответ: $(\pm 4; \mp 1)$

б) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y^2=-1 \end{cases}$ $\left|\ \begin{matrix} x=1-2y \\ 2-4y+y^2=-1 \end{matrix}\right.$,

$y^2–4y+3=0$, $D=4$, $y_1=\frac{4+2}{2}=3$, $y_2=1$, $x_1=1–2\cdot3=–5$, $x_2=1–2\cdot1=–1$.

Ответ: (–5; 3), (–1; 1).

в) $\begin{cases} xy+y^2=24 \\ x-2y=7 \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} y(7+2y)+y^2=24 \\ x=7+2y \end{matrix}\right.$,

$3y^2+7y–24=0$, $D=49+4\cdot3\cdot24=337$, $y_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{337}}{6}$,

$x_{1,2}=7+\frac{-7\pm\sqrt{337}}{3}=\frac{14\pm\sqrt{337}}{3}$. Ответ: $\left(\frac{14\pm\sqrt{337}}{3};\ \frac{-7\pm\sqrt{337}}{6}\right)$.

3) а) $\begin{cases} (x-2)(y+1)=36 \\ x-2y=6 \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} (4+2y)(y+1)=36 \\ x=6+2y \end{matrix}\right.$, $2y^2+6y–32=0$,

$y^2+3y–16=0$, $D=9+4\cdot16=73$, $y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$, $x_{1,2}=6–3\pm\sqrt{73}=3\pm\sqrt{73}$.

Ответ: $\left(3\pm\sqrt{73};\ \frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=4 \\ 3x+y=10 \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} x^2+x(10-3x)-(10-3x)^2=4 \\ y=10-3x \end{matrix}\right.$,

$x^2+10x–3x^2–100+60x–9x^2=4$, $11x^2–70x+104=0$, $D=4900–4\cdot11\cdot104=324$,

$x_1=\frac{70+18}{22}=4$, $x_2=\frac{26}{11}$, $y_1=10–3\cdot4=–2$, $y_2=10–3\cdot\frac{26}{11}=\frac{32}{11}$.

Ответ: (4;–2), $\left(\frac{26}{11};\ \frac{32}{11}\right)$.

4. $\begin{cases} 5x+3y=14 \\ 2x-5y=18 \\ x^2+y^2+2xy-x=0 \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} x=\frac{14-3y}{5} \\ \frac{28-6y}{5}-5y=18 \end{matrix}\right.$, $28–6y–25y=90$, $31y=–62$,

$y=–2$, $x=4$, $4^2+(–2)^2+2\cdot4\cdot(–2)–4=0$ – верно. Ответ: (4;–2).

5. а) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ xy=8 \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} x^2+\frac{64}{x^2}=18 \\ y=\frac{8}{x} \end{matrix}\right.$, $x^4–18x^2+64=0$,

$D=324–4\cdot64=68$, $x^2_{1,2}=\frac{18\pm2\sqrt{17}}{2}=9\pm\sqrt{17}$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{9+\sqrt{17}}$,

$x_{3,4}=\pm\sqrt{9-\sqrt{17}}$, $y_{1,2}=\pm\frac{8}{\sqrt{9+\sqrt{17}}}$, $y_{3,4}=\pm\frac{8}{\sqrt{9-\sqrt{17}}}$, б) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 41 \\ 2x^2 + y^2 = 59 \end{cases}$, $4x^2=100$, $x^2=25$, $x_{1,2}=\pm 5$, $y^2=50-41=9$, $y_{1,2}=\pm 3$.

Ответ: (±5; 3), (±5;–3).

в) $\begin{cases} x^2 - 3x - 2y = 4 \\ x^2 + x - 3y = 18 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2} \\ x^2 + x - \dfrac{3x^2 - 9x - 12}{2} = 18 \end{array} \right.$, $2x^2+2x-3x^2+9x+12=36$,

$x^2-11x+24=0$, $D=121-4 \cdot 24=25$, $x_1=\dfrac{11+5}{2}=8$, $x_2=3$,

$y_1=\dfrac{64-24-4}{2}=18$, $y_2=\dfrac{9-9-4}{2}=-2$. Ответ: (8; 18), (3;–2).

6. $x^2+(x^2-10-1)^2=13$, $x^2+(x^2-11)^2=13$, $x^2+x^4-22x^2+121=13$,

$x^4-21x^2+108=0$, $D=9$, $x_1^2=\dfrac{21+3}{2}=12$, $x_2^2=9$, $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm 3$,

$y_{1,2}=12-10=2$, $y_{3,4}=9-10=-1$. Ответ: ($\pm 2\sqrt{3}$; 2); (±3;–1).

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x-2} = \dfrac{1}{12} \\ y = 2x - 2 \end{array} \right.$, $12(2x-2)-12x-x(2x-2)=0$,

$6(2x-2)-6x-x(x-1)=0$, $12x-12-6x-x^2+x=0$, $x^2-7x+12=0$, $D=1$,

$x_1=\dfrac{7+1}{2}=4$, $x_2=3$, $y_1=6$, $y_2=4$. Ответ: (4; 6), (3; 4).

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3} \\ x - y = 6 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} \dfrac{6+y}{y} + \dfrac{y}{6+y} - \dfrac{10}{3} = 0 \\ x = 6 + y \end{array} \right.$,

$3(6+y)^2+3y^2-10y(6+y)=0$, $3(36+12y+y^2)+3y^2-60y-10y^2=0$,
$108+36y+3y^2+3y^2-60y-10y^2=0$, $4y^2+24y-108=0$, $y^2+6y-27=0$,
$D=36+4{\cdot}27=144$, $y_1=\dfrac{-6+12}{2}=3$, $y_2=-9$, $x_1=9$, $x_2=-3$. Ответ: (9;3), (–3;–9).

С-16

1. Пусть x–первое число, y–второе число, тогда $\begin{cases} x + y = 25 \\ xy = 144 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y = 25 - x \\ x(25 - x) = 144 \end{array} \right.$,

$x^2-25x+144=0$, $D=49$, $x_1=\dfrac{25+7}{2}=16$, $x_2=9$, $y_1=9$, $y_2=16$.

Ответ: 16, 9.

2. Пусть x см–один катет, тогда $(x+4)$ см–другой катет.
Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2+(x+4)^2=400$,

$2x^2+8x+16-400=0$, $x^2+4x-192=0$, $D=28^2$, $x_1=\frac{-4+28}{2}=12$, $x_2<0$.

12 см — первый катет, 12+4=16 (см) — второй катет.

3. Пусть x м, y м–ширина и длина соответственно. Тогда xy м^2 — площадь или 3250 м^2, $2(x+y)$ м–периметр или 230 м.

Получаем систему: $\begin{cases} xy=3250 \\ 2(x+y)=230 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y(115-y)=3250 \\ x=115-y \end{array} \right.$,

$y^2-115y+3250=0$, $D=225$, $y_1=\frac{115+15}{2}=65$, $y_2=50$,

$x_1=115-65=50$, $x_2=115-50=65$. Ответ: 50 м, 65 м.

4. Пусть x см, y см — ширина и длина соответственно. Тогда $2(x+y)$ см — периметр или 24 см. (x^2+y^2) см^2— сумма площадей квадратов или 148 см^2

Получаем систему: $\begin{cases} 2(x+y)=24 \\ x^2+y^2=148 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x=12-y \\ (12-y)^2+y^2=148 \end{array} \right.$,

$144-24y+2y^2=148$, $2y^2-24y-4=0$, $y^2-12y-2=0$, $D=144+4\cdot 2=152$,

$y_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{152}}{2}=6\pm\sqrt{38}$, $y=6+\sqrt{38}$, $x=6-\sqrt{38}$.

Ответ: $6-\sqrt{38}$ см, $6+\sqrt{38}$ см.

5. Пусть x — первое число, y — второе число, тогда xy — их произведение, $(x+y)$ — их сумма $3y$ — утроенное второе число.

Получаем систему: $\begin{cases} xy=x+y+13 \\ x-3y=9 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y(3y+9)=3y+9+y+13 \\ x=3y+9 \end{array} \right.$,

$3y^2+9y=4y+22$, $3y^2+5y-22=0$, $D=25-4\cdot 3\cdot 22=289$, $y_1=\frac{-5+17}{6}=2$,

$y_2=-\frac{11}{3}$, $x_1=3\cdot 2+9=15$, $x_2=-11+9=-2$. Ответ: 15 и 2 или –2 и $-\frac{11}{3}$.

6. Пусть x км/ч — скорость I автомобиля, y км/ч — скорость II автомобиля, $3x$, $3y$ км — прошли за 3 ч соответственно I и II автомобиль. $\frac{360}{x}$ ч, $\frac{360}{y}$ ч — потратили на весь путь I и II автомобиль соответственно.

Получаем систему: $\begin{cases} 3x-3y=30 \\ \frac{360}{x}+\frac{1}{2}=\frac{360}{y} \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x-y=10;\ x=10+y \\ \frac{360}{10+y}+\frac{1}{2}-\frac{360}{y}=0 \end{array} \right.$,

$720y+y^2+10y-7200-720y=0$, $y^2+10y-7200=0$,

$D=100+4\cdot 7200=170^2$, $y_1=\frac{-10+170}{2}=80$, $y_2<0$, $x_1=10+80=90$.

90 и 80 км/ч — скорости I и II автомобиля соответственно.

7. Пусть 1–вся работа, x ч — выполняет всю работу I тракторист, тогда (x+4) ч — выполняет всю работу II тракторист. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+4}$ часть работы — производительность I и II.

Известно, что за 2 ч 40 мин оба тракториста , работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)=1$, $\frac{8}{3x}+\frac{8}{3(x+4)}-1=0$,

$8x+32+8x-3x^2-12x=0$, $3x^2-4x-32=0$, $D=16+12\cdot 32=400$,

$x_1=\frac{4+20}{6}=4$, $x_2<0$. 4 ч и 8 ч — потребуется I и II трактористу, чтобы выполнить всю работу.

С-17

1. а) 14, 13, 12, 11, 10; **б)** 1, 8, 27, 64, 125; **в)** 7, 12, 17, 22, 27.
2. $x_n = 6n - 1$; **а)** $x_1 = 6\cdot 1 - 1 = 5$; **б)** $x_4 = 6\cdot 4 - 1 = 23$;
в) $x_{20} = 6\cdot 20 - 1 = 119$; **г)** $x_{100} = 6\cdot 100 - 1 = 599$; **д)** $x_k = 6k - 1$;
е) $x_{k+2} = 6(k+2) - 1 = 6k - 11$.
3. а) $a_n = n - 2$, $a_3 = 3 - 2 = 1$, $a_6 = 6 - 2 = 4$, $a_{20} = 20 - 2 = 18$;
б) $a_n = \frac{3n-1}{2}$, $a_3 = \frac{9-1}{2} = 4$, $a_6 = \frac{18-1}{2} = 8{,}5$, $a_{20} = \frac{60-1}{2} = 29{,}5$;
в) $a_n = n^2$, $a_3 = 3^2 = 9$, $a_6 = 6^2 = 36$, $a_{20} = 20^2 = 400$; **г)** $a_n = n(n+1)$,
$a_3 = 3(3+1) = 12$, $a_6 = 6(6+1) = 42$, $a_{20} = 20(20+1) = 420$;
д) $a_n = -n^2 + 6$, $a_3 = -9 + 6 = -3$, $a_6 = -36+6 = -30$, $a_{20} = -400+6 = -394$;
е) $a_n = (-1)^n$, $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_6 = (-1)^6 = 1$, $a_{20} = (-1)^{20} = 1$.
4. $25 = 46 - 3n$, $3n = 21$, $n = 7$. Ответ: 7.
5. а) $C_1 = 8$, $C_{n+1} = C_n - 1$, $C_2 = C_1 - 1 = 7$, $C_3 = C_2 - 1 = 6$, $C_4 = C_3 - 1 = 5$, $C_5 = C_4 - 1 = 4$; **б)** $C_1 = 32$, $C_{n+1} = 0{,}5C_n$, $C_2 = 0{,}5C_1 = 16$, $C_3 = 0{,}5C_2 = 8$, $C_4 = 0{,}5C_3 = 4$, $C_5 = 0{,}5C_4 = 2$.
6. 0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; 0,22222.
7. $b_n = n^2 - 4n + 9$;
а) $9 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, значит, $9 = b_4$;
б) $59 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 50 = 0$;
$D = 16 + 4\cdot 50 = 216$, $n_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{216}}{2} \notin N$, значит, 59 не член $\{b_n\}$;
в) $409 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 400 = 0$, $D = 16 + 4\cdot 400 = 1616$,
$n_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{1616}}{2} \notin N$, значит, 409 – не член $\{b_n\}$.
8. а) $x_1 = 6$, $x_{n+1} = x_n + 6$, $x_n = 6n$;
б) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n$, $x_n = 3^{n-1}$.

С-18

1. $a_1=2{,}8$, $a_2=-0{,}4$, $d=a_2-a_1=-0{,}4-2{,}8=-3{,}2$, $a_3=a_2+d=-0{,}4-3{,}2=-3{,}6$, $a_4=a_3+d=-3{,}6-3{,}2=-6{,}8$, $a_5=a_4+d=-6{,}8-3{,}2=-10$, $a_6=a_5+d=-10-3{,}2=-13{,}2$.
2. $a_1=-1{,}2$, $d=3$, **а)** $a_4=a_1+3d=-1{,}2+9=7{,}8$, **б)** $a_8=a_1+7d=-1{,}2+21=19{,}8$, **в)** $a_{21}=a_1+20d=-1{,}2+60=58{,}8$, **г)** $a_{k+2}=a_1+(k-1)\,d=-1{,}2+3k-3=-4{,}2+3k$.

3. а) $a_1=5$, $a_8=19$, $a_8=a_1+7d$, $d=\dfrac{a_8-a_1}{7}=\dfrac{19-5}{7}=2$, **б)** $a_1=2$, $a_{11}=-5$,

$a_{11}=a_1+10d$, $d=\dfrac{a_{11}-a_1}{10}=\dfrac{-5-2}{10}=-0{,}7$, **в)** $a_1=-0{,}3$, $a_7=1{,}9$,

$a_7=a_1+6d$, $d=\dfrac{a_7-a_1}{6}=\dfrac{1{,}9+0{,}3}{6}=\dfrac{1{,}1}{3}=\dfrac{11}{30}$.

4. $a_1=80$, $d=17$, $a_8=a_1+7d=80+7\cdot 17=199$, $a_{12}=a_1+11d=80+11\cdot 17=267$.
5. $b_1=12$, $d=3$, **а)** $b_n=-6=b_1+d(n-1)=12+3(n-1)=3n+9$, $3n=-15$, $n=-5\notin N$, значит,–6–не член $\{b_n\}$; **б)** $0=3n+9$, $n=-3\notin N$, значит, 0–не член $\{b_n\}$; **в)** $9=3n+9$, $n=0\notin N$, значит, 9 — не член $\{b_n\}$.
6. $a_1=6{,}5$, $d=8-6{,}5=1{,}5$; **а)** $13=a_1+d(n-1)=6{,}5+1{,}5(n-1)=1{,}5n+5$,

$8=1{,}5n$; $n=\dfrac{8}{1{,}5}\notin N$, значит, 13 не встретится; **б)** $22{,}5=1{,}5n+5$,

$1{,}5n=17{,}5$, $n=\dfrac{17{,}5}{1{,}5}\notin N$, значит, 22,5 не встретится; **в)** $36=1{,}5n+5$,

$1{,}5n=31$, $n=\dfrac{31}{1{,}5}\notin N$, значит, 36 не встретится.

7. 64, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 46, $a_1=64$, $a_7=46$, $a_7=a_1+6d$, $d=\dfrac{a_7-a_1}{6}=-3$,
поэтому: $a_2=a_1+d=61$, $a_3=a_2+d=58$, $a_4=a_3+d=55$, $a_5=a_4+d=52$, $a_6=a_5+d=49$.
8. $x_4=x_1+3d$, $x_6=x_1+5d$, $x_4+x_{n-4}=x_1+3d+x_1+(n-4-1)d=2x_1+3d+nd-5d=$ $=2x_1+nd-2d$, $x_6+x_{n-6}=x_1+5d+x_1+d(n-6-1)=2x_1+5d+nd-7d=2x_1+nd-2d=x_4+x_{n-4}$.
9. $a_1=47$; Пусть $a_2=x^2$, $a_3=(x+1)^2$, где $x\in N$. Тогда $a_2-a_1=a_3-a_2$.
Получаем: $x^2-47=(x+1)^2-x^2$, $x^2-47=2x+1$, $x^2-2x-48=0$, $D=4+4\cdot 48=4\cdot 49$,
$x_1=\dfrac{2+2\cdot 7}{2}=8$, $x_2<0$. Значит, $a_2=8^2=64$, $a_3=81$. Ответ: 64 и 81.

10. По свойству арифметической прогрессии $\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a+c}$.

Нужно доказать, что $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$.

Докажем это: $\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}=0$, $\dfrac{2}{a+c}-\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+b}=0$,
$2(a+b)(b+c)-(a+b)(a+c)-(a+c)(b+c)=0$,

$2ab+2b^2+2ac+2bc-a^2-ab-ac-bc-ab-bc-ac-c^2=0$, $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$, ч.т.д.

С-19

1. $a_1=4$, $a_2=-6$, $d=a_2-a_1=-10$; **а)** $S_8=\frac{2a_1+d(8-1)}{2}\cdot 8=\frac{8-10\cdot 7}{2}\cdot 8=-62\cdot 4=-248$;

б) $S_{18}=\frac{2a_1+d(18-1)}{2}\cdot 18=(8-10\cdot 17)\cdot 9=-1458$;

в) $S_{35}=\frac{2a_1+d(35-1)}{2}\cdot 35=\frac{8-10\cdot 34}{2}\cdot 35=-5810$;

г) $S_k=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}\cdot k=\frac{8-10(k-1)}{2}\cdot k=k(4-5k+5)=k(9-5k)$.

2. а) $S_{10}=\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=\frac{10+3\cdot 9}{2}\cdot 10=185$;

б) $S_{10}=\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=(-16+4\cdot 9)\cdot 5=100$;

в) $S_{10}=\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=(37-2{,}5\cdot 9)\cdot 5=72{,}5$;

г) $S_{10}=(2a_1+9d)\cdot 5=(4-2\sqrt{2}+9\sqrt{2})\cdot 5=20+35\sqrt{2}$.

3. $x_n=4n+5$, $x_1=4+5=9$, $x_6=4\cdot 6+5=29$, $x_{20}=80+5=85$, $x_k=4k+5$,

$S_6=\frac{x_1+x_6}{2}\cdot 6=38\cdot 3=114$, $S_{20}=\frac{x_1+x_{20}}{2}\cdot 20=940$, $S_k=\frac{9+4k+5}{2}\cdot k=k(7+2k)$.

4. а) $a_1=1$, $d=1$, $a_{50}=50$, $S_{50}=\frac{1+50}{2}\cdot 50=51\cdot 25=1275$; **б)** $a_1=4$, $d=4$, $a_{25}=100$, $S_{25}=\frac{4+100}{2}\cdot 25=1300$; **в)** $a_1=1$, $d=2$, $a_{50}=99$, $S_{50}=\frac{1+99}{2}\cdot 50=2500$.

5. а) $a_1=6$, $a_{11}=46$, $d=\frac{a_{11}-a_1}{10}=\frac{40}{10}=4$, $S_{12}=\frac{2\cdot 6+4\cdot 11}{2}\cdot 12=28\cdot 12=336$;

б) $a_6=12$, $a_{16}=100$, $\begin{cases}12=a_1+5d\\100=a_1+15d\end{cases}\Bigg|\begin{array}{l}a_1=12-5d\\a_1=100-15d\end{array}$, $12-5d=100-15d$,

$10d=88$, $d=8{,}8$, $a_1=12-5\cdot 8{,}8=-32$, $S_{12}=\frac{-64+8{,}8\cdot 11}{2}\cdot 12=196{,}8$.

6. $a_1=12$, $d=3$, $S_{1800}=\frac{24+3\cdot 1799}{2}\cdot 1800=4878900$ (м).

7. $S_3=60$, $S_7=56$, $\begin{cases}60=\frac{2a_1+2d}{2}\cdot 3\\56=\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7\end{cases}\Bigg|\begin{array}{l}20=a_1+d\\8=a_1+3d\end{array}$, $20-d=8-3d$, $2d=-12$,

$d=-6$, $a_1=8+3\cdot 6=26$.

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 60+45=105 (км), а за каждый последующий на 5 км больше. Значит, $a_1=105$, $d=5$, $S_n=450$, n–?;

$450=\frac{210+5\cdot(n-1)}{2}\cdot n$, 900=(205+5$n$) · n, $5n^2+205n-900=0$,

$n^2+41n-180=0$, $D=49^2$, $n_1=\frac{-41+49}{2}=4$, $n_2<0$.

Итак, через 4 ч автомобили встретятся.

9. а) 2+6+10+...+x=450, d=4, a_1=2, S_n=450, $450=\frac{4+4(n-1)}{2}\cdot n$,

450=(2+2(n–1)) · n, $2n^2=450$, $n^2=225$, n=15, $a_{15}=a_1+14d=2+4\cdot14=58$;

б) 30+27+24+...+x=162, d=–3, a_1=30, S_n=162, $162=\frac{60-3(n-1)}{2}\cdot n$,

$324=(63-3n)n$, $3n^2-63n+324=0$, $n^2-21n+108=0$, $D=441-4\cdot108=9$,

$n_1=\frac{21+3}{2}=12$, $n_2=9$, $a_9=a_1+8d=30-24=6$, $a_{12}=a_1+11d=30-33=-3$.

10. а) $S_n=n^2+n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, $n+1=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}=a_1+\frac{dn}{2}-\frac{d}{2}$,

$\begin{cases}1=\frac{d}{2}; & d=2\\ 1=a_1-\frac{d}{2}; & a_1=2\end{cases}$, значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

б) $S_n=n(n+4)=\frac{2a_1+d(n+1)}{2}\cdot n$, $n+4=a_1+\frac{dn}{2}-\frac{d}{2}$, $\begin{cases}\frac{d}{2}=1; & d=2\\ 4=a_1-\frac{d}{2}; & a_1=5\end{cases}$.

Значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

в) $S_n=4n^2=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, $4n=a_1+\frac{dn}{2}-\frac{d}{2}$, $\begin{cases}\frac{d}{2}=4, & d=8\\ a_1-\frac{d}{2}=0, & a_1=4\end{cases}$.

Значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

С-20

1. $b_1=1{,}6$; $b_2=0{,}8$, $q=\frac{b_2}{b_1}=0{,}5$, $b_3=b_2\cdot q=0{,}4$, $b_4=b_3\cdot q=0{,}2$, $b_5=b_4\cdot q=0{,}1$,

$b_6=b_5\cdot q=0{,}05$.

2. $a_1=3{,}2$, $q=\frac{1}{2}$; **а)** $a_2=a_1q=1{,}6$; **б)** $a_4=a_1q^3=3{,}2\cdot\frac{1}{8}=0{,}4$;

в) $a_7=a_1q^6=3{,}2\cdot\frac{1}{64}=0{,}05$; **г)** $a_{k+1}=a_1q^k=\frac{3{,}2}{2^k}$.

3. а) $b_1=2$, $q=3$, $b_6=b_1q^5=2\cdot3^5=486$; **б)** $b_1=16$, $q=-\frac{1}{2}$,

$b_9=b_1q^8=16\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{2^4}{2^8}=\frac{1}{16}$; **в)** $b_1=128$, $q=\frac{1}{4}$ $b_4=b_1q^3=128\cdot\frac{1}{64}=2$;

г) $b_1=4$, $q=\sqrt{3}$ $b_7=b_1q^6=4(\sqrt{3})^6=108$.

4. а) $a_5=\frac{1}{64}$, $q=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{a_5}{q^4}=\frac{2^4}{64}=\frac{1}{4}$; **б)** $a_6=243$, $q=-3$, $a_1=\frac{a_6}{q^5}=-\frac{243}{243}=-1$.

5. а) $b_5=11$, $b_7=99$, $b_7=b_5q^2$, $q=\pm\sqrt{\frac{b_7}{b_5}}=\pm3$; **б)** $b_6=100$, $b_8=9$,

$b_8=b_6q^2$, $q=\pm\sqrt{\frac{b_8}{b_6}}=\pm0{,}3$.

6. $\frac{1}{16}$, b_2, b_3, b_4, 16; $b_5=b_1\cdot q^4$; $q=\pm\sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}}=\pm4$, $b_2=b_1\cdot q=\pm\frac{1}{4}$; $b_3=b_2\cdot q=1$,

$b_4=b_3\cdot q=\pm4$.

7. а) a_1-1, a_2-1, a_3-1–не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n=2^n$. Тогда $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=8$, но $a_1-1=1$, $a_2-1=3$, $a_3-1=7$, $\frac{3}{1}\neq\frac{7}{3}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.

б) $4a_1$, $4a_2$, $4a_3$ — очевидно, геометрическая прогрессия с тем же самым знаменателем. **в)** $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ — геометрическая прогрессия.

8. $\begin{cases} b_5-b_3=72 \\ b_4-b_2=36 \end{cases}$ $\left|\begin{array}{l} b_1q^4-b_1q^2=72 \\ b_1q^3-b_1q=36 \end{array}\right.$, $\frac{q^3-q}{q^2-1}=2$; $\frac{q(q^2-1)}{q^2-1}=2$, $q=\pm1$ или $q=2$,

$q=1$ — не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1=b_2=b_3=b_4=b_5$, $b_5-b_3=0\neq72$, $q=-1$ — также не подходит по схожим причинам.

Если $q=2$, то $b_1=\frac{36}{q^3-q}=\frac{36}{6}=6$. Ответ: $b_1=6$; $q=2$.

9. $\begin{cases} b_1+b_4=13 \\ b_2+b_3=4 \end{cases}$ $\left|\begin{array}{l} b_1+b_1q^3=13 \\ b_1q+b_1q^2=4 \end{array}\right.$, $\frac{1+q^3}{q+q^2}=\frac{13}{4}$, $\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)}=\frac{13}{4}$,

$q_1=-1$, $4q^2-4q+4=13q$, $4q^2-17q+4=0$, $D=289-4\cdot4\cdot4=225$,

$q_2=\frac{17+15}{8}=4$, $q_3=\frac{1}{4}$, $q=-1$ — не подходит, т.к. тогда бы $b_2=-b_3$,

$b_2+b_3=0\neq4$. Если $q=4$, то $b_1=\frac{13}{1+q^3}=\frac{13}{65}=\frac{1}{5}$, $b_2=\frac{4}{5}$, $b_3=\frac{16}{5}$, $b_4=\frac{64}{5}$.

Если же $q=\frac{1}{4}$, то $b_1=\frac{13}{1+\frac{1}{64}}=\frac{64}{5}$, $b_2=\frac{16}{5}$, $b_3=\frac{4}{5}$, $b_4=\frac{1}{5}$.

10. a, b, c, d — геометрическая прогрессия, т.е. $b^2=ac$, $c^2=bd$.
Надо доказать, что $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$, т.е., что $a^2-2ad+d^2 =$
$=a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2$, $2b^2+2c^2=2ac+2bc+2bd-2ad$.
Т.к. a, b, c, d–геометрическая прогрессия, то $bc=ad$; $2b^2+2c^2=2(ac+bd)$, $2bc-2ad=0$, т.е. $2b^2+2c^2=2(ac+bd)+2bc-2ad$.
Видно, что оба данных равенства эквивалентны, значит, требуемое равенство–тождество. Ч.т.д.

С-21

1. а) $b_1=27$, $q=\frac{1}{3}$, $S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{27\left(\frac{1}{729}-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{27\cdot 728\cdot 3}{729\cdot 2}=\frac{364}{9}$;

б) $b_1=-9$, $q=2$, $S_6=\frac{-9(2^6-1)}{2-1}=-567$;

в) $b_1=16$, $q=-\frac{1}{2}$, $S_6=\frac{16\cdot\left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{16\cdot 63\cdot 2}{64\cdot 3}=\frac{21}{2}$;

г) $b_1=3\sqrt{2}$, $q=\sqrt{2}$, $S_6=\frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1}=21\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

2. а) $b_1=8$, $q=\frac{1}{2}$, $S_5=\frac{b_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{8\left(\frac{1}{32}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{8\cdot 31\cdot 2}{32}=\frac{31}{2}=15{,}5$;

б) $b_1=1{,}5$, $q=-2$, $S_5=\frac{1{,}5(-32-1)}{-2-1}=16{,}5$; **в)** $b_1=3$, $q=3$, $S_5=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$;

г) $b_1=\sqrt{2}$, $q=\sqrt{2}$, $S_5=\frac{\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=$
$=\sqrt{2}(8-\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}(7+3\sqrt{2})$.

3. а) $a_1=81$, $q=\frac{1}{3}$, $S_6=\frac{81\cdot\left(\frac{1}{729}-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{364}{3}$; **б)** $a_1=18$, $q=-\frac{1}{2}$,

$S_5=\frac{18\left(-\frac{1}{32}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{18\cdot 33\cdot 2}{32\cdot 3}=12{,}375$; **в)** $a_1=4$, $q=-3$, $S_4=\frac{4(81-1)}{-4}=-80$;

г) $a_1=\sqrt{3}$, $q=\sqrt{3}$, $S_8=\frac{\sqrt{3}(81-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{80\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}=40\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$.

4. а) $b_4=\frac{1}{16}$, $b_5=\frac{1}{64}$, $q=\frac{1}{4}$, $b_1=\frac{b_4}{q^3}=4$, $S_5=\frac{4\left(\frac{1}{1024}-1\right)}{\frac{1}{4}-1}=\frac{4\cdot 1023\cdot 4}{1024\cdot 3}=\frac{341}{64}$;

б) $b_2=4$, $b_4=36$, $q=\sqrt{\frac{b_4}{b_2}}=3$, $b_1=\frac{4}{3}$, $S_5=\frac{4(243-1)}{3\cdot 2}=\frac{484}{3}$.

5. а) $q=\frac{2}{3}$, $S_4=65$, $65=\frac{b_1\left(\frac{16}{81}-1\right)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{b_1\cdot 65\cdot 3}{81}$, $b_1=27$;

б) $q=2$, $S_8=765$, $765=\frac{b_1(256-1)}{2-1}=255b_1$, $b_1=3$.

6. а) $b_n=4^n$, $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{4^{n+1}}{4^n}=4$, $\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=4$, т.е. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$ для любого n, значит, $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия;

$b_1=4$; $q=4$, $S_4=\frac{4(256-1)}{3}=\frac{1020}{3}=340$;

б) $b_n=2\cdot 5^n$; $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=5$, значит, $\{b_n\}$–геометрическая прогрессия;

$b_1=10$; $q=5$, $S_4=\frac{10(625-1)}{4}=1560$;

в) $x_n=2^n-1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n}\neq\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$, значит, $\{x_n\}$ — не геометрическая прогрессия.

7. $\begin{cases} b_5-b_3=144 \\ b_4-b_2=48 \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} b_1q^4-b_1q^2=144 \\ b_1q^3-b_1q=48 \end{matrix}\right.$, $\frac{q^3-q}{q^2-1}=3$, $\frac{q(q^2-1)}{q^2-1}=3$, $q_1=3$,

$q_{2,3}=\pm 1$, $q=\pm 1$ не подходит, т к $b_5-b_3\neq 144$ в этом случае $b_1=\frac{48}{27-3}=2$,

$S_6=\frac{2(729-1)}{2}=728$.

8. $\begin{cases} b_1+b_2+b_3=14 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=84 \end{cases}$, $b_2=\sqrt{b_1b_3}$, $\begin{cases} b_1+b_3+\sqrt{b_1b_3}=14 \\ b_1^2+b_1b_3+b_3^2=84 \end{cases}$.

С-22

1. а) $b_1=49$, $b_2=7$, $q=\frac{1}{7}$, $|q|<1$, $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{49\cdot 7}{6}=\frac{343}{6}$;

б) $b_1=1$, $q=\frac{1}{3}$, $|q|<1$, $S=\frac{1\cdot 3}{2}=1{,}5$;

в) $b_1=0,4$; $q=-\frac{0,04}{0,4}=-0,1$ $|q|<1$, $S=\frac{0,4}{1+0,1}=\frac{4}{11}$;

г) $b_1=\sqrt{5}$, $q=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $|q|<1$, $S=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{5}{\sqrt{5}-1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{4}$;

д) $b_1=4\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|q|<1$, $S=\frac{4\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{8}{\sqrt{2}-1}=8(\sqrt{2}+1)$;

е) $b_1=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $q=\frac{2+\sqrt{2}}{2}>1$.

2. а) $S=16$, $q=\frac{1}{4}$, $16=\frac{4b_1}{3}$, $b_1=12$; **б)** $S_1=81$, $q=-\frac{1}{9}$, $81=\frac{9b_1}{10}=$ $b_1=90$;

в) $S=4\sqrt{2}+4$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}+4=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}b_1}{\sqrt{2}-1}$, $4=\sqrt{2}\,b_1$, $b_1=2\sqrt{2}$;

г) $S=3(\sqrt{3}-1)$, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $3(\sqrt{3}-1)=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}b_1}{\sqrt{3}-1}$,

$3(3+1-2\sqrt{3})=\sqrt{3}\,b_1$; $b_1=\sqrt{3}\,(4-2\sqrt{3})$.

3. а) $0,(7)=0,777\ldots=0,7+0,07+0,007+\ldots=\frac{0,7}{1-0,1}=\frac{7}{9}$;

б) $0,(28)=0,2828\ldots=0,28+0,0028+\ldots=\frac{0,28}{1-0,01}=\frac{28}{99}$;

в) $3,(1)=3,111\ldots=3+0,1+0,01+\ldots=3+\frac{0,1}{1-0,1}=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$;

г) $2,(13)=2,1313\ldots=2+0,13+0,0013+\ldots=2+\frac{0,13}{1-0,01}=2+\frac{13}{99}=\frac{211}{99}$;

д) $0,6(3)=0,633\ldots=0,6+0,03+0,003+\ldots=0,6+\frac{0,03}{1-0,1}=0,6+\frac{1}{30}=\frac{6}{10}+\frac{1}{30}=\frac{19}{30}$;

е) $0,5(14)=0,51414\ldots=0,5+0,014+0,00014+\ldots=0,5+\frac{0,014}{1-0,01}=\frac{1}{2}+\frac{14}{990}=\frac{509}{990}$.

4. $q=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $S=\frac{16(4+\sqrt{2})}{7}$, $\frac{16(4+\sqrt{2})}{7}=\frac{b_1}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{4b_1}{4-\sqrt{2}}$, $b_1=\frac{4\cdot14}{7}=8$,

$b_3=b_1q^2=8\cdot\frac{2}{16}=1$.

5. Сторона I треугольника 16 см, второго — 8 см, третьего — 4 см и т.д. Периметр I треугольника 48 см, II-го — 24 см, III-го — 12 см и т.д. Т.е. периметры образуют геометрическую прогрессию.

b_1=48, $q=\frac{1}{2}$, $S=\frac{48}{\frac{1}{2}}$=96. Ответ: 96 см.

6. b_2=36, S=144, |q|< 1, $S=b_1+\frac{b_2}{1-q}=\frac{b_2}{q}+\frac{b_2}{1-q}=b_2\cdot\frac{1}{q(1-q)}$,

144=36$\cdot\frac{1}{q(1-q)}$, $4q(1-q)=1$, $4q^2-4q+1=0$, $(2q-1)^2=0$, $q=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{b_2}{q}=72$.

С-23

1. 1) а) $\sqrt{x}$ =4, x=16; **б)** $\sqrt{x}=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{9}$; **в)** 6$\sqrt{x}$ =0, x=0;

2) а) $\sqrt{x+1}$ =3, x+1=9, x=8; **б)** $\sqrt{3x-1}$ =1,2, 3x–1=1,44,

$x=\frac{2,44}{3}=\frac{244}{300}=\frac{61}{75}$; **в)** $\sqrt{2+x}$ =0, 2+x=0, x=–2;

3) а) $\sqrt{6-x}=x$, $x\ge 0$, $6-x=x^2$, $x^2+x-6=0$, D=1+46=25,

$x_1=\frac{-1+5}{2}$=2, x_2=–3 < 0. Ответ: 2.

б) $\sqrt{2x+3}=x$, $x\ge 0$, $2x+3=x^2$, $x^2-2x-3=0$, $D=4+4\cdot 3=16$,

$x_1=\frac{2+4}{2}$=3, x_2=–1 < 0. Ответ: 3.

в) $\sqrt{x^2+27}=2x$, $x\ge 0$, $x^2+27=4x^2$, $3x^2=27$, $x=\pm 3$. Ответ: 3.

2. а) $\sqrt{x}$ +1=0, $\sqrt{x}$ =–1 — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

б) $\sqrt{-3x}$ =0, x=0 — корень; **в)** $\sqrt{2x+3}=-\sqrt{3}$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$; **г)** $\sqrt{-4x^2-16}=2$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

д) $\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{5x}=-\frac{1}{2}$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

е) $\sqrt{x+1}=5$ –есть корни.

3. 1) а) $\sqrt{6x^2+3x-2}=\sqrt{3x^2-8x+2}$, $6x^2+3x-2=3x^2-8x+2$, $3x^2+11x-4=0$,

$D=121+4\cdot 3\cdot 4=169$, $x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3}$, x_2=–4.

Проверка: $x=\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{6}{9}+1-2}=\sqrt{\frac{3}{9}-\frac{8}{3}+2}$ — ложно.

x=–4, $\sqrt{96-12-2}=\sqrt{48+32+2}$ — верно. Ответ: –4.

б) $x+1=\sqrt{8-4x}$, $x^2+2x+1=8-4x$, $x^2+6x-7=0$, $D=36+4\cdot 7=64$,

$x_1=\frac{-6+8}{2}=1$; $x_2=-7$. Проверка: $x=1$ $1+1=\sqrt{8-4}$ — верно.

$x=-7$, $-6=\sqrt{8+4\cdot 7}$ — ложно. Ответ: 1.

2) а) $\sqrt{4x^2-9x+2}=x-2$, $4x^2-9x+2=x^2-4x+4$, $3x^2-5x-2=0$,

$D=25+4\cdot 3\cdot 2=49$, $x_1=\frac{5+7}{6}=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

Проверка: $x=2$, $\sqrt{4\cdot 4-9\cdot 2+2}=2-2$ — верно.

$x=-\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{4}{9}+3+2}=-\frac{1}{3}-2$ — ложно. Ответ: 2.

б) $\sqrt{7x^2+3x}=2x-2$, $7x^2+3x=4x^2+4-8x$, $3x^2+11x-4=0$,

$D=121+4\cdot 4\cdot 3=169$, $x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$.

Проверка: $x=\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{7}{9}+1}=\frac{2}{3}-2$ — ложно.

$x=-4$, $\sqrt{7\cdot 16-12}=-8-2$ — ложно. Ответ: нет корней.

4. а) $\sqrt{x-3}=2{,}4$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

б) $\sqrt{2x}+\sqrt{x-3}=-1$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

в) $\sqrt{-3-x^2}=9$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

г) $\sqrt{-x^2+3x-4}=6$, $-x^2+3x-4\geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$, $x^2-3x+4\leq 0$,
$D=9-4\cdot 4<0$, значит, у неравенства нет корней, следовательно нет корней и у уравнения.

5. 1) а) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$, $\sqrt{x+17}=2+\sqrt{x+1}$, $x+17=4+4\sqrt{x+1}+x+1$,

$4\sqrt{x+1}=12$, $\sqrt{x+1}=3$, $x+1=9$, $x=8$.

Проверка: $x=8$, $\sqrt{8+17}-\sqrt{8+1}=2$ — верно. Ответ: 8.

б) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$, $1-2x+13+x-2\sqrt{(1-2x)(13+x)}=x+4$,

$2\sqrt{(1-2x)(13+x)}=10-2x$, $\sqrt{\ }=5-x$, $(1-2x)(13+x)=25+x^2-10x$,
$13-25x-2x^2=25+x^2-10x$, $3x^2+15x+12=0$, $x^2+5x+4=0$, $D=25-16=9$,

$x_1=\frac{-5+3}{2}=-1$, $x_2=-4$.

Проверка: $x_1=-1$, $\sqrt{1+2}-\sqrt{13-1}=\sqrt{4-1}$ — ложно.

$x_2=-4$, $\sqrt{1+8}-\sqrt{13-4}=0$ — верно. Ответ: -1.

2) а) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$, $(3-x)(x+4)=6$, $-x^2-x+12=6$, $x^2+x-6=0$, $D=25$,

$x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ $x_2=-3$. Проверка: $x=2$ $\sqrt{3-2}\cdot\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$ — верно. $x=-3$,

$\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}=\sqrt{6}$ — верно.
Ответ: -3; 2.

б) $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{4+x}=x$, $16-x^2=x^2$, $2x^2=16$, $x=\pm 2\sqrt{2}$.

Проверка: $x=2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ — верно.

$x=-2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$ — ложно. Ответ: $2\sqrt{2}$

3) а) $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$, $5+\sqrt{x-1}=9$, $\sqrt{x-1}=4$, $x-1=16$, $x=17$.

Проверка: $\sqrt{5+4}=3$ — верно. Ответ: 17.

б) $\sqrt{\sqrt{x+13}}=\sqrt{17-3\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+13}=17-3\sqrt{x}$, $x+13=289+9x-102\sqrt{x}$,

$8x-102\sqrt{x}+276=0$, $4x-51\sqrt{x}+138=0$, $\sqrt{x}=y \geq 0$, $4y^2-51y+138=0$,

$y=\dfrac{51\pm\sqrt{393}}{8}$, значит, $\sqrt{x}=\dfrac{51\pm\sqrt{393}}{8}$; $x=\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{64}$.

Проверка: $x_1=\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{8}$; $\sqrt{\sqrt{\dfrac{(51+\sqrt{393})^2}{64}+13}}=\sqrt{17-3\left(\dfrac{51+\sqrt{393}}{8}\right)}$ –

ложно; $x_2=\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{64}$; $\sqrt{\sqrt{\dfrac{(51+\sqrt{393})^2}{64}+13}}=\sqrt{17-3\left(\dfrac{51+\sqrt{393}}{8}\right)}$ –

верно. Ответ: $\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{64}$.

С-24

1. 1) а) $g(-x)=(-x)^8=x^8=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;
б) $g(-x)=(-x)^4-5(-x)^2=x^4-5x^2=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;
в) $f(-x)=2|-x|=2|x|=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
2) а) $f(-x)=(-x)^6-3(-x)^4=x^6-3x^4=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
б) $f(-x)=(-x-5)(-x+7)+2x=(x+5)(x-7)+2x=x^2-35$
$f(x)=(x-5)(x+7)-2x=x^2-35=f(-x)$, значит, $f(x)$ — четная;
в) $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^4-(-x)^2+3}=\dfrac{1}{x^4-x^2+3}=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная.

2. 1) а) $g(-x)=(-x)^9=-x^9=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

б) $g(-x)=-\dfrac{23}{-x}=\dfrac{23}{x}=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

в) $g(-x)=(-x)^5+x=-x^5+x=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

2) а) $f(-x)=(-x)^7-\dfrac{1}{(-x)^3}=-x^7+\dfrac{1}{x^3}=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

б) $f(-x)=(-x-3)^2-(-x+3)^2=(x+3)^2-(x-3)^2=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

в) $f(-x)=\dfrac{1}{-x+(-x)^5}=-\dfrac{1}{x+x^5}=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная.

3. $g(-5)=27$; **а)** $g(5)=g(-5)=27$; **б)** $g(5)=-g(-5)=-27$.

4. 1) а) $y(-x)=\dfrac{6}{(-x)^6}=\dfrac{6}{x^6}=y(x)$, значит, y — четная;

б) $y(-x)=-\dfrac{8}{(-x)^7}=\dfrac{8}{x^7}=-y(x)$, значит, y — нечетная;

в) $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^3+1}=\dfrac{1}{-x^3+1}\neq \pm y(x)$, значит, y — ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^8+1}=\dfrac{1}{x^8+1}=y(x)$, значит, y — четная;

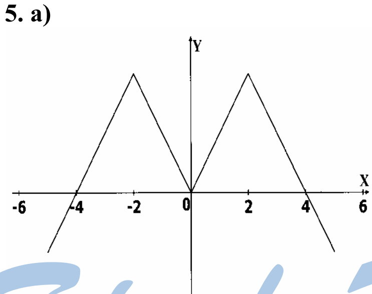
2) а) $y=\dfrac{x^5}{2x}=\dfrac{x^4}{2}$, $y(-x)=\dfrac{(-x)^4}{2}=\dfrac{x^4}{2}=y(x)$, значит, y — четная;

б) $y=\dfrac{3x}{x^4}=\dfrac{3}{x^3}$, $y(-x)=\dfrac{3}{(-x)^3}=-\dfrac{3}{x^3}=-y(x)$, значит, y — нечетная;

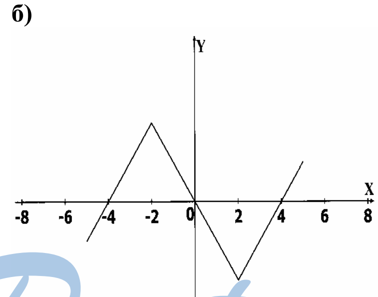
в) $y=\dfrac{3x^2-x^3}{6-2x}=\dfrac{x^2(3-x)}{2(3-x)}=\dfrac{x^2}{2}$, $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}=y(x)$, значит, y — четная;

г) $y=\dfrac{2x+8}{x^2+4x}=\dfrac{2(x+4)}{x(x+4)}=\dfrac{2}{x}$, $y(-x)=\dfrac{2}{-x}=-y(x)$, значит, y — нечетная.

5. а)

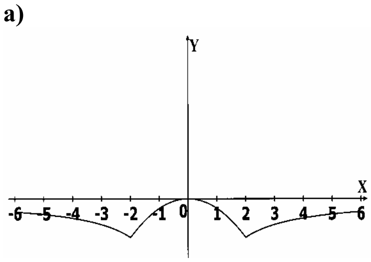


б)

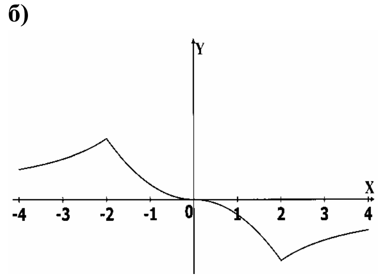


6. $f(x)=\begin{cases}-0{,}5x^2, & 0\le x\le 2\\ -\dfrac{4}{x}, & x>2\end{cases}$;

а)



б)



7. а) $g(-x)=|-x+8|-|-x-8|=|x-8|-|x+8|=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;
б) $g(-x)=|-x+8|+|-x-8|=|x-8|+|x+8|=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

в) $g(-x)=\dfrac{7(-x)^2}{(-x)^2-16}=\dfrac{7x^2}{x^2-16}=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

г) $g(-x)=\dfrac{9(-x)^3}{(-x)^2-25}=\dfrac{-9x^3}{x^2-25}=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

д) $g(-x)=\dfrac{5(-x)^3}{(-x-3)^2}=-\dfrac{5x^3}{(x+3)^2}\neq\pm\, g(x)$, значит, $g(x)$—ни четная, ни нечетная; **е)** $g(x)=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=x$, $g(-x)=-x=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная.

С-25

1. $g(x)=x^{80}$; **1) а)** $g(1{,}423)>g(1{,}327)$, т.к. $|1{,}423|>|1{,}327|$;
б) $g(-80{,}3)>g(-78{,}2)$, т.к. $|-80{,}3|>|-78{,}2|$;
в) $g(-23{,}1)>g(18{,}7)$, т.к. $|-23{,}1|>|18{,}7|$;
г) $g(-42{,}8)=g(42{,}8)$, т.к. $|-42{,}8|=|42{,}8|$;

2) а) $g\left(\dfrac{5}{8}\right)<g\left(\dfrac{2}{3}\right)$, т.к. $\left|\dfrac{5}{8}\right|<\left|\dfrac{2}{3}\right|$; **б)** $g\left(-\dfrac{4}{9}\right)<g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, т.к. $\left|-\dfrac{4}{9}\right|<\left|-\dfrac{1}{2}\right|$;

в) $g\left(-\dfrac{17}{20}\right)=g(0{,}85)$, т.к. $\left|-\dfrac{17}{20}\right|=|0{,}85|$;

г) $g(-0{,}72)>g\left(-\dfrac{5}{7}\right)$, т.к. $|-0{,}72|>\left|-\dfrac{5}{7}\right|$.

2. $f(x)=x^{95}$; **1) а)** $f(23{,}4)>f(21{,}8)$, т.к. $23{,}4>21{,}8$;
б) $f(-3{,}9)<f(-3{,}7)$, т.к. $-3{,}9<-3{,}7$; **в)** $f(-52{,}3)<f(52{,}3)$, т.к. $-52{,}3<52{,}3$;
г) $f(-47{,}2)<f(45{,}8)$, т.к. $-47{,}2<45{,}8$;

2) а) $f\left(\dfrac{3}{7}\right)<f\left(\dfrac{4}{9}\right)$, т.к. $\dfrac{3}{7}<\dfrac{4}{9}$; **б)** $f(-0{,}4)<f\left(\dfrac{6}{13}\right)$, т.к. $-0{,}4<\dfrac{6}{13}$;

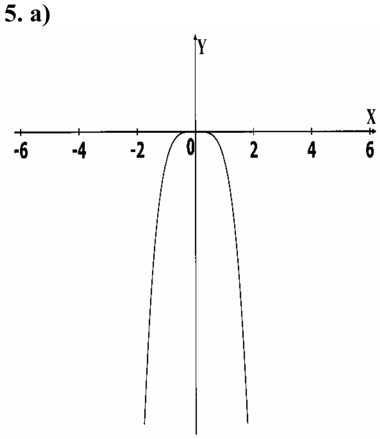
в) $f\left(-\dfrac{3}{8}\right)=-f(0{,}375)$, т.к. $-\dfrac{3}{8}=-0{,}375$; **г)** $f(-27{,}4)<f(27{,}4)$, т.к. $-27{,}4<27{,}4$.

3. $x^n=450$; **а)** 2 корня; **б)** 1 корень.

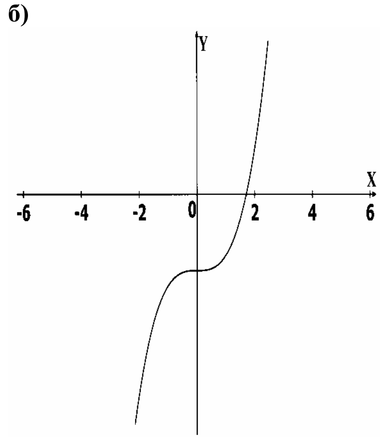
4. а) $x^4=441$, $x=\pm\sqrt[4]{441}$; **б)** $x^4=-36$, нет корней, т.к. $E(x^4)=[0;+\infty)$;

в) $x^3=-64$, $x=-4$; **г)** $x^3=\dfrac{27}{125}$, $x=\dfrac{3}{5}$.

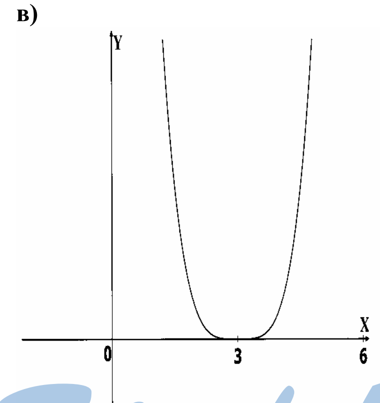
5. а)



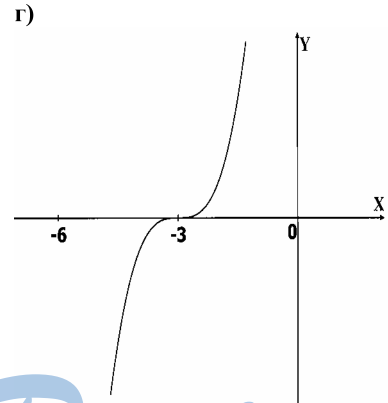
б)



в)



г)



6. а) $x^3=23x+7$ три корня; **б)** $x^3=0,25x-4$ один корень;
в) $x^4=23x+7$ два корня; **г)** $x^4=0,25x-4$ нет корней.

7. а) $y=x^7$, $549,827=(-3,7)^7$ — ложно, значит, точка M не принадлежит графику. $-12,749=(-0,89)^7$ — ложно, значит, точка K не принадлежит графику.
б) $y=x^6$; $1,0487=1,3^6$ — ложно, значит, точка P не принадлежит графику. $1,8724=(-0,8)^6$ — ложно, значит, точка Q не принадлежит графику.

С-26.

1. 1) а) $\sqrt{0,25}=0,5$; **б)** $\sqrt[3]{343}=7$; **в)** $\sqrt[4]{0,0016}=0,2$; **г)** $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}=-\frac{1}{3}$;

2) а) $5\sqrt[3]{0,216}=5\cdot 0,6=3$; **б)** $0,3\cdot\sqrt[3]{64}=0,3\cdot 4=1,2$;

в) $6\cdot\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=6\cdot\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-9$; **г)** $12\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}=12\cdot\sqrt[4]{\frac{625}{81}}=12\cdot\frac{5}{3}=20$.

2. 1) а) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$; **б)** $\sqrt[5]{0{,}00001}-\sqrt[3]{-0{,}064}=0{,}1+0{,}4=0{,}5$;

в) $2{,}5\sqrt[5]{\frac{1}{32}}-\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}=2{,}5\cdot0{,}5-\frac{5}{2}$ =2,5·0,5–2,5=–1,25;

2) а) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}-\sqrt[4]{\frac{16}{625}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$; **б)** $\sqrt[3]{0{,}343}-\sqrt[5]{-0{,}00243}=0{,}7+0{,}3=1$;

в) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\sqrt[3]{0{,}125}=\frac{5}{3}-0{,}5=\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.

3. а) $3=\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}=4$; **б)** $3=\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{57}<\sqrt[3]{64}=4$; **в)** $0<\sqrt[4]{0{,}6}<1$;

г) $2<\sqrt[5]{32}<\sqrt[5]{48}<\sqrt[5]{243}=3$.

4. 1) а) $\left(\sqrt{15}\right)^2=15$; **б)** $\left(\sqrt[3]{9}\right)^3=9$; **в)** $\left(-\sqrt[4]{17}\right)^4=17$; **г)** $-\sqrt[4]{17^4}=-17$;

д) $\left(-\sqrt[7]{3}\right)^7=-3$;

2) а) $\left(3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3=27\cdot2=54$; **б)** $\left(-2\cdot\sqrt[4]{7}\right)^4=16\cdot7=112$; **в)** $\left(-\sqrt[5]{26}\right)^5=-26$;

г) $-3\cdot\sqrt[5]{6^5}=-3\cdot6=-18$; **д)** $\left(-\sqrt[8]{3}\right)^8=3$.

5. а) $x^4=7$, $x=\pm\sqrt[4]{7}$; **б)** $x^5=30$, $x=\sqrt[5]{30}$; **в)** $\frac{1}{32}x^6-2=0$, $x^6=64$, $x=\pm2$;

г) $\frac{1}{4}x^5+7=0$, $x^5=-28$, $x=-\sqrt[5]{28}$.

6. а) $\sqrt[8]{x+8}$, $x+8\ge0$, $x\ge-8$; **б)** $\sqrt[7]{y-2}$, y — любое;

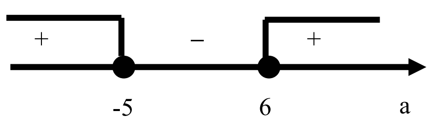
в) $\sqrt[4]{b(b-3)}$, $b(b-3)\ge0$;

$b\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

г) $\sqrt[6]{a^2-a-30}$, $a^2-a-30\ge0$,

$D=1+4\cdot30=121$,

$a_1=\frac{1+11}{2}=6$, $a_2=-5$;



$a\in(-\infty;-5]\cup[6;+\infty)$.

7. а) $x^8-15x^4-16=0$, $x^4=y\ge0$, тогда $y^2-15y-16=0$, $D=289$, $y_1=\frac{15+17}{2}=16$,

$y_2<0$, $x^4=16$, $x_{1,2}=\pm2$.

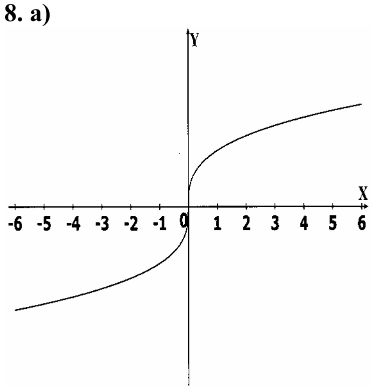
Ответ: ±2.

б) $x^4 – 10x^2 + 27 = 0$, $x^2 = y \geq 0$, тогда $y^2 – 10y + 27 = 0$, $D < 0$ нет корней.

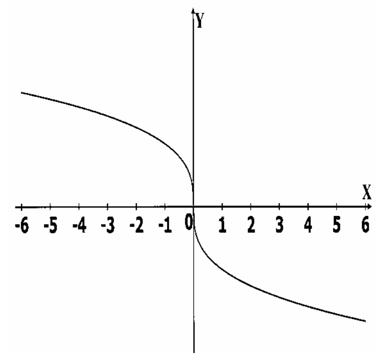
в) $x^6 – 7x^3 – 8 = 0$, $x^3 = y$, тогда $y^2 – 7y – 8 = 0$, $D = 81$, $y_1 = \frac{7+9}{2} = 8$, $y_2 = –1$,

$x^3 = 8$, $x = 2$, $x^3 = –1$, $x = –1$. Ответ: $–1$; 2.

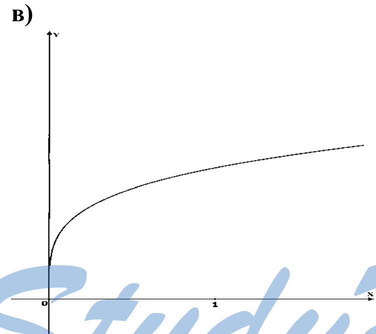
8. а)



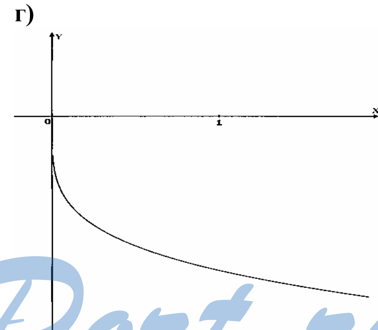
б)



в)



г)



С-27

1. а) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = 3 \cdot 4 = 12$; **б)** $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^4} = 3^2 \cdot 2 = 18$;

в) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 6^8} = 0{,}3 \cdot 6^2 = 10{,}8$; **г)** $\sqrt[7]{\frac{5^7}{2^{14}}} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$; **д)** $\sqrt[3]{\frac{3^9}{0{,}125}} = \frac{3^3}{0{,}5} = 54$;

е) $\sqrt[8]{\frac{2^8 \cdot 3^{24}}{5^{16}}} = \frac{2 \cdot 3^3}{5^2} = \frac{54}{25}$.

2. а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \cdot 2} = 2$; **б)** $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$;

в) $\sqrt[4]{135}\cdot\sqrt[4]{375}=\sqrt[4]{135\cdot375}=15$; **г)** $\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}}=\dfrac{2}{3}$;

д) $\sqrt[7]{3^7\cdot5^4}\cdot\sqrt[7]{5^3}=3\cdot\sqrt[7]{5^7}=3\cdot5=15$;

е) $\sqrt[6]{2^{11}}\cdot\sqrt[6]{3^{12}\cdot2^7}=\sqrt[6]{2^{18}\cdot3^{12}}=2^3\cdot3^2=72$.

3. а) $\sqrt{49a^2}=7a$; **б)** $\sqrt[3]{8b^6}=2b^2$; **в)** $\sqrt[4]{625a^8b^4}=5a^2b$;

г) $\sqrt[5]{\dfrac{243a^{10}b^{15}}{32}}=\dfrac{3}{2}a^2b^3$.

4. а) $\sqrt{25x}=5\sqrt{x}$; **б)** $\sqrt{72y^3}=\sqrt{36\cdot2y^2\cdot y}=6y\sqrt{2y}$;

в) $\sqrt[3]{54x^8}=\sqrt[3]{27\cdot2x^6\cdot x^2}=3x^2\cdot\sqrt[3]{2x^2}$;

г) $\sqrt[4]{162y^9}=\sqrt[4]{81\cdot2y^8\cdot y}=3y^2\cdot\sqrt[4]{2y}$.

5. а) $5\sqrt{2a}=\sqrt{50a}$; **б)** $3\sqrt[3]{2b}=\sqrt[3]{54b}$; **в)** $x\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{x^4\cdot5}$; **г)** $y\cdot\sqrt[5]{8y^4}=\sqrt[5]{8y^9}$.

6. а) $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{11}\right)\left(6+\sqrt{11}\right)}=\sqrt{36-11}=5$;

б) $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}=\sqrt[3]{\left(5+\sqrt{17}\right)\left(5-\sqrt{17}\right)}=\sqrt[3]{25-17}=2$;

в) $\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}=\sqrt[4]{\left(10+\sqrt{19}\right)\left(10-\sqrt{19}\right)}=\sqrt[4]{100-19}=3$.

7. а) $\sqrt[4]{x^4y}=x\sqrt[4]{y}$, $x, y\ge0$; **б)** $\sqrt[4]{x^4y}=-x\sqrt[4]{y}$, $x\le0$, $y\ge0$;

в) $\sqrt[4]{x^5y^5}=xy\sqrt[4]{xy}$ $xy\ge0$, т.е. $x, y\ge0$ или $x, y\le0$.

8. а) $\sqrt[4]{625a^4b}=-5a\cdot\sqrt[4]{b}$; **б)** $\sqrt{-98c^7}=\sqrt{-49\cdot2\cdot c^6\cdot c}=-7c^3\sqrt{-2c}$;

в) $\sqrt[4]{x^5y^5}=xy\sqrt[4]{xy}$.

9. а) $x\cdot\sqrt[5]{\dfrac{3}{y^4}}=\sqrt[5]{\dfrac{3x^5}{y^4}}$; **б)** $bc\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3}{b^3c^3}}=\sqrt[4]{\dfrac{3b^4c^4}{b^3c^3}}=\sqrt[4]{3bc}$;

в) $ax\cdot\sqrt[6]{\dfrac{5}{a^4x^5}}=\sqrt[6]{\dfrac{5a^6x^6}{a^4x^5}}=\sqrt[6]{5a^2x}$.

10. $5a\cdot\sqrt[4]{2a^{-5}}-\sqrt[4]{162a}-a^2\cdot\sqrt[4]{2a^{-7}}=5a\cdot\sqrt[4]{\dfrac{2}{a^5}}-3\cdot\sqrt[4]{2a}-a^2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{2}{a^7}}=$

$=5\cdot\sqrt[4]{\dfrac{2a^4}{a^5}}-3\cdot\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{\dfrac{2a^8}{a^7}}=5\cdot\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}}-3\cdot\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{2a}=$

$=5\cdot\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}}-4\cdot\sqrt[4]{2a}=\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{2}-4\cdot\sqrt[4]{2a^2}}{\sqrt[4]{a}}$.

С-28.

1. а) $\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$; **б)** $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$; **в)** $\sqrt[4]{\frac{1}{b^4}}=\frac{1}{b}$; **г)** $\sqrt[5]{\frac{10}{a^{15}}}=\frac{\sqrt[5]{10}}{a^3}$.

2. а) $\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{7}{14}\sqrt{14}$; **б)** $\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$; **в)** $\frac{5}{\sqrt[3]{9}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{9^2}}{9}=\frac{5}{9}\cdot\sqrt[3]{81}$;

г) $\frac{9}{\sqrt[4]{8}}=\frac{9\cdot\sqrt[4]{8^3}}{8}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt[4]{512}$; **д)** $\frac{12}{\sqrt[5]{81}}=\frac{12\cdot\sqrt[5]{81^4}}{81}=\frac{4}{27}\cdot\sqrt[5]{43046721}$.

3. а) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{3}$; **б)** $\sqrt[4]{\sqrt{5}}=\sqrt[8]{5}$; **в)** $\sqrt[8]{3^4}=\sqrt{3}$; **г)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[4]{3}$;

д) $\sqrt[10]{x^5}=\sqrt{x}$; **е)** $\sqrt{b\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{b^3}}=\sqrt[4]{b^3}$; **ж)** $\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[15]{a^4}$;

з) $\sqrt[8]{y^2\cdot\sqrt[3]{y^2}}=\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^8}}=\sqrt[3]{y}$.

4. а) $\sqrt[3]{5}>\sqrt[6]{24}$, $\sqrt[6]{25}>\sqrt[6]{24}$; **б)** $\sqrt[6]{2}<\sqrt[18]{10}$, $\sqrt[18]{8}<\sqrt[18]{10}$;

в) $\sqrt[4]{4}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[12]{64}=\sqrt[12]{64}$; **г)** $\sqrt[10]{6}<\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[10]{6}<\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^4}}$,
$\sqrt[10]{6}<\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[30]{216}<\sqrt[30]{256}$.

5. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{125}$, значит,
$\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$.

6. а) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{xy}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{y}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}=\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$; **б)** $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}\right)^3+\left(\sqrt[6]{b}\right)^3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}=$
$=\frac{\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}}+\frac{1}{\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)}+\frac{1}{\sqrt[6]{y}\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)}=$
$=\frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}{\sqrt[6]{xy}\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)}=\frac{1}{\sqrt[6]{xy}}$.

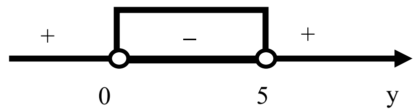
7. а) $\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}=0$, $\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-8\right)=0$, $\sqrt[4]{x}=0$, x_1=0, $\sqrt[4]{x}=8$, x_2=4096;
б) $\sqrt[4]{x}+3\sqrt[8]{x}=0$, $\sqrt[8]{x}\left(\sqrt[8]{x}+3\right)=0$, $\sqrt[8]{x}=0$, x=0, $\sqrt[8]{x}=-3$ — нет корней.
Ответ: 0.
в) $\sqrt[5]{x}-3\sqrt[10]{x}+2=0$, $\sqrt[10]{x}=y\geq 0$, тогда $y^2-3y+2=0$, $D=1$,
$y_1=\frac{3+1}{2}=2$, $y_2=1$, $\sqrt[10]{x}=2$ $x=2^{10}$, $x=1024$, $\sqrt[10]{x}=1$, $x=1$.
Ответ: 1; 1024.

г) $\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-4=0$, $\sqrt[4]{x}=y\ge 0$, тогда $y^2+3y-4=0$, $D=9+4\cdot 4=25$,

$y_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$, $y_2<0$, $\sqrt[4]{x}=1$, $x=1$. Ответ: 1.

8. а) $x-5\sqrt{x}<0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2-5y<0$, $y(y-5)<0$, $0<y<5$,

$0<\sqrt{x}<5$, $0<x<25$.

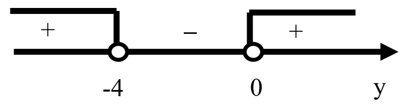


Ответ: (0; 25).

б) $x+4\sqrt{x}>0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2+4y>0$, $y(y+4)>0$,

$y<-4$, $\sqrt{x}<-4$ — нет решений,

$y>0$, $\sqrt{x}>0$, $x>0$.



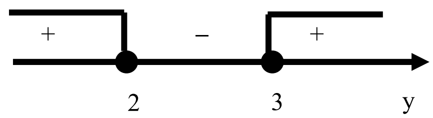
Ответ: $(0;+\infty)$.

в) $\sqrt[4]{x}-5\sqrt[8]{x}+6\ge 0$, $\sqrt[8]{x}=y$, $y^2-5y+6\ge 0$, $D=1$,

$y_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$,

$y\le 2$, $\sqrt[8]{x}\le 2$, $0\le x\le 256$,

$y\ge 3$, $\sqrt[8]{x}\ge 3$, $x\ge 6561$.

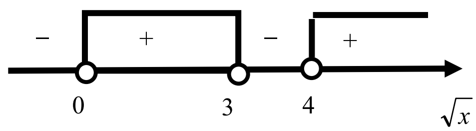


Ответ: $[0;\,256]\cup[6561;+\infty)$.

г) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-4\right)>0$,

$0<\sqrt{x}<3$, $\sqrt{x}>4$,

$0<x<9$, $x>16$.



Ответ: $(0;\,9)\cup(16;+\infty)$.

С-29

1. а) $2^{-6}=\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{1}{64}$; **б)** $12^{-1}=\dfrac{1}{12}$; **в)** $c^{-7}=\dfrac{1}{c^7}$; **г)** $2ab^{-3}=\dfrac{2a}{b^3}$;

д) $10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=\dfrac{1}{1000}=0{,}001$.

2. 1) а) $\dfrac{1}{6^5}=6^{-5}$; **б)** $\dfrac{1}{a^3}=a^{-3}$; **в)** $\dfrac{1}{7}=7^{-1}$; **г)** $\dfrac{1}{1000}=10^{-3}$; **д)** $0{,}00001=10^{-5}$;

2) а) $\left(\dfrac{1}{18}\right)^3=18^{-3}$; **б)** $\dfrac{1}{x^2y^2}=(xy)^{-2}$;

в) $\dfrac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\dfrac{1}{a^3-b^3}=(a^3-b^3)^{-1}$; **г)** $\dfrac{1}{(x-y)(x-y)}=(x-y)^{-2}$.

3. а) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{7}\right)^{2}<1$; **б)** 12,3°=1; **в)** $10^{-5}=\frac{1}{10^5}<1$;

г) $\left(-3\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{11}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{11}\right)^{2}=\left(\frac{3}{11}\right)^{2}<1$.

4. 1) а) $(1{,}1)^{-2}=\frac{1}{1{,}1^2}=\frac{1}{1{,}21}$; **б)** $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$; **в)** (–12,7)°=1; **г)** $1^{-13}=1$;

д)–12,7°=–1;

2) а) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$; **б)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=(-3)^2=9$; **в)** $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{7}$;

г) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{8}\right)^{2}=\frac{9}{64}$;

3) а) $7^{-5}\cdot 7^{13}\cdot 7^{-5}=7^{-5+13-5}=7^3=343$; **б)** $2^{-5}:2^{-9}=2^{-5-(-9)}=2^4=16$;

в) $(0{,}2)^3:(0{,}2)^{-3}=0{,}2^{3-(-3)}=0{,}2^6=0{,}000064$;

г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}:\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-6-(-3)}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3}=\frac{125}{8}$;

4) а) $(-2)^{-2}+3^{-1}=\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$;

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}-2^{-4}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2}-\frac{1}{2^4}=\frac{25}{16}-\frac{1}{16}=1{,}5$;

в) $(-0{,}1)^{-3}+(-0{,}2)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}1)^3}+\frac{1}{(-0{,}2)^3}=\frac{1}{-0{,}001}+\frac{1}{-0{,}008}=-1000-125=-1125$;

г) $(0{,}2)^{-3}+(0{,}5)^{-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=125+8=133$;

5) а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}-7^{-2}:7^{-4}=49-7^2=0$; **б)** $5^{-3}:5^{-5}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=5^2-5^4=-600$;

в) $10^{-5}\cdot 3{,}1\cdot 10^{5}\cdot 3=9{,}3$.

5. а) $(b^{-3}-b^{-2})^2+\frac{2}{b^5}=\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{2}{b^5}=\left(\frac{1-b}{b^3}\right)^2+\frac{2}{b^5}=$

$=\frac{1-2b+b^2+2b}{b^6}=\frac{1+b^2}{b^6}$;

б) $(a+a^{-1})^3=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3=\frac{(a^2+1)^3}{a^3}$;

в) $(a^{-2}-b^{-2}):(a^{-1}+b^{-1})=\frac{(a^{-1}+b^{-1})(a^{-1}-b^{-1})}{a^{-1}+b^{-1}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

С-30.

1. а) $(a-1)^{-2}=\dfrac{1}{(a-1)^2}$; **б)** $(3bc)^{-3}=\dfrac{1}{(3bc)^3}=\dfrac{1}{27b^3c^3}$; **в)** $a^{-1}+1=\dfrac{1}{a}+1=\dfrac{1+a}{a}$;

г) $x^{-3}-x^{-1}=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x^2}{x^3}$; **д)** $a^{-2}-b^{-2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}$.

2. а) $(a^3)^{-2}=a^{-6}=\dfrac{1}{a^6}$; **б)** $(xy^{-1})^{-3}=x^{-3}\cdot y^3=\dfrac{y^3}{x^3}$; **в)** $(-5c^{-4})^2=25c^{-8}=\dfrac{25}{c^8}$;

г) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^{-1}=\dfrac{b^3}{a^2}$; **д)** $\left(\dfrac{x^{-3}}{3y^2}\right)^{-2}=\dfrac{9x^6}{y^{-4}}=9x^6y^4$.

3. а) $8^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=(2^3)^{-3}\cdot 2^{-3}=2^{-9-3}=\dfrac{1}{2^{12}}=\dfrac{1}{4096}$;

б) $25^{-3}\cdot 15^4=\dfrac{(5\cdot 3)^4}{25^3}=\dfrac{5^4\cdot 3^4}{5^6}=\dfrac{3^4}{5^2}=\dfrac{81}{25}$; **в)** $6^{-4}:3^{-6}=\dfrac{3^6}{6^4}=\dfrac{3^6}{2^4\cdot 3^4}=\dfrac{3^2}{2^4}=\dfrac{9}{16}$;

г) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-5}:\left(-\dfrac{4}{3}\right)^8=\dfrac{4^5}{3^5}\cdot\dfrac{3^8}{4^8}=\dfrac{3^3}{4^3}=\dfrac{27}{64}$; **д)** $\dfrac{2^{-5}\cdot 16^2}{8^4}=\dfrac{2^{-5}\cdot 2^8}{2^{12}}=\dfrac{1}{2^9}=\dfrac{1}{512}$.

4. а) $a^3b^3(a^{-3}+b^{-3})=a^3b^3\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)=b^3+a^3$;

б) $(x-y)^{-2}\cdot\dfrac{1}{(y-x)^{-1}}=\dfrac{1}{(x-y)^2}\cdot(y-x)=\dfrac{y-x}{(y-x)^2}=\dfrac{1}{y-x}$;

в) $a^9(a^{-3}-a^{-5})(a^4+a^5)^{-1}=\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^5}\right)\cdot\dfrac{1}{a^4+a^5}\cdot a^9=$

$=\dfrac{a^2-1}{a^5}\cdot\dfrac{1}{a^4(1+a)}\cdot a^9=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a+1}=a-1$.

5. $((ab^{-1})^{-2}-a^0b^2):\dfrac{a^2-b^4}{b}=\left(\dfrac{a^2}{b^2}-b^2\right)\cdot\dfrac{b}{a^2-b^4}=\dfrac{(a^2-b^4)\cdot b}{b^2(a^2-b^4)}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{17}$.

6. 1) а) $100^3=(10^2)^3=10^6$; **б)** $0{,}0003^2=(3\cdot 10^{-4})^2=9\cdot 10^{-8}$;
в) $1000^{-2}=(10^3)^{-2}=10^{-6}$; **г)** $(0{,}0001)^{-4}=(10^{-4})^{-4}=10^{16}$;
2) а) $0{,}0000016=1{,}6\cdot 10^{-6}$; **б)** $0{,}00007142=7{,}142\cdot 10^{-5}$;

в) $\dfrac{1}{16}=0{,}0625=6{,}25\cdot 10^{-2}$; **г)** $\dfrac{1}{32}=0{,}03125=3{,}125\cdot 10^{-2}$.

7. а) $(2x^{-2}-y)(y+2x^{-2})=(2x^{-2})^2-y^2=4x^{-4}-y^2=\dfrac{4}{x^4}-y^2=\dfrac{4-x^4y^2}{x^4}$;

б) $(a^{-2}-b^{-2})(a^{-4}+(ab)^{-2}+b^{-4})=(a^{-2})^3-(b^{-2})^3=a^{-6}-b^{-6}=\dfrac{1}{a^6}-\dfrac{1}{b^6}=\dfrac{b^6-a^6}{a^6b^6}$;

в) $(a^{-1}+4)(a^{-2}-(0{,}25a)^{-1}+16)=(a^{-1})^3+4^3=\dfrac{1}{a^3}+64=\dfrac{1+64a^3}{a^3}$.

С-31

1. 1) а) $6^{1/2}=\sqrt{6}$; $5^{3/4}=\sqrt[4]{5^3}$; $12^{-1/3}=\sqrt[3]{12^{-1}}$; $23^{-4/5}=\sqrt[5]{23^{-4}}$;

б) $a^{0,5}=\sqrt{a}$; $b^{2,5}=b^{5/2}=\sqrt{b^5}$; $x^{-0,5}=\sqrt{x^{-1}}$; $y^{-1,5}=\sqrt{y^{-3}}$;

2) а) $3a^{1/3}=3\cdot\sqrt[3]{a}$; $-5b^{3/4}=-5\cdot\sqrt[4]{b^3}$; $(3x)^{0,5}=\sqrt{3x}$; $(4y)^{-1,5}=\sqrt{(4y)^{-3}}$;

б) $(x-a)^{2/3}=\sqrt[3]{(x-a)^2}$; $y^{3/5}-b^{3/5}=\sqrt[5]{y^3}-\sqrt[5]{b^3}$; $ab^{0,5}+xy^{0,5}=a\sqrt{b}+x\sqrt{y}$.

2. 1) а) $\sqrt{5}=5^{1/2}$; $\sqrt[3]{7}=7^{1/3}$; $\sqrt[9]{3}=3^{1/9}$; $\sqrt[7]{4^2}=4^{2/7}$;

б) $\sqrt[5]{x^3}=x^{3/5}$; $\sqrt[7]{y^4}=y^{4/7}$; $\sqrt[10]{4a}=(4a)^{1/10}$; $\sqrt[8]{16b^4}=(16b^4)^{1/8}$;

2) а) $\sqrt[3]{5^{-1}}=5^{-1/3}$; $\sqrt[4]{8}=8^{1/4}$; $\sqrt[10]{25^3}=25^{0,3}$;

б) $\sqrt[6]{a^{-2}}=a^{-1/3}$; $\sqrt[7]{(x+y)^3}=(x+y)^{3/7}$; $\sqrt[3]{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{1/3}$.

3. 1) а) $16^{1/2}=4$; **б)** $25^{-1/2}=\dfrac{1}{25^{1/2}}=\dfrac{1}{5}$; **в)** $7\cdot 81^{-1/4}=7\cdot 3=21$;

г) $-5\cdot 0,001^{-2/3}=-5\cdot(10^{-3})^{-2/3}=-5\cdot 10^2=-500$;

2) а) $0,0625^{-1/4}=\dfrac{1}{0,0625^{1/4}}=\dfrac{1}{0,5}=2$; **б)** $0,0049^{0,5}=0,07$;

в) $\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-4/3}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-4/3}=\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right)^{-4/3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$;

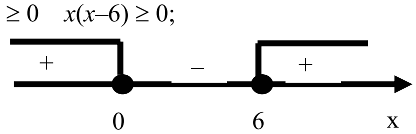
г) $\left(4\dfrac{17}{27}\right)^{-1/6}=\left(\dfrac{27}{125}\right)^{1/6}=\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\right)^{1/6}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

4. а) $0\le y\le 0,00032$, $0\le y^{0,6}\le(0,2^5)^{3/5}$, $0\le y^{0,6}\le 0,008$;
б) $1\le y\le 243$, $1\le y^{0,6}\le(3^5)^{3/5}$, $1\le y^{0,6}\le 27$;
в) $0,00001\le y\le 1$, $(10^{-5})^{3/5}\le y\le 1$, $0,001\le y\le 1$;
г) $32\le y\le 1024$, $(2^5)^{3/5}\le y^{0,6}\le(2^{10})^{3/5}$, $8\le y^{0,6}\le 64$.

5. а) $y=x^{4/9}=\sqrt[9]{x^4}$, $D(y)=R$; **б)** $y=x^{-0,7}=\dfrac{1}{x^{0,7}}=\dfrac{1}{x^{7/10}}=\dfrac{1}{\sqrt[10]{x^7}}$, $D(y)=(0;+\infty)$;

в) $y=(x+5)^{-0,1}=\dfrac{1}{(x+5)^{0,1}}=\dfrac{1}{\sqrt[10]{x+5}}$, $x+5>0$ $x>-5$, $D(y)=(-5;+\infty)$;

г) $y=(x^2-6x)^{3/4}=\sqrt[4]{(x^2-6x)^3}$, $x^2-6x\ge 0$ $x(x-6)\ge 0$;



$D(y)=(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$.

6. а) $x^{1/2}=5$, $x=25$; **б)** $x^{1/3}=3$, $x=27$; **в)** $(x-2)^{0,5}=7$, $x-2=49$, $x=51$;
г) $(x+3)^{1/4}=0$, $x+3=0$, $x=-3$; **д)** $(x^2-16)^{0,5}=3$, $x^2-16=9$, $x^2=25$, $x_{1,2}=\pm5$;
е) $(x^2+7x)^{1/3}=2$, $x^2+7x=8$, $x^2+7x-8=0$, $D=49+4\cdot8=81$, $x_1=\frac{-7+9}{2}=1$ $x_2=-8$.

С-32

1. 1) а) $a^{1/2}\cdot a^{1/5}=a^{1/2+1/5}=a^{0,7}$; **б)** $(a^{1/2})^{1/5}=a^{1/10}$; **в)** $a^{1/2}:a^{1/5}=a^{1/2-1/5}=a^{0,3}$;
г) $a:a^{3/5}=a^{1-3/5}=a^{2/5}$; **д)** $a^{2/3}\,a^{1/6}\,a^{-1/2}=a^{4/6+1/6-3/6}=a^{1/3}$;
2) а) $(b^{0,6})^{0,3}\cdot b^{0,32}=b^{0,18}\cdot b^{0,32}=b^{0,5}$; **б)** $(b^{3/8})^{1,6}\cdot(b^{-2/7})^{1,4}=b^{0,6}\cdot b^{-0,4}=b^{0,2}$;
в) $\frac{b^{5/8}\cdot b^{1/4}}{b^{-0,125}}=b^{3/8+1/8}=b^{0,5}$; **г)** $\frac{b^{4,7}\cdot b^{-3,9}}{b^{-2,1}\cdot b^{1,9}}=b$.

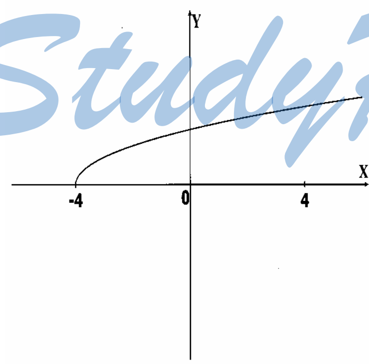
3. $x^8=(x^4)^2$; $x^{-4}=(x^{-2})^2$; $x^5=(x^{5/2})^2$; $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$; $x^{1/4}=(x^{1/8})^2$; $x^{1/5}=(x^{1/10})^2$; $x^{4/9}=(x^{4/18})^2$.

4. $y^9=(y^3)^3$; $y^{-6}=(y^{-2})^3$; $y^2=(y^{2/3})^3$; $y=\left(\sqrt[3]{y}\right)^3$; $y^{1/3}=(y^{1/9})^3$; $y^{3/5}=(y^{1/5})^3$.

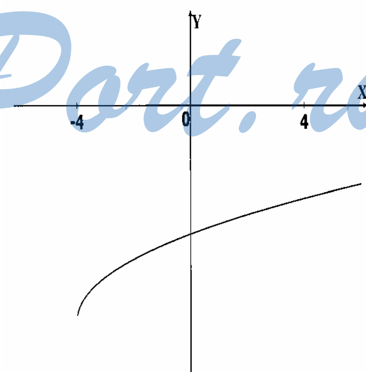
5. а) $(a^{1/2}-2)\cdot 3a^{1/2}+6a^{1/2}=3a-6a^{1/2}+6a^{1/2}=3a$; **б)** $(a^{0,5}+b^{0,5})(a^{0,5}-b^{0,5})=a-b$;
в) $(1+a^{0,5})^2+2a^{0,5}=1+2a^{0,5}+a+2a^{0,5}=1+4a^{0,5}+a$;
г) $(b^{1/3}+1)(b^{2/3}-b^{1/3}+1)=(b^{1/3})^3+1=b+1$.
6. а) $x=a^{0,49}$, $y=a^{-0,49}$, $x\cdot y=a^{0,49}\cdot a^{-0,49}=a^0=1$, т.е. $\underline{xy=1}$;
б) $x=a^{1/2}$, $y=a^{1/4}$, $x\cdot y^{-2}=a^{1/2}\cdot a^{-1/2}=1$, т.е. $xy^{-2}=1$, $\underline{x=y^2}$;
в) $x=a^{1/6}$, $y=\sqrt{1-a^{1/3}}$, $x^2+y^2=(a^{1/6})^2+\left(\sqrt{1-a^{1/3}}\right)^2=a^{1/3}+1-a^{1/3}=1$, т.е. $\underline{x^2+y^2=1}$;

г) $x=\sqrt[4]{a}$, $y=\sqrt[4]{a-5}$, $x^4-y^4=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4-\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^4=a-(a-5)=5$, т.е. $\underline{x^4-y^4=5}$.

7. а)



б)



С-33

1. 1) а) $a-4a^{1/2}=a^{1/2}(a^{1/2}-4)=a^{1/2}(a^{1/4}-2)(a^{1/4}+2)$; **б)** $b^{1/2}+3b^{1/4}=b^{1/4}(b^{1/4}+3)$;
в) $(x^{1/2})^2-9=(x^{1/2}-3)(x^{1/2}+3)$; **г)** $(y^{1/3})^3-27=(y^{1/3}-3)(y^{2/3}+3y^{1/3}+9)$;
д) $a^{2/3}-b^{2/3}=(a^{1/3}-b^{1/3})(a^{1/3}+b^{1/3})$; **е)** $x^{3/2}+y^{3/2}=(x^{1/2}+y^{1/2})(x-x^{1/2}\,y^{1/2}+y)$;
2) а) $x^{1/2}+10x^{1/4}=x^{1/4}(x^{1/4}+10)$; **б)** $y^{3/4}-2y^{1/2}=y^{1/2}\,(y^{1/4}-2)$;
в) $cd^{1/10}+cd^{1/5}=cd^{1/10}(1+d^{1/10})$; **г)** $p^{2/9}-p^{1/9}=p^{1/9}(p^{1/9}-1)$;
д) $b-25=(\sqrt{b}-5)(\sqrt{b}+5)$; **е)** $a-125=(a^{1/3}-5)(a^{2/3}+5a^{1/3}+25)$.

2. 1) а) $\dfrac{a+6a^{1/2}}{a^{1/2}+6}=\dfrac{a^{1/2}(a^{1/2}+6)}{a^{1/2}+6}=a^{1/2}$;

б) $\dfrac{5b^{1/2}}{b^{1/2}+3b^{1/4}}=\dfrac{5b^{1/2}}{b^{1/4}\left(b^{1/4}+3\right)}=\dfrac{5b^{1/4}}{b^{1/4}+3}$;

в) $\dfrac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}=\dfrac{(x^{0,5}+y^{0,5})(x^{0,5}-y^{0,5})}{x^{0,5}+y^{0,5}}=x^{0,5}-y^{0,5}$;

г) $\dfrac{x^{1,5}y+xy^{1,5}}{xy^{0,5}+x^{0,5}y}=\dfrac{xy(x^{0,5}+y^{0,5})}{x^{0,5}y^{0,5}(x^{0,5}+y^{0,5})}=x^{0,5}y^{0,5}$;

д) $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}=\dfrac{(a^{1/2}+b^{1/2})(a-a^{1/2}b^{1/2}+b)}{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}=a^{1/2}+b^{1/2}$;

е) $\dfrac{p-q}{p^{1/3}-q^{1/3}}=\dfrac{(p^{1/3}-q^{1/3})(p^{2/3}+p^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3})}{p^{1/3}-q^{1/3}}=p^{2/3}+p^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3}$;

2) а) $\dfrac{x-3x^{1/2}}{x^{3/2}-3x}=\dfrac{x^{1/2}(x^{1/2}-3)}{x(x^{1/2}-3)}=\dfrac{1}{x^{1/2}}$; **б)** $\dfrac{y^{1/3}+y^{5/6}}{y^{1/3}-y^{5/6}}=\dfrac{y^{1/3}(1+y^{1/2})}{y^{1/3}(1-y^{1/2})}=\dfrac{1+y^{1/2}}{1-y^{1/2}}$;

в) $\dfrac{9a-b}{3a-a^{0,5}b^{0,5}}=\dfrac{(3a^{0,5}-b^{0,5})(3a^{0,5}+b^{0,5})}{a^{0,5}(3a^{0,5}-b^{0,5})}=\dfrac{3a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}}$;

г) $\dfrac{p^{2/5}-q^{2/5}}{p+p^{4/5}q^{1/5}}=\dfrac{(p^{1/5}-q^{1/5})(p^{1/5}+q^{1/5})}{p^{4/5}(p^{1/5}+q^{1/5})}=\dfrac{p^{1/5}-q^{1/5}}{p^{4/5}}$;

д) $\dfrac{a^{3/2}b^{1/2}-ab+a^{1/2}b^{3/2}}{a+b}=\dfrac{a^{3/2}b^{1/2}-ab+a^{1/2}b^{3/2}}{a^{1/3}}$;

е) $\dfrac{x^{0,3}-y^{0,3}}{x^{0,1}-y^{0,1}}=\dfrac{(x^{0,1}-y^{0,1})(x^{0,2}+x^{0,1}y^{0,1}+y^{0,2})}{x^{0,1}-y^{0,1}}=x^{0,2}+x^{0,1}y^{0,1}+y^{0,2}$.

3. $\dfrac{y-49y^{0,5}}{y^{0,75}-7y^{0,5}}=\dfrac{y^{0,5}(y^{0,5}-49)}{y^{0,5}(y^{0,25}-7)}=\dfrac{(y^{0,25}-7)(y^{0,25}+7)}{y^{0,25}-7}=y^{0,25}+7=$
$=(2,25)^{0,25}+7=\sqrt{1,5}+7$.

4. а) $\dfrac{b}{81-b}-\dfrac{9}{b^{0,5}+9}+\dfrac{b^{0,5}}{b^{0,5}-9}=\dfrac{b}{(9-b^{0,5})(9+b^{0,5})}-\dfrac{9}{9+b^{0,5}}-\dfrac{b^{0,5}}{9-b^{0,5}}=$

$=\frac{b-9(9-b^{0,5})-b^{0,5}(9+b^{0,5})}{(9-b^{0,5})(9+b^{0,5})}=-\frac{81}{81-b}=\frac{81}{b-81}$;

б) $\left(\frac{6x^{0,5}+1}{x^{0,5}-3}+\frac{6x^{0,5}-1}{x^{0,5}+3}\right)\cdot\frac{x-9}{2x+1}=\frac{(6x^{0,5}+1)(x^{0,5}+3)+(6x^{0,5}-1)(x^{0,5}-3)}{x-9}\cdot\frac{x-9}{2x+1}=$

$=\frac{6x+19x^{0,5}+3+6x-19x^{0,5}+3}{2x+1}=\frac{12x+6}{2x+1}=6$.

С-34

1. а) $\frac{\pi}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$; **б)** $\frac{3}{2}\pi=3\frac{\pi}{2}=3\cdot90^\circ=270^\circ$; **в)** $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\cdot180^\circ=120^\circ$;

г) $\frac{4}{5}\pi=\frac{4}{5}\cdot180^\circ=144^\circ$; **д)** $2\pi=2\cdot180^\circ=360^\circ$.

2. а) $75^\circ=75\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}$; **б)** $50^\circ=50\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{18}$; **в)** $720^\circ=720\cdot\frac{\pi}{180}=4\pi$;

г) $15^\circ=15\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$; **д)** $10^\circ=10\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{18}$.

3.

Градусы	60°	30°	120°	150°	100°	72°	108°	135°	20°	450°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{9}$	$2{,}5\pi$

$\frac{5\pi}{9}=\frac{5}{9}\cdot180^\circ=100^\circ$.

4. а) $\frac{\pi}{4}\approx0{,}79$; **б)** $\frac{\pi}{6}\approx0{,}52$; **в)** $\frac{\pi}{3}\approx1{,}05$; **г)** $\pi\approx3{,}14$; **д)** $\frac{3\pi}{2}\approx4{,}71$.

5. а) $\frac{\pi}{4}>0,(7)$; **б)** $-\frac{\pi}{6}<-\frac{1}{2}$; **в)** $\frac{3}{2}\pi<4{,}8$.

6. Длина окружности равна $2\pi R\approx21{,}35$ (см). За 10 мин. конец стрелки пройдет одну шестую длины, т.е. 3,56 см. Ответ: 3,56 см.

7. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$, и $5x$ — углы треугольника. Их сумма равна π, т.е. $2x+3x+5x=\pi$, $10x=\pi$, $x=\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$ — углы треугольника. Ответ: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$.

8. Пусть x — угол, $\pi\cdot4{,}5^2$ (см^2) — площадь круга, $\frac{\pi\cdot4{,}5^2}{2\pi}\cdot x=\frac{4{,}5^2\cdot x}{2}$ см^2 – площадь сектора или 20,25 см^2. Получаем: $\frac{4{,}5^2\cdot x}{2}=20{,}25$; $x=2$.

9. $45° = \frac{\pi}{4}$ — угол при вершине; $\frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$ — II и III углы.

10. Внутренний угол правильного n-угольника равен $\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Внешний равен $\pi - \pi\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \pi\left(1 - 1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}$. Получаем: $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, $n=12$.

С-35

1. 1) а) $(-1; 0)$; **б)** $(0; 1)$; **в)** $(0; -1)$; **г)** $(-1; 0)$; **д)** $(1; 0)$;
2) а) $(1; 0)$; **б)** $(0; -1)$; **в)** $(-1; 0)$; **г)** $(1; 0)$; **д)** $(0; -1)$.
2. а) III; **б)** III; **в)** I; **г)** IV; **д)** III.

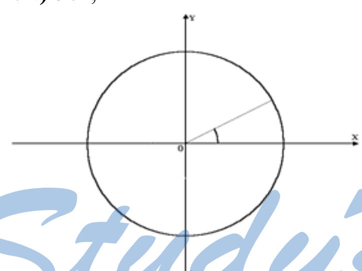
3. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in z$; **б)** $2\pi k,\ k \in z$; **в)** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in z$.

4. а) $(0; -1)$; **б)** $(0; -1)$; **в)** $(-1; 0)$.

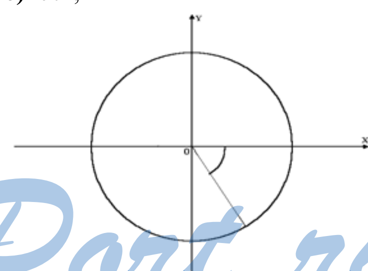
5. а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in z$; **б)** $\frac{4\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in z$.

С-36

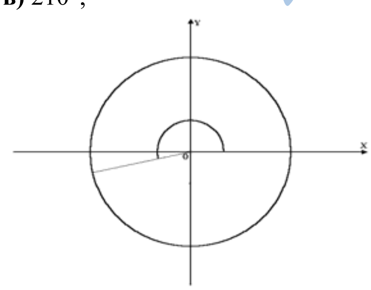
1. а) 30°;



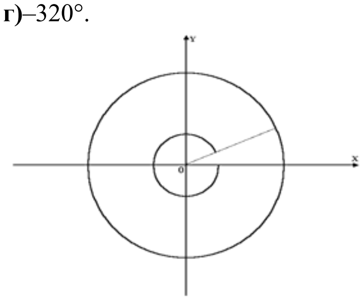
б) –60°;



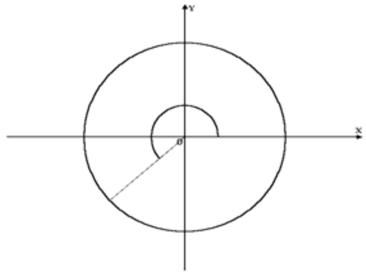
в) 210°;



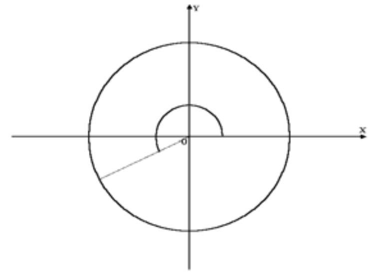
г) –320°.



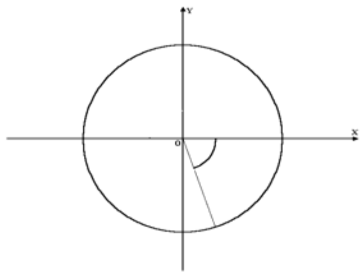
2. а) 225°;



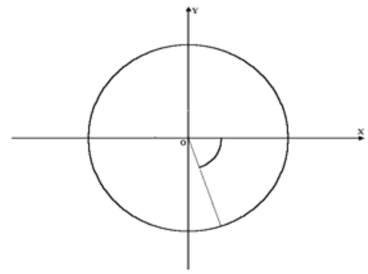
б) 585°;



в)–75°;



г)–435°.



2. 1) а) III; **б)** II; **в)** II; **г)** III;
2) а) III; **б)** II; **в)** I; **г)** IV.
3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
sinα	0	1	0	–1	0
cosα	1	0	–1	0	1
tgα	0	–	0	–	0
ctgα	–	0	–	0	–

4. 1) а) φ=180°; **б)** φ=450°; **в)** φ=270°;
2) а) φ=270°; **б)** φ=360°; **в)** φ=180°;
5. а)$-1 \le \sin\alpha \le 1$, $4-1 \le 4+\sin\alpha \le 4+1$, $3 \le 4+\sin\alpha \le 5$;
б)$-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le -\sin\alpha \le 1$, $3 \le 4-\sin\alpha \le 5$;
в)$-1 \le \cos\alpha \le 1$, $6-1 \le 6+\cos\alpha \le 6+1$, $5 \le 6+\cos\alpha \le 7$;
г)$-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-1 \le -\cos\alpha \le 1$, $5 \le 6-\cos\alpha \le 7$.

6. а) нет, т.к.$-1 \le \sin\alpha \le 1$, а $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$;

б) нет, т.к.$-1 \le \cos\alpha \le 1$, а $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$; **в)** да; **г)** да.

7. 1) а) cos 180°+5sin 90°=–1+5=4; **б)** sin 180°–3cos 0°=0–3=–3;
в) 5ctg 90°–7tg 180°=5·0–7·0=0; **г)** tg 360°–2ctg 270°+3=0–2 · 0+3=3;

2) а) sin 60°+cos 30°=$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$; **б)** sin 30°–cos 60°=$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$;

в) sin 45°–cos 45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$; **г)** tg 45°+ctg 30°=$1+\sqrt{3}$.

8. а) sin x=0, $x=\pi n$, $n \in z$; **б)** sin x=–1, $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in z$;

в) sin x=1, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in z$; **г)** cos x=0, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in z$;

д) cos x=–1, $x=\pi+2\pi n$, $n \in z$; **е)** cos x=1, $x=2\pi n$, $n \in z$.

9. а) $\sin^2 30°+\cos^2 60°=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$;

б) $tg^2 45°+\cos^2 45°=1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1{,}5$;

в) sin45°·cos 30°·tg 180°=$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0=0$.

10. 0° < α < 90°, sin α > 0, sin α < 2, значит, $\sin^2\alpha < 2\sin\alpha$.

11. α=30°; **а)** sin 2α=sin(2·30°)=sin 60°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) 2sin α=2sin 30°=2·$\frac{1}{2}$=1;

в) cos 3α=cos(3·30°)=cos 90°=0, 3cos α=3cos 30°=$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

С-37

1. а) sin 13° > 0, sin 103° > 0, sin 218° < 0, sin 302° < 0;
б) cos 41° > 0, cos 179° < 0, cos 273° > 0, cos 354° > 0;
в) tg 14° > 0, tg 86° > 0, tg 191° > 0, tg 311° < 0;
г) ctg 67° > 0, ctg 98° < 0, ctg 195° > 0, ctg 279° < 0.
2. 1) а) sin 169° > 0; **б)** cos 110° < 0; **в)** tg 203° > 0; **г)** ctg 288° < 0;
2) а) sin 409° > 0; **б)** cos 372° > 0; **в)** tg 540°=0; **г)** ctg 364° > 0;
3) а) sin (–88°) < 0; **б)** cos (–12°) > 0; **в)** tg (–72°) < 0; **г)** ctg (–110°) > 0.
3.

α	116°	208°	367°	–43°	–105°
sinα	+	–	+	–	–
cosα	–	–	+	+	–
tgα	–	+	+	–	+
ctgα	–	+	+	–	+

4. а) $\sin 16° \cdot \cos 206°$=«+» · «–» < 0; **б)** $\sin 108° \cdot \cos 300°$=«+» · «+» > 0;

в) $\dfrac{\sin 267°}{\cos 167°} = \dfrac{«–»}{«+»} < 0$; **г)** $\dfrac{\cos 140°}{\cos 14°} = \dfrac{«–»}{«+»} < 0$;

д) $\sin 160° \cdot \cos 205° \cdot \mathrm{tg}\, 97°$=«+» · «–» · «–» > 0;

е) $\cos 155° \cdot \sin 88° \cdot \mathrm{tg}\, 105°$=«–» · «+» · «–» > 0.

5. а) $\sin\alpha > 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$; I или II,   II или IV, значит, II четверть;

б) $\cos\alpha < 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$; II или III,   I или III, значит, III четверть.

6. 1) а) $\sin(-45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\cos(-60°) = \dfrac{1}{2}$; **в)** $\mathrm{tg}(-30°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\mathrm{ctg}(-45°) = -1$;

2) а) $\sin(-60°) + \sin 0° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin(-30°) + \cos(-60°) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$; **в)** $\sin(-90°) + \cos(-90°) = -1 + 0 = -1$;

г) $\cos(-60°) \cdot \mathrm{tg}(-45°) = -\dfrac{1}{2}$.

7. а) $\sin 420° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\cos 390° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **в)** $\mathrm{tg}\, 405° = 1$; **г)** $\mathrm{ctg}\, 390° = \sqrt{3}$;

д) $\sin 750° = \dfrac{1}{2}$; **е)** $\cos 720° = 1$.

8. $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; **а)** $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$=«–» · «+» < 0; **б)** $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{«+»}{«–»} < 0$;

в) $\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{«–»}{«–»} > 0$; **г)** $\sin\alpha + \cos\alpha$=«–»+«–» < 0.

9. $\cos\alpha = a$; **а)** $1 + \cos\alpha = 1 + a$; **б)** $1 - \cos(-\alpha) = 1 - a$; **в)** $\cos(\alpha + 720°) = a$;

г) $\cos(\alpha - 720°) = \cos(720° - \alpha) = a$; **д)** $\cos(360° + \alpha) = a$; **е)** $\cos(360° - \alpha) = a$.

10. $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}03$ III четверти.

11. $\varphi \in$ III четверти;

а) $|\sin\varphi| + \sin\varphi = -\sin\varphi + \sin\varphi = 0$; **б)** $\cos\varphi - |\cos\varphi| = \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi$;

в) $\mathrm{tg}\,\varphi + |\mathrm{tg}\,\varphi| = \mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{tg}\,\varphi = 2\mathrm{tg}\,\varphi$; **г)** $|\sin\varphi| - |\mathrm{tg}\,\varphi| = -\sin\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi$.

С-38

1. 1) а) $3\cos 60° - 2\sin 30° + 6\mathrm{ctg}\, 60° - 2\mathrm{ctg}\, 30° = \dfrac{3}{2} - 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 6\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$;

б) $\sin(-30°) + \cos(-60°) - 2\mathrm{tg}(-30°) \cdot \mathrm{ctg}(-60°) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{3}$;

в) $5\sin(-45°)+5\cos(-45°)-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(-30°)+\sin(-30°)=$

$=-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

2) а) $3\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+3-1=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$;

б) $\sin(-\pi)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-3\sin\frac{\pi}{4}+3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0+2\cdot0-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$;

в) $6\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos(-\pi)=6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1+5=22$.

2. а) $\sin 0-\cos 0=-1+0=-1$; $\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=1-0=1$; $\sin\pi-\cos\pi=0-(-1)=1$; $\sin2\pi-\cos2\pi=0-1=-1$; **б)** $2\sin 0+\cos(2\cdot0)=0+1=1$; $2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot1-1=1$; $2\sin\pi+\cos(2\pi)=2\cdot0+1=1$; **в)** $3\sin 0-\cos(3\cdot0)=3\cdot0-1=-1$; $3\sin\frac{\pi}{6}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=3\cdot\frac{1}{2}-0=\frac{3}{2}$; $3\sin\frac{\pi}{3}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-(-1)=\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$; $3\sin\frac{\pi}{2}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot1-0=3$; **г)** $\sin(3\cdot0)+\cos 0=0+1=1$; $\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\sin(3\cdot\pi)+\cos\pi=0-1=-1$.

3. 1) а) $\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$;

б) $2\sin^2\frac{\pi}{4}+3\cos^2\frac{\pi}{4}=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$;

в) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{9}$;

г) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{6}$;

2) а) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$;

б) $3\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot \mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3}{4}$;

в) $\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$;

г) $\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1\cdot 1=1.$

4. а) $\dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{6}\cdot ctg^2\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot 3}{\frac{1}{2}}=-3{,}5$;

б) $\dfrac{3{,}5-\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{3{,}5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{-2}=-\frac{5}{4}$.

5. а) $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-15^\circ)+2tg\alpha}=\dfrac{\sin 90^\circ-\cos 90^\circ}{\sin 30^\circ+2tg45^\circ}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{5}$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin 90^\circ+\sin 30^\circ}{2\sin 90^\circ}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$;

в) $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos\alpha\cdot tg\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)+ctg\alpha}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$;

г) $\dfrac{3\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-3\cos\alpha}=\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}-3\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=-3$.

6. а) $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>1$; **б)** $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}>1$;

в) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2$; **г)** $2\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}=\sqrt{3}+0<2.$

7. $\sin\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$;

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}\cdot\left(1-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

значит, $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)$, что и требовалось доказать.

С-39

1. а) $\sin\alpha=-0{,}8$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6$;

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$; **б)** $\cos\alpha=\frac{-24}{25}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}}=-\frac{7}{25}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{7\cdot 25}{25\cdot 24}=\frac{7}{24}$;

в) $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}}=-\frac{7}{25}$;

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{24}{7}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{7}{24}$; **г)** $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}=-\frac{5}{13}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{12}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{12}{5}$;

д) $\mathrm{tg}\,\alpha=2{,}4$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{1+2{,}4^2}}=-\frac{1}{2{,}6}=-\frac{5}{13}$;

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{5^2}{13^2}}=-\frac{12}{13}$; **е)** $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{5}{12}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5^2}{12^2}}}=\frac{12}{13}$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}=\frac{5}{13}$.

2. а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно; **б)** $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1^2+(-1)^2\neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

3. а) $\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}$; $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$;

$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{1+ctg^2\alpha}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{15}{16}\neq\dfrac{3}{4}$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно; **б)** $\sin\alpha=0{,}7$, $ctg\alpha=2\sqrt{2}$;

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-0{,}7^2=0{,}51$; $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{8}{9}$; $0{,}51\neq\dfrac{8}{9}$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

4. а) $\sin\beta=-\dfrac{40}{41}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ т.к. $\sin\beta<0$, то $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\dfrac{40^2}{41^2}}=-\dfrac{9}{41}$; $tg\,\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{40}{9}$; $ctg\,\beta=\dfrac{9}{40}$;

б) $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, $0<\beta<\pi$ т.к. $\cos\beta>0$, то $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\dfrac{4^2}{5^2}}=\dfrac{3}{5}$; $tg\,\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{3}{4}$; $ctg\,\beta=\dfrac{4}{3}$;

в) $tg\,\beta=-1$, $\pi<\beta<2\pi$; т.к. $tg\,\beta<0$, то $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$;

$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $ctg\,\beta=-1$;

г) $ctg\,\beta=2$, $0<\beta<\pi$; т.к. $ctg\,\beta>0$, то $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\beta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $tg\,\beta=\dfrac{1}{2}$.

5. $\sin\alpha$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

$ctg^2\alpha=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; $ctg\,\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$; $tg\,\alpha=\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$.

6. $0°\le\alpha\le 90°$, $\cos\alpha=1+a$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(1+a)^2}=\sqrt{-a^2-2a}$;
$0\le\cos\alpha\le 1$ при $0°\le\alpha\le 90°$; $0\le 1+a\le 1$; $-1\le a\le 0$.
Ответ: $\sin\alpha=\sqrt{-a^2-2a}$, $-1\le a\le 0$.

7. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{1-2a}}{1-a}\right)^2=\dfrac{a^2+1-2a}{(1-a)^2}=\dfrac{(a-1)^2}{(a-1)^2}=1$, значит, могут. Ответ: могут.

С-40

1. 1) а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha=1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

б) $\sin^2\alpha\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha$;

в) $1-\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\mathrm{ctg}^2\alpha$;

г) $4-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=4-1=3$;

2) а) $\cos^2\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta=\cos^2\beta\,(1-\sin^2\beta)=\cos^2\beta\cos^2\beta=\cos^4\beta$;

б) $\sin^4\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta=\sin^2\beta\,(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\sin^2\beta$;

в) $\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{ctg}^2\beta-\sin^2\beta=1-\sin^2\beta=\cos^2\beta$; **г)** $\frac{1-\cos^2\beta}{\sin^2\beta-1}=-\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=-\mathrm{tg}^2\beta$.

2. 1) а) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha=\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}+1=\frac{\cos\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\alpha}+1=ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, ч.т.д.

2) а) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}=$

$=\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\cos^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{1+c\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=ctg\alpha$, ч.т.д.

3. 1) а) $(1-\cos(-\alpha))(1+\cos(-\alpha))=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$;

б) $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)=-1+\cos^2\alpha=-\sin^2\alpha$;

в) $\sin(-\alpha)-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}^2(-\alpha)=-\sin\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha=$

$=-\sin\alpha\,(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=-\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}=-\frac{1}{\sin\alpha}$;

2) а) $\frac{1+\cos(-\beta)}{\sin(-\beta)}-c\mathrm{tg}(-\beta)=-\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}+c\mathrm{tg}\beta=\frac{-1-\cos\beta+\cos\beta}{\sin\beta}=-\frac{1}{\sin\beta}$;

б) $\frac{\sin^2(-\beta)-\sin^4(-\beta)}{\cos^2(-\beta)}=\frac{\sin^2\beta-\sin^4\beta}{\cos^2\beta}=\frac{\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)}{1-\sin^2\beta}=\sin^2\beta$;

в) $\frac{\sin(-\alpha)}{1-\cos(-\alpha)}-ctg(-\alpha)=ctg\alpha-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=-\frac{1}{\sin\alpha}$.

4. $\dfrac{1+ctg\varphi+ctg^2\varphi}{1+tg\varphi+tg^2\varphi}-ctg^2\varphi=\dfrac{1+ctg\varphi+ctg^2\varphi}{1+\dfrac{1}{ctg\varphi}+\dfrac{1}{ctg^2\varphi}}-ctg^2\varphi=$

$=\dfrac{(1+ctg\varphi+ctg^2\varphi)ctg^2\varphi}{ctg^2\varphi+ctg\varphi+1}-ctg^2\varphi=0$, т.е. значение выражения не зависит от φ, ч.т.д.

5. а) $\dfrac{1-\cos^4\beta}{4\cos\beta+4\cos^3\beta}=\dfrac{(1-\cos^2\beta)(1+\cos^2\beta)}{4\cos\beta(1+\cos^2\beta)}=\dfrac{\sin^2\beta}{4\cos\beta}$;

б) $\cos^3\beta\ tg^3\beta+9\sin^3\beta=\cos^3\beta\,\dfrac{\sin^3\beta}{\cos^3\beta}+9\sin^3\beta=10\sin^3\beta$;

$-1\le\sin\beta\le1$; $-1\le\sin^3\beta\le1$; $-10\le10\sin^3\beta\le10$;
т.е. наименьшее значение равно -10.
Ответ: -10.

6. $\dfrac{tg\varphi-ctg\varphi}{tg\varphi+ctg\varphi}=\dfrac{\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}=\dfrac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\sin^2\varphi-\cos^2\varphi=$

$=1-\cos^2\varphi-\cos^2\varphi=1-2\cos^2\varphi=1-2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1-2\cdot\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$.

Ответ: $\dfrac{7}{25}$.

С-41

1. 1) а) $\dfrac{\cos\alpha+ctg\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\sin\alpha)}=$

$=\dfrac{\cos\alpha(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha(\sin\alpha+1)}=ctg\alpha$;

б) $(1-\cos^2\alpha)(1+tg^2\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=$

$=-\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=-\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2tg\alpha$;

2) а) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$

$=\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$;

б) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=$
$=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1+ctg^4\alpha}{ctg^2\alpha+tg^2\alpha}=\dfrac{1+ctg^4\alpha}{ctg^2\alpha+\dfrac{1}{ctg^2\alpha}}=\dfrac{1+ctg^4\alpha}{ctg^4\alpha+1}\cdot ctg^2\alpha=ctg^2\alpha$;

г) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+tg^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$

2. а) $ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

$=\dfrac{\cos^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha\cos^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=$
$=\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$, ч.т.д.

3. $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=\dfrac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{(1-\cos^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\left(1-\dfrac{4}{9}\right)^2}{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{25\cdot 9}{81\cdot 4}=\dfrac{25}{36}$.

4. а) $\dfrac{\cos^2\alpha}{tg^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$

$=\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}=\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha}=ctg^4\alpha$, ч.т.д.

б) $\dfrac{3\sin^2\alpha+\cos^4\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\dfrac{3\sin^2\alpha+(1-\sin^2\alpha)^2}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=$
$=\dfrac{3\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=1$, ч.т.д.

5. $\dfrac{\cos^2\beta-\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta-\sin\beta\cos\beta}=\dfrac{\cos\beta(\cos\beta-\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\beta-\cos\beta)}=-\dfrac{1}{tg\beta}=\dfrac{1}{0{,}25}=4$.

6. $\dfrac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{1-\sin^4\varphi-\cos^4\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{(1-\sin^2\varphi)(1+\sin^2\varphi)-\cos^4\varphi}=$

$=\dfrac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi(1+\sin^2\varphi)-\cos^4\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi-\cos^4\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi}=$

$=\dfrac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)+\cos^2\varphi\sin^2\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\dfrac{1}{2}$, ч.т.д.

7. $y=4\cos^2x-3\sin^2x=4(1-\sin^2x)-3\sin^2x=4-7\sin^2x$,
т.к. $0\le\sin^2x\le1$, то $y_{max}=4$, $y_{min}=-3$.

8. $2\cos x=\sqrt{3}$, $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{13\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{13\pi}{6}$.

С-42

1. 1) а) $\cos75°=\cos(30°+45°)=\cos30°\cdot\cos45°-\sin30°\cdot\sin45°=$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$;

б) $\cos\dfrac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\pi\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\pi\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) а) $\cos72°\cos18°-\sin72°\sin18°=\cos(72°+18°)=\cos90°=0$;

б) $\cos\dfrac{8\pi}{3}\cos\dfrac{7\pi}{3}+\sin\dfrac{8\pi}{3}\sin\dfrac{7\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{7\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$;

в) $\cos15°30'\cos29°30'-\sin15°30'\sin29°30'=$
$=\cos(15°30'+29°30')=\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) а) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$;

$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-0{,}6+0{,}8)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$;

б) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{15^2}{17^2}}=-\dfrac{8}{17}$;

$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{15}{17}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{17}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15+8\sqrt{3}}{34}$;

в) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\frac{5}{13}$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\frac{15}{17}\cdot\frac{5}{13} + \frac{8}{17}\cdot\frac{12}{13} = \frac{21}{221}$;

$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{171}{221}$.

2. а) $\cos2\alpha\cos3\alpha - \sin2\alpha\sin3\alpha = \cos(2\alpha+3\alpha) = \cos5\alpha$;

б) $\cos\alpha\cos2\alpha - \sin(-\alpha)\sin2\alpha = \cos\alpha\,\cos2\alpha + \sin\alpha\sin2\alpha = \cos(\alpha-2\alpha) = \cos2\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) =$

$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos\pi = -1$;

г) $\sin\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{4}{7}\pi+\alpha\right) - \cos\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha\right)\cos\left(\frac{4}{7}\pi+\alpha\right) =$

$= -\cos\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha+\frac{4}{7}\pi+\alpha\right) = -\cos\pi = 1$;

д) $\cos(\alpha+\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -\sin\alpha\sin\beta$.

3. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = ctg\alpha\, ctg\beta - 1$, ч.т.д.

4. а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha$, ч.т.д.

б) $\cos(\pi-\alpha) = \cos\pi\cdot\cos\alpha + \sin\pi\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$, ч.т.д.

5. а) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right) - \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\alpha + \sin\frac{2}{3}\pi\cdot\sin\alpha - \cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3} =$

$= -\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = -\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta} = -tg\alpha\cdot tg\beta$.

С-43

1. 1) а) $\sin150° = \sin(180°-30°) = \sin180°\cdot\cos30° - \cos180°\cdot\sin30° = 0{,}5$;

б) $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi\cdot\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) а) $\sin 33°\cdot\cos 63° - \cos 33°\sin 63° = \sin(33°-63°) = -\sin 30° = -0{,}5$;

б) $\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} = \sin\left(\frac{5\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}\right) = 0$;

в) $\sin 27°20'\cdot\cos 32°40' + \cos 27°20'\sin 32°40' =$

$= \sin(27°20'+32°40') = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) а) $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$;

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{10}$;

б) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -0{,}8$;

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}8\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$;

в) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{3^2}{4^2}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = 0{,}6 = \frac{3}{5}$;

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{7}-6}{20}$;

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{-6-4\sqrt{7}}{20}$.

2. а) $\sin\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin(\alpha-2\alpha) = -\sin\alpha$;

б) $\sin 2\alpha\cdot\cos 3\alpha + \cos 2\alpha\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+3\alpha) = \sin 5\alpha$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right) =$

$= \sin\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha+\alpha+\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\pi = 0$;

г) $\sin(\alpha-\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta$.

3. $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) =$
$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\beta(1-\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) =$
$= \cos^2\beta - \cos^2\alpha$, ч.т.д.

4. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta)\cdot\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)\cdot\cos\alpha\cos\beta} =$

$= \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$, ч.т.д.

5. $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta} = \frac{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{3\cdot 3}{29\cdot 3} = \frac{3}{29}$.

6. а) $\frac{tg73^\circ - tg13^\circ}{1+tg73^\circ tg13^\circ}$=tg(73°–13°)=tg60°=$\sqrt{3}$;

б) $\frac{tg\frac{\pi}{18}+tg\frac{\pi}{9}}{1-tg\frac{\pi}{18}tg\frac{\pi}{9}} = tg\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{9}\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. а) ctg150°=ctg(90°+60°)=$\frac{ctg30^\circ \cdot ctg60^\circ - 1}{ctg90^\circ + ctg60^\circ} = -\frac{1\cdot\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$;

б) tg120°=tg(180°–60°)=$\frac{tg180^\circ - tg60^\circ}{1+tg180^\circ \cdot tg60^\circ} = -\sqrt{3}$;

в) ctg(–240°)=–ctg(270°–30°)=$\frac{ctg270^\circ \cdot ctg30^\circ + 1}{ctg270^\circ - ctg30^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

С-44

1. 1) а) 2sin22°30′cos22°30′=sin(2·22°30′)=sin45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)$=0,5; **в)** $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

г) $(\sin15^\circ - \cos15^\circ)^2 = \sin^2 15^\circ - 2\sin15^\circ\cos15^\circ + \cos^2 15^\circ =$
=1–sin30°=1–0,5=0,5;

д) $(\cos75^\circ + \sin75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ + 2\sin75^\circ\cos75^\circ$=1+sin150°=1,5;

е) $\cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30'$=cos(2·22°30′)=cos45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

з) $1{,}5-(\cos15^\circ - \sin15^\circ)^2 = 1{,}5 - \cos^2 15^\circ + 2\sin15^\circ\cos15^\circ - \sin^2 15^\circ =$
=1,5–1+sin30°=0,5+0,5=1;

2) а) cosα=$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; sin2α=2sinα·cosα=$2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$;

б) sinα=$-\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{3}{5}$; sin2α=$2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$;

3) а) $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$; **б)** $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$;

4) т.к. tgα < 0, то $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; cosα=$-\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{2{,}6}$;

$\sin\alpha = -\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{2{,}4}{2{,}6}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2{,}6^2} - \dfrac{2{,}4^2}{2{,}6^2} = -\dfrac{4{,}76}{6{,}76} = -\dfrac{119}{169}$;

$\sin 2\alpha = -2\dfrac{2{,}4}{2{,}6^2} = -\dfrac{2{,}4}{2{,}6\cdot 1{,}3} = -\dfrac{24}{26\cdot 1{,}3} = -\dfrac{12}{13\cdot 1{,}3} = -\dfrac{120}{169}$.

2. 1) а) $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 1{,}1}{1-1{,}1^2} = -\dfrac{2{,}2}{0{,}21} = -\dfrac{220}{21}$;

б) $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $tg 2\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{3\left(1-\dfrac{5}{9}\right)} = \dfrac{2\sqrt{5}\cdot 9}{3\cdot 4} = -\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\dfrac{12}{13}$; $tg\alpha = \dfrac{12}{5}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{25}{169} - \dfrac{144}{169} = -\dfrac{119}{169}$;

$tg 2\alpha = \dfrac{24}{5\left(1-\dfrac{144}{25}\right)} = -\dfrac{24\cdot 25}{5\cdot 119} = -\dfrac{100}{119}$.

3. а) $\dfrac{4tg\dfrac{\pi}{12}}{1-tg^2\dfrac{\pi}{12}} = 2tg\left(2\cdot\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{\cos^2 67{,}5^\circ - \sin^2 67{,}5^\circ} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 135^\circ} = -\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. а) $\sin\alpha+\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$; $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \dfrac{1}{9}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin 2\alpha = \dfrac{1}{9}$;

$\sin 2\alpha = -\dfrac{8}{9}$;

б) $\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$;

$\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$;

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha = \dfrac{1}{9}$; $\sin\alpha = \dfrac{8}{9}$.

С-45.

1. а) $2\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$;

б) $1+\cos 2\alpha = 1+2\cos^2\alpha-1 = 2\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1 + 2\cos^2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = ctg\alpha$;

г) $\dfrac{\cos\alpha \sin 2\alpha}{2tg\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \cos^3\alpha$;

д) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = 1$;

е) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = tg\alpha$;

ж) $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \dfrac{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \dfrac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = 1$;

з) $\cos 2\alpha + 2\sin^2(-\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$;

и) $ctg^2\alpha(1 - \cos 2\alpha)^2 = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}(1 - 1 + 2\sin^2\alpha)^2 = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot 4\sin^4\alpha =$
$= 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2 2\alpha$;

к) $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} =$
$= -\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = -(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

2. а) $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} =$
$= \dfrac{\sin\alpha(2\cos\alpha - 1)}{\cos\alpha(2\cos\alpha - 1)} = tg\alpha$, ч.т.д.

б) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \dfrac{1 + 2\cos^2\alpha - 1}{1 - 1 + 2\sin^2\alpha} = ctg^2 2\alpha$, ч.т.д.

3. а) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

б) $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

4. а) $\dfrac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

б) $\cos 20^\circ\cdot\cos 70^\circ = \cos 20^\circ\cdot\cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ = \dfrac{1}{2}\sin 40^\circ$;

в) $\cos\alpha\cos(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha\cdot\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$;

г) $\dfrac{\cos 160^\circ}{\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ} = \dfrac{\cos(180^\circ - 20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)} = -\dfrac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -1$;

д) $\dfrac{1-ctg^2 15^\circ}{2ctg15^\circ}=-ctg30^\circ=-\sqrt{3}$.

5. а) $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$ в задаче допущена опечатка, данный пример следует читать как: $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}=$

$=\dfrac{\cos\alpha(2\cos\alpha-1)}{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}=ctg\alpha$;

б) $\dfrac{ctg^2(45^\circ+\alpha)-1}{ctg^2(45^\circ+\alpha)+1}=\dfrac{\dfrac{\cos^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(45^\circ+\alpha)}{\sin^2(45^\circ+\alpha)}}{\dfrac{1}{\sin^2(45^\circ+\alpha)}}=$

$=\cos(2(45^\circ+\alpha))=\cos(90^\circ+2\alpha)=-\sin 2\alpha$, ч.т.д.

6. а) $\sin 36^\circ\cdot\cos 72^\circ=$

Опечатка.

б) $8\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{8\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=$

$=\dfrac{4\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\dfrac{2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\dfrac{\sin\frac{8\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=1$, ч.т.д.

С-46

1. а) $\sin 570^\circ=\sin(540^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-0{,}5$;

б) $\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\mathrm{tg}135^\circ=\mathrm{tg}(180^\circ-45^\circ)=-\mathrm{tg}45^\circ=-1$; **г)** $\mathrm{ctg}315^\circ=\mathrm{ctg}(270^\circ+45^\circ)=-\mathrm{tg}45^\circ=-1$;

д) $\sin\dfrac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=0{,}5$; **е)** $\cos\dfrac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{6}=\mathrm{tg}\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **з)** $\mathrm{ctg}\dfrac{5\pi}{3}=\mathrm{ctg}\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

и) $\sin(-630^\circ)=-\sin 630^\circ=-\sin(720^\circ-90^\circ)=1$;

к) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=0{,}5$;

л) $\mathrm{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$=–tg $\frac{11\pi}{6}$ =–tg $\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$=tg $\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

м) ctg(–945°)=–ctg945°=–ctg(1080°–135°)=ctg135°=ctg(90°+45°)=–1.

2. а) cos(–225°)+sin945°–tg1125°=

=cos(180°+45°)+sin(1080°–135°)–tg(1080°+45°)=

=–cos45°–sin135°–tg45°=$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ –1=–1–$\sqrt{2}$;

б) ctg570°+ $\sqrt{3}$ (sin300°–cos3630°)=

=ctg(360°+210°)+ $\sqrt{3}$ (sin(360°–60°)–cos(3600°+30°))=

=ctg(180°+30°)+ $\sqrt{3}$ (–sin60°–cos30°)=

=ctg30°+ $\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$ –3;

в) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ –0,5sin $\frac{11\pi}{6}$ –tg $\frac{21\pi}{4}$ =

=cos $\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ –0,5sin $\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ –tg $\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ =

=–cos $\frac{\pi}{3}$ +0,5sin $\frac{\pi}{6}$ –tg $\frac{\pi}{4}$ =$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$.

3. а) 1+sin $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ cos(π–α)=1+cosα·(–cosα)=1–cos^{2}α=sin^{2}α;

б) sin(2π+α)sin(π–α)+sin^{2}α=sinα·sinα+sin^{2}α=2sin^{2}α;

в) sin $\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ =–sin $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ =–cosα;

г) cos(α–π)=cos(π–α)=–cosα;

д) tg(α–π)=–tg(π–α)=tgα;

е) $\frac{2tg(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(-2\alpha)}=\frac{-2tg\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}=-2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha\cdot 2\sin\alpha}=-\frac{1}{\cos^3\alpha}$;

ж) cos(π–α)sin $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ –sin^2(–α)=–cosαcosα–sin^{2}α=–1;

з) sin$^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ –sin^2(π–α)=cos^{2}α–sin^{2}α=cos2α.

4. а) $\frac{\cos(2\pi-x)\cos^2(1{,}5\pi+x)}{\mathrm{tg}(x-\pi)\sin(0{,}5\pi+x)}=\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\mathrm{tg}x\cdot\cos x}=\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x}=0{,}5\sin 2x$,

ч.т.д.

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$, ч.т.д.

в) $\dfrac{tg(2\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=-\dfrac{tg\alpha\cdot\cos\alpha}{ctg\alpha\cdot\sin\alpha}=-tg\alpha$, ч.т.д.

5. а) $\dfrac{tg(\alpha-\pi)\cos(\alpha+\pi)}{tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)tg\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{tg\alpha\cdot tg\alpha}{ctg\alpha\cdot ctg\alpha}=tg^4\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{ctg^2(\alpha-\pi)\cdot tg^2(\alpha-3\pi)}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{ctg^2\alpha\cdot tg^2\alpha}=1$.

6. $A+B+C=180°$;
$C=180°-(A+B)$;
$\sin C=\sin(180°-(A+B))=\sin(A+B)$, ч.т.д.

7. Пусть β — смежный угол, тогда $\beta=180°-\alpha$; $\sin\beta=\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\beta=\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha=\mp\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\mp0{,}8$.

С-47

1. а) $\sin48°+\sin36°=2\sin\dfrac{48°+36°}{2}\cos\dfrac{48°-36°}{2}=2\sin42°\cos6°$;

б) $\sin12°+\sin7°=2\sin\dfrac{12°+7°}{2}\cos\dfrac{12°-7°}{2}=2\sin9{,}5°\cos2{,}5°$;

в) $\sin10°+\sin88°=2\sin\dfrac{10°+88°}{2}\cos\dfrac{10°-88°}{2}=2\sin49°\cos39°$;

г) $\sin\dfrac{3\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2}=2\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$;

2) а) $\sin66°-\sin56°=2\sin\dfrac{66°-56°}{2}\cos\dfrac{66°+56°}{2}=2\sin5°\cos61°$;

б) $\sin18°-\sin9°=2\sin\dfrac{18°-9°}{2}\cos\dfrac{18°+9°}{2}=2\sin4{,}5°\cos13{,}5°$;

в) $\sin14°-\sin36°=2\sin\dfrac{14°-36°}{2}\cos\dfrac{14°+36°}{2}=-2\sin11°\cos25°$;

г) $\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{2\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}}{2}\cos\frac{2\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}}{2}=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$;

3) а) $\cos38°+\cos18°=2\cos\frac{38^\circ+18^\circ}{2}\cos\frac{38^\circ-18^\circ}{2}=2\cos28°\cos10°$;

б) $\cos16°+\cos9°=2\cos\frac{16^\circ+9^\circ}{2}\cos\frac{16^\circ-9^\circ}{2}=2\cos12{,}5°\cos3{,}5°$;

в) $\cos34°+\cos74°=2\cos\frac{34^\circ+74^\circ}{2}\cos\frac{34^\circ-74^\circ}{2}=2\cos54°\cos20°$;

г) $\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}{2}=2\cos\frac{7\pi}{16}\cos\frac{5\pi}{16}$;

4) а) $\cos44°-\cos38°=-2\sin\frac{44^\circ+38^\circ}{2}\sin\frac{44^\circ-38^\circ}{2}=-2\sin41°\sin3°$;

б) $\cos4°-\cos16°=-2\sin\frac{4^\circ+16^\circ}{2}\sin\frac{4^\circ-16^\circ}{2}=2\sin10°\sin6°$;

в) $\cos15°-\cos8°=-2\sin\frac{15^\circ+8^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ-8^\circ}{2}=-2\sin11{,}5°\sin3{,}5°$;

г) $\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}=-2\sin\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$.

2. 1) а) $\sin9\alpha+\sin\alpha=2\sin5\alpha\cos4\alpha$; **б)** $\sin6\alpha-\sin2\alpha=2\sin2\alpha\cos4\alpha$;

в) $\cos5\alpha+\cos9\alpha=2\cos7\alpha\cos2\alpha$; **г)** $\cos6\alpha-\cos\alpha=-2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2}$;

2) а) $\sin(\alpha+12°)+\sin(\alpha-12°)=2\sin\frac{2\alpha}{2}\cos\frac{24^\circ}{2}=2\sin\alpha\cos12°$;

б) $\sin(20°-\alpha)-\sin(20°+\alpha)=$

$=2\sin\frac{20^\circ-\alpha-20^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{20^\circ-\alpha+20^\circ+\alpha}{2}=-2\sin\alpha\cos20°$;

в) $\cos(23°+\beta)+\cos(23°-\beta)=$

$=2\cos\frac{23^\circ+\beta+23^\circ-\beta}{2}\cos\frac{23^\circ+\beta-23^\circ+\beta}{2}=2\cos23°\cos\beta$;

г) $\cos(23°+\beta)-\cos(23°-\beta)=$

$=-2\sin\frac{23^\circ+\beta-23^\circ+\beta}{2}\sin\frac{23^\circ+\beta+23^\circ-\beta}{2}=-2\sin\beta\cdot\sin23°$;

д) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}=2\sin\beta\cos\alpha$;

е) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$.

3. а) $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin 5\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 5\alpha\cos 3\alpha}=\text{tg}5\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha+\cos 7\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\cos 4\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}$;

в) $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{2\sin 2\alpha\cos 3\alpha}{-2\sin 2\alpha\sin 3\alpha}=-\text{ctg}3\alpha$;

г) $\dfrac{\cos 9\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 9\alpha+\sin 5\alpha}=\dfrac{-2\sin 2\alpha\sin 7\alpha}{2\sin 7\alpha\cos 2\alpha}=-\text{tg}2\alpha$.

4. а) $\sin^2 42°-\sin^2 12°=(\sin 42°-\sin 12°)(\sin 42°+\sin 12°)=$
$=2\sin 15°\cos 27°\cdot 2\sin 27°\cdot\cos 15°=\sin 30°\cdot\sin 54°$;
б) $\cos^2 53°-\cos^2 33°=(\cos 53°-\cos 33°)(\cos 53°+\cos 33°)=$
$=-2\sin 10°\cdot\sin 43°\cdot 2\cos 10°\cdot\cos 43°=-\sin 20°\cdot\sin 86°$.

5. а) $\dfrac{\sin 44°+\sin 26°}{\cos 44°+\cos 26°}=\dfrac{2\sin 35°\cos 9°}{2\cos 35°\cos 9°}=\text{tg}35°=\text{ctg}55°$, т.е. равенство верно.

б) $\dfrac{\sin 84°-\sin 54°}{\cos 84°+\cos 54°}=\dfrac{2\sin 15°\cos\dfrac{84°+54°}{2}}{2\cos 15°\cos\dfrac{84°+54°}{2}}=\text{tg}15°=\text{ctg}75°$,т.е. равенство верно.

6. а) $\dfrac{\cos 5\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 5\alpha+\sin 9\alpha}=\dfrac{2\cos 7\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\sin 7\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\text{ctg}7\alpha=\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-7\alpha\right)$, ч.т.д.

б) $\dfrac{\cos\alpha+\cos 5\alpha+\cos 9\alpha+\cos 13\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha+\sin 9\alpha+\sin 13\alpha}=\dfrac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cos 11\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+2\sin 11\alpha\cos 2\alpha}=$
$=\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 11\alpha}=\dfrac{2\cos 4\alpha\cos 7\alpha}{2\sin 7\alpha\cos 4\alpha}=\text{ctg}7\alpha$, ч.т.д.

в) $ctg(45°+\alpha)=\dfrac{ctg45°\,ctg\alpha-1}{ctg45°+ctg\alpha}=\dfrac{ctg\alpha-1}{ctg\alpha+1}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1}=$
$=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, ч.т.д.

д) $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))=$
$=2\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$, ч.т.д.

С-48.

1. а) $\alpha=45°$, $\alpha=60°$, $\alpha=30°$; **б)** $\alpha=30°$, $\alpha=45°$, $\alpha=60°$.

2. $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $2\pi-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{23\pi}{12}$.

3. $a_n=\pi(n-1)$, $b_n=-\pi n$; $\sin a_n=\sin(\pi n-\pi)=-\sin(\pi-\pi n)=-\sin\pi n=0$;

$\sin b_n=\sin(-\pi n)=-\sin\pi n=0$, значит, любое число, являющееся членом (a_n) или (b_n)–корень данного уравнения, ч.т.д.

4. 1) а) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$; **б)** $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$; **в)** $\mathrm{tg}x=1$,

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in z$; **2) а)** $\cos x-1=0$, $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in z$; **б)** $\sin x+1=0$,

$\sin x=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$; **в)** $3\mathrm{tg}x=0$, $\mathrm{tg}x=0$, $x=\pi n$, $n\in z$.

5. Т.к. φ — угол четырехугольника, то $0<\varphi<\pi$; **а)** $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$;

б) $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{3\pi}{4}$.

6. 1) а) $\sin 2x=0$ $2x=\pi n$, $n\in z$; $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in z$;

б) $\cos 3x=1$ $3x=2\pi n$, $n\in z$; $x=\frac{2\pi n}{3}$, $n\in z$;

2) а) $\cos^2 x-\cos x=0$, $\cos x(\cos x-1)=0$; $\cos x=0$, $\cos x=1$;

$x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$; $x_2=2\pi k$, $k\in z$;

б) $\sin^2 x+\sin x=0$, $\sin x(\sin x+1)=0$, $\sin x=0$, $\sin x=-1$,

$x_1=\pi n$, $n\in z$, $x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in z$;

3) а) $\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x=0$, $\cos(x+2x)=0$, $\cos 3x=0$,

$3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in z$;

б) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$, $\sin(2x+x)=0$, $\sin 3x=0$, $3x=\pi n$, $n\in z$;

$x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in z$;

4) а) $\sin^2 x=-\cos 2x$, $\sin^2 x=2\sin^2 x-1$, $\sin^2 x=1$, $\sin x=\pm 1$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$;

б) $\sin 2x=2\cos x$, $2\sin x\cdot\cos x=2\cos x$, $\cos x=0$, $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$.

7. а) $\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$, $2\sin x\cdot\cos x=2$, $\sin 2x=2$ — нет корней, т.к.

$-1\le\sin\alpha\le 1$ для любого α;

Б) $\frac{\cos 2x}{1-2\sin^2 x}=0$, $\frac{1-2\sin^2 x}{1-2\sin^2 x}=0$, **1=0 — НЕТ КОРНЕЙ.**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

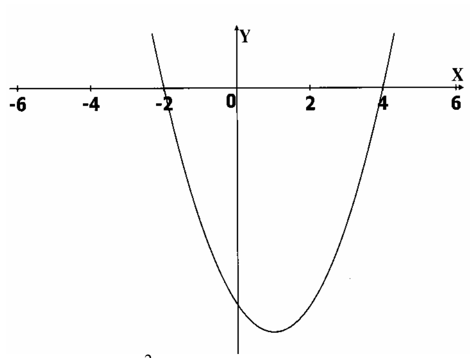
К-1. Вариант 1.

1. а) $x^2–14x+45=0$; $D=196–4\cdot 45=16$; $x_1=\frac{14+4}{2}=9$; $x_2=5$;

$x^2–14x+45=(x–9)(x–5)$; б) $3y^2+7y–6=0$; $D=49+4\cdot 3\cdot 6=121$; $y_1=\frac{-7+11}{6}=\frac{2}{3}$;

$y_2=–3$; $3y^2+7y–6=3(y+3)(y–\frac{2}{3})=(y+3)(3y–2)$.

2.



$y=x^2–2x–8=x^2–2x+1–9=(x–1)^2–9$;

а) $y(–1,5)=–2,75$; б) $(x–1)^2–9=3$; $(x–1)^2=12$; $x–1=\pm 2\sqrt{3}$; $x=1\pm 2\sqrt{3}$;

в) $(x–1)^2–9=0$; $(x–1)^2=9$; $x–1=3$; $x_1=4$; $x–1=–3$; $x_2=–2$;

$y>0$ при $x\in(–\infty;–2)\cup(4;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(–2;4)$;

г) функция возрастает при $x\in[1;+\infty)$.

3. $\frac{3p^2+p-2}{4-9p^2}=\frac{3\left(p-\frac{2}{3}\right)(p+1)}{(2-3p)(2+3p)}=-\frac{(3p-2)(p+1)}{(3p-2)(2+3p)}=-\frac{p+1}{3p+2}$;

$3p^2+p–2=0$; $D=1+4\cdot 3\cdot 2=25$; $p_1=\frac{-1+5}{6}=\frac{2}{3}$; $p_2=–1$.

4. $x^2–6x+11=y(x)$; $m=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2}=3$, $n=y(3)=3^2–6\cdot 3+11=2$.

5. $\frac{1}{3}x^2=6x–15$, $\frac{1}{3}x^2–6x+15=0$, $x^2–18x+45=0$; $D=324–4\cdot 45=144$;

$x_1=\frac{18+12}{2}=15$; $x_2=3$; $y_1=\frac{1}{3}\cdot 15^2=75$; $y_2=\frac{1}{3}\cdot 3^2=3$.

Ответ: пересекаются в 2-х точках (15; 75) и (3; 3).

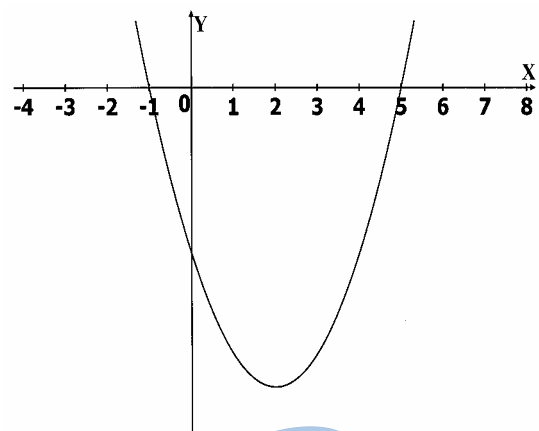
Вариант 2.

1. а) $x^2-10x+21=0$; $D=100-4\cdot 21=16$; $x_1=\frac{10+4}{2}=7$; $x_2=3$;

$x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$; б) $5y^2+9y-2=0$; $D=81+4\cdot 5\cdot 2=121$; $y_1=\frac{-9+11}{10}=\frac{1}{5}$;

$y_2=-2$; $5y^2+9y-2=5(y-\frac{1}{5})(y+2)=(5y-1)(y+2)$.

2.



$y=x^2-4x-5=x^2-4x+4-9=(x-2)^2-9$;

а) $y(0,5)=-6,75$; б) $(x-2)^2-9=3$; $(x-2)^2=12$; $x-2=\pm 2\sqrt{3}$; $x=2\pm 2\sqrt{3}$;

в) $(x-2)^2-9=0$; $x-2=3$, $x_1=5$; $x-2=-3$, $x_2=-1$;

$y>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(-1;5)$;

г) функция убывает при $x\in(-\infty;2]$.

3. $\frac{4c^2+7c-2}{1-16c^2}=\frac{4\left(c-\frac{1}{4}\right)(c+2)}{(1-4c)(1+4c)}=-\frac{(4c-1)(c+2)}{(4c-1)(4c+1)}=-\frac{c+2}{4c+1}$;

$4c^2+7c-2=0$; $D=49+4\cdot 4\cdot 2=81$; $c_1=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4}$, $c_2=-2$.

4. $y(x)=-x^2+4x+3$; $m=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$, $n=f(2)=-4+4\cdot 2+3=7$.

5. $\frac{1}{2}x^2=12-x$, $\frac{1}{2}x^2-12+x=0$, $x^2+2x-24=0$; $D=4+4\cdot 24=100$;

$x_1=\frac{-2+10}{2}=4$; $x_2=-6$; $y_1=\frac{1}{2}\cdot 4^2=8$; $y_2=\frac{1}{2}\cdot 36=18$.

Ответ: пересекаются в 2-х точках (4; 8) и (–6; 18).

Вариант 3.

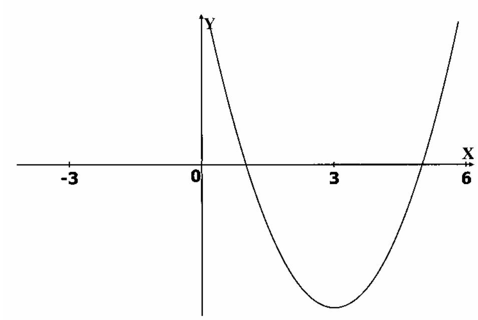
1. а) $x^2-12x+35=0$; $D=144-4\cdot 35=4$; $x_1=\frac{12+2}{2}=7$, $x_2=5$;

$x^2-12x+35=(x-5)(x-7)$;

б) $7y^2+19y-6=0$; $D=361+4\cdot 7\cdot 6=529$; $y_1=\frac{-19+23}{14}=\frac{2}{7}$, $y_2=-3$;

$7y^2+19y-6=7(y-\frac{2}{7})(y+3)=(7y-2)(y+3)$.

2.



$y=x^2-6x+5=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-4$;

а) $y(0,5)=2,25$; б) $(x-3)^2-4=-1$; $(x-3)^2=3$; $x=3\pm\sqrt{3}$; в) $(x-3)^2-4=0$; $x-3=2$, $x_1=5$; $x-3=-2$, $x_2=1$; $y>0$ при $x\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(1;5)$;

г) функция возрастает при $x\in[3;+\infty)$.

3. $\frac{5a^2+19a-4}{1-25a^2}=\frac{5\left(a-\frac{1}{5}\right)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)}=-\frac{(5a-1)(a+4)}{(5a-1)(5a+1)}=-\frac{a+4}{5a+1}$;

$5a^2+19a-4=0$; $D=361+4\cdot 5\cdot 4=441$; $a_1=\frac{-19+21}{10}=\frac{1}{5}$, $a_2=-4$.

4. $y(x)=x^2-8x+7$; $m=-\frac{b}{2a}=\frac{8}{2}=4$, $n=f(4)=16-32+7=-9$.

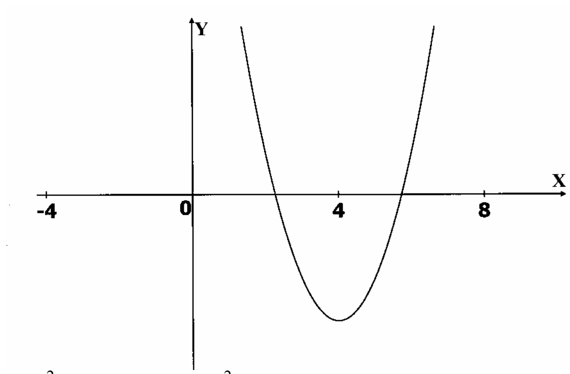
5. $\frac{1}{4}x^2=5x-16$, $\frac{1}{4}x^2-5x+16=0$, $x^2-20x+64=0$; $D=400-4\cdot 64=144$;

$x_1 = \frac{20+12}{2} = 16$; $x_2=4$; $y_1 = \frac{1}{4} \cdot 16^2 = 64$; $y_2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$.
Ответ: пересекаются в 2-х точках (16; 64) и (4; 4).

Вариант 4.

1. а) $x^2-18x+45=0$; $D=324-4\cdot45=144$; $x_1 = \frac{18+12}{2} = 15$, $x_2=3$;
$x^2-18x+45=(x-15)(x-3)$; б) $9x^2+25x-6=0$; $D=625+4\cdot9\cdot6=841$;
$x_1 = \frac{-25+29}{18} = \frac{2}{9}$, $x_2=-3$; $9x^2+25x-6=9(x-\frac{2}{9})(x+3)=(9x-2)(x+3)$.

2.



$y=x^2-8x+13=x^2-8x+16-3=(x-4)^2-3$;
а) $y(1{,}5)=3{,}25$; б) $(x-4)^2-3=2$; $(x-4)^2=5$; $x=4\pm\sqrt{5}$; в) $(x-4)^2-3=0$;
$(x-4)^2=3$; $x-4=\pm\sqrt{3}$; $x_{2,1}=4\pm\sqrt{3}$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; г) функция возрастает при $x \in [4; +\infty)$.

3. $\frac{7b^2+11b-6}{9-49b^2} = \frac{7\left(b-\frac{3}{7}\right)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)} = -\frac{(7b-3)(b+2)}{(7b-3)(3+7b)} = -\frac{b+2}{7b+3}$;

$7b^2+11b-6=0$; $D=121+4\cdot7\cdot6=289$; $b_1 = \frac{-11+17}{14} = \frac{3}{7}$, $b_2=-2$.

4. $y(x)=-x^2+6x-4$; $m=-\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$, $n=f(3)=-9+18-4=5$.

5. $\frac{1}{5}x^2=20-3x$, $\frac{1}{5}x^2+3x-20=0$, $x^2+15x-100=0$; $D=225+4\cdot100=625$;

$x_1 = \frac{-15+25}{2} = 5$; $x_2=-20$; $y_1 = \frac{1}{5} \cdot 5^2 = 5$; $y_2 = \frac{1}{5} \cdot 20^2 = 80$.
Ответ: пересекаются в 2-х точках (5; 5) и (–20; 80).

К-1А. Вариант 1.

1. а) $2\cdot 2^{-3}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot 4=4^2\cdot 4=4^3=64$;

в) $\frac{(3^{-2})^3\cdot 27^2}{3}=\frac{3^{-6}\cdot(3^3)^2}{3}=\frac{3^{-6}\cdot 3^6}{3}=\frac{1}{3}$.

2. а) $5\sqrt[4]{16}-0{,}2\sqrt[3]{-0{,}027}+\sqrt[5]{1}=5\cdot 2-0{,}2\cdot(-0{,}3)+1=10+0{,}06+1=11{,}06$;

б) $\sqrt[5]{32\cdot 0{,}00001}=2\cdot 0{,}1=0{,}2$; в) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\frac{243}{3}}=\sqrt[4]{81}=3$;

г) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-12}=5^{-\frac{12}{3}}=5^{-4}=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}$.

3. а) $x^4=80$; $x_{1,2}=\pm 2\sqrt[4]{5}$, по всей видимости в задание опечатка и ее следует читать как: $x^4=81$; $x_{1,2}=\pm 3$; б) $x^6=-18$; нет корней, т.к. $E(x^6)=[0;+\infty)$; в) $2x^3-128=0$; $x^3=64$; $x=4$; г) $x^5+32=0$; $x^5=-32$; $x=-2$.

4. $2\sqrt[3]{\sqrt{a}}-\sqrt[6]{ab}:\sqrt[6]{b}=2\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a}$.

5. $\sqrt[4]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{3\cdot\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\sqrt[4]{9-5}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

Вариант 2.

1. а) $5\cdot 5^{-2}=5^{-1}=\frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 4=2^3\cdot 2^2=2^5=32$;

в) $\frac{(2^{-2})^4\cdot 16^2}{2^3}=\frac{2^{-8}\cdot\left(2^4\right)^2}{2^3}=\frac{2^{-8}\cdot 2^8}{2^3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$.

2. а) $3\sqrt[3]{-27}+0{,}1\sqrt[4]{81}-\sqrt{1}=3\cdot(-3)+0{,}1\cdot 3-1=-9+0{,}3-1=-9{,}7$;

б) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}=2\cdot 0{,}1=0{,}2$; в) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\frac{243}{4}}=\sqrt[4]{81}=3$;

г) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-8}=5^{-\frac{8}{2}}=5^{-4}=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}$.

3. $x^4 = 20$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{20}$; б) $x^8 = -36$; нет корней, т.к. $E(x^8) = [0;+\infty)$;

в) $64x^3 = 1$; $x^3 = \dfrac{1}{64}$; $x = \dfrac{1}{4}$; г) $x^3 + 8 = 0$; $x^3 = -8$; $x = -2$.

4. $\sqrt[4]{ab} : \sqrt[4]{b} + 2\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a} = 3\sqrt[4]{a}$.

5. $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Вариант 3.

1. а) $5 \cdot 5^{-5} = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$; б) $3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$;

в) $\dfrac{4^{-3} \cdot 2^6}{8} = \dfrac{(2^2)^{-3} \cdot 2^6}{2^3} = \dfrac{2^{-6} \cdot 2^6}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

2. а) $0{,}2\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[6]{1} = 0{,}2 \cdot (-2) + 3 - 1 = -0{,}4 + 2 = 1{,}6$;

б) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 64} = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4$; в) $\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$;

г) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{-12} = 3^{-\frac{12}{4}} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$.

3. а) $x^6 = 64$, $x_{1,2} = \pm 2$; б) $x^4 = -20$; нет корней, т.к. $E(x^4) = [0;+\infty)$;

в) $8x^3 = 1$, $x^3 = \dfrac{1}{8}$, $x = 0{,}5$; г) $27 + x^3 = 0$; $x^3 = -27$ $x = -3$.

4. $3\sqrt[4]{\sqrt{a}} + \sqrt[8]{ab} : \sqrt[8]{b} = 3\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{a} = 4\sqrt[8]{a}$.

5. $\sqrt[5]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[5]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[5]{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)} = \sqrt[5]{4-5} = \sqrt[5]{-1} = -1$.

Вариант 4.

1. а) $3^{-5} \cdot 3 = 3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$; б) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3 = 625$;

в) $\dfrac{(7^{-3})^2 \cdot 49^3}{7} = \dfrac{7^{-6} \cdot (7^2)^3}{7} = \dfrac{7^{-6} \cdot 7^6}{7} = \dfrac{1}{7}$.

2. а) $\dfrac{1}{8}\sqrt[6]{64} - 2\sqrt[3]{-125} + \sqrt{1} = \dfrac{1}{8} \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 = \dfrac{1}{4} + 11 = 11{,}25$;

б) $\sqrt{121 \cdot 0{,}01} = 11 \cdot 0{,}1 = 1{,}1$; в) $\dfrac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$;

г) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-10} = 3^{-\frac{10}{5}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

3. а) $x^2=13$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{13}$; б) $32x^5=1$; $x^5=\frac{1}{32}$, $x=0{,}5$; в) $x^6=-16$;

нет корней, т.к. $E(x^6)=[0;+\infty)$; г) $-8-x^3=0$; $x^3=-8$, $x=-2$.

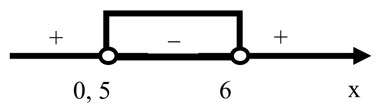
4. $\sqrt[10]{bc} : \sqrt[10]{c} + \sqrt[5]{\sqrt{b}} = \sqrt[10]{b} + \sqrt[10]{b} = 2\sqrt[10]{b}$.

5. $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{17}} = \sqrt[3]{\left(9-\sqrt{17}\right)\left(9+\sqrt{17}\right)} = \sqrt[3]{81-17} = \sqrt[3]{64} = 4$.

К-2. Вариант 1.

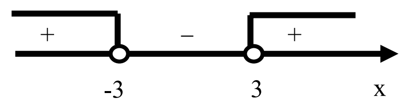
1. а) $2x^2-13x+6>0$; $2x^2-13x+6=0$; $D=169-4\cdot2\cdot6=121$;

$x_1=\frac{13+11}{4}=6$; $x_2=\frac{1}{2}$.



Ответ: $(0{,}5;\ 6)$.

б) $x^2-9>0$; $(x-3)(x+3)>0$.

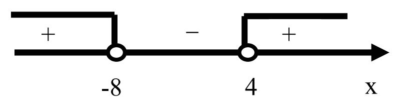


Ответ: $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

в) $3x^2-6x+32>0$; $3x^2-6x+32=0$; $D=36-4\cdot3\cdot32<0$;

т.к. $a=3>0$, то x–любое. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

2. а) $(x+8)(x-4)>0$.



Ответ: $(-\infty;-8)\cup(4;+\infty)$.

б) $\frac{x-5}{x+7}<0$.

Ответ: $(-7;\ 5)$.

3. а) $x^3-81x=0$; $x(x^2-81)=0$; $x(x-9)(x+9)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm9$;

б) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{3x-1}{4}=2$; $2x^2-2-3x+1-8=0$; $2x^2-3x-9=0$;

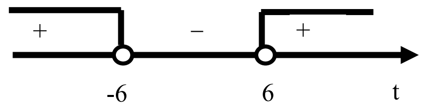
$D=9+4\cdot2\cdot9=81$; $x_1=\frac{3+9}{4}=3$, $x_2=-1{,}5$.

4. $x^4-19x^2+48=0$; $x^2=y\ge0$, тогда, $y^2-19y+48=0$; $D=361-4\cdot48=169$;

$y_1=\frac{19+13}{2}=16$, $y_2=3$; $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm4$; $x^2=3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$.

5. $3x^2+tx+3=0$; $D=t^2-4\cdot3\cdot3=t^2-36$.

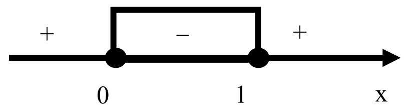
Т.к. уравнение имеет 2 корня, то $D > 0$; $t^2-36 > 0$, $(t-6)(t+6) > 0$.



Ответ: $(-\infty;-6) \cup (6;+\infty)$.

6. $y=\sqrt{x-x^2}$;

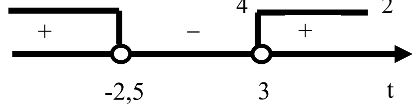
Т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$, то $x-x^2 \geq 0$, $x^2-x \leq 0$, $x(x-1) \leq 0$.



Ответ: $[0; 1]$.

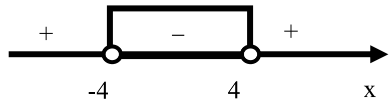
Вариант 2.

1. а) $2x^2-x-15>0$; $2x^2-x-15=0$; $D=1+4\cdot2\cdot15=121$; $x_1=\frac{1+11}{4}=3$, $x_2=-\frac{5}{2}$.



Ответ: $(-\infty;-2{,}5)\cup(3;+\infty)$.

б) $x^2-16<0$; $(x-4)(x+4)<0$.

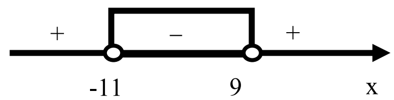


Ответ: $(-4;\ 4)$.

в) $x^2+12x+80<0$; $D=144-4\cdot80<0$; т.к. $a=1>0$, то нет решений.

Ответ: нет решений.

2. а) $(x+11)(x-9)<0$.



Ответ: $(-11;\ 9)$.

б) $\frac{x+3}{x-8}>0$.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(8;+\infty)$.

3. а) $x^3-25x=0$; $x(x^2-25)=0$; $x(x-5)(x+5)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm5$;

б) $\frac{x^2+6}{5}-\frac{8-x}{10}=1$; $2x^2+12-8+x-10=0$; $2x^2+x-6=0$;

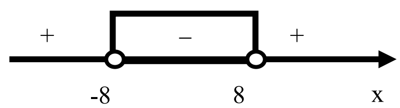
$D=1+4\cdot2\cdot6=49$; $x_1=\frac{-1+4}{4}=1{,}5$; $x_2=-2$.

4. $x^4-4x^2-45=0$; $x^2=y\ge0$, тогда, $y^2-4y-45=0$; $D=16+4\cdot45=196$;

$y_1=\frac{4+14}{2}=9$, $y_2<0$; $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm3$.

5. $2x^2+tx+8=0$; $D=t^2-4\cdot2\cdot8=t^2-64$.

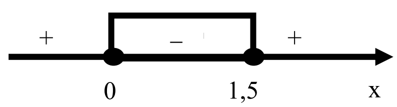
Т.к. уравнение не имеет корней, то $D<0$; $t^2-64<0$, $(t-8)(t+8)<0$.



Ответ: $(-8;\ 8)$.

6. $y=\sqrt{3x-2x^2}$; Т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$, то

$3x-2x^2\ge0$; $2x^2-3x\le0$; $x^2-1{,}5x\le0$; $x(x-1{,}5)\le0$.



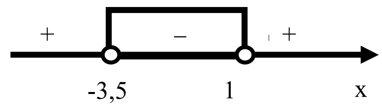
Ответ: $[0;\ 1{,}5]$.

Вариант 3.

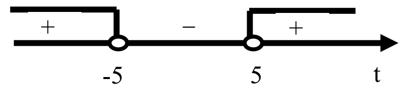
1.

а) $2x^2+5x-7<0$ $\quad 2x^2+5x-7=0$; $D=25+4\cdot 2\cdot 7=81$; $x_1=\dfrac{-5+9}{4}=1$, $\quad x_2=-\dfrac{7}{2}$.

Ответ: $(-3{,}5;\ 1)$.



б) $x^2-25>0$; $\quad (x-5)(x+5)>0$.



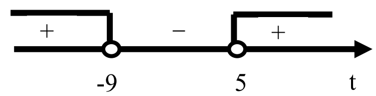
Ответ: $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

в) $5x^2-4x+21>0$; $\quad 5x^2-4x+21=0$; $D=16-4\cdot 5\cdot 21<0$;

т.к. $a=5>0$, то x–любое.

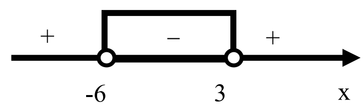
Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

2. а) $(x+9)(x-5)>0$.



Ответ: $(-\infty;-9)\cup(5;+\infty)$.

б) $\dfrac{x-3}{x+6}<0$.



Ответ: $(-6;\ 3)$.

3. а) $x^3-36x=0$; $x(x^2-36)=0$; $x(x-6)(x+6)=0$; $x_1=0$, $\quad x_{2,3}=\pm 6$;

б) $\dfrac{x^2-4}{3}-\dfrac{5x-2}{6}=1$; $2x^2-8-5x+2-6=0$; $\quad 2x^2-5x-12=0$;

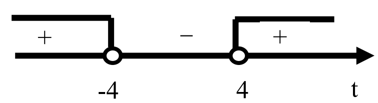
$D=25+4\cdot 2\cdot 12=121$; $x_1=\dfrac{5+11}{4}=4$, $\quad x_2=-1{,}5$.

4. $x^4-13x^2+36=0$; $\quad x^2=y\ge 0$, $\quad$ тогда, $y^2-13y+36=0$; $D=169-4\cdot 36=25$;

$y_1=\dfrac{13+5}{2}=9$, $\quad y_2=4$; $x^2=9$, $\quad x_{1,2}=\pm 3$; $\quad x^2=4$, $\quad x_{3,4}=\pm 2$.

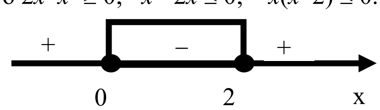
5. $2x^2+tx+2=0$; $D=t^2-2\cdot 4\cdot 2=t^2-16$.

Т.к. уравнение имеет 2 корня, то $D>0$; $t^2-16>0$; $(t-4)(t+4)>0$.



Ответ: $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

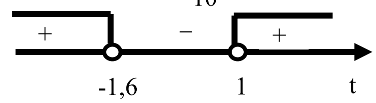
6. $y=\sqrt{2x-x^2}$; Т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$, то $2x-x^2\ge 0$; $\quad x^2-2x\le 0$; $\quad x(x-2)\le 0$.



Ответ: $[0;\ 2]$.

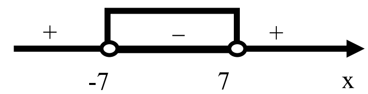
Вариант 4.

1. а) $5x^2+3x-8>0$; $5x^2+3x-8=0$; $D=9+4\cdot5\cdot8=169$; $x_1=\dfrac{-3+13}{10}=1$, $x_2=-1{,}6$.



Ответ: $(-\infty;-1{,}6)\cup(1;+\infty)$.

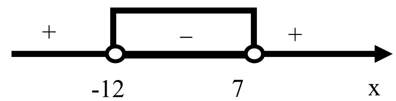
б) $x^2-49<0$; $(x-7)(x+7)<0$.



Ответ: $(-7;\ 7)$.

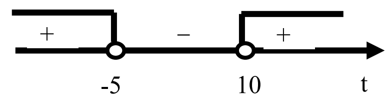
в) $4x^2-2x+13<0$; $4x^2-2x+13=0$; $D=4-4\cdot13\cdot4<0$;
т.к. $a=4>0$, то нет решений.
Ответ: нет решений.

2. а) $(x+12)(x-7)<0$.



Ответ: $(-12;\ 7)$.

б) $\dfrac{x+5}{x-10}>0$



Ответ: $(-\infty;-5)\cup(10;+\infty)$.

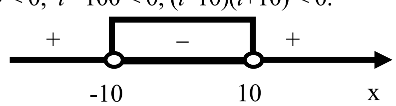
3. а) $x^3-49x=0$; $x(x^2-49)=0$; $x(x-7)(x+7)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm7$;

б) $\dfrac{x^2+3}{4}-\dfrac{17-3x}{8}=2$; $2x^2+6-17+3x-16=0$; $2x^2+3x-27=0$;

$D=9+4\cdot2\cdot27=225$; $x_1=\dfrac{-3+15}{4}=3$, $x_2=-\dfrac{9}{2}=-4{,}5$.

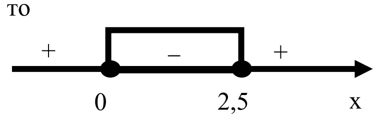
4. $x^4-17x^2+16=0$; $x^2=y\geq0$, тогда, $y^2-17y+16=0$; $D=289-4\cdot16=225$;
$y_1=\dfrac{17+15}{2}=16$, $y_2=1$; $x^2=14$, $x_{1,2}=\pm4$; $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm1$.

5. $25x^2+tx+1=0$; $D=t^2-4\cdot25=t^2-100$.
Т.к. уравнение не имеет корней, то $D<0$; $t^2-100<0$; $(t-10)(t+10)<0$.



Ответ: $(-10;\ 10)$.

6. $y=\sqrt{5x-2x^2}$. Т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$, то
$5x-2x^2\geq0$; $2x^2-5x\leq0$;
$x^2-2{,}5x\leq0$; $x(x-2{,}5)\leq0$.
Ответ: $[0;\ 2{,}5]$.



К-2А. Вариант 1.

1. а) $5\cdot 8^{1/3}=5\cdot 2=10$; б) $16^{-1/2}=\dfrac{1}{16^{1/2}}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$.

2. а) $b^{1/3}\cdot b^{-1/6}=b^{1/3-1/6}=b^{1/6}$; б) $\dfrac{x^{3/4}\cdot x^{1/2}}{x^{1/4}}=x^{3/4+1/2-1/4}=x$;

в) $(y^{-3/4})^4\cdot y^{5/2}=y^{-3}\cdot y^{5/2}=y^{-3+5/2}=y^{-0,5}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

3. $a^{7/2}\sqrt{a}=a^{7/2}\cdot a^{1/2}=a^4$.

4. а) $\dfrac{3a^{1/2}-a}{3-a^{1/2}}=\dfrac{a^{1/2}(3-a^{1/2})}{3-a^{1/2}}=\sqrt{a}$;

б) $\dfrac{b^{1/2}-5}{b-25}=\dfrac{b^{1/2}-5}{(\sqrt{b}-5)(\sqrt{b}+5)}=\dfrac{1}{\sqrt{b}+5}$.

5. $\left(\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\dfrac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{a+b}=$

$=\left(\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\dfrac{2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}\right)\cdot\dfrac{(a^{0,5}-b^{0,5})^2}{a+b}=$

$=\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b+2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}\cdot\dfrac{(a^{0,5}-b^{0,5})^2}{a+b}=\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$.

Вариант 2.

1. а) $2\cdot 36^{1/2}=2\cdot 6=12$; б) $27^{-1/3}=\dfrac{1}{27^{1/3}}=\dfrac{1}{3}$.

2. а) $a^{-1/2}\cdot a^{3/4}=a^{-1/2+3/4}=a^{1/4}$; б) $\dfrac{c^{2/3}\cdot c^{1/2}}{c^{1/6}}=c^{2/3+1/2-1/6}=c$;

в) $(x^{1/3})^{-3}\cdot x^{2/3}=x^{-1}\cdot x^{2/3}=x^{-1/3}=\dfrac{1}{x^{1/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3. $y^{5/3}\cdot\sqrt[3]{y}=y^{5/3}\cdot y^{1/3}=y^2$.

4. а) $\dfrac{b+7b^{1/2}}{7+b^{1/2}}=\dfrac{b^{1/2}(b^{1/2}+7)}{b^{1/2}+7}=b^{1/2}$;

б) $\dfrac{3+a^{1/2}}{a-9}=\dfrac{a^{1/2}+3}{(a^{1/2}-3)(a^{1/2}+3)}=\dfrac{1}{a^{1/2}-3}$.

5. $\left(\dfrac{a^{1/2}-b^{1/2}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right)\cdot\dfrac{a+2a^{1/2}b^{1/2}+b}{4b^{1/2}}=$

$$=\left(\frac{a^{1/2}-b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})(a^{1/2}+b^{1/2})}-\frac{1}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right)\cdot\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})^2}{4b^{1/2}}=$$

$$=\frac{a^{1/2}-b^{1/2}-a^{1/2}-b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})(a^{1/2}+b^{1/2})}\cdot\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})^2}{4b^{1/2}}=$$

$$=\frac{-2b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})}\cdot\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})}{4b^{1/2}}=-\frac{a^{1/2}+b^{1/2}}{2(a^{1/2}-b^{1/2})}=\frac{b^{1/2}+a^{1/2}}{2(b^{1/2}-a^{1/2})}.$$

Вариант 3.

1. а) $2\cdot 27^{1/3}=2\cdot 3=6$; б) $36^{-1/2}=\frac{1}{36^{1/2}}=\frac{1}{6}$.

2. а) $b^{-1/3}\cdot b^{1/2}=b^{-1/3+1/2}=b^{1/6}$; б) $\frac{a^2\cdot a^{3/4}}{a^{1/4}}=a^{2+3/4-1/4}=a^{2,5}$;

в) $(y^2)^{-1/2}\cdot y^{3/2}=y^{-1}\cdot y^{3/2}=y^{-1+3/2}=y^{0,5}$.

3. $c^{7/4}\cdot\sqrt[4]{c}=c^{7/4}\cdot c^{1/4}=c^2$.

4. а) $\frac{5x^{1/2}+x}{5+x^{1/2}}=\frac{x^{1/2}(5+x^{1/2})}{5+x^{1/2}}=x^{1/2}$;

б) $\frac{a-4}{2+a^{1/2}}=\frac{(a^{1/2}-2)(a^{1/2}+2)}{a^{1/2}+2}=a^{1/2}-2$.

5. $\frac{a+b}{a+2a^{0,5}b^{0,5}+b}:\left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}\right)=$

$$=\frac{a+b}{(a^{0,5}+b^{0,5})^2}:\left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{(a^{0,5}+b^{0,5})^2}:\frac{a+b+2a^{0,5}b^{0,5}-2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}=$$

$$=\frac{a+b}{(a^{0,5}+b^{0,5})^2}\cdot\frac{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}{a+b}=\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}.$$

Вариант 4.

1. а) $3\cdot 8^{1/3}=3\cdot 2=6$; б) $64^{-1/2}=\frac{1}{64^{1/2}}=\frac{1}{8}$.

2. а) $a^{2/3}\cdot a^{-1/2}=a^{2/3-1/2}=a^{1/6}$; б) $\frac{b^{1/2}\cdot b^{-1}}{b^{3/2}}=b^{1/2-1-3/2}=b^{-2}=\frac{1}{b^2}$;

в) $(c^{3/2})^2\cdot c^{-8/3}=c^3\cdot c^{-8/3}=c^{3-8/3}=c^{1/3}$.

3. $x^{5/2}\cdot\sqrt{x}=x^{2,5}\cdot x^{0,5}=x^3$.

4. а) $\dfrac{a^{1/2}-2}{a-2a^{1/2}}=\dfrac{a^{1/2}-2}{a^{1/2}(a^{1/2}-2)}=\dfrac{1}{a^{1/2}}$;

б) $\dfrac{1-a}{1+a^{1/2}}=\dfrac{(1-a^{1/2})(1+a^{1/2})}{1+a^{1/2}}=1-a^{1/2}$.

5. $\left(\dfrac{1}{a^{0,5}+b^{0,5}}-\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{2b^{0,5}}=$

$=\left(\dfrac{1}{a^{0,5}+b^{0,5}}-\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}\right)\cdot\dfrac{(a^{0,5}-b^{0,5})^2}{2b^{0,5}}=$

$=\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}-a^{0,5}-b^{0,5}}{(a^{0,5}+b^{0,5})(a^{0,5}-b^{0,5})}\cdot\dfrac{(a^{0,5}-b^{0,5})^2}{2b^{0,5}}=$

$=-\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}=\dfrac{b^{0,5}-a^{0,5}}{b^{0,5}+a^{0,5}}$.

К-3. Вариант 1.

1. $\begin{cases}2x+y=7\\x^2-y=1\end{cases}\left|\begin{matrix}y=7-2x\\y=x^2-1\end{matrix}\right.$; $7–2x=x^2–1$; $x^2+2x–8=0$;

$D=4+4\cdot8=36$; $x_1=\dfrac{-2+6}{2}=2$; $x_2=–4$; $y_1=2^2–1=3$; $y_2=(–4)^2–1=15$.

Ответ: (2; 3), (–4; 15).

2. Пусть x м и y м–стороны прямоугольника. Тогда $2(x+y)$ м–его периметр или 28 м, xy м^2–его площадь или 40 м^2.

Получаем систему: $\begin{cases}2(x+y)=28\\xy=40\end{cases}\left|\begin{matrix}x+y=14\\xy=40\end{matrix}\right|\begin{matrix}y=14-x\\xy=40\end{matrix}$;

$x(14–x)=40$; $–x^2+14x=40$; $x^2–14x+40=0$; $D=196–4\cdot40=36$;

$x_1=\dfrac{14+6}{2}=10$, $x_2=4$; $y_1=14–10=4$, $y_2=14–4=10$;

Итак, стороны прямоугольника равны 4 м и 10 м.

3. $y=x^2+4$, $x+y=6$; $x^2+4=6–x$, $x^2+x–2=0$; $D=1+4\cdot2=9$;

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$; $x_2=–2$; $y_1=6–1=5$; $y_2=6–(–2)=8$.

Ответ: (1; 5), (–2; 8).

4. $\begin{cases}2y-x=7\\x^2-xy-y^2=29\end{cases}\left|\begin{matrix}x=2y-7\\x^2-xy-y^2=29\end{matrix}\right.$; $(2y–7)^2–y\cdot(2y–7)–y^2=29$;

$4y^2–28y+49–2y^2+7y–y^2–29=0$; $y^2–21y+20=0$;

$D=441–4\cdot20=361$; $y_1=\dfrac{21+19}{2}=20$; $y_2=1$;

x_1=2·20–7=33; x_2=2·1–7=–5. Ответ: (33; 20), (–5; 1).

Вариант 2.

1. $\begin{cases} x-3y=2 \\ xy+y=6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=2+3y \\ xy+y=6 \end{array} \right.$; $y(2+3y)+y=6$; $3y^2+3y-6=0$; $y^2+y-2=0$;

$D=1+4\cdot2=9$; $y_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$; $x_1=2+3=5$; $y_2=-2$; $x_2=2-3\cdot2=-4$.

Ответ: (5; 1), (–4;–2).

2. Пусть x см–меньшая сторона прямоугольника. Тогда (x+2) см–другая его сторона, $x(x+2)$ см^2–его площадь или 120 см^2. Получаем уравнение: $x(x+2)=120$; $x^2+2x-120=0$; $D=4+4\cdot120=484$; $x_1=\dfrac{-2+22}{2}=10$; $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. Итак, 10 см — меньшая сторона, 10+2=12 (см) — другая сторона.

Ответ: 10 см и 12 см.

3. $x^2+y^2=10$, $x+2y=5$, $x=5-2y$; $10-y^2=(5-2y)^2$; $10-y^2=25-20y+4y^2$; $5y^2-20y+15=0$; $y^2-4y+3=0$; $D=16-4\cdot3=4$; $y_1=\dfrac{4+2}{2}=3$; $y_2=1$; $x_1=5-2\cdot3=-1$; $x_2=5-2=3$. Ответ: (–1; 3), (3; 1).

4. $\begin{cases} y-3x=1 \\ x^2-2xy+y^2=9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y=3x+1 \\ (x-y)^2=9 \end{array} \right.$.

Система распадается на две линейные:

а) $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=x-3 \end{cases}$; $3x+1=x-3$; $2x=-4$; $x=-2$; $y=-2-3=-5$;

б) $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=x+3 \end{cases}$; $3x+1=x+3$; $2x=2$; $x=1$; $y=1+3=4$.

Ответ: (–2;–5), (1; 4).

Вариант 3.

1. $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2-y=10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=2+5y \\ x^2-y=10 \end{array} \right.$; $(2+5y)^2-y=10$;

$25y^2+20y+4-y-10=0$; $25y^2+19y-6=0$; $D=361+4\cdot25\cdot6=961$;

$y_1=\dfrac{-19+31}{50}=\dfrac{6}{25}$; $y_2=-1$; $x_1=2+5\cdot\dfrac{6}{25}=\dfrac{16}{5}$; $x_2=2-5=-3$.

Ответ: $\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{6}{25}\right)$, (–3;–1).

2. Пусть x см и y см–стороны прямоугольника. Тогда $2(x+y)$ см — его периметр или 26 см, xy см^2 — его площадь или 42 см^2.

Получаем систему: $\begin{cases} 2(x+y)=26 \\ xy=42 \end{cases} \left| \begin{matrix} y=13-x \\ xy=42 \end{matrix} \right.$; $x(13–x)=42$; $x^2–13x+42=0$;

$D=169–4\cdot42=1$; $x_1=\dfrac{13+1}{2}=7$; $x_2=6$; $y_1=13–7=6$; $y_2=13–6=7$;

Итак, стороны прямоугольника равны 6 см и 7 см.

3. $y=x^2–8$, $x+y=4$; $x^2–8=4–x$; $x^2+x–12=0$; $D=1+4\cdot12=49$;

$x_1=\dfrac{-1+7}{2}=3$; $x_2=–4$; $y_1=4–3=1$; $y_2=4–(–4)=8$.

Ответ: (3; 1), (–4; 8).

4. $\begin{cases} x-5y=9 \\ x^2+3xy-y^2=3 \end{cases} \left| \begin{matrix} x=9+5y \\ x^2+3xy-y^2=3 \end{matrix} \right.$; $(9+5y)^2+3y\cdot(9+5y)–y^2=3$;

$81+90y+25y^2+27y+15y^2–y^2–3=0$; $39y^2+117y+78=0$; $y^2+3y+2=0$;

$D=9–4\cdot2=1$; $y_1=\dfrac{-3+1}{2}=–1$; $y_2=–2$; $x_1=9–5=4$; $x_2=9–10=–1$.

Ответ: (4;–1), (–1;–2).

Вариант 4.

1. $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x-xy=8 \end{cases} \left| \begin{matrix} y=-3x-1 \\ x-xy=8 \end{matrix} \right.$; $x+x(3x+1)=8$; $3x^2+2x–8=0$; $D=4+4\cdot3\cdot8=100$;

$x_1=\dfrac{-2+10}{6}=\dfrac{4}{3}$; $x_2=–2$; $y_1=–3\cdot\dfrac{4}{3}–1=–5$; $y_2=–3\cdot(–2)–1=5$.

Ответ: $(\dfrac{4}{3};–5)$, (–2; 5).

2. Пусть x м — меньшая сторона прямоугольника. Тогда $(x+4)$ м — другая его сторона, $x(x+4)$ м^2 — его площадь или 45 м^2. Получаем уравнение: $x(x+4)=45$; $x^2+4x–45=0$; $D=16+4\cdot45=196$; $x_1=\dfrac{-4+14}{2}=5$, $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. Итак, 5 м — меньшая сторона, 5+4=9 (м) — другая сторона. Ответ: 5 м и 9 см.

3. $x^2+y^2=17$, $5x–3y=17$; $x^2=17–y^2$; $x=\dfrac{3y+17}{5}$; $17–y^2=\left(\dfrac{3y+17}{5}\right)^2$;

$\dfrac{9y^2+102y+289}{25}+y^2–17=0$; $9y^2+102y+289+25y^2–425=0$;

$34y^2+102y–136=0$; $y^2+3y–4=0$; $D=9+4\cdot4=25$

$y_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$; $y_2=–4$; $x_1=\dfrac{3+17}{5}=4$; $x_2=\dfrac{17-12}{5}=1$.

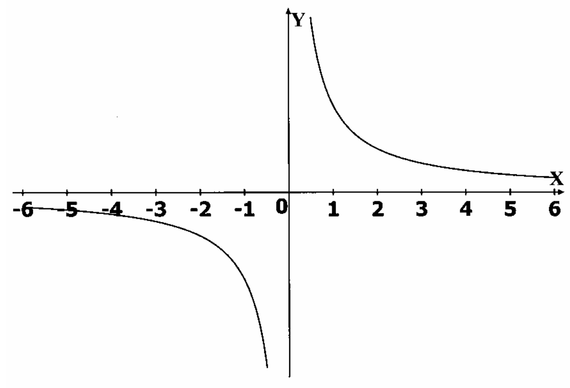
4. $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-xy-2y^2=1 \end{cases} \left| \begin{matrix} x=1-2y \\ x^2-xy-2y^2=1 \end{matrix} \right.$; $(1–2y)^2–y\cdot(1–2y)–2y^2=1$;

$1-49+4y^2-y+2y^2-2y^2-1=0$; $4y^2-5y=0$; $y(4y-5)=0$;

$y_1=0$; $y_2=\frac{5}{4}$; $x_1=1$; $x_2=1-2\cdot\frac{5}{4}=-1{,}5$.

К-3А. Вариант 1.

1.



$y=\frac{3}{x}$

а) $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$; б) $E(y)=D(y)$; в) нечетная;

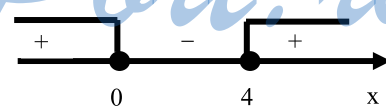
г) функция убывает на $D(y)$; $y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$.

2. а) $y=\frac{3x-1}{2x^2-9x+10}$; $2x^2-9x+10\neq 0$, т.к. знаменатель;

$D=81-4\cdot 2\cdot 10=1$; $x_1=\frac{9+1}{4}=2{,}5$; $x_2=2$.

Ответ: $x\neq 2$; $x\neq 2{,}5$.

б) $y=\sqrt{x^2-4x}$; $x^2-4x\geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$; $x(x-4)\geq 0$



Ответ: $(-\infty;\,0]\cup[4;+\infty)$.

3. $y=\frac{8}{x}$, $y=2x$; $\frac{8}{x}=2x$, $\frac{4}{x}=x$, $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=2\cdot(\pm 2)=\pm 4$.

4. а) $\sqrt{5-4x}=3{,}2$; $5-4x=10{,}24$; $4x=-5{,}24$; $x=-1{,}31$.

б) $\sqrt{4x^2-3x-1}=x+1$; $4x^2-3x-1=x^2+2x+1$; $3x^2-5x-2=0$;

$D=25+4\cdot 3\cdot 2=49$; $x_1=\frac{5+7}{6}=2$; $x_2=-\frac{1}{3}$;

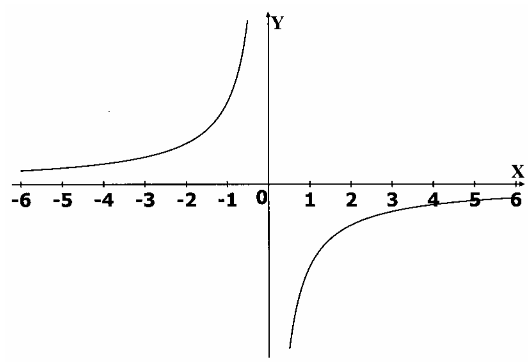
Проверка: $x_1=2$; $\sqrt{4\cdot 4-6-1}=2+1$ — верно;

$x_2=-\frac{1}{3}$; $\sqrt{4\cdot\frac{1}{9}+1}-1=-\frac{1}{3}+1$ — верно. Ответ: $-\frac{1}{3}$; 2.

Вариант 2.

1.

$y=-\frac{3}{x}$;



а), б) $D(y)=E(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$; в) нечетная;
г) функция возрастает на $D(y)$; $y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$.

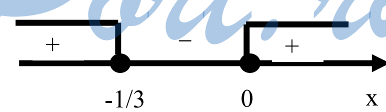
2. а) $y=\frac{6x+2}{3x^2+5x-2}$; $3x^2+5x-2\neq 0$, т.к. знаменатель

$D=25+4\cdot3\cdot2=49$; $x_1=\frac{-5+7}{6}=\frac{1}{3}$; $x_2=-2$.

Ответ: $x\neq-2$; $x\neq\frac{1}{3}$.

б) $y=\sqrt{4x+12x^2}$; $4x+12x^2\geq 0$, т.к. $D(\sqrt{\ })=[0;+\infty)$;

$3x^2+x\geq 0$; $x(x+\frac{1}{3})\geq 0$.



Ответ: $(-\infty;-\frac{1}{3}]\cup[0;+\infty)$.

3. $y=\frac{12}{x}$, $y=\frac{x}{3}$; $\frac{12}{x}=\frac{x}{3}$, $x^2=36$; $x_{1,2}=\pm6$ $y_{1,2}=\pm\frac{6}{3}=\pm2$.
Ответ: $(\pm6;\ \pm2)$.

4. а) $\sqrt{2x-3}=1{,}6$; $2x-3=2{,}56$; $2x=5{,}56$; $x=2{,}78$.
Ответ: 2,78.

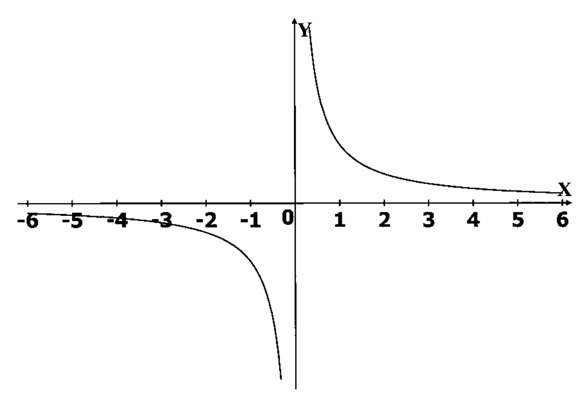
б) $\sqrt{3x^2+5x+8}=3+x$; $3x^2+5x+8=9+6x+x^2$; $2x^2-x-1=0$; $D=1+4\cdot2=9$;

$x_1=\frac{1+3}{4}=1$; $x_2=-0,5$. Проверка: $x_1=1$; $\sqrt{3+5+8}=3+1$ — верно;

$x_2=-0,5$; $\sqrt{3\cdot 0,25-5\cdot 0,5+8}=3-0,5$ — верно. Ответ: –0,5; 1.

Вариант 3.

1. $y=\frac{2}{x}$;



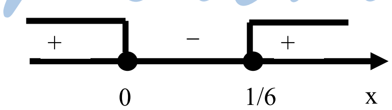
а) б) $D(y)=E(y)=(-\infty;\, 0) \cup (0;+\infty)$; в) нечетная;
г) функция убывает на $D(y)$; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

2. а) $y=\frac{4x-1}{5x^2-13x-6}$; $5x^2-13x-6 \neq 0$, т.к. знаменатель

$D=169+4\cdot 5\cdot 6=49$; $x_1=\frac{13+7}{10}=2$; $x_2=0,6$. Ответ: $x \neq 0,6$; $x \neq 2$.

б) $y=\sqrt{18x^2-3x}$; $18x^2-3x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

$6x^2-x \geq 0$; $x(x-\frac{1}{6}) \geq 0$.



Ответ: $(-\infty;\, 0] \cup [\frac{1}{6};+\infty)$.

3. $y=\frac{8}{x}$, $y=\frac{x}{2}$; $\frac{8}{x}=\frac{x}{2}$, $x^2=16$; $x_{1,2}=\pm 4$; $y_{1,2}=\pm\frac{4}{2}=\pm 2$.
Ответ: (±4; ±2).

4. а) $\sqrt{5-2x}=8,4$; $5-2x=70,56$; $2x=-65,56$; $x=-32,78$.
Ответ: –32,78.

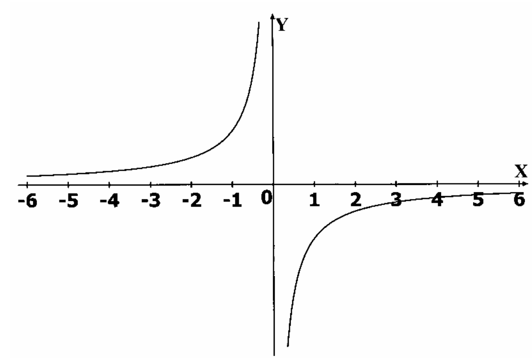
б) $\sqrt{2x^2-7x+7}=x-1$; $2x^2–7x+7=x^2–2x+1$; $x^2–5x+6=0$; $D=25–24=1$;

$x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$. Проверка: $x=3$; $\sqrt{18-21+7}=3–1$ — верно;

$x=2$; $\sqrt{8-14+7}=2–1$ — верно. Ответ: 3; 2.

Вариант 4.

1. $y=-\dfrac{2}{x}$.



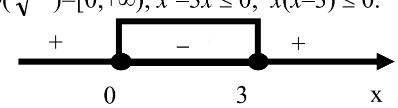
а) б) $D(y)=E(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$; в) нечетная;
г) функция возрастает на $D(y)$; $y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$.

2. а) $y=\dfrac{2x+4}{6x^2+11x-2}$; $6x^2+11x–2\neq 0$, т.к. знаменатель

$D=121+4\cdot6\cdot2=169$; $x_1=\dfrac{-11+13}{12}=\dfrac{1}{6}$; $x_2=–2$.

Ответ: $x\neq–2$; $x\neq\dfrac{1}{6}$.

б) $y=\sqrt{3x-x^2}$; $3x–x^2\geq 0$, т.к. $D(\sqrt{\ })=[0;+\infty)$; $x^2–3x\leq 0$; $x(x–3)\leq 0$.
Ответ: [0; 3].



3. $y=6x$, $y=\dfrac{54}{x}$; $6x=\dfrac{54}{x}$, $x^2=9$; $x_{1,2}=\pm3$; $y_{1,2}=6\cdot(\pm3)=\pm18$.
Ответ: $(\pm3;\ \pm18)$.

4. а) $\sqrt{3x+7}=2{,}5$; $3x+7=6{,}25$; $3x=–0{,}75$; $x=–0{,}25$. Ответ: –0,25.

б) $\sqrt{x^2-6x-8}=1+2x$; $x^2–6x–8=1+4x+4x^2$; $3x^2+10x+9=0$; $D=100–4\cdot3\cdot9<0$.
Ответ: нет корней.

К-4. Вариант 1.

1. a_1=–15, d=3; $a_{23}=a_1+22d$=–15+22·3=51.

2. 8; 4; 0; ...; a_1=8; $d=a_2-a_1$=4–8=–4;

$S_{16}=\frac{2a_1+d\cdot 15}{2}\cdot 16$=(2·8–15·4)·8=–44·8=–352.

3. $b_n=3n-1$.

Проверим, что (b_n)–арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$b_n=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}$; $b_{n-1}=3(n-1)-1=3n-4$; $b_{n+1}=3(n+1)-1=3n+2$;

$3n-1=\frac{3n-4+3n+2}{2}$ – верно, значит, (b_n) – арифметическая прогрессия;

b_1=3–1=2, b_2=3·2–1=5; d=5–2=3; $S_{60}=\frac{2\cdot 2+3\cdot 59}{2}\cdot 60$=(4+177)·30=5430.

4. a_1=25,5; a_9=5,5; $a_9=a_1+8d$, $d=\frac{a_9-a_1}{8}=\frac{5{,}5-25{,}5}{8}$=2,5, значит,

a_n=25,5+2,5(n–1)=23+2,5n; 54,5=23+2,5n; n=12,6 $\notin N$, значит, число 54,5— не член (a_n). Ответ: нет.

5. 3, 6, 9, ..., 99–арифметическая прогрессия; a_1=3, d=3;

a_n=3+3(n–1)=3n; 99=3n, n=33, значит, 99=a_{33};

$S=S_{33}=\frac{a_1+a_{33}}{2}\cdot 33=\frac{3+99}{2}\cdot 33$=51·33=1683.

Вариант 2.

1. a_1=70, d=–3; $a_{18}=a_1+17d$=70–17·3=19.

2. –21;–18;–15; ... — арифметическая прогрессия; a_1=–21; a_2=–18;

$d=a_2-a_1$=–18–(–21)=3; $S_{20}=\frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20$=(–42+19·3)·10=150.

3. $b_n=4n-2$

Проверим, что (b_n)–арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$b_n=\frac{b_{n+1}+b_{n-1}}{2}$; $b_{n+1}=4(n+1)-2=4n+2$; $b_{n-1}=4(n-1)-2=4n-6$

$4n-2=\frac{4n+2+4n-6}{2}$ –верно, значит, (b_n)–арифметическая прогрессия;

b_1=4–2=2, b_2=4·2–2=6; d=6–2=4; $S_{40}=\frac{4+4\cdot 39}{2}\cdot 40$=4·40·20=3200.

4. a_1=11,6; a_{15}=17,2; $a_{15}=a_1+14d$, $d=\frac{a_{15}-a_1}{14}=\frac{17{,}2-11{,}6}{14}$=0,4;

$a_n=a_1+d(n-1)$=11,6+0,4(n–1)=11,2+0,4n; 30,4=11,2+0,4n;

n=40 $\in N$, значит, число 30,4=a_{48}. Ответ: да.

5. 7, 14, 21, ..., 147–арифметическая прогрессия; a_1=7, a_2=14, d=14–7=3; a_n=7+7(n–1)=7n; 147=7n, n=21, значит, 147=a_{21}.;

$S=S_{21}=\dfrac{a_1+a_{21}}{2}\cdot 21=\dfrac{7+147}{2}\cdot 21=1617$.

Вариант 3.

1. $a_1=65$, $d=-2$; $a_{32}=a_1+31d=65-31\cdot 2=3$.

2. 42; 34; 26; ...–арифметическая прогрессия; a_1=42; a_2=34,

$d=a_2-a_1=34-42=-8$; $S_{24}=\dfrac{2a_1+23d}{2}\cdot 24=(84-23\cdot 8)\cdot 12=-1200$.

3. $b_n=2n-5$.

Проверим, что (b_n) — арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$b_n=\dfrac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}$; $b_{n-1}=2(n-1)-5=2n-7$; $b_{n+1}=2(n+1)-5=2n-3$;

$2n-5=\dfrac{2n-7+2n-3}{2}$ –верно, значит, (b_n) — арифметическая прогрессия

$b_1=2-5=-3$, $b_2=6-5=1$; $d=1-(-3)=4$; $S_{80}=\dfrac{-6+4\cdot 79}{2}\cdot 80=(316-6)\cdot 40=12400$.

4. $a_1=-2{,}25$; $a_{11}=10{,}25$; $a_{11}=a_1+10d$, $d=\dfrac{a_{11}-a_1}{10}=\dfrac{10{,}25+2{,}25}{10}=1{,}25$;

$a_n=a_1+d(n-1)=-2{,}25+1{,}25(n-1)=1{,}25n-3{,}5$; $6{,}5=1{,}25n-3{,}5$;

$n=8\in N$, значит, $6{,}5=a_8$. Ответ: да.

5. 9, 18, 27, ..., 72 — арифметическая прогрессия; $a_n=9n$;

$72=9n$, n=8, значит, $72=a_8$; $S=S_8=\dfrac{a_1+a_8}{2}\cdot 8=(9+72)\cdot 4=324$.

Вариант 4.

1. $a_1=-9$, $d=4$; $a_{43}=a_1+42d=-9+42\cdot 4=159$.

2. –63;–58;–53; ... — арифметическая прогрессия; a_1=–63; a_2=–58;

$d=a_2-a_1=-58-(-63)=5$; $S_{14}=\dfrac{2a_1+13d}{2}\cdot 14=(-126+5\cdot 13)\cdot 7=-427$.

3. $b_n=3n-2$.

Проверим, что (b_n) — арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$b_n=\dfrac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}$; $b_{n-1}=3(n-1)-2=3n-5$; $b_{n+1}=3(n+1)-2=3n+1$;

$3n-2=\dfrac{3n-5+3n+1}{2}$ — верно, значит, (b_n) — арифметическая прогрессия;

$b_1=3-2=1$, $b_2=3\cdot 2-2=4$; $d=4-1=3$; $S_{120}=\dfrac{2+3\cdot 119}{2}\cdot 120=21540$.

4. $a_1=-23{,}6$; $a_{22}=11$; $a_{22}=a_1+21d$, $d=\dfrac{a_{22}-a_1}{21}=\dfrac{11+23{,}6}{21}=\dfrac{34{,}6}{21}$;

$a_n=a_1+d(n-1)=-23{,}6+\frac{34{,}6}{21}(n-1)$; $35{,}8=-23{,}6+\frac{34{,}6}{21}(n-1)$;
$1247{,}4=34{,}6n-34{,}6$; $n\approx 37{,}05\notin N$, значит, число 35,8 — не член (a_n).
Ответ: нет.
5. 6, 12, 18, ..., 150 — арифметическая прогрессия; $a_n=6n$; $150=6n$,
$n=25$, значит, $150=a_{25}$; $S=S_{25}=\frac{a_1+a_{25}}{2}\cdot 25=\frac{6+150}{2}\cdot 25=1950$.

К-4А. Вариант 1.

1. $2\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\sqrt{3}+1$.

2. $1-\cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha=1-\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

3. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\cdot 5}{5\cdot 3}=\frac{4}{3}$.

4. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+1}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=$
$=\frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha+1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$.

5. $\left(1+tg^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$
$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ч.т.д.

Вариант 2.

1. $\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\pi=0{,}5-2(-1)=0{,}5+2=2{,}5$.

2. $1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

3. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{576}{625}}=-\frac{7}{25}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{7\cdot 25}{25\cdot 24}=-\frac{7}{24}$.

4. $\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\cos\alpha\left(\frac{1}{1-\cos\alpha}-\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)=$
$=\cos\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}=\cos\alpha\cdot\frac{2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=2ctg^2\alpha$.

5. $(1-\cos^2\alpha)(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}=1$, ч.т.д.

Вариант 3.

1. $2\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \sqrt{3}$.

2. $1 - \sin^2\alpha\cdot\text{ctg}^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

3. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$; $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$

4. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \sin\alpha\left(\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}\right) =$

$= \sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

5. $\cos^2\alpha(1+\text{tg}^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$, ч.т.д.

Вариант 4

1. $2\sin\frac{\pi}{2} - tg\frac{\pi}{3} = 2\cdot 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$.

2. $1 - \sin\alpha\cdot\cos\alpha - tg\alpha = 1 - \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

3. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}$;

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12\cdot 13}{13\cdot 5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

4. $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \cos\alpha\left(\frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha}\right) =$

$= \cos\alpha\,\frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} = \cos\alpha\,\frac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 2tg\alpha$.

5. $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - tg\alpha\cos\alpha = \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha =$
$= \cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha$, ч. т. д.

К-5. Вариант 1

1. $b_1 = -32$, $q = \frac{1}{2}$; $b_7 = b_1\cdot q^6 = -32\cdot\frac{1}{2^6} = -\frac{32}{64} = -0{,}5$.

2. $b_1 = 2$, $q = 3$; $S_6 = \frac{b_1\left(q^6-1\right)}{q-1} = \frac{2\cdot\left(3^6-1\right)}{3-1} = 729 - 1 = 728$.

3. 24; -12; 6 — геометрическая прогрессия; $b_1 = 24$, $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$; $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{24}{1+\frac{1}{2}} = 16$.

4. $b_2 = 0{,}04$; $b_4 = 0{,}16$; $b_4 = b_2 q^2$; т. к. все b_n больше нуля, то $q = 0$;
$q^2 = \frac{b_4}{b_2}$; $q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \sqrt{\frac{0{,}16}{0{,}04}} = 2$; $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$;
$S_9 = \frac{0{,}02\left(2^9 - 1\right)}{2-1} = 0{,}02 \cdot 511 = 10{,}22$.

5. а) 0, (27)=0,2727…=0,27+0,0027+0,000027+… 0,27; 0,0027;… — геом. прогр. b_1=0,27 , $q = \frac{0{,}27}{1-0{,}01} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. б) 0,5(6)=0,566…=0,5+0,06+0,006+ +… 0,06 ; 0,0006; — геом. прогр. b_1=0,06 , q=0,01;
0,5(6)=0,5+S=0,5+$\frac{0{,}06}{1-0{,}1} = \frac{1}{2} + \frac{0{,}06}{0{,}9} = \frac{1}{2} + \frac{6}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$.

Вариант 2

1. b_1=0,81 , $q = -\frac{1}{3}$; $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 0{,}81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{0{,}81}{243} = -\frac{1}{300}$.

2. b_1=6 , q=2; $S_7 = \frac{b_1\left(q^7 - 1\right)}{q-1} = \frac{6 \cdot \left(2^7 - 1\right)}{2-1} = 6 \cdot 127 = 762$.

3. -40; 20; -10; … — геом. прогр. b_1=-40; $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{20}{40} = -0{,}5$;
$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-40}{1+0{,}5} = -\frac{40 \cdot 2}{3} = -\frac{80}{3} = -26\frac{2}{3}$.

4. b_2=1,2; b_4=4,8; т. к. все b_n больше нуля, то q>0;
$b_4 = b_2 \cdot q^2$; $q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \sqrt{\frac{4{,}8}{1{,}2}} = 2$; $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$;
$S_8 = \frac{0{,}6\left(2^8 - 1\right)}{2-1} = 0{,}6 \cdot 255 = 153$.

5. а) 0, (153)=0,153153…=0,153+0,000153+… 0,153; 0,000153; … — геом. прогр. b_1= 0,153; q=0,001; 0,(153)=S=$\frac{0{,}153}{1-0{,}001} = \frac{153}{999} = \frac{17}{111}$.
б) 0,3(2)=0,3222…=0,3+0,02+0,002+… 0,02; 0,002; … — геом. прогр. b_1= 0,02; q=0,1; 0,3(2)=0,3+S=0,3+$\frac{0{,}02}{1-0{,}1} = 0{,}3 + \frac{0{,}02}{0{,}9} = \frac{3}{10} + \frac{2}{90} = \frac{29}{90}$.

Вариант 3

1. b_1=-125, $q=\frac{1}{5}$; $b_5=b_1\cdot q^4$=-125$\cdot\frac{1}{625}=-\frac{1}{5}$=-0,2.

2. b_1=4, q=2; $S_8=\frac{b_1(q^8-1)}{q-1}=\frac{4\cdot(2^8-1)}{2-1}=4\cdot255=1020$.

3. 36; -12; 4; … — геом. прогр. b_1=36, $q=-\frac{12}{36}=-\frac{1}{3}$;

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{36}{1+\frac{1}{3}}=\frac{36\cdot3}{4}=27.$$

4. b_3=0,05, b_5=0,45; т. к. все b_n больше нуля, то q=0;
$b_5=b_3\cdot q^2$, $q=\sqrt{\frac{b_5}{b_3}}=\sqrt{\frac{0,45}{0,05}}=3$; $b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{0,05}{9}$;

$$S_8=\frac{0,05(3^8-1)}{9\cdot(3-1)}=\frac{328}{9\cdot2}=\frac{164}{9}=18\frac{2}{9}.$$

5. а) 0,(162)=0,162162…=0,162+0,000162+… 0,162; 0,000162;… — геом. прогр. $b_1=0,162$, q=0,001; 0,(162)=$S=\frac{0,162}{1-0,001}=\frac{162}{999}=\frac{18}{111}$;

б) 0,8(4)=0,8444…=0,8+0,04+0,004+0,0004+… 0,04; 0,004; … – геом. прогр. $b_1=0,04$; $q=0,1$; $0,8(4)=0,8+s=0,8+\frac{0,04}{1-0,1}=0,8+\frac{4}{90}=\frac{76}{90}$.

Вариант 4

1. $b_1=100000$, $q=\frac{1}{5}$; $b_9=b_1\cdot q^8=100000\cdot\frac{1}{5^8}=0,256$.

2. b_1=6, q=4; $S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{6\cdot(4^5-1)}{4-1} = 2046$.

3. -54; 18; -6;… — геом. прогр. b_1=-54, $q=-\frac{1}{3}$;

$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-54}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{54\cdot 3}{4} = -40{,}5$.

4. b_3=3,6, b_5=32,4; т. к. все b_n больше нуля, то q>0; $b_5=b_3\cdot q^2$,

$q = \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \sqrt{\frac{32{,}4}{3{,}6}} = 3$; $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{3{,}6}{9} = 0{,}4$; $S_5 = \frac{0{,}4(3^5-1)}{3-1} = \frac{0{,}4\cdot 242}{2} = 48{,}4$.

5. а) 0,(72)=0,7272…=0,72+0,0072+… 0,72; 0,0072; … — геом. прогр. b_1=0,72, q=0,01; 0,(72)=S=$\frac{0{,}72}{1-0{,}01} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$;

б) 0,7(4)=0,7444…=0,7+0,04+0,004+0,0004+… 0,04; 0,004; … – геом. прогр. $b_1 = 0{,}04$; $q = 0{,}1$; $0{,}7(4) = 0{,}7 + s = 0{,}7 + \frac{0{,}04}{1-0{,}1} = 0{,}7 + \frac{4}{90} = \frac{67}{90}$.

К-5А. Вариант 1

1. *а*) $\sin 300^0 = \sin(360^0 - 60^0) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -tg\,\frac{2\pi}{3} = -tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

2. а) $\sin(\pi+\alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha - \sin\alpha = -2\sin\alpha$;

б) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - ctg(2\pi - \alpha) = -ctg\alpha + ctg\alpha = 0$;

в) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha(\pi - \alpha) = \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$.

3. $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos(\pi-\alpha)\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{2\sin-\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha$.

4. $\left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)^2-\sin 2\alpha=\left(\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2-\sin 2\alpha=$

$=\left(\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2-\sin 2\alpha=$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1$.

Вариант 2

1. а) $\cos(-210^0)=\cos 210^0=\cos(180^0+30^0)=-\cos 30^0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg\dfrac{4}{3}\pi=tg\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=tg\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

2. а) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha+\cos\alpha=0$;

б) $tg(\pi+\alpha)+ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha+tg\alpha=2tg\alpha$.

3. $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{2\sin\alpha-\cos a}{2\cos^2\alpha}=tg\alpha$, ч.т.д.

4. $(ctg\alpha-tg\alpha)\,tg2\alpha=\left(\dfrac{1}{tg\alpha}-tg\alpha\right)\cdot\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}\cdot\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=2$.

Вариант 3

1. а) $\sin(-240^0)=-\sin 240^0=-\sin(180^0+60^0)=\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg\dfrac{3}{4}\pi=tg\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-tg\dfrac{\pi}{4}=-1$.

2. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha=2\cos\alpha$;

б) $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+ctg(\pi+\alpha)=-ctg\alpha+ctg\alpha=0$;

в) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}=1$.

3. $\frac{\sin 2\alpha}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1-1+2\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=ctg\alpha$, ч.т.д.

4. $\sin 2\alpha+\left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^2=\sin 2\alpha+\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^2=$

$=\sin 2\alpha+\left(\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^2=$

$=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Вариант 4

1. а) $\cos 300^0 = \cos\left(360^0 - 60^0\right) = \cos 60^0 = 0{,}5$; б) $tg\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -tg\,\frac{5\pi}{4} =$

$= tg\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -tg\,\frac{5\pi}{4} = -tg\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -tg\,\frac{\pi}{4} = -1$.

2. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$; б) $tg(2\pi + \alpha) - ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$= tg\alpha + tg\alpha = 2tg\alpha$; в) $\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2tg\,2\alpha$.

3. $$\frac{\cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha.$$

4. $$(tg\alpha + ctg\alpha)\sin 2\alpha = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \cdot 2\sin\alpha - \cos\alpha = 2.$$

К-6. Вариант 1

1. а) $2\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[6]{1} = 2 \cdot 3 - 5 + 1 = 2$; б) $\sqrt[3]{8 \cdot 0{,}027} = 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$;

в) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

2. а) $x^3 = 5$; $x = \sqrt[3]{5}$; б) $y^4 = 15$; $y_{1,2} = \pm\sqrt[4]{15}$; в) $z^8 = -1$ — нет корней, т.к. $E\left(x^8\right) = [0; +\infty)$.

3. $\sqrt[4]{6 + \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 - \sqrt{20}} = \sqrt[4]{\left(6 + \sqrt{20}\right)\left(6 - \sqrt{20}\right)} = \sqrt[4]{36 - 20} = 2$.

4. а) $f(x) = 7x^8$; $f(-x) = 7 \cdot (-x)^8 = 7x^8 = f(x)$, значит, *f(x)* – четная;

б) $f(x) = x^3 + x$; $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -\left(x^3 + x\right) = -f(x)$,

значит, *f(x)* — нечетная.

5. $f(x) = x^{17}$;

а) $f(3{,}7) < f(4{,}1)$, т.к. $3{,}7 < 4{,}1$; б) $f(-7{,}2) < f(-6{,}3)$, т.к. $-7{,}2 < -6{,}3$.

Вариант 2

1. а) $5\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{16}-\sqrt{1}=5\cdot(-2)+2-1=-10+2-1=-2$;

б) $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0016}=30\cdot 0{,}2=0{,}6$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{40}{5}}=\sqrt[3]{8}=2$.

2. а) $x^3=21$; $x=\sqrt[3]{21}$; б) $y^4=17$; $y_{1,2}=\pm\sqrt[4]{17}$; в) $z^4=-8$;
нет корней, т.к. $E(x^4)=[0;+\infty)$.

3. $\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}=\sqrt[3]{(12-\sqrt{19})(12+\sqrt{19})}=\sqrt[3]{144-19}=5$.

4. а) $f(x)=3x^{17}$; $f(-x)=3\cdot(-x)^{17}=-3x^{17}=-f(x)$, значит, *f(x)* - нечетная

б) $f(x)=x^7+x^4$; $f(-x)=(-x)^7+(-x)^4=-x^7+x^4\neq\pm f(x)$, значит, *f(x)* – ни четная, ни нечетная.

5. $f(x)=x^{24}$; а) $f(5{,}3)<f(5{,}9)$, т.к. $|5{,}3|<|5{,}9|$;

б) $f(-3{,}8)>f(-2{,}9)$, т.к. $|-3{,}8|>|-2{,}9|$.

Вариант 3

1. а) $3\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{-27}+\sqrt[8]{1}=3\cdot 2-3+1=4$; б) $\sqrt[3]{125\cdot 0{,}008}=5\cdot 0{,}2=1$;

в) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[5]{\dfrac{128}{4}}=\sqrt[5]{32}=2$.

2. а) $x^3=11$; $x=\sqrt[3]{11}$; б) $y^6=7$; $y_{1,2}=\pm\sqrt[6]{7}$;

в) $z^{12}=-4$ - нет корней, т.к. $E(x^{12})=[0;+\infty)$.

3. $\sqrt[4]{11-\sqrt{40}}\cdot\sqrt[4]{11+\sqrt{40}}=\sqrt[4]{(11-\sqrt{40})(11+\sqrt{40})}=\sqrt[4]{121-40}=3$.

4. а) $f(x)=3x^5$; $f(-x)=3\cdot(-x)^5=-3x^5=-f(x)$, значит *f(x)* — нечетная;

б) $f(x)=x^6+x^3$; $f(-x)=(-x)^6+(-x)^3=x^6-x^3\neq\pm f(x)$, значит *f(x)* — ни четная, ни нечетная.

5. $f(x)=x^{11}$; а) $f(1{,}7)<f(1{,}9)$, т.к. 1,7<1,9; б) $f(-6{,}7)<f(-4{,}7)$, т.к. -6,7<-4,7.

Вариант 4

1. а) $7\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}+\sqrt[6]{1}=7\cdot 3-5+1=17$;

б) $\sqrt[3]{0{,}125\cdot 27}=0{,}5\cdot 3=1{,}5$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{16}=2$.

2. а) $x^5=8$; $x=\sqrt[5]{8}$; б) $y^7=11$; $y=\sqrt[7]{11}$;
в) $z^6=-3$ — нет корней, т.к. $E\left(x^6\right)=[0;+\infty)$.

3. $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}=\sqrt[5]{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)}=\sqrt[5]{49-17}=2$.

4. а) $f(x)=15x^6$; $f(-x)=15\cdot(-x)^6=15x^6=f(x)$, значит *f(x)* — четная;
б) $f(x)=x^4+x^3$; $f(-x)=(-x)^4+(-x)^3=x^4-x^3\neq\pm f(x)$, значит, *f(x)* – ни четная, ни нечетная.

5. $f(x)=x^9$; а) $f(3{,}6)<f(3{,}8)$, т.к. 3,6<3,8; б) $f(-4{,}1)<f(-3{,}7)$, т.к. -4,1<-3,7.

К-6А. Вариант 1

1. $a_1=7$, $d=4$; $a_{18}=a_1+17d=7+17\cdot 4=75$.

2. -8; -4; 0… — арифм. прогр. $a_1=-8$, $a_2=-4$, $d=a_2-a_1=-4-(-8)=4$;
$S_{16}=\dfrac{2a_1+15d}{2}\cdot 16=(-16+15\cdot 4)\cdot 8=352$.

3. $a_n=5-2_n$.

Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$;
$a_{n-1}=4-5(n-1)=9-5n$; $a_{n+1}=4-5(n+1)=-1-5n$;
$4-5n=\dfrac{9-5n-1-5n}{2}$ - верно, значит, (a_n) -ариф. прогр., ч.т.д.

4. $a_1=5$, $a_9=29$; $a_9=a_1+8d$, $d=\dfrac{a_9-a_1}{8}=\dfrac{29-5}{8}=3$;
$a_n=a_1+d(n-1)=5+3(n-1)=2+3n$;
104=2+3*n*; $n=\dfrac{102}{3}=34\in N$, значит, 104= a_{34}. Ответ: да.

5. 2, 4, 6,… — арифм. пр.

$a_1 = 2$, $d = 2$; $S_{50} = \frac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = \frac{4+98}{2} \cdot 50 = 2550$.

Вариант 2

1. $a_1 = -8$, $d = 2$; $a_{20} = a_1 + 19d = -8 + 2 \cdot 19 = 30$.

2. 7; 11; 15; … — арифм. прогр.; $a_1 = 7,\ a_2 = 11,\ d = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$;

$S_{18} = \frac{2a_1 + 17d}{2} \cdot 18 = (14 + 17 \cdot 4) \cdot 9 = 738$.

3. $a_n = 4 - 5n$; Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$; $a_{n-1} = 4 - 5(n-1) = 9 - 5n$; $a_{n+1} = 4 - 5(n+1) = -1 - 5n$;

$4 - 5n = \frac{9 - 5n - 1 - 5n}{2}$ — верно, значит, (a_n) — арифм. прогр., ч.т.д.

4. $a_1 = -1,\ a_{10} = -46$; $a_{10} = a_1 + 9d$, $d = \frac{a_{10} - a_1}{9} = \frac{-46+1}{9} = -5$;

$a_n = a_1 + d(n-1) = -1 - 5(n-1) = 4 - 5n$; $-86 = 4 - 5n$,

$n = 18 \in N$,значит, $-86 = a_{18}$. Ответ: да.

5. 2; 3; 4;…; 92 -арифм. прогр.; $a_1 = 2,\ d = 1$; $a_n = 2 + 1(n-1) = 1 + n$;

92=1+n, $n = 91$, значит 92= a_{91};

$S = S_{91} = \frac{a_1 + a_{91}}{2} \cdot 91 = \frac{2+92}{2} \cdot 91 = 47 \cdot 91 = 4277$.

Вариант 3

1. $a_1 = 30,\ d = -2$; $a_{19} = a_1 + 18d = 30 - 18 \cdot 2 = -6$.

2. -16; -10; -4;… — арифм. прогр.

$a_1 = -16,\ a_2 = -10,\ d = a_2 - a_1 = -10 - (-16) = 6$;

$S_{17} = \frac{2a_1 + 16d}{2} \cdot 17 = \frac{-32+96}{2} \cdot 17 = 544$.

3. $a_n = 2 + 5n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$; $a_{n-1} = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$; $a_{n+1} = 2 + 5(n+1) = 5n + 7$;

$2 + 5n = \frac{5n - 3 + 5n + 17}{2}$ — верно, значит, (a_n) -арифм. прогр. ч.т.д.

4. $a_1 = 3,\ a_7 = -9$; $a_7 = a_1 + 6d$, $d = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{-9-3}{6} = -2$;
$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + (-2)\cdot(n-1) = 5 - 2n$;
$-35 = 5 - 2n,\ 2n = 40,\ n = 20 \in N$, значит, $-35 = a_{20}$. Ответ: является.

5. 1; 3; 5; … — арифм. прогр. $a_1 = 1,\ d = 2$; $S_{50} = \frac{2 + 2\cdot 49}{2}\cdot 50 = 2500$.

Вариант 4

1. $a_1 = -10$**,** $d = -3$**;** $a_{21} = a_1 + 20d = -10 - 20\cdot 3 = -70$**.**

2. 10; 6; 2;… — арифм. прогр. $a_1 = 10,\ a_2 = 6,\ d = a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4$;
$S_{18} = \frac{2a_1 + 17d}{2}\cdot 18 = (20 - 17\cdot 4)\cdot 9 = -432$.

3. $a_n = -10 + 3n$;

Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;
$a_{n-1} = -10 + 3(n-1) = 3n - 13$; $a_{n+1} = -10 + 3(n+1) = 3n - 7$;
$-10 + 3n = \frac{3n - 13 + 3n - 7}{2}$ верно, значит, (a_n) — арифм. прогр. ч.т.д.

4. $a_1 = -2,\ a_{20} = -192$; $a_{20} = a_1 + 19d$, $d = \frac{a_{20} - a_1}{19} = \frac{-192+2}{19} = -10$;
$a_n = a_1 + d(n-1) = -2 - 10(n-1) = 8 - 10n$; $-92 = 8 - 10n$; $10n = 100$;
$n = 10$,значит, -92= a_{10}. Ответ: является.

5. 2; 3; 4; …; 102 - арифм. прогр. $a_1 = 2,\ d = 1$; $a_n = n + 1$; 102= $n + 1$;
$n = 101$, значит, 102= a_{101};
$S = S_{101} = \frac{a_1 + a_{101}}{2}\cdot 101 = \frac{2 + 102}{2}\cdot 101 = 52\cdot 101 = 5252$.

К-7. Вариант 1

1. а) $3\cdot16^{1/2}=3\cdot4=12$;   б) $27^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{3}$.

2. а) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{4}}$;   б) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=x$;

в) $\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot c^{-\frac{3}{2}}=c^2\cdot c^{-\frac{3}{2}}=c^{2-\frac{3}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$.

3. $y^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{y}=y^{\frac{5}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}=y^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}=y^2$.

4. а) $\dfrac{x-5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-5}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-5\right)}{x^{\frac{1}{2}}-5}=x^{\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-4}{a-16}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-4}{\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+4\right)}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}+4}$.

5. $$\left(\frac{a}{a^{0,5}\cdot b^{0,5}+b}-\frac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right)\cdot\frac{3b^{1,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}=$$

$$=\left(\frac{a}{b^{0,5}\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)}-\frac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right)\cdot\frac{3b^{1,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}=$$

$$=\frac{a-b}{b^{0,5}\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)}\cdot\frac{3b^{1,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}=\frac{3(a-b)b}{a-b}=3b.$$

Вариант 2

1. а) $5\cdot y^{\frac{1}{2}}=5\cdot 3=15$; б) $125^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{125^{1/3}}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

2. а) $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{6}}$; б) $\frac{y^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-1}}{y^{\frac{1}{3}}}=y^{\frac{2}{3}-1-\frac{1}{3}}=y^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{y^{2/3}}$;

в) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{4}\cdot a^{-\frac{3}{2}}=a^{3}\cdot a^{-\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$.

3. $x^{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt[4]{x}=x^{\frac{7}{4}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{4}+\frac{1}{4}}=x^{2}$.

4. а) $\frac{y^{\frac{1}{2}}+7}{y+7y^{\frac{1}{2}}}=\frac{y^{\frac{1}{2}}+7}{y^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{1}{2}}+7\right)}=\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\frac{b-9}{b^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{\left(b^{\frac{1}{2}}-3\right)\left(b^{\frac{1}{2}}+3\right)}{b^{\frac{1}{2}}+3}=b^{\frac{1}{2}}-3$.

5. $\left(\frac{c^{0,5}}{c^{0,5}-d^{0,5}}-\frac{d}{c-c^{0,5}d^{0,5}}\right)\cdot\frac{5c^{1,5}}{c^{0,5}+d^{0,5}}=$

$=\left(\frac{c^{0,5}}{c^{0,5}-d^{0,5}}-\frac{d}{c^{0,5}\left(c^{0,5}-d^{0,5}\right)}\right)\cdot\frac{5c^{1,5}}{c^{0,5}+d^{0,5}}=$

$=\frac{c-d}{c^{0,5}\left(c^{0,5}-d^{0,5}\right)}\cdot\frac{5c^{1,5}}{c^{0,5}+d^{0,5}}=\frac{5c(c-d)}{c-d}=5c$.

Вариант 3

1. а) $14 \cdot 8^{1/3} = 14 \cdot 2 = 28$; б) $32^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{32^{1/5}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

2. а) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = x^{1/3}$; б) $\dfrac{a \cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{1-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{8}}$;

в) $\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^8 \cdot b^{-\frac{1}{3}} = b \cdot b^{-\frac{1}{3}} = b^{1-\frac{1}{3}} = b^{2/3}$.

3. $\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{1}{6}} = a^{3/2}$.

4. а) $\dfrac{a+3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+3} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+3\right)}{a^{\frac{1}{2}+3}} = a^{\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{x-36}{x^{\frac{1}{2}}-6} = \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}-6\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+6\right)}{x^{\frac{1}{2}}-6} = x^{\frac{1}{2}}+6$.

5. $\left(\dfrac{a+b}{a^{1,5}-a^{0,5}b} - \dfrac{a-b}{a^{1,5}+a^{0,5}b}\right) \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a^{0,5}} =$

$= \left(\dfrac{a+b}{a^{0,5}(a-b)} - \dfrac{a-b}{a^{0,5}(a+b)}\right) \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a^{0,5}} =$

$= \dfrac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{a^{0,5}(a-b)(a+b)} \cdot \dfrac{(a-b)(a+b)}{a^{0,5}} = \dfrac{4ab}{a} = 4b$.

Вариант 4

1. а) $0{,}3 \cdot 32^{\frac{1}{5}} = 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$; б) $16^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{16^{1/4}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

2. а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = a^{1/2}$; б) $\dfrac{x \cdot x^{-1/2}}{x^{1/4}} = x^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = x^{1/4}$;

в) $\left(c^{1/6}\right)^6 \cdot c^{-3/7} = c \cdot c^{-3/7} = c^{1-\frac{3}{7}} = c^{4/7}$.

3. $\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}=a$.

4. а) $\dfrac{15x^{\frac{1}{2}}+x}{15+x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(15+x^{\frac{1}{2}}\right)}{15+x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{x-121}{x^{\frac{1}{2}}+11}=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}-11\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+11\right)}{x^{\frac{1}{2}}+11}=x^{\frac{1}{2}}-11$.

5. $\left(\dfrac{x-y}{x^{1,5}+x^{0,5}y}-\dfrac{x+y}{x^{1,5}-x^{0,5}y}\right)\cdot\dfrac{y^2-x^2}{xy}=\left(\dfrac{x-y}{x^{0,5}(x+y)}-\dfrac{x+y}{x^{0,5}(x-y)}\right)\cdot\dfrac{y^2-x^2}{xy}=$

$=-\dfrac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{x^{0,5}(x+y)(x-y)}\cdot\dfrac{(x-y)(x+y)}{xy}=\dfrac{4xy}{x^{0,5}\cdot xy}=\dfrac{4}{x^{0,5}}$.

К-7А. Вариант 1

1. $b_1=-25,\ q=-\dfrac{1}{5}$; $b_7=b_1\cdot q^6=-25\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^6=-\dfrac{5^2}{5^6}=-\dfrac{1}{625}$.

2. $b_1=11,\ q=2$; $S_5=\dfrac{b_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=\dfrac{11\left(2^5-1\right)}{2-1}=11\cdot 31=341$.

3. 15; 5; $1\dfrac{1}{3}$;… — геом. прогр.

$b_1=15,\ b_2=5,\ q=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{1}{3}$; $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{15}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{15\cdot 3}{2}=22{,}5$.

4. $b_5=81,\ b_3=36$; $b_5=b_3\cdot q^2$; $q=\pm\sqrt{\dfrac{b_5}{b_3}}=\pm\sqrt{\dfrac{81}{36}}=\pm 1{,}5$;

$b_1=\dfrac{b_3}{q^2}=\dfrac{36}{2{,}25}=16$; если $q=1{,}5$, то $S_5=\dfrac{16\cdot\left(1{,}5^5-1\right)}{1{,}5-1}=211$;

если $q=-1{,}5$, то $S_5=\dfrac{16\cdot\left(-1{,}5^5-1\right)}{-1{,}5-1}=55$.

5. а) 0,(31)=0,3131…=0,31+0,0031+…0,31; 0,0031;… — геом. прогр.

$b_1=0{,}31;\ q=0{,}01$; $0{,}(31)=S=\dfrac{0{,}31}{1-0{,}01}=\dfrac{31}{99}$. Ответ: 31/99.

б) 0,5(6)=0,566…=0,5+0,06+0,006+…0,06; 0,006;…-геом. прогр.

$b_1 = 0{,}06;\ q = 0{,}1$; $0{,}5(6) = 0{,}5 + S = \frac{1}{2} + \frac{0{,}06}{1-0{,}1} = \frac{1}{2} + \frac{6}{90} = \frac{51}{90}$.

Вариант 2

1. $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{4}$; $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 4 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{1}{256}$.

2. $b_1 = 4,\ q = 2$; $S_7 = \frac{b_1\left(q^7-1\right)}{q-1} = \frac{4\left(2^7-1\right)}{2-1} = 4 \cdot 127 = 508$.

3. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; … — геом. прогр.

$b_1 = 1,\ b_2 = \frac{1}{2},\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}$; $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

4. $b_2 = 4,\ b_4 = 1$; $b_4 = b_2 \cdot q^2,\ q = \pm\sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \pm\frac{1}{2}$; $b_1 = \frac{b_2}{q}$;

Если $q = \frac{1}{2}$, то $b_1 = 8$; $S_6 = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot 63 \cdot 2}{64} = 15{,}75$;

Если $q = -\frac{1}{2}$, то $b_1 = -8$; $S_6 = \frac{-8\left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = -5{,}25$.

5. а) 0,(31)=0,313131…=0,31+0,0031+0,000031+…0,31; 0,0031; … — геом. прогр. $b_1 = 0{,}31;\ q = 0{,}1$; 0,(31)=S=$\frac{0{,}31}{1-0{,}01} = \frac{31}{99}$;.

б) 0,2(3)=0,233…=0,2+0,03+0,003…0,03; 0,003; … — геом. прогр.

$b_1 = 0{,}03;\ q = 0{,}1$; 0,2(3)=0,2+S=0,2+$\frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{2}{10} + \frac{3}{90} = \frac{2}{10} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$.

Вариант 3

1. $b_1 = -18,\ q = \frac{1}{3}$; $b_8 = b_1 \cdot q^7 = -18 \cdot \frac{1}{3^7} = -\frac{2}{243}$.

2. $b_1 = 5,\ q = 2$; $S_8 = \frac{b_1\left(q^8 - 1\right)}{q-1} = \frac{5\cdot\left(2^8-1\right)}{2-1} = 5\cdot 255 = 1275$.

3. -16; -8; -4;… — геом. прогр.

$b_1 = -16,\ b_2 = -8,\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}$; $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-16}{1-\frac{1}{2}} = -32$.

4. $b_3 = -4,\ b_5 = -16$; $b_5 = b_3 \cdot q^2$, $q = \pm\sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \pm 2$; $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = -1$.

Если q=2 , то $S_8 = \frac{-1\left(2^8-1\right)}{2-1} = -255$.

Если q=-2 , то $S_8 = \frac{-1\left(2^8-1\right)}{-2-1} = \frac{255}{3} = 85$. Ответ: -255 или 85.

5. а) 0,(23)=0,232323…=0,23+0,0023+0,000023+…0,23; 0,0023;… — геом. прогр. $b_1 = 0{,}23;\ q = 0{,}01$; $0{,}(23) = S = \frac{0{,}23}{1-0{,}01} = \frac{23}{99}$;

а) 0,1(3)=0,133…=0,1+0,03+0,003+…0,03; 0,003;… — геом. прогр.

$b_1 = 0{,}03;\ q = 0{,}1$; $0{,}1(3) = 0{,}1 + S = \frac{1}{10} + \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

Вариант 4

1. $b_1 = -8,\ q = \frac{1}{2}$; $b_2 = b_1 \cdot q^6 = -8 \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}$.

2. $b_1 = -1,\ q = -2$; $S_7 = \frac{b_1\left(q^7-1\right)}{q-1} = \frac{-1\left(-2^7-1\right)}{-2-1} = -\frac{129}{3} = -43$.

3. 9; -3; 1;… — геом. прогр.

$b_1 = 9,\ b_2 = -3,\ q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$; $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9\cdot 3}{4} = 6{,}75$.

4. $b_2=0{,}08;\ b_4=1{,}28$; $b_4=b_2\cdot q^2;$ $q=\pm\sqrt{\dfrac{b_4}{b_2}}=\pm4$; $b_1=\dfrac{b_2}{q}$.

Если q=4, то b_1=0,02; $S_6=\dfrac{0{,}02\left(4^6-1\right)}{4-1}=\dfrac{0{,}02\cdot4095}{3}=27{,}3$.

Если q=-4, то b_1=-0,02; $S_6=\dfrac{-0{,}02\left(4^6-1\right)}{-4-1}=\dfrac{0{,}02\cdot4095}{5}=16{,}38$.

5. а) 0,(17)=0,1717…=0,17+0,0017…0,17; 0,0017;… — геом. прогр.
$b_1=0{,}17;\ q=0{,}01$; $0,(17)=S=\dfrac{0{,}17}{1-0{,}01}=\dfrac{17}{99}$;

б) 0,3(5)=0,355…=0,3+0,05+0,005+…0,05; 0,005;… — геом. прогр.
$b_1=0{,}05;\ q=0{,}1$; 0,3(5)=0,3+ $S=\dfrac{3}{10}+\dfrac{0{,}05}{1-0{,}1}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{5}{90}=\dfrac{32}{90}=\dfrac{16}{45}$.

К-8. Вариант 1

1. а) $5\sin0^0+3\cos60^0=5\cdot0+3\cdot0{,}5=1{,}5$; б) $2\sin\dfrac{\pi}{2}-3tg\dfrac{\pi}{4}=2\cdot1-3\cdot1=-1$.

2. $1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot tg\alpha=1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

3. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{25}{169}}=-\dfrac{12}{13}$; $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{5\cdot13}{13\cdot12}=-\dfrac{5}{12}$.

4. $\dfrac{1}{tg\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$

$=\dfrac{\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

5. $\frac{1}{\sin x}-\sin x=\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}=\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\cos x\cdot ctgx$ ч.т.д.

Вариант 2

1. а) $\cos 180^0+4tg45^0=-1+4\cdot 1=3$; б) $3\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot 0-2\cdot\frac{1}{2}=-1$.

2. $1-ctg\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha=1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

3. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{64}{289}}=-\frac{15}{17}$; $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-15\cdot 17}{17\cdot 18}=-\frac{15}{8}$.

4. $\frac{1}{ctg\alpha}=+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=$

$=\frac{\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}$.

5. $\frac{1}{\cos\beta}-\cos\beta=\frac{1-\cos^2\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}=\sin\beta\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\sin\beta\; tg\beta$, ч.т.д.

Вариант 3

1. а) $6\sin 30^0-2tg45^0=6\cdot 0{,}5-2\cdot 1=1$; б) $4\sin\pi+2\cos\frac{\pi}{3}=4\cdot 0+2\cdot 0{,}5=1$.

2. $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

3. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$; $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{3}{4}$.

4. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=$

$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

5. $\frac{(1+\cos\alpha)^2-(1-\cos\alpha)^2}{4\cos\alpha}-\sin^2\alpha=$

$=\frac{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha-1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}-\sin^2\alpha=$

$= \frac{4\cos\alpha}{4\cos\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} =$

$= ctg\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, ч.т.д.

Вариант 4

1. а) $3\sin 180^0 - 2\cos 60^0 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}5 = -1$;

б) $6\sin\frac{\pi}{2} - 5tg\frac{\pi}{4} = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1$.

2. $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

3. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = -\frac{3}{4}$.

4. $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha) - \cos\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} =$

$= \frac{\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2tg\alpha$.

5. $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{2} - \cos^2\alpha =$

$= \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{2} - \cos^2\alpha =$

$= \frac{2}{2} - \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} =$

$= tg\alpha\cos\alpha\sin\alpha$, ч.т.д.

К-8А (итоговая). Вариант 1

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (0{,}014)^0 - 4 \cdot 27^{\frac{2}{3}} = 3^2 + 1 - 4 \cdot \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 9 + 1 - 4 \cdot 9 = -26$.

б) $\frac{625^{-\frac{1}{3}} \cdot 5}{25^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(5^4\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 5}{\left(5^2\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{-\frac{4}{3}} \cdot 5}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{-\frac{4}{3}+1-\frac{2}{3}} = 5^{-1}$=0,2;

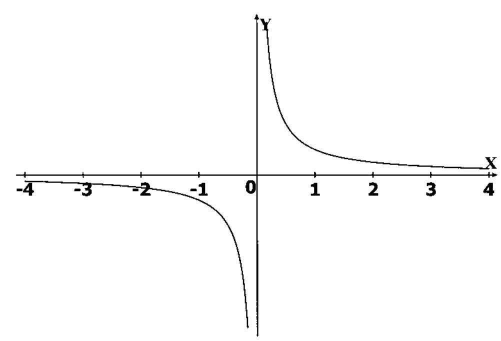
в) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ - $\sqrt{48}$ - $\sqrt[3]{125}$ =4+4 $\sqrt{3}$ +3- $\sqrt{16 \cdot 3}$ -5=2+4 $\sqrt{3}$ -4 $\sqrt{3}$ =2;

г) $\cos(-240°)\ \ -\sin(-300°)\ +tg(225°)=\ \ \cos 240° + \sin 300° +\ \ tg225° =$
$\cos(180°+60°)+\sin(360°-60°)+tg(180°+45°)=$
$= -\cos 60° - \sin 60° + tg45° = \ \ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+2\cos^2\alpha - 1} = \dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = tg\alpha$;

б) $\dfrac{2}{2-b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{4}{4-b} = \dfrac{2}{2-b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{4}{\left(2-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+b^{\frac{1}{2}}\right)} = \dfrac{4+2b^{\frac{1}{2}}-4}{\left(2-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+b^{\frac{1}{2}}\right)} = \dfrac{2b^{\frac{1}{2}}}{4-b}$.

3. $y = \dfrac{1}{x}$; $y \ge 0$ при $x \ge 0$; $y \le 0$ при $x \le 0$.



4. 2; 4; 6; … — арифм. пр.
$\alpha_1 = 2, \beta = 2$; $\delta_{50} = \dfrac{2\alpha_1 + 49\beta}{2}\cdot 50 = \dfrac{2\cdot 2 + 49\cdot 2}{2}\cdot 50 = 51\cdot 50 = 2550$.

5. $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 8$; $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ = 8-(-3)=11;
$D_{11} = \dfrac{2\alpha_1 + 10\beta}{2}\cdot 11 = \dfrac{-6+110}{2}\cdot 11$ = $52\cdot 11$ =572.

Вариант 2

1. а) $\left(16{,}017\right)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}+5\cdot 16^{\frac{3}{4}}$ $=1-5^{3}+5\cdot\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}$ $=1-125+5\cdot 2^3=1-125+40=-84$;

б) $\frac{9^{-1}\cdot 27^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{\left(3^2\right)^{-1}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{-2}\cdot 3^{\frac{6}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{-2+\frac{6}{5}-\frac{1}{5}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$;

в) $\sqrt{72}+\left(3-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt[4]{81}=\sqrt{2\cdot 36}+9-6\sqrt{2}+2-3=6\sqrt{2}-6\sqrt{2}+8=8$;

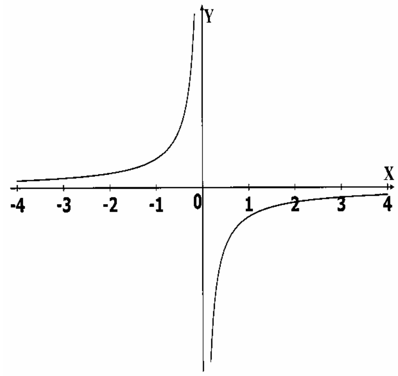
г) $\sin(-390°)-\cos(-780°)+\sqrt{3}tg(-120°)=-\sin 390°-\cos 780°-\sqrt{3}tg120°=$
$=-\sin(360°+30°)-\cos(720°+60°)-\sqrt{3}tg(180°-60°)=$
$=-\sin 30°-\cos 60°+\sqrt{3}tg60°=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3=2$.

2. а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+\sin 2\alpha$;

б) $\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{2}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)}=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}-1+2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)}=$

$=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}+1}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)}=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}-1}$.

3. $y=-\frac{1}{x}$; $y \geq 0$ при $x \leq 0$;
$y \leq 0$ при $x \geq 0$.



4. 1; 3; 5; … ; 99 — арифм. пр.

$\alpha_1=1$; $\beta=2$; $\eta=50$; $\varsigma=\varsigma_{50}=\frac{2\alpha_1+49\beta}{2}\cdot 50=\frac{2+2\cdot 49}{2}\cdot 50=2500$.

5. $\beta_6=200$; $\rho=10$; $\beta_6=\beta_1\cdot\rho^5$; $\beta_1=\frac{\beta_6}{\rho^5}=\frac{200}{100000}=\frac{1}{500}$;

$\varsigma_6=\frac{\beta_6\cdot\rho-\beta_1}{\rho-1}=\frac{200\cdot 10-\frac{1}{500}}{10-1}=222{,}222$.

Вариант 3

1. а) $5\cdot 32^{\frac{3}{5}}+(7{,}028)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=5\left(2^5\right)^{\frac{3}{5}}+1-5^2=5\cdot 8+1-25=16$;

б) $\frac{64^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{-2}}{4^{\frac{1}{10}}}=\frac{\left(2^6\right)^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{-2}}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{10}}}=\frac{2^{\frac{6}{5}}\cdot 2^{-2}}{2^{\frac{1}{5}}}=2^{\frac{6}{5}-2-\frac{1}{5}}=2^{-1}=0{,}5$;

в) $\sqrt{20}+\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\sqrt[3]{27}=\sqrt{5\cdot 4}+5-2\sqrt{5}+1-3=2\sqrt{5}+6-3-2\sqrt{5}=3$;

г) $\sin(-225°)-\sqrt{3}\cos(-390°)-tg315°==-\sin 225°-\sqrt{3}\cos 390°-tg315°=$

$=-\sin(180°+45°)-\sqrt{3}\cos(360°+30°)-tg(360°-45°)=$

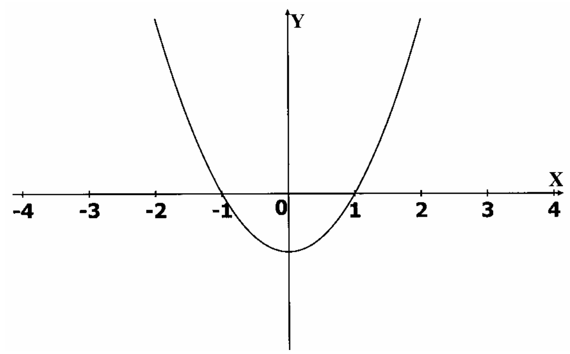
$\sin 45°-\sqrt{3}\cos 30°+tg45°=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

2. а) $\frac{1-cos2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1-1+2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$;

б) $\frac{4}{4-\alpha}+\frac{2-\alpha^{0,5}}{2\alpha^{0,5}+\alpha}=\frac{4}{\left(2-\alpha^{0,5}\right)\left(2+\alpha^{0,5}\right)}+\frac{2-\alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}\left(2+\alpha^{0,5}\right)}=$

$=\frac{4\alpha^{0,5}+4-4\alpha^{0,5}+\alpha}{\alpha^{0,5}\left(2-\alpha^{0,5}\right)\left(2+\alpha^{0,5}\right)}=\frac{4+\alpha}{\alpha^{0,5}(4-\alpha)}$.

3. $y=\frac{2}{x}$; $y\ge 0$ при $x\ge 0$; $y\le 0$ при $x\le 0$.



4. 10; 11; 12; … ; 99 — арифм. пр. α_1=10, β=1; α_η=10+$\beta(\eta-1)$=
=10+η-1=9+η ; 99=9+η , η=90, значит, 99=α_{90} ;

$\varsigma=\varsigma_{90}=\frac{2\alpha_1+89\beta}{2}\cdot 90=(20+89)\cdot 45=4905$. Ответ: 4905.

5. $\alpha_1=75$, $\alpha_2=60$; $\beta=\alpha_2-\alpha_1=-15$;

$\varsigma_{10}=\frac{2\alpha_1+\beta\cdot 9}{2}\cdot 10=(2\cdot 75-9\cdot 15)\cdot 5=75$.

Вариант 4

1. а) $(-5{,}13)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}-27^{\frac{4}{3}}=1+5^3-\left(3^3\right)^{\frac{4}{3}}$=1+125-$3^4$=126-81=45;

б) $\frac{16^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-1}}{4^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(2^4\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-1}}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2^{-\frac{4}{3}}\cdot 2^{-1}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{-\frac{4}{3}-1-\frac{2}{3}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$;

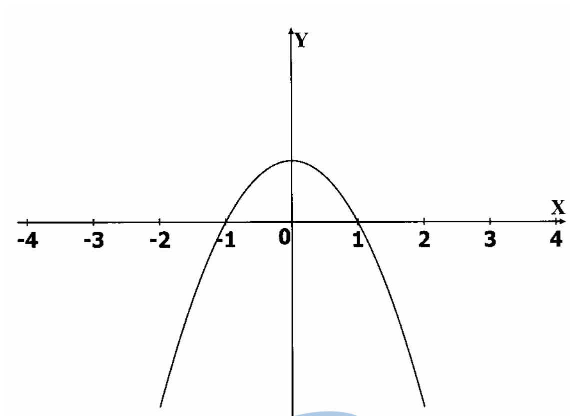
в) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ - $\sqrt[5]{32}-\sqrt{48}$ =4+ $4\sqrt{3}+3-2-\sqrt{16\cdot 3}$ =5+ $4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=5$;

г) $\cos(-240°)-\sqrt{2}\sin(-315°)-tg(-405°)==\cos 240°+\sqrt{2}\sin 315°+tg405°=$
$=cos(180°+60°)+\sqrt{2}\sin(360°-45°)+tg(360°+45°)=$
$-\cos 60°-\sqrt{2}\sin 45°+tg45°=-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1$ =-0,5-1+1=-0,5.

2. а) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-sin 2\alpha$;

б) $\frac{3+\alpha^{0.5}}{\alpha-3\alpha^{0.5}}-\frac{6}{\alpha-9}=\frac{3+\alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(\alpha^{0,5}-3)}-\frac{6}{(\alpha^{0,5}-3)(\alpha^{0,5}+3)}=$
$=\frac{\alpha+6\alpha^{0,5}+9-6\alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(\alpha^{0,5}-3)(\alpha^{0,5}+3)}=\frac{\alpha+9}{\alpha^{0,5}(\alpha-9)}$.

3. $y=-\frac{2}{x}$; $y\geq 0$ при $x\leq 0$; $y\leq 0$ при $x\geq 0$.



4. 100; 101; 102; … ; 999 – арифм. пр. $\alpha_1=100$, $\beta=1$;
$\alpha_\eta=100+\eta-1=99+\eta$; 999=99+$\eta$, $\eta=900$, значит 999=α_{900};
$\varsigma=\varsigma_{900}=\frac{2\alpha_1+899\beta}{2}\cdot 900=(200+899)\cdot 450=494550$.

5. $\beta_5=81$, $\rho=0,5$; $\beta_5=\beta_1\cdot\rho^4$, $\beta_1=\frac{\beta_5}{\rho^4}=\frac{81}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=81\cdot 16$;

$\varsigma_5=\frac{\beta_5\cdot\rho-\beta_1}{\rho-1}=\frac{81\cdot 0,5-81\cdot 16}{0,5-1}=\frac{81\cdot 15,5}{0,5}=2511$.

К-9. Вариант 1

1. а) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 0.5$;

б) $tg\frac{3\pi}{4} = tg\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$.

2. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$;

б) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\beta\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta$;

в) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$.

3. $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2}\sin 4\alpha$, <u>чтд.</u>

4. а) $\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} = \frac{-2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha} = -tg\alpha$;

б) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha$.

Вариант 2

1. а) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$.

2. а) $\sin(2\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha$;

б) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

в) $\sin 2\alpha \cdot tg\alpha = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin^2\alpha$.

3. $\frac{4\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2tg 2\alpha$, <u>чтд.</u>

4. а) $\frac{\cos 5\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{-2\sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha}{2\sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha} = -tg 2\alpha$;

б) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{1 + 2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha} = 2\cos\alpha$.

Вариант 3

1. а) $tg135° = tg(180° - 45°) = -tg45° = -1$;

б) $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $\cos(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha + \cos\alpha = 0$;

б) $\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta$;

в) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = 1$.

3. $4\cos 2\alpha \cdot \sin\alpha\cos\alpha = 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = \sin 4\alpha$, <u>чтд.</u>

4. а) $\frac{cos\,\alpha + cos\,3\alpha}{sin\,3\alpha - sin\,\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha} = ctg\alpha$;

б) $(1 + \cos 2\alpha) \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (1 + 2\cos^2 - 1) \cdot tg\alpha = 2\cos^2\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$= 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \sin 2\alpha$.

Вариант 4

1. а) $ctg135° = ctg(90° + 45°) = -tg45° = -1$;

б) $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + ctg(\pi - \alpha) = ctg\alpha - ctg\alpha = 0$;

б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$;

в) $\frac{2tg\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

3. $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} = \frac{ctg 2\alpha}{2}$, <u>чтд.</u>

4. а) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{-2\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha} = -tg\alpha$;

б) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - 1 + 2\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}$.

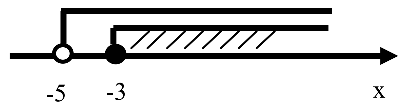
К-9А (итоговая). Вариант 1

1. $\left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha}-\frac{12\alpha}{9-\alpha^2}\right)\div\frac{3-\alpha}{3}=\left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha}-\frac{12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)}\right)\cdot\frac{3}{3-\alpha}=$

$=\frac{9+6\alpha+\alpha^2-12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)}\cdot\frac{3}{3-\alpha}=\frac{\alpha^2-6\alpha+9}{(3-\alpha)^2\cdot(3+\alpha)}\cdot 3=\frac{(3-\alpha)^2\cdot 3}{(3-\alpha)^2\cdot(3+\alpha)}=\frac{3}{3+\alpha}$.

2. $\begin{cases}3x+2\geq x-4\\5-3x<20\end{cases}$; $\begin{cases}3x-x\geq -4-2\\3x>5-20\end{cases}$; $\begin{cases}2x\geq -6\\3x>-15\end{cases}$; $\begin{cases}x\geq -3\\x>-5\end{cases}$.

Ответ: $x\geq -3$.

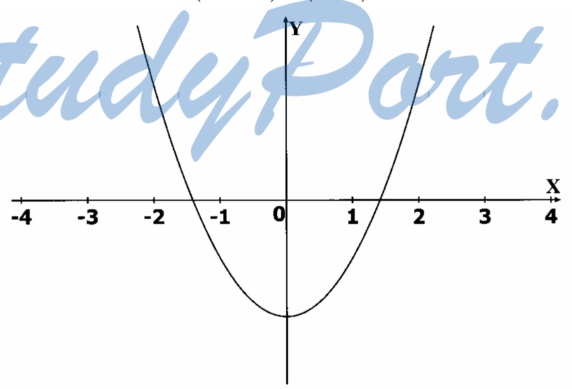


3. $\frac{x-1}{3x^2-4x+1}=\frac{x-1}{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3x-1}$;

$3x^2-4x+1=0$; $x_1=\frac{4+2}{6}=1$; $x_2=\frac{1}{3}$.

4.

$y=x^2-1$; $y>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(-1;1)$.



5. $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8$;
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8) = -0{,}96$.

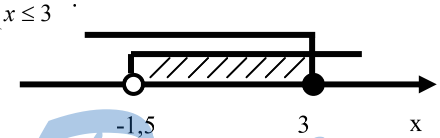
6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда 7 x г. и 3 x г. – содержится в куске латуни, меди и цинка соответственно. Учитывая, что латунь весит 500г., получаем уравнение:
$7x+3x=500$; $10x=500$; $x=50$;
50 — коэффициент пропорциональности.
$7\cdot 50 = 350$ (г.) — меди в латуни; $3\cdot 50 = 150$ (г.) — цинка в латуни.

7. Пусть x м — ширина. Тогда $(x+30)$ м — длина, $x(x+30)$ м^2 — площадь или 6175м^2. Получаем уравнение: $x(x+30)=6175$;
$x^2+30x-6175=0$; $x_1=\frac{-30+160}{2}=65$; $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. 65м – ширина, 65+30=95м – длина.

Вариант 2.

1. $\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a}{a-1}\right)\cdot\frac{a+1}{1-3a}=\frac{a^2-2a+1-a-a^2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a+1}{1-3a}=\frac{1-3a}{(a-1)(1-3a)}=\frac{1}{a-1}$.

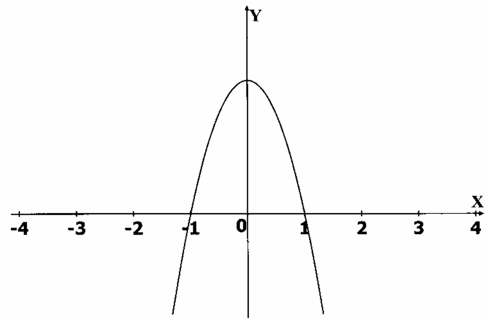
2. $\begin{cases}3x+2<7x-4\\ -\frac{x}{3}\geq -1\end{cases}$; $\begin{cases}4x>6\\ \frac{x}{3}\leq 1\end{cases}$; $\begin{cases}x>1{,}5\\ x\leq 3\end{cases}$.



Ответ: $[1{,}5;3]$.

3. $\frac{2x^2-5x+3}{x-1}=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}{x-1}=2x-3$;
$2x^2-5x+3=0$ $\quad x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$; $x_2=1$.

4. $y=-x^2+1$; $y>0$ при $x\in(-1;1)$; $y<0$ при $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.



5. $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-0{,}6^2=0{,}64$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}36-0{,}64=-0{,}28$.

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда в составе будут $10x$ г., $5x$ г., $2x$ г. – воды, спирта, мела соответственно. Учитывая, что масса состава составляет 680г., получаем уравнение:
$10x+5x+2x=680$; $17x=680$; $x=40$; 40 — коэффициент пропорциональности. $10\cdot 40=400$ г. – воды в составе, $5\cdot 40=200$ г. – спирта в составе, $2\cdot 40=80$ г. – мела в составе. Ответ: 400г, 200г, 80г.

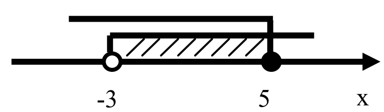
7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+40)$ м – длина, $x(x+40)$ м^2 - площадь или 7700м^2. Получаем уравнение: $x(x+40)=7700$; $x^2+40x-7700=0$; $x_1=\frac{-40+180}{2}=70$, $x^2<0$ - не удовлетворяет условию задачи. 70м – ширина, 70+40=110 м – длина. Ответ: 110м, 70м.

Вариант 3

1. $\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\frac{1}{a+1}=\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{4a}{(a-1)(a+1)}\right)\cdot\frac{1}{a+1}=$

$=\frac{a^2-2a+1+4a}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{a^2+2a+1}{(a+1)^2(a-1)}=\frac{(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)}=\frac{1}{a-1}$.

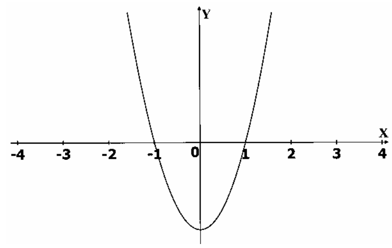
2.
$\begin{cases}x+2\le 17-2x\\ 9-5x<24\end{cases}$; $\begin{cases}3x\le 15\\ 5x>-15\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 5\\ x>-3\end{cases}$.



3. $\dfrac{4x^2+7x+3}{x+1}=\dfrac{4(x+1)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{x+1}=4x+3$;

$4x^2+7x+3=0 \quad x_1=\dfrac{-7+1}{8}=-\dfrac{3}{4}$; $x_2=-1$.

4. $y=x^2-2$; $y>0$ при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.



5. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$;

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=-0{,}96$.

6. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда в сплаве будет: $49x$ т., x т. — железа и углерода соответственно. Учитывая, что масса сплава составляет 1 т., получаем уравнение: $49x+x=1$;

$50x=1$; $x=\dfrac{1}{50}$; $\dfrac{1}{50}$ — коэффициент пропорциональности. $\dfrac{49}{50}$ т. $=$

$=\dfrac{49}{50}\cdot 1000=980$ кг – железа в сплаве; $\dfrac{1}{50}$ т = 20кг – углерода в сплаве.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+31)$м – длина, $x(x+31)$ м ^{2} - площадь или 1830м ^{2}. Получаем уравнение: $x(x+31)=1830$;

$x^2+31x-1830=0$; $D=961+4\cdot 1830=91^2$; $x_1=\dfrac{-31+91}{2}=30$,

$x_2<0$ - не удовлетворяет условию задачи.

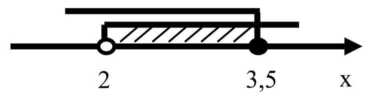
30м – ширина, 30+31=61м – длина. Ответ: 61м, 30м.

Вариант 4

1. $\left(\dfrac{a}{5+s}+\dfrac{5+a}{5-a}\right)\div\dfrac{3a+5}{a+5}=\dfrac{5a-a^2+25+10a+a^2}{(5+a)(5-a)}\cdot\dfrac{5+a}{3a+5}=$

$=\dfrac{25+15a}{(5-a)(3a+5)}=\dfrac{5(5+3a)}{(5-a)(3a+5)}=\dfrac{5}{5-a}$.

2. $\begin{cases}2x+9\ge 6x-5\\ -\dfrac{x}{2}<-1\end{cases}$; $\begin{cases}4x\le 14\\ \dfrac{x}{2}>1\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 3{,}5\\ x>2\end{cases}$.

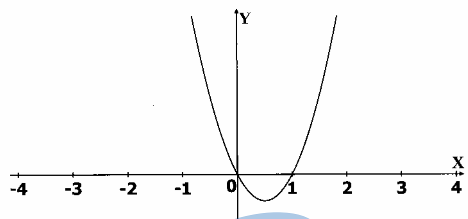


Ответ: $[2;3{,}5]$.

3. $\dfrac{x-1{,}5}{2x^2-5x+3}=\dfrac{x-1{,}5}{2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}=\dfrac{1}{2x-2}$;

$2x^2-5x+3=0 \quad x_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2},\quad x_2=1$.

4. $y=-x^2+4$; $y>0$ при $x\in(-2;2)$; $\quad y>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.



5. $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-0{,}8^2=0{,}36$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}36-0{,}64=-0{,}28$.

6. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $4x$ кг, x кг — ячменя и риса в крахмале соответственно. Учитывая, что масса крахмала составляет 45кг, получаем уравнение: $4x+x=45$; $5x=45$; $x=9$.

9 – коэффициент пропорциональности.

$4\cdot 9=36$ кг – ячменя в крахмале, 9кг – риса в крахмале.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+36)$ м – длина, $x(x+36)$ м^2 - площадь или 6400м^2. Получаем уравнение: $\begin{matrix} x(x+36)=6400 \\ x^2+36x-6400=0 \end{matrix}$;

$D=1296+4\cdot 6400=164^2$ $\quad x_1=\dfrac{-36+164}{2}=64$, $x_2<0$ – не удовлетворяет условию задачи. 64м – ширина, 64+36=100м – длина.

К-10 (итоговая)

Вариант 1

1. $\left(\dfrac{a+2}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right)\cdot\dfrac{a-2}{3a+2}=\dfrac{a^2+4a+4-a^2+2a}{(a-2)(a+2)}\cdot\dfrac{a-2}{3a+2}=\dfrac{2(3a+2)}{(a+2)(3a+2)}=$

$=\dfrac{2}{a+2}$

2. $\begin{cases} x-y=6 \\ xy=16 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x-6 \\ xy=16 \end{cases}$; $x(x-6)=16$; $x^2-6x-16=0$;

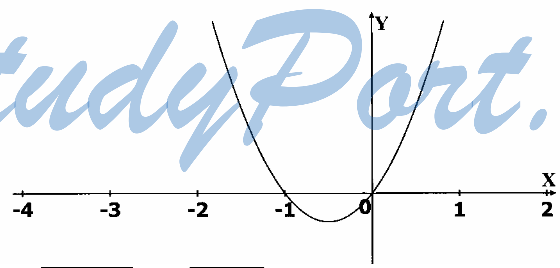
$\mathrm{D}=36+4\cdot 16=100$; $x_1=\dfrac{6+10}{2}=8$, $x_2=-2$; $y_1=8-6=2$,

$y_2=-2-6=-8$. Ответ: $(8;2)$, $(-2;-8)$.

3. $5x-1{,}5(2x+3)<4x+1{,}5$; $5x-3x-4{,}5<4x+1{,}5$; $2x>-6$; $x>-3$.

4. $a^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{7}{6}}$.

5. $y=x^2-4$; $y>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.



6. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$;

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=-0{,}96$.

7. Пусть x деталей - в час должна была изготовлять бригада. Тогда $\dfrac{40}{x}$ — плановый срок выполнения задания, $(x+8)$ — изготовляет в час бригада в действительности, $\left(\frac{40}{x}-2\right)$ — в действительности работала бригада, $(x+8)\left(\frac{40}{x}-2\right)$ дет. — изготовила бригада или 48 деталей. Получаем уравнение: $(x+8)\left(\frac{40}{x}-2\right)=48$; $40+\frac{320}{x}-2x-16=48$; $x-12+24-\frac{160}{x}=0$; $x+12-\frac{160}{x}=0$; $x^2+12x-160=0$;

$D=144+4\cdot160=784$ $x_1=\frac{-12+28}{2}=8$, $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. 8дет. — должна была изготовлять в час бригада.

Вариант 2.

1. $\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{x}{x+3}\right)\div\frac{x+1}{x+3}=\frac{x^2+6x+9-x^2+3x}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x+1}=\frac{9(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\frac{9}{x-3}$.

2. $\begin{cases}x-y=2\\xy=15\end{cases}$; $\begin{cases}x=2+y\\xy=15\end{cases}$; $y(2+y)=15$; $y^2+2y-15=0$;

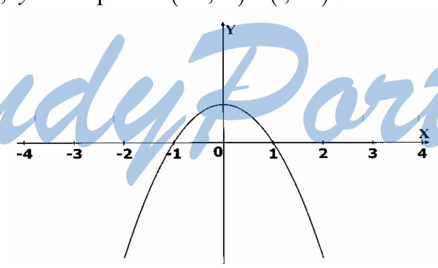
$D=4+4\cdot15=64$; $y_1=\frac{-2+8}{2}=3$, $y_2=-5$; $x_1=2+3=5$,

$x_2=2-5=-3$. Ответ: $(5;3)$, $(-3;-5)$.

3. $2x-4{,}5>6x-0{,}5(4x-3)$; $2x-4{,}5>6x-2x+1{,}5$; $2x<-6$; $x<-3$.

4. $y^{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{y^3}=y^{\frac{1}{5}}\cdot y^{\frac{3}{10}}=y^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}}=y^{\frac{1}{2}}$.

5. $y=-x^2+1$; $y<0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;-\infty)$.



6. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$;

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{120}{169}$.

7. Пусть x км/ч — скорость 1 велосипедиста. Тогда $(x+3)$ км/ч — скорость второго, $\frac{45}{x}$ ч и $\frac{45}{x+3}$ ч — были в пути 1–ый и 2-ой велосипедисты соответственно, на 30+15=45мин= $\frac{3}{4}$ ч – был меньше в пути 2-ой велосипедист. Получаем уравнение: $\frac{45}{x} = \frac{45}{x+3} + \frac{3}{4}$;

$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+3} - \frac{1}{4} = 0$; $\begin{matrix} 60(x+3) - 60x - x(x+3) = 0 \\ 60x + 180 - 60x - x^2 - 3x = 0 \end{matrix}$; $x^2 + 3x - 180 = 0$;

$D = 9 + 4 \cdot 180 = 729$ $x_1 = \frac{-3+27}{2} = 12$, $x_2 < 0$ — не удовлетворяет условию задачи. 12 км/ч – скорость 1 велосипедиста.

Вариант 3.

1. $\left(\frac{m+5}{m-5} - \frac{m}{m+5}\right) \cdot \frac{m+5}{3m+5} = \frac{m^2 + 10m + 25 - m^2 + 5m}{(m-5)(m+5)} \cdot \frac{m+5}{3m+5} =$

$= \frac{5(3m+5)}{(m-5)(3m+5)} = \frac{5}{m-5}$.

2. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ xy = 14 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ xy = 14 \end{cases}$; $y(11-2y) = 14$; $2y^2 - 11y + 14 = 0$;

$B = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 9$; $y_1 = \frac{11+3}{4} = \frac{7}{2}$, $y_2 = 2$;

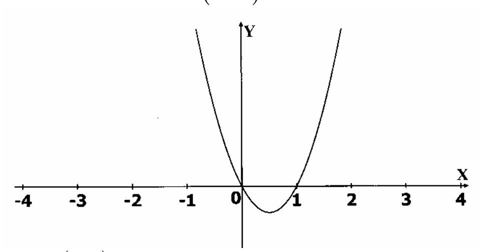
$x_1 = 11 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 4$, $x_2 = 11 - 2 \cdot 2 = 7$. Ответ: $(4;3,5)$, $(7;2)$.

3. $5x - 3(x - 1,5) < 4x + 1,5$; $5x - 3x + 4,5 < 4x + 1,5$; $\begin{matrix} 2x > 3 \\ x > 1,5 \end{matrix}$.

Ответ: $x > 1,5$.

4. $a^{\frac{5}{6}} \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$.

5. $y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$.



$y < 0$ при $x \in (0;2)$.

6. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8$ =-0,96.

7. Пусть x дет. — в день должна была сделать бригада по плану. Тогда $\dfrac{210}{x}$ дн. — плановый срок выполнения задания, $(x+10)$ дет. — изготовляла в день бригада в действительности, $\left(\dfrac{210}{x}-1\right)$ дн. — в действительности работала бригада, $(x+10)\left(\dfrac{210}{x}-1\right)$ дет. – изготовила бригада или 240 деталей. Получаем уравнение: $(x+10)\left(\dfrac{210}{x}-1\right)=240$;

$210+\dfrac{2100}{x}-x-10=240$; $x+40-\dfrac{2100}{x}=0$; $x^2+40x-2100=0$;

$D=1600+4\cdot 2100=10000$ $x_1=\dfrac{-40+100}{2}=30$, $x_2<0$ - не удовлетворяет условию задачи. 30дет. – в день должна была сделать бригада по плану.

Вариант 4.

1. $\left(\dfrac{y+1}{y-1}-\dfrac{y}{y+1}\right)\div\dfrac{3y+1}{y^2+y}=\dfrac{y^2+2y+1-y^2+y}{(y-1)(y+1)}\cdot$

$\cdot\dfrac{y(y+1)}{3y+1}=\dfrac{(3y+1)\cdot y}{(y-1)(3y+1)}=\dfrac{y}{y-1}$.

2. $\begin{cases}x+y=5\\x-y^2=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=5-y\\x-y^2=3\end{cases}$; $5-y-y^2=3$; $y^2+y-2=0$;

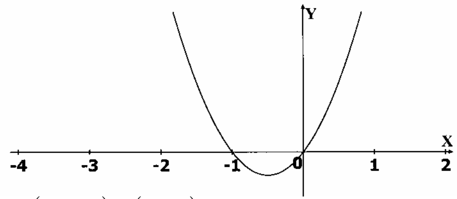
$D=1+4\cdot 2=9$; $y_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $y_2=-2$;

$x_1=5-1=4$, $x_2=5-(-2)=7$. Ответ: $(4;1)$, $(7;-2)$.

3. $x-2{,}5(2x-1)>x-1{,}5$; $x-5x+2{,}5>x-1{,}5$; $5x<4$; $x<0{,}8$.

4. $y^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[8]{y^3}=y^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{3}{8}}=y^{\frac{3}{4}+\frac{3}{8}}=y^{\frac{9}{8}}$.

5. $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$



$y > 0$ при $x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$.

6. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -2 \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{8}{17} = -\frac{240}{289}$.

7. Пусть x км — расстояние между А и В. Тогда $\frac{x}{2}$ км — половина АВ, $\frac{x}{2 \cdot 60} = \frac{x}{120}$ ч — проехал половину пути, 60+15=75 км/ч – новая скорость, $\frac{x}{2 \cdot 75} = \frac{x}{150}$ ч — проехал вторую половину пути, $\left(\frac{x}{120} + \frac{x}{150}\right)$ ч — был в пути, $\frac{x}{60}$ ч — должен был быть в пути по плану. Учитывая, что автобус задержался на 30 мин = ½ ч, получаем уравнение: $\frac{x}{120} + \frac{x}{150} + \frac{1}{2} = \frac{x}{60}$; $\frac{x}{60} + \frac{x}{75} - \frac{x}{30} = -1$; $-x \cdot \frac{15}{60 \cdot 75} = -1$;
$x = \frac{60 \cdot 75}{15} = 300$. 300км – расстояние между А и В.

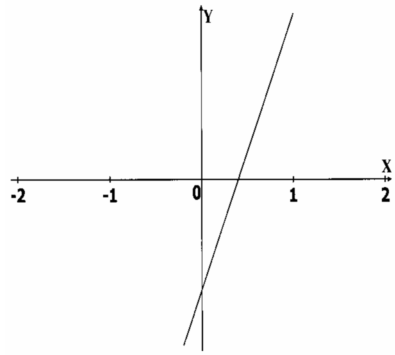
ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПО ТЕМАМ (К УЧЕБНИКУ ПОД РЕДАКЦИЕЙ ТЕЛЯКОВСКОГО) КВАДРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Функция – такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. а) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$, $f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0+1} = 0$, $f(5) = \frac{3 \cdot 5}{5+1} = \frac{15}{6} = 2{,}5$, $f(-1{,}5) = \frac{-3 \cdot 1{,}5}{-1{,}5+1} = \frac{4{,}5}{0{,}5} = 9$;

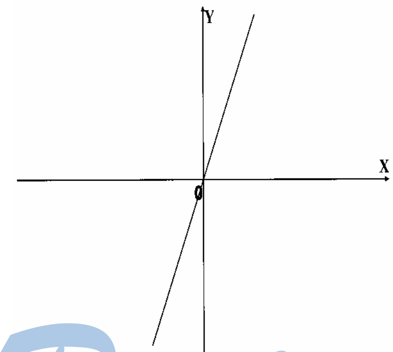
б) $f(x) = 2x^2 + x - 3$; $f(0) = -3$; $f(5) = 2 \cdot 25 + 5 - 3 = 52$;
$f(-1{,}5) = 2 \cdot 2{,}25 - 1{,}5 - 3 = 0$.

2. Область определения функции — все значения независимой переменной. Область значения функции — все значения, которые принимает зависимая переменная. График функции — множество всех точек координатной плоскости абсциссы, которых равны значениям аргумента, ординаты равны соответствующим значениям функции.

а) $y = 5x - 4$; $D(y) = E(y) = R$;

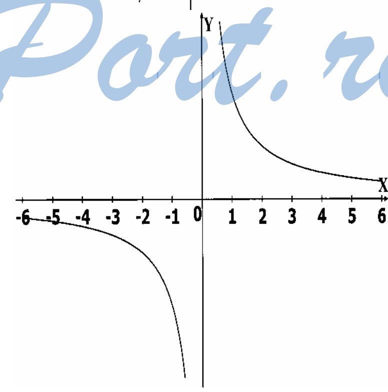


б) $y = 3{,}5x$; $D(y) = E(y) = R$;



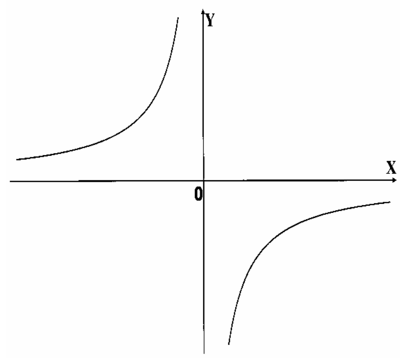
в) $y = \dfrac{6}{x}$;

$D(y) = E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.



г) $y=-\dfrac{8}{x}$.

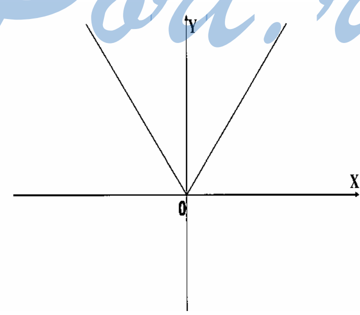
$D(y)=E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$



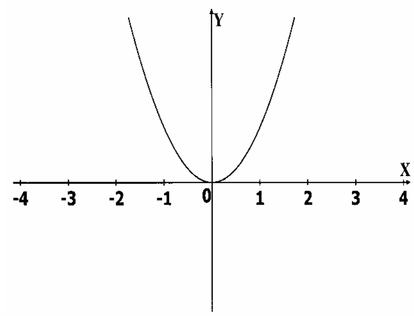
3. а) $y=1{,}7x-0{,}03$; $D(y)=R$; б) $y=\dfrac{1{,}6+x}{0{,}8-2x}$; $0{,}8-2x\neq 0$, т.к. знаменатель $x\neq 0{,}4$; $D(y)=(-\infty;0{,}4)\cup(0{,}4;+\infty)$; в) $y=\dfrac{4}{12+x^2}$; $D(y)=R$; г) $y=\dfrac{|x|}{4}$; $D(y)=R$; д) $y=\sqrt{3x-7}$; $3x-7\geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty]$; $x\geq 7/3$; $D(y)=[7/3;+\infty]$; е) $y=\sqrt{x^2-4}$; $x^2-4\geq 0$ т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty]$; $(x-2)(x+2)\geq 0$ $D(y)=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

4. Возрастающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. Убывающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

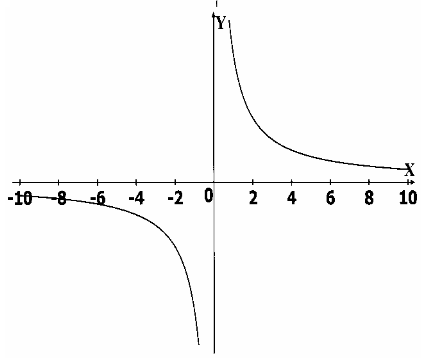
а) $y=|x|$, y возрастающая при $x\geq 0$, убывающая при $x\leq 0$;



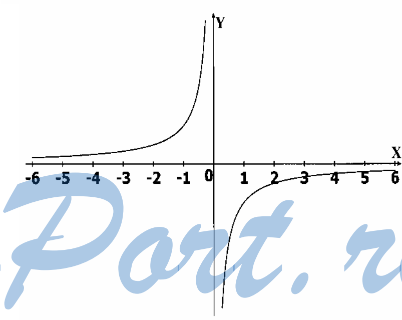
б) $y = x^2$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;



в) $y = \frac{12}{x}$, y убывающая при $x \neq 0$;



г) $y = -\frac{4}{x}$, y возрастающая при $x \neq 0$.



5. $y = x - 4{,}3$ - возрастающая,
$y = 1{,}6 - x$; $y = -4{,}2x + 8{,}1$; $y = 5{,}2 - x$ - убывающая.

6. Теорема: Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; а) $4x^2 + 11x - 3 = 0$;

$D = 121 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169$; $x_1 = \frac{-11 + 13}{8} = \frac{1}{4}$, $x_2 = -3$;

$4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 3) = (4x - 1)(x + 3)$; б) $-2x^2 - 9x + 18 = 0$;

$2x^2+9x-18=0$; $D=81+4\cdot 2\cdot 18=225$; $x_1=\dfrac{-9+15}{4}=\dfrac{3}{2}$, $x_2=-6$;

$-\left(2x^2+9x-18\right)=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+6)=-(2x-3)(x+6)=(3-2x)(x+6)$;

в) $5x^2-30x+45=0$; $x^2-6x+9=0$; $(x-3)^2=0$ $x_{1,2}=3$;

$5x^2-30x+45=5(x-3)^2$.

7. а) $\dfrac{2x^2+13x-24}{4x^2-9}=\dfrac{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+8)}{(2x-3)(2x+3)}=\dfrac{x+8}{2x+3}$; $2x^2+13x-24=0$;

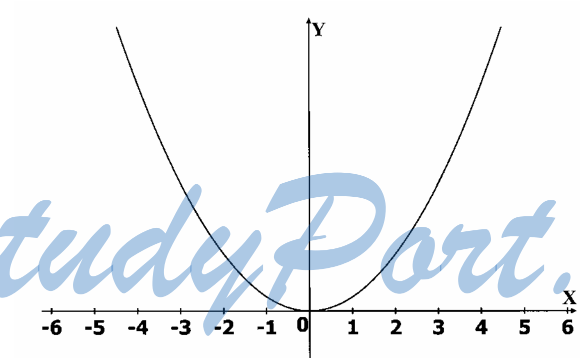
$D=169+4\cdot 2\cdot 24=361$; $x_1=\dfrac{-13+19}{4}=\dfrac{3}{2}$, $x_2=-8$;

б) $\dfrac{5x^2+34x-7}{25x^2-10x+1}=\dfrac{5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)(x+7)}{(5x-1)^2}=\dfrac{x+7}{5x-1}$; $5x^2+34x-7=0$;

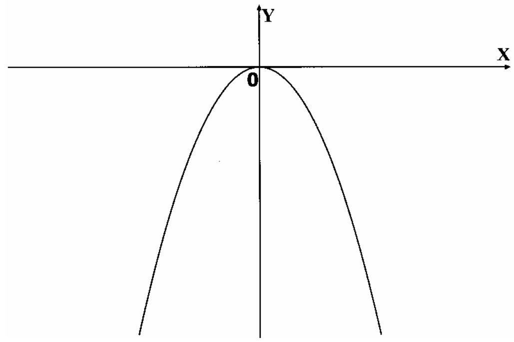
$D=1156+20\cdot 7=36^2$ $x_1=\dfrac{-34+36}{10}=\dfrac{1}{5}$ $x_2=-7$.

8. Квадратичная функция – функция, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где x - независимая переменная, a , b , c – некоторые числа, причем $a\neq 0$. График квадратичной функции - парабола.

9. а) $y=0{,}5x^2$;



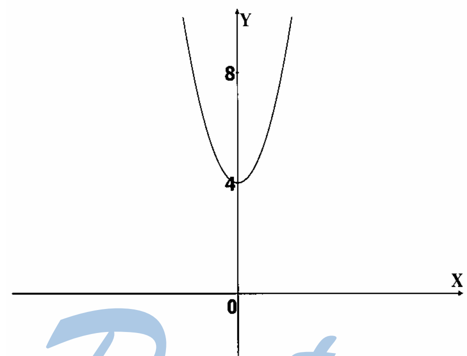
б) $y=-0{,}4x^2$.



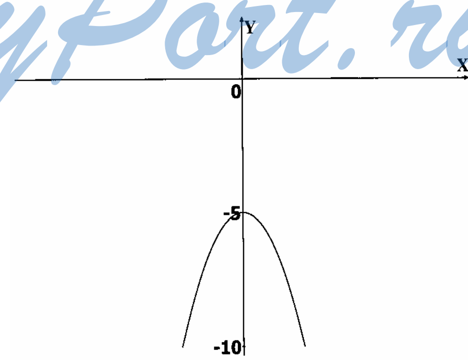
Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$: 1. если $x = 0$, то $y = 0$, 2. если $x \neq 0$, то $y > 0$, 3. функция является четной, 4. Функция убывает в промежутке $(-\infty;0]$ и возрастает в промежутке $[0;+\infty)$, 5. $y_{min} = y(0) = 0$, $E(y) = [0;+\infty)$.

10.

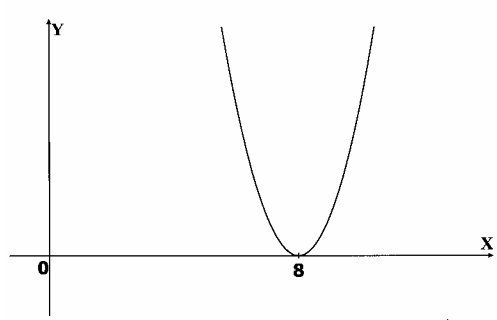
а) I,II - четверти;



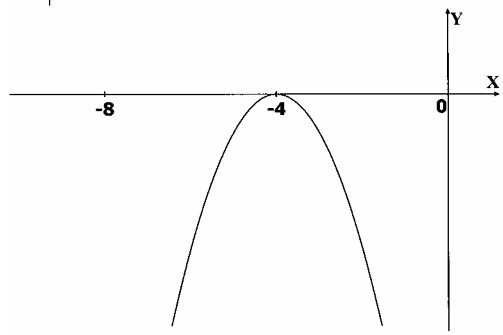
б) III,IY - четверти;



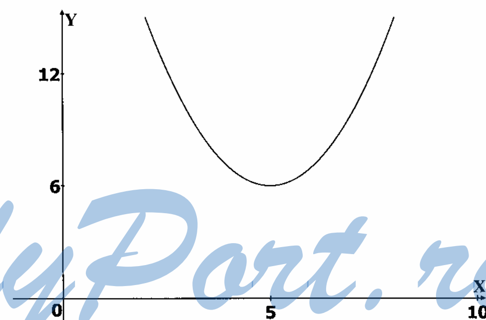
в) I,II - четверти



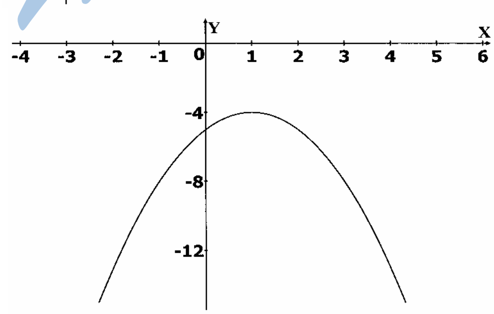
г) III,IY — четверти



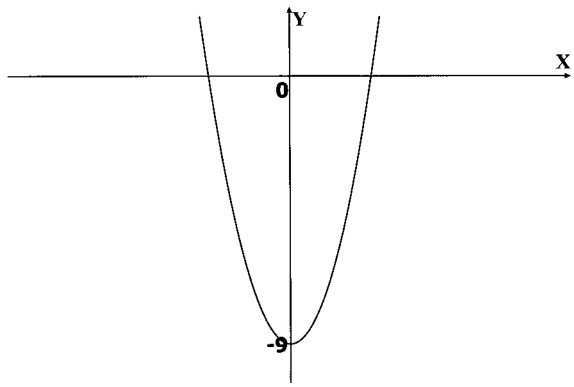
д) I,II - четверти



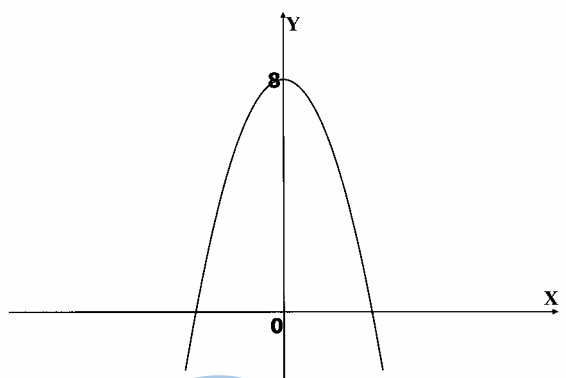
е) III,IY - четверти



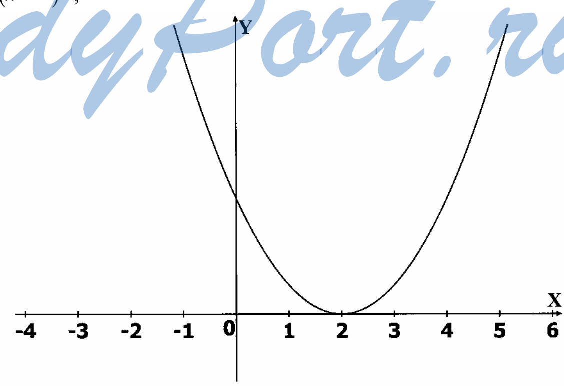
11. а) $y = x^2 - 9$;



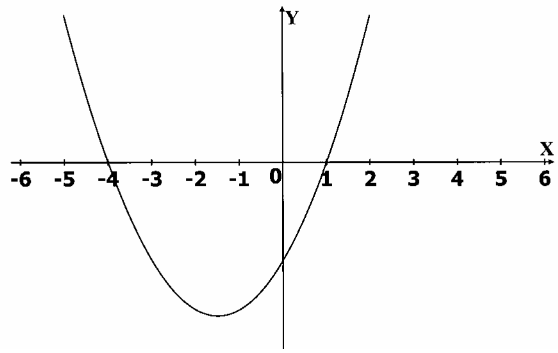
б) $y = -2x^2 + 8$;



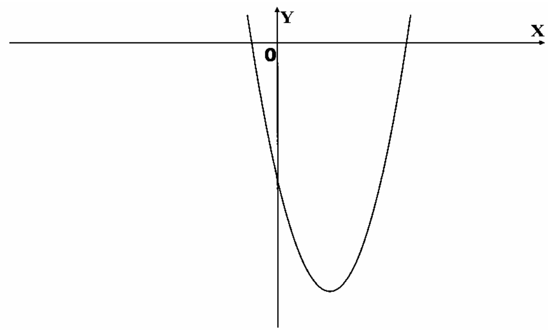
в) $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$;



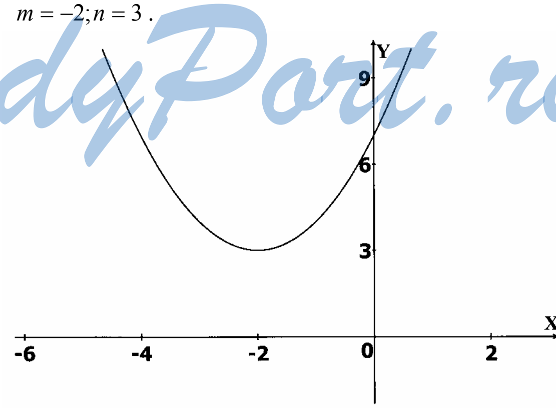
г) $y = x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$;



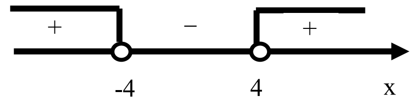
д) $y = 2x^2 - 8x - 10$; $\quad m = \frac{8}{4} = 2; n = 8 - 16 - 10 = -18$;



е) $y = x^2 + 4x + 7$; $\quad m = -2; n = 3$.



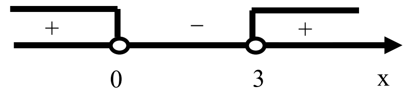
12. а) $x^2 - 16 > 0$; $(x-4)(x+4) > 0$.



Ответ: $(-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$.

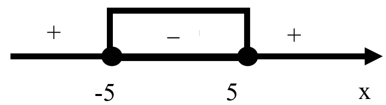
б) $-x^2 - 12 < 0$; $x^2 + 12 > 0$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

в) $x^2 > 3x$; $x^2 - 3x > 0$; $x(x-3) > 0$.



Ответ: $(-\infty;0] \cup [3;+\infty)$.

г) $x^2 < 25$; $(x-5)(x+5) < 0$.



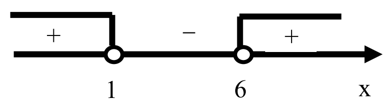
Ответ: $[-5;5]$.

д) $x^2 - 22x + 121 > 0$; $(x-11)^2 > 0$; $x \neq 11$. Ответ: $x \neq 11$.

е) $x^2 - 12x + 36 < 0$; $(x-6)^2 < 0$. Ответ: нет решения.

ж) $2x^2 - 14x + 12 > 0$; $x^2 - 7x + 6 > 0$; $D = 49 - 4 \cdot 6 = 25$;

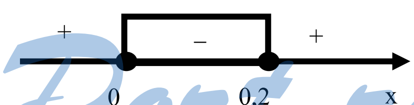
$x_1 = \dfrac{7+5}{2} = 6; x_2 = 1$; $(x-6)(x-1) > 0$.



Ответ: $(-\infty;1) \cup (6;+\infty)$.

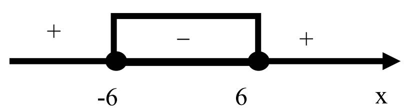
13. а) $y = \sqrt{6x - 30x^2}$; $6x - 30x^2 \geq 0$; $30x^2 - 6x \leq 0$;

$x^2 - \dfrac{x}{5} \leq 0$; $x\left(x - \dfrac{1}{5}\right) \leq 0$.



Ответ: $[0;0,2]$

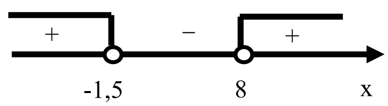
б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$; $36 - x^2 > 0$; $x^2 - 36 < 0$; $(x-6)(x+6) < 0$.



Ответ: $[-6;6]$.

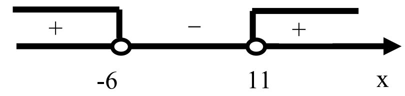
в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 13x - 24}}$; $2x^2 - 13x - 24 > 0$; $D = 169 + 8 \cdot 24 = 361$;

$x_1 = \dfrac{13+19}{4} = 8; x_2 = -1,5$.



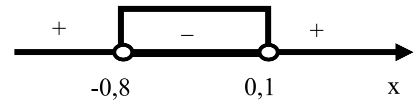
Ответ: $(-\infty;-1,5) \cup (8;+\infty)$.

14. а) $(x+6)(x-11)>0$.



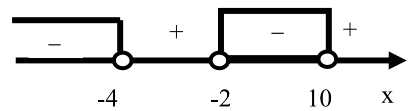
Ответ: $(-\infty;-6)\cup(11;+\infty)$.

б) $(x-0{,}1)(x+0{,}8)<0$.



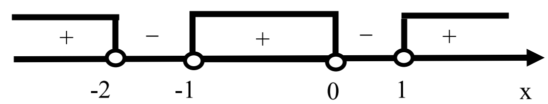
Ответ: $(-0{,}8;0{,}1)$.

в) $(x+4)(x+2)(x-10)<0$.



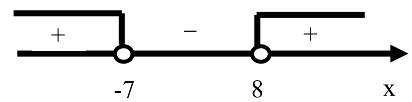
Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-2;10)$

г) $x(x+2)(x+1)(x-1)>0$.



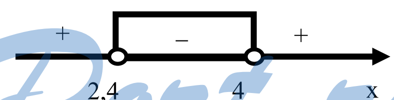
Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

15. а) $(x+7)(x-8)>0$.



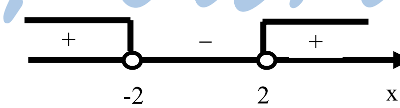
Ответ: $(-\infty;-7)\cup(8;+\infty)$.

б) $(x-4)(5x-12)<0$; $(x-4)\left(x-\dfrac{12}{5}\right)<0$.



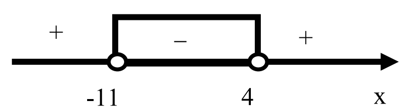
Ответ: $(2{,}4;4)$.

в) $\dfrac{x-2}{3x+6}>0$; $\dfrac{x-2}{x+2}>0$.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

г) $\dfrac{2x-8}{x+11}<0$; $\dfrac{x-4}{x+11}<0$.



Ответ: $(-11;4)$.

Уравнения и системы уравнений

1. Целое уравнение-уравнение, в котором обе части являются целыми выражениями. Например: $x^4 - 10x^2 + 3 = 0$.

2. Степень целого уравнения – степень многочлена $P(x)$, когда уравнение записано в виде $P(x) = 0$; $(x^2 - 8)(3x^2 - 4x) = 3x^5$;

$3x^5 - 24x^3 - 4x^3 + 32x = 3x^5$; $-28x^3 + 32x = 0$, значит, степень уравнения равна трем. Ответ: 3.

3. а) $(2x+4)(3x-1) - (6x-12)(x+3) = 100$;

$(x+2)(3x-1) - (3x-6)(x+3) = 50$; $3x^2 + 5x - 2 - 3x^2 - 3x + 18 - 50 = 0$;

$2x = 2 - 18 + 50$; $x = 1 - 9 + 25$; $x = 17$; б) $6x(x+1) - (x^2 - x - 2) = 68$;

$6x^2 + 6x - x^2 + x + 2 - 68 = 0$; $5x^2 + 7x - 66 = 0$; $D = 37^2$;

$x_1 = \frac{-7+37}{10} = 3; x_2 = -4{,}4$.

4. При $D > 0$ 2 корня, при $D = 0$ 1 корень, при $D < 0$ нет корней.

а) $3x^2 + kx + 12 = 0$; $D = k^2 - 144 > 0$; $(k-12)(k+12) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$. б) $3x^2 + 6x + k = 0$; $D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$; $36 = 12k, k = 3$.

в) $15x^2 + kx + 60 = 0$; $D = k^2 - 4 \cdot 15 \cdot 60 < 0$; $(k-60)(k+60) < 0$.

5. а) $(x^2 + 2x)^2 - 10(x^2 + 2x) + 21 = 0$; $x^2 + 2x = y$; $y^2 - 10y + 21 = 0$;

$D = 100 - 84 = 16$, $y_1 = \frac{10+4}{2} = 7; y_2 = 3$; $x^2 + 2x = 7$; $x^2 + 2x - 7 = 0$;

$D = 4 + 4 \cdot 7 = 32; x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$; $x^2 + 2x = 3$;

$x^2 + 2x - 3 = 0$; $D = 4 + 4 \cdot 3 = 16; x_3 = \frac{-2+4}{2} = 1; x_4 = -3$.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{2}; 1; -3$.

б) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 4) = 50$; $x^2 + x + 1 = y$; $y(y+3) = 50$; $D = 9 + 4 \cdot 50 = 209$.

6. Биквадратное уравнение – уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Оно может иметь от одного до четырех корней или не иметь корней.

а) $x^4 - 11x^2 - 80 = 0$; $x^2 = y \geq 0, y^2 - 11y - 80 = 0$; $D = 121 + 4 \cdot 80 = 21^2$;

$y_1 = \frac{11+21}{2} = 16; y_2 < 0$; $x^2 = 16; x_{1,2} = \pm 4$. Ответ: ± 4.

б) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$; $x^2 = y \geq 0, 9y^2 + 17y - 2 = 0$;

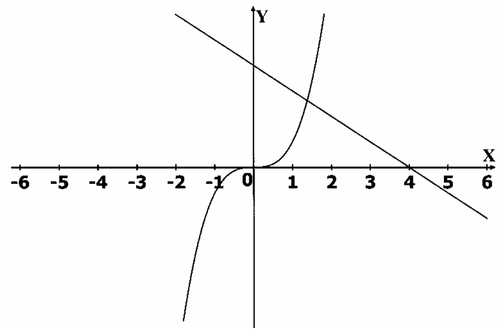
$D = 289 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 19^2, y_1 = \frac{-17+19}{18} = \frac{1}{9}, y_2 < 0$; $x^2 = \frac{1}{9}; x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$.

в) $12x^4 + 19x^2 + 5 = 0$; $x^2 = y \geq 0, 12y^2 + 19y + 5 = 0$;

$D = 361 - 48 \cdot 5 = 121$; $y_1 = \frac{-19+21}{24} = \frac{1}{12}$, $y_2 < 0$; $x^2 = \frac{1}{12}; x_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

г) $\left(2x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)-12\left(x^2+7\right)=131$; $x^2=y\geq 0$;
$(2y-1)(2y+1)-12(y+7)-131=0$; $4y^2-1-12y-84-131=0$;
$4y^2-12y-216=0$; $y^2-3y-54=0, D=15^2$; $y_1=\frac{3+15}{2}=9,\ y_2<0$;
$x^2=9; x_{1,2}=\pm 3$.

7. $x^3=4-x$; $x\approx 1{,}4$ уточненное значение $x\approx 1{,}38$.

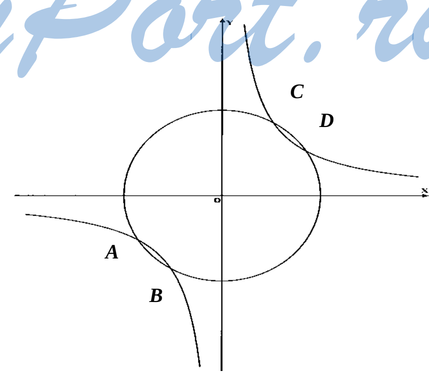


8. Решение системы уравнений с двумя неизвестными x и y - пара чисел (x_0, y_0), при подставлении которой в систему получаются верные равенства.

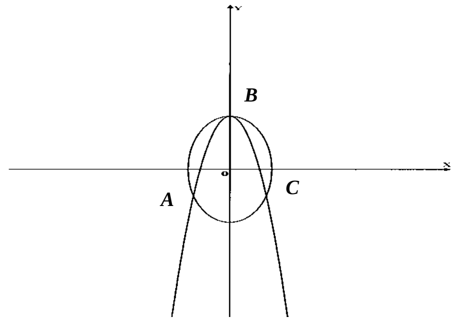
а) $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x^2+3y=37 \end{cases}$; $\begin{cases} (-5)^2-4^2=9 \\ (-5)^2+3\cdot 4=37 \end{cases}$ — верно, значит, $(-5;4)$ - решение.

б) $\begin{cases} x^2+3xy=5 \\ xy=-20 \end{cases}$; $\begin{cases} (-5)^2+3(-5)\cdot 4=5 \\ -5\cdot 4=-20 \end{cases}$ — ложно, значит, $(-5;4)$ - не является решением.

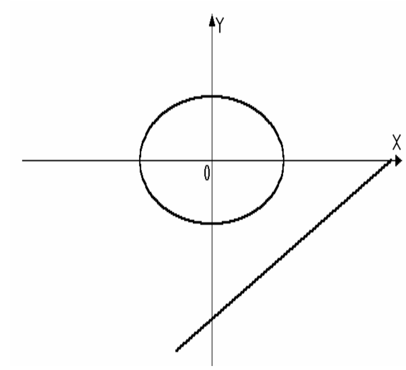
9. а) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ xy=4 \end{cases}$. Ответ: $(\pm 2{,}6;\pm 1{,}6)$, $(\pm 1{,}6;\pm 2{,}6)$.



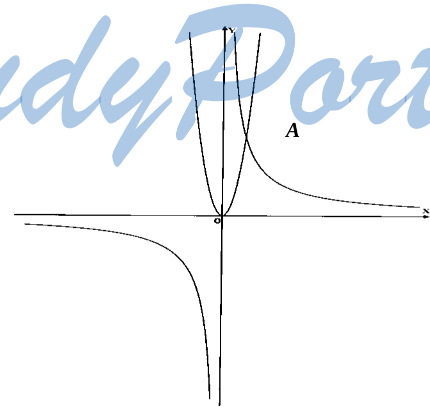
б) $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. Ответ: $(0;2),(1,7;-1),(-1,7;-1)$.



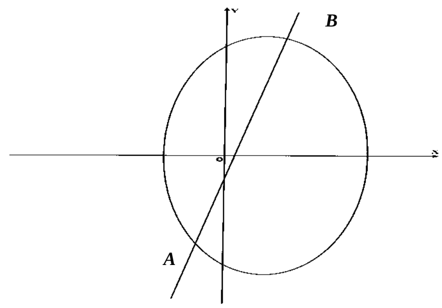
10. а) Ответ: нет.



б) Ответ: да.



в) Ответ: да.



11. а) $\begin{cases} 2x - y = 13 \\ x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$; $y = 2x - 13$; $x^2 - (2x - 13)^2 = 23$;

$x^2 - 4x^2 + 52x - 169 = 23$; $3x^2 - 52x + 192 = 0$;

$D = 400, x_1 = \dfrac{52 + 20}{6} = 12, x_2 = \dfrac{16}{3}$; $y_1 = 9, y_2 = -\dfrac{7}{3}$. Ответ: $(12;9), \left(\dfrac{16}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

б) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 73 \end{cases}$; $x = 5 - 3y$; $25 - 30y + 9y^2 - 5y + 3y^2 + y^2 - 73 = 0$;

$13y^2 - 35y - 48 = 0$; $D = 61^2, y_1 = \dfrac{35 + 61}{26} = \dfrac{48}{13}; y_2 = -1$; $x_1 = \dfrac{-79}{13}; x_2 = 8$.

Ответ: $\left(-\dfrac{79}{13}; \dfrac{48}{13}\right), (8;-1)$.

в) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 23 \\ 2x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$; $4x^2 = 64$ $x^2 = 16$ $x_{1,2} = \pm 4$; $32 - y^2 = 23$;

$y^2 = 9$; $y_{1,2} = \pm 3$. Ответ: $(4;\pm 3), (-4;\pm 3)$.

г) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$; $y = 7 - 2x$; $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{7 - 2x} - \dfrac{5}{6} = 0$;

$6(7 - 2x) + 6x - 5x(7 - 2x) = 0$; $42 - 12x + 6x - 35x + 10x^2 = 0$;

$10x^2 - 41x + 42 = 0$ $D = 1, x_1 = \dfrac{41 + 1}{20} = \dfrac{21}{10} = 2{,}1; x_2 = 2$; $y_1 = 2{,}8; y_2 = 3$.

Ответ: $(2{,}1;2{,}8), (2;3)$.

12. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м^2 - площадь или 4800м^2, $2(x + y)$м – периметр или 280м. Получаем систему:

$\begin{cases} xy = 4800 \\ 2(x + y) = 280 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 4800 \\ x = 140 - y \end{cases}$; $y(140 - y) = 4800$;

$y^2 - 140y + 4800 = 0; D = 20^2; y_1 = \frac{140+20}{2} = 80; y_2 = 60$;
$x_1 = 60; x_2 = 80$. Итак, 60м и 80м – стороны прямоугольника.
Ответ: 60м, 80м.

Арифметическая и геометрическая прогрессия.

1. а) 6;12;18;24;30;36; б) 1;4;9;16;25;36.

2. а) $a_n = n^2 - 1$, $a_1 = 0, a_2 = 4 - 1 = 3, a_3 = 8, a_4 = 15, a_5 = 24$;

б) $a_n = \frac{n}{n+2}$, $a_1 = 0, a_2 = 1/2, a_3 = 3/5, a_4 = 2/3, a_5 = 5/7$;

в) $a_n = 0{,}5^n = 2^{n-1}$, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16$.

3. а) $a_1 = 20; a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; $a_2 = \frac{a_1}{2} = 10$; $a_3 = \frac{a_2}{2} = 5$; $a_4 = \frac{a_3}{2} = 2{,}5$;

$a_5 = \frac{a_4}{2} = 1{,}25$; б) $a_1 = -3; a_{n+1} = (-1)^n a_n$;
$a_2 = -a_1 = 3; a_3 = a_2 = 3; a_4 = -a_3 = -3; a_5 = a_4 = -3$.

4. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. $a_1 = 37, d = 4$;
$a_2 = a_1 + d = 41; a_3 = a_2 + d = 45; a_4 = a_3 + d = 49; a_5 = a_4 + d = 53$.

5. $a_n = a_1 + d(n-1)$; а) $a_{11} = a_1 + 10d = -3 + 10 \cdot 11 = 107$;
б) $a_{31} = a_1 + 30d = 0{,}8 - 30 \cdot 0{,}2 = -5{,}2$.

6. 12;17 ….; $a_1 = 12; d = -5; a_n = a_1 + d(n-1) = 12 - 5(n-1) = 17 - 5n$;
$-58 = 17 - 5n; 5n = 75; n = 15$, значит $-58 = a_{15}$;

$-76 = 17 - 5n; 5n = 93; n = \frac{93}{5} \notin N$, значит -76 - не член (a_n).

7. $a_n = kn + b$; $a_{n-1} = k(n-1) + b; a_{n+1} = k(n+1) + b; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;
$k_{n+b} = \frac{k(n-1) + b + k(n+1) + b}{2}$ – верно для любого $n \in N$, значит, (a_n) – арифметическая прогрессия, чтд.

а) $a_n = 3n - 1$ – арифметическая прогрессия с $k = 3, b = -1$;

б) $a_{nm} = -n + 16$ – арифметическая прогрессия с $k = -1, b = 16$;

в) $a_n = 0{,}4n$ – арифметическая прогрессия с $k = 0{,}4, b = 0$;

г) $a_n = 14n^2; a_1 = 14; a_2 = 56; a_3 = 126$;
$56 - 14 \neq 126 - 56$, значит (a_n) – не арифметическая прогрессия;

д) $a_n = \frac{n}{4}$ – арифметическая прогрессия с $k = \frac{1}{4}, b = 0$.

8. $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$; 1,5; 4,5; 7,5;….; $a_1=1{,}5; d=3$; $S_6=\frac{2\cdot 1{,}5+3\cdot 5}{2}\cdot 6=54$.

9. а) $a_1=-8; d=5$; $S_{10}=\frac{-16+5\cdot 9}{2}\cdot 10=145$;

б) $a_1=0{,}4; d=-0{,}2$; $S_{10}=\frac{0{,}8-0{,}2\cdot 9}{2}\cdot 10=-5$.

10. 50; 51; 52; ….. ; 70; $n=21; a_1=50; d=1$; $S_{21}=\frac{100+20}{2}\cdot 21=1260$.

11. Геометрическая прогрессия – такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. $b_1=72, q=05$;
$b_2=72\cdot 0{,}5=36; b_3=36\cdot 0{,}5=18; b_4=18\cdot 0{,}5=9; b_5=9\cdot 0{,}5=4{,}5$.

12. $b_n=b_1q^{n-1}$; а) $b_1=2, q=-1, b_5=2\cdot q^4=2\cdot(-1)^4=2$;

б) $b_1=8, q=1/2, b_6=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{2^3}{2^5}=\frac{1}{4}$;

в) $b_1=2, q=\sqrt{2}, b_7=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^6=2\cdot 2^3=16$.

13. $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, при $q\neq 1$; 12; -6; 3; ….. $b_1=12; q=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$;

$$S_6=\frac{12\left(\frac{1}{67}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{12\cdot 63\cdot 2}{64\cdot 3}=\frac{21\cdot 3}{8}=\frac{63}{8}.$$

14. а) $b_1=12, q=-2$; $S_6=\frac{12(64-1)}{-3}=\frac{-12\cdot 63}{3}=-252$;

б) $b_1=3, q=\sqrt{3}$; $S_6=\frac{3(27-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{78}{\sqrt{3}-1}$.

15. $S=\frac{b_1}{1-q}; b_1=6, q=-0{,}1$

16. а) 12; -4; 1; …..; $q=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}; |q|<1$; $b_1=12; S=\frac{12\cdot 3}{4}=9$;

б) 2; $\sqrt{2}$;1; …..; $q=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}; |q|<1$; $b_1=2; S=\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

17. а) $0,(5)=0{,}555......=0{,}5+0{,}05+.....=\frac{0{,}5}{1-0{,}1}=\frac{5}{9}$;

б) $0,(26)=0{,}2626.......=0{,}26+0{,}0026+.....=\frac{0{,}26}{1-0{,}01}=\frac{26}{99}$;

в) $0{,}3(2)=0{,}3222.....=0{,}3+0{,}02+0{,}002+...=0{,}3+\frac{0{,}02}{1-0{,}1}=\frac{3}{10}+\frac{2}{90}=\frac{29}{90}$.

Степень с рациональным показателем.

1. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x)=f(x)$. Функция $f(x)$ называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x)=-f(x)$. $f(x)=x^2$ - четная, $q(x)=x$ – не четная.

2. а) $y=15x^2$ $y(-x)=15\cdot(-x)^2=15x^2=y(x)$, значит $y(x)$ – четная;
б) $y=-46x^3$; $y(-x)=-46\cdot(-x)^3=46x^3=-y(x)$, значит $y(x)$ – нечетная;
в) $y=|x|$ $y(-x)=|-x|=|x|=y(x)$, значит $y(x)$ – четная;
г) $y=2x|x|$ $y(-x)=2(-x)|x|=-2x|x|=-y(x)$, значит $y(x)$ – нечетная;
д) $y=x^4+x^2+1$ $y(-x)=(-x)^4+(-x)^2+1=x^4+x^2+1=y(x)$, значит, $y(x)$ – четная;
е) $y=x^3+x-2$ $y(-x)=(-x)^3+(-x)-2=-x^3-x-2\neq\pm y(x)$, значит, $y(x)$ – не четная и не нечетная;
ж) $y=(x-8)^2$ $y(-x)=(-x-8)^2\neq\pm y(x)$, значит $y(x)$ – не четная и не нечетная; з) $y=\frac{10}{x}$; $y(-x)=\frac{10}{-x}=-y(x)$, значит $y(x)$ – нечетная;
и) $y=\frac{4}{x^2}$; $y(-x)=\frac{4}{(-x)^2}=\frac{4}{x^2}=y(x)$, значит $y(x)$ – четная;
к) $y=\frac{13}{x+2}$; $y(-x)=\frac{13}{-x+2}\neq\pm y(x)$, значит $y(x)$ – не нечетная и не четная.

3. $y=x^a$, где $a\in N$; Например: $y=x^2; y=x^5$.

4. 1. Если $x=0$, то $y=0$. 2. Если $x\neq0$, то $y>0$. 3. Функция является четной. 4. Функция возрастает в промежутке $[0;+\infty)$ и убывает в $(-\infty;0]$. 5. Область значения функции есть множество неотрицательных чисел.

5. $f(x)=x^{12}$; а) $f(-4)>0;\ f(0)=0; f(4)>0$;
б) $f(5,6)<f(7,6)$ т.к. $|5,6|<|7,6|$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)>f\left(-\frac{1}{3}\right)$ т.к. $\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|-\frac{1}{3}\right|$.

6. 1. Если $x=0$, то $y=0$. 2. Если $x>0$, то $y>0$ и если $x<0$, то $y<0$. 3. Функция является нечетной. 4. Функция возрастает на всей области определения. 5. Область значения функции есть множество всех действительных чисел.

7. $f(x)=x^{13}$; а) $f(-2,5)<0;\ f(0)=0;\ f(1,5)>0$;
б) $f(1,4)<f(1,6)$ т.к. $1,4<1,6$, $f(-3)>f(-5)$ т.к. $-3>-5$.

8. Арифметический корень n-ой степени из числа a – неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

а) $\frac{1}{3}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ т.к. $\frac{1}{3}\geq 0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$; б) $-\frac{1}{5}\neq\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$ т.к. $\frac{-1}{5}<0$.

9. а) $\sqrt[3]{216}=6$; б) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=-0{,}5$; в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=1{,}5$;

г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=-1{,}5$; д) $-0{,}5\sqrt[4]{81}=-0{,}5\cdot 3=-1{,}5$;

е) $0{,}1\sqrt[6]{64}+0{,}2\sqrt[3]{-27}=0{,}1\cdot 2-0{,}2\cdot 3=-0{,}4$.

10. а) $x^3=8; x=2$ б) $x^3+27=0; x^3=-27; x=-3$;

в) $x^6=5; x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{5}$; г) $x^8=-9$ нет корней;

д) $81x^4-1=0$, $x^4=\frac{1}{81}; x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$; е) $16x^4+4=0; 16x^4=-4$ нет корней;

ж) $\frac{1}{16}x^5+2=0; x^5=-32; x=-2$.

11. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a,b\geq 0$.

Докажем, что $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$ и $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$.

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$ т.к. $\sqrt[n]{a},\sqrt[n]{b}\geq 0$.

По свойству степени произведения $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$, чтд.

а) $\sqrt[4]{0{,}0016\cdot 81}=0{,}2\cdot 3=0{,}6$;

б) $\sqrt[5]{2^4\cdot 3^2}\cdot\sqrt[5]{2\cdot 3^3}=\sqrt[5]{2^4\cdot 3^2\cdot 2\cdot 3^3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3^5}=6$.

12. Если $a\geq 0, b>0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Доказательство.

Докажем, что $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq 0$ и $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq 0$ т.к. $\sqrt[n]{a},\sqrt[n]{b}\geq 0$.

По свойству степени частного $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}$ чтд.

а) $\sqrt[6]{\frac{2^{12}}{3^6}}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$ б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\frac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=2$.

13. а) $\frac{15}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{25}}=\frac{6\sqrt[3]{25^2}}{25}=\frac{6}{25}\sqrt[3]{625}$;

в) $\frac{8}{\sqrt[4]{4}}=\frac{8\sqrt[4]{4^3}}{4}=2\sqrt[4]{64}$.

14. а) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$; б) $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt{\sqrt[5]{32}} = \sqrt{2}$;

в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt[3]{4-3} = 1$.

15. Если $a > 0$ и x — произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

а) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$ б) $81^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \frac{1}{3}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = 1{,}5$.

16. Для любых $a, b > 0$ и любых рациональных p и q :

1) $a^p a^q = a^{p+q}$; 2) $a^p \div a^q = a^{p-q}$; 3) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$; 4) $(ab)^p = a^p b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$;

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}}$; б) $a^{\frac{4}{5}} \div a^{0,1} = a^{0,8-0,1} = a^{0,7}$; в) $\left(a^{0,2}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$.

17. а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{0,5}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = a$; б) $\dfrac{a^{0,3} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a^{-1,3}} = \dfrac{a^{0,3} \cdot a^{0,4}}{a^{-1,3}} = a^{0,3+0,4+1,3} = a^2$.

18. а) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{3}{2}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 6$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{16} \cdot 25^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-0,6}} = \dfrac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{-3}{5}}} = 2 \cdot 5 = 10$.

Тригонометрические выражения и их преобразования

1. Синус угла a — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол a .

Косинус угла a — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол a .

Тангенс угла a — число равное отношению синуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi/2 + \pi k, k \in z$, к косинусу этого угла.

Котангенс угла a — число, равное отношению косинуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi k, k \in z$, к синусу этого угла.

а) $2\sin 30° - \cos 60° + 3tg 45° = 2 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 + 3 = 3{,}5$;

б) $4ctg45° - \sin 60° + \cos 30° = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

2.

четверть	I	II	III	IY
$sin\alpha$	+	+	-	-
$cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

а) $\sin 143° > 0$; б) $\cos 108° < 0$; в) $tg61° > 0$; г) $ctg280° < 0$;

д) $\sin 125° \cdot \cos 200° =$ «+» · «-» < 0; е) $tg160° ctg200° =$ «-» · «+» < 0.

3. $\sin 763° = \sin(720° + 43°) = \sin 43°$;

При этом использовалось следующее свойство: $sin(2\pi \cdot k + \alpha) = sin\alpha, k \in z$. Косинус, тангенс, котангенс обладают аналогичным свойством.

4. $y = \sin x, y = tgx, y = ctgx$ – нечетные; $y = cos\,x$ – четная;

а) $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0,5$; б) $tg(-45°) = -tg45° = -1$;

в) $\cos(-60°) = \cos 60° = 0,5$; г) $ctg(-30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$.

5. Угол в 1 рад – центральный угол которому соответствует длина дуги равная длине радиуса окружности.

а) $2,5 = \left(2,5 \cdot \frac{180}{\pi}\right)° = \left(\frac{450}{\pi}\right)°$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$;

в) $-\frac{\pi}{2} = -\frac{180°}{2} = -90°$; г) $10\pi = 10 \cdot 180° = 1800°$.

а) $120° = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3\pi}$; б) $270° = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$;

в) $-180° = -180 \cdot \frac{\pi}{180} = -\pi$; г) $-150° = -150 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{6}$.

6. а) $3\sin\pi - \cos\frac{3\pi}{2} - 3tg\frac{\pi}{4} = 0 - 0 - 3 = -3$;

б) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos(-\pi) + tg2\pi + tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\pi + tg2\pi - tg\frac{\pi}{4} =$

$= -2 \cdot 0,5 - 1 + 0 - 1 = -3$.

7. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$; $1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$; $1 + ctg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$; $tga \cdot ctga = 1$;

а) $1 - \sin a \cos a tga = 1 - \sin a \cos a \frac{\sin a}{\cos a} = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a$;

б) $2 - \cos^2 a - \sin^2 a = 2 - 1 = 1$;

в) $\frac{tgactga - \cos^2 a}{\sin^2 a - tgactga} = \frac{1 - \cos^2 a}{\sin^2 a - 1} = -\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = -tg^2 a$.

8. $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; а) $\sin a = 0{,}6; \cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -0{,}8$;

$tga = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$;

б) $\cos a = -\frac{15}{17}; \sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\frac{15^2}{17^2}} = \frac{8}{17}$; $tga = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{8}{15}$;

в) $tga = -\sqrt{3}; \cos a = \frac{-1}{\sqrt{1+tg^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2}$;

$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. а) $\sin(180°+a) = -\sin a$; б) $\cos(270°-a) = -\sin a$; в) $tg(90°+a) = -ctga$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$; д) $\cos(\pi - a) = -\cos a$; е) $tg\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = ctga$.

10. $\sin(a \pm \beta) = \sin a\cos\beta \pm \cos a \sin\beta$; $\cos(a \pm \beta) = \cos a\cos\beta \mp \sin a\sin\beta$;

а) $\frac{\sin(a-\beta)+\cos a\sin\beta}{\sin(a+\beta)-\cos a\sin\beta} = \frac{\sin a\cos\beta - \cos a\sin\beta + \cos a\sin\beta}{\sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta - \cos a\sin\beta} = 1$;

б) $\frac{\sin(a+\beta)+\sin(a-\beta)}{\cos(a+\beta)-\cos(a-\beta)} = \frac{\sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta + \sin a\cos\beta - \cos a\sin\beta}{\cos a\cos\beta - \sin a\sin\beta - \cos a\cos\beta - \sin a\sin\beta} =$

$= \frac{2\sin a\cos\beta}{-2\sin a\sin\beta} = -ctg\beta$.

11. а) $\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$;

б) $\cos 15° = \cos(90°-75°) = \sin 75° = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$;

в) $\sin 105° = \sin(90°+15°) = \cos 15° = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$;

г) $\cos 105° = \cos(90°+15°) = -\sin 15° = -\sin(45°-30°) =$

$= -\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30° = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$.

12. $\sin 2a = 2\sin a\cos a; \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;

$tg 2a = \frac{2tga}{1-tg^2 a}$; а) $\frac{\sin 2a}{2\cos a} = \frac{2\sin a\cos a}{2\cos a} = \sin a$;

б) $\cos^4 a - \sin^4 a = \left(\cos^2 a + \sin^2 a\right)\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right) = \cos 2a$;

в) $\sin 2a - (\sin a + \cos a)^2 = \sin 2a - \left(\sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a\cos a\right) =$
$= \sin 2a - 1 - \sin 2a = -1$;

г) $\frac{2\sqrt{3}tg15°}{1-tg^2 15°} = \sqrt{3}tg30° = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$.

13. а) $2\sin 75°\cos 75° = \sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 0{,}5$;

б) $\cos^2 165° - \sin^2 165° = \cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{2tg105°}{1 - tg^2 105°} = tg210° = tg(180° + 30°) = tg30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

14. $\sin a + \sin \beta = 2\sin\frac{a+\beta}{2} \cdot \cos\frac{a-\beta}{2}$;

$\sin a - \sin \beta = 2\sin\frac{a-\beta}{2} \cdot \cos\frac{a+\beta}{2}$; $\cos a + \cos \beta = 2\cos\frac{a+\beta}{2} \cdot \cos\frac{a-\beta}{2}$;

$\cos a - \cos \beta = -2\sin\frac{a+\beta}{2} \cdot \sin\frac{a-\beta}{2}$;

а) $\sin 3a + \sin 5a = 2\sin 4a\cos a$; б) $\sin 3\beta - \sin \beta = 2\sin \beta \cos 2\beta$;

в) $\cos 4a + \cos 2a = 2\cos 3a\cos a$;

г) $\cos a - \cos 5a = -2\sin 3a\sin(-2a) = 2\sin 3a\sin 2a$.

15. а) $\frac{\sin 5a + \sin a}{\cos 5a + coa} = \frac{2\sin 3a\cos 2a}{2\cos 3a\cos 2a} = tg3a$;

б) $\frac{\cos 4a - \cos 6a}{\cos 4a + \cos 6a} = \frac{2\sin 5a\sin a}{2\cos 5a\cos a} = tg5a \cdot tga$.

16. а) $\frac{\cos 58° - \cos 32°}{\sin 58° - \sin 32°} = \frac{-2\sin 45°\sin 13°}{2\sin 13°\cos 45°} = -1$;

б) $\frac{\sin 130° + \sin 50^o}{\cos 130° - \cos 50°} = \frac{2\sin 90°\sin 40°}{2\sin 90°\cos 40°}$; данное выражение не имеет смысла, т.к. $\cos 90^0 = 0$.

Итоговое повторение по темам.
(к учебнику под научным руководством Тихонова)
Степень с рац-показателем.

1. Пусть a - действительное число, $a \neq 0, n$ - натуральное число. Тогда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^0 = 1$.

1) а) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$; б) $(-3)^5 = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; в) $1^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = 1$;

г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; е) $(-2)^0 = 1$; ж) $1{,}075^0 = 1$;

з) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$;

2) а) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$; б) $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$; в) $\frac{1}{a^6} = a^{-6}$; г) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$.

2. $a,b \neq 0;\ \ m,n \in Z$;

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^{n \cdot b^n}$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

1) а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = 3$;

б) $\left(\dfrac{-1}{7}\right)^{2} \cdot \left(\dfrac{-1}{7}\right)^{-3} = \left(\dfrac{-1}{7}\right)^{2-3} = \left(\dfrac{-1}{7}\right)^{-1} = -7$; в) $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$;

г) $(0{,}1)^2 \div (0{,}1)^{-2} = (0{,}1)^{2+2} = (0{,}1)^4 = 0{,}0001$;

д) $\left(a^2\right)^{-3} = a^{-6}$; е) $\left(b^{-3}\right)^2 = b^{-6}$; ж) $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$;

з) $\left(a^2 b\right)^{-1} = a^{-2}b^{-1}$; и) $\left(2a^2\right)^{-2} = 2^{-2}a^{-4} = \dfrac{a^{-4}}{4}$;

к) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{3} = \dfrac{b^3}{a^3}$; л) $\left(\dfrac{-2xy^{-2}}{z^{-3}}\right)^2 = \dfrac{(-2)^2 \cdot x^2 \cdot y^{-4}}{z^{-6}} = \dfrac{4x^2 z^6}{y^4}$;

2) а) $300000^2 = \left(3 \cdot 10^5\right)^2 = 9 \cdot 10^{10}$; б) $0{,}001^3 = \left(10^{-3}\right)^3 = 10^{-9}$;

в) $\dfrac{1}{625} = 0{,}0016 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$.

3. Арифметический корень n — ой степени из числа a — неотрицательное число, n — ая степень которого равна a.

$\sqrt[3]{27} = 3$, т.к. $3 \geq 0$ и $3^3 = 27$.

4. Извлечение корня n — ой степени. Оно является обратным к возведению в степень n.

5. а) $\sqrt{25} = 5$; б) $\sqrt[3]{27} = 3$; в) $\sqrt{\dfrac{1}{625}} = \dfrac{1}{25}$; г) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^8} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$;

д) $\sqrt[3]{10^{12}} = 10^{\frac{12}{3}} = 10^4 = 10000$.

6. Уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный корень равный $\sqrt[2k+1]{a}; (a < 0)$.

1) а) $\sqrt[3]{-8} = -2$; б) $\sqrt[7]{-1} = -1$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{-1}{27}} = \dfrac{-1}{3}$; г) $\sqrt[5]{-3^5} = -3$;

2) а) $x^3 = -27$; $x = \sqrt[3]{-27}$; $x = -3$. б) $x^4 = 625$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{625}$; $x_{1,2} = \pm 5$.

7. а) $\sqrt[3]{-64} - \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{64} = -4 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 = -5$;

б) $\sqrt[4]{10000} - 2\sqrt[3]{-0{,}001} = 10 + 2 \cdot 0{,}1 = 10{,}2$;

в) $\sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$.

8. 1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; 4) $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

9. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a,b\ge 0$ левая и правая части неотрицательны. Возведем правую часть равенства в степень n и убедимся, что она равна b. По свойству степеней с натуральным показателем получаем : $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b$, чтд.

10. а) $\sqrt[3]{216\cdot 0{,}027}=\sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{0{,}027}=6\cdot 0{,}3=1{,}8$;

б) $\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{108\cdot 2}=\sqrt[3]{216}=6$;

в) $\sqrt{\dfrac{16}{81}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}}=\dfrac{4}{9}$; г) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$;

д) $\left(\sqrt{200}-\sqrt{32}\right)\div\sqrt{2}=\left(\sqrt{100\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}\right)\div\sqrt{2}=\left(10\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)\div\sqrt{2}=$

$=6\sqrt{2}\div\sqrt{2}=6$; е) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^5=\sqrt[5]{2^5}=2$; ж) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=2$.

11. а) $\sqrt[3]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[3]{9a}=\sqrt[3]{3\cdot 9\cdot a^3\cdot b^3}=3ab$;

б) $\sqrt[4]{\dfrac{a^2b}{c}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a^2b^3}{c^3}}=\sqrt[4]{\dfrac{a^2a^2bb^3}{c\cdot c^3}}=\dfrac{ab}{c}$.

12. Если $a>0, x$ — произвольное рациональное число, представленное дробью m/n, где m — целое, n — натуральное, то $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

1) а) $15^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{15^3}$; б) $27^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}$;

2) а) $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{2^5}=2^{\frac{5}{2}}$; в) $\sqrt[5]{5^{-3}}=5^{\frac{-3}{5}}$.

13. Если a и b положительные действительные числа, а x и y — рациональные числа, то

1) $a^xa^y=a^{x+y}$; 2) $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$; 3) $(ab)^x=a^xb^x$; 4) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

14. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$.

Доказательство: Рассмотрим два рациональных числа, представленные в виде дробей $\dfrac{p_1}{q_1}$ и $\dfrac{p_2}{q_2}$. Их всегда можно представить в виде $\dfrac{p_1q_2}{q_1q_2}$ и $\dfrac{p_2q_1}{q_1q_2}$, где знаменатели дробей равны. Поэтому будем считать, что рациональные числа x и y уже представлены в виде двух дробей с одинаковыми знаменателями $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$. По свойству арифметических корней n — ой степени получаем:

$a^x a^y = a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}} = a^{x+y}$, чтд.

15. а) $9^{\frac{1}{5}} \cdot 27^{\frac{1}{5}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3$; б) $\left(\frac{25}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{25^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$.

16. $a^{\frac{1}{4}} \sqrt{a \sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{11}{12}}$.

17. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$;

б) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$.

18.

1) а) если $a > b > 0, z > 0$, то $a^2 > b^2$; б) если $a > b > 0, z < 0$, то $a^2 < b^2$;

2) а) $3 > 2, 2 > 0$, то $3^2 > 2^2$ т.к. $9 > 4$;

б) $3 > 2, -1 > 0$, то $3^{-1} < 2^{-1}$ т.к. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

19. а) $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$ т.к $\frac{14}{13} > \frac{13}{14}; -\frac{1}{2} < 0$, то $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ и $(0{,}755)^{\sqrt{3}}$ т. к. $\frac{3}{4} \langle 0{,}755; \sqrt{3} > 0$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}} < (0{,}755)^{\sqrt{3}}$.

Степенная функция

1. Область определения функции — все значения независимой переменной.

2. Найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

3. а) $y = 2x + 4$; $D(y) = R$; б) $y = 4x^2 + 3x + 5$; $D(y) = R$;

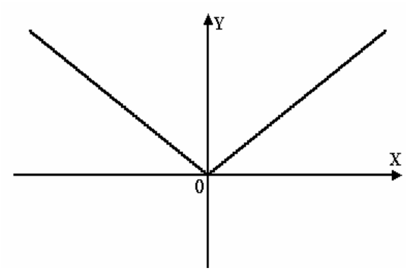
в) $y = \frac{1}{x}; x \neq 0$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $y = \sqrt{x}; x \geq 0$; $D(y) = [0; +\infty)$;

д) $y = \sqrt{x+1}; x + 1 \geq 0, x \geq -1$; $D(y) = [-1; +\infty)$;

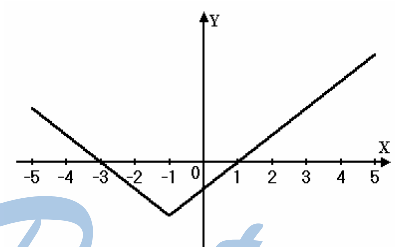
е) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}; x - 2 > 0, x > 2$; $D(y) = (2; +\infty)$.

4. График функции — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

5. а) $y = |x|$;



б) $y = |x+1| - 2$.



6. Функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

а) $y = x^2$ на $[1; 3)$; б) $y = -x$ на $[-1; 0)$.

7. От значения показателя степени r.

8. 1) а) степенная функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geq 0$, если $r > 0$;

б) степенная функция $y = x^2$ убывает на промежутке $x > 0$, если $r < 0$;

2) $y = x$ возрастает на $x \geq 0$; $y = \frac{1}{x}$ убывает на $x > 0$.

9. $x^{\frac{1}{2}} = 4 \quad \sqrt{x} = 4 \quad x = 16$

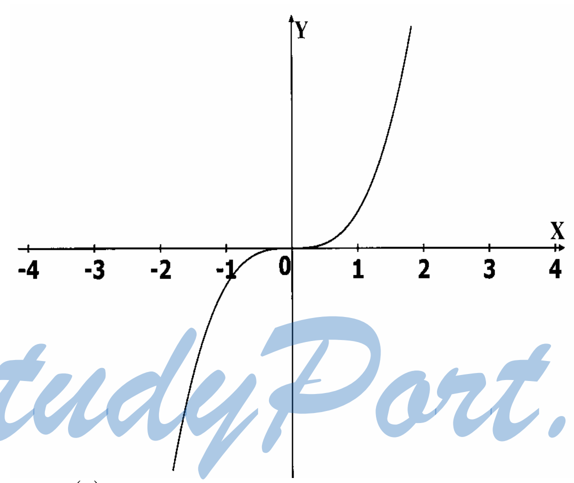
10. а) $y = x^{\frac{-2}{3}}$ – убывает, т.к. $r = -\frac{2}{3} < 0$; б) $y = x^{\frac{2}{3}}$ – возрастает, т.к. $r = \frac{2}{3} > 0$; в) $y = x^{\frac{3}{2}}$ – возрастает, т.к. $r = \frac{3}{2} > 0$;

г) $y = x^{-\frac{3}{2}}$ – убывает, т.к. $r = -\frac{3}{2} < 0$.

11. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$;

$y = \frac{1}{x^2} \quad y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = y(x)$, значит $y(x)$ — четная, чтд.

12. $y = x^3 \quad D(y) = E(y) = R; y > 0$ при $x > 0; y < 0$ при $x < 0$, $y = 0$ при $x = 0$; y возрастает на R; нечетная.



13. Функция $f(x)$ — называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$.

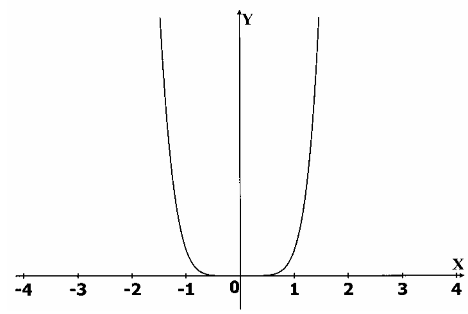
$y = x^3 \quad y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$, значит $y(x)$ — нечетная, чтд.

14. Область определения симметрична относительно нуля.

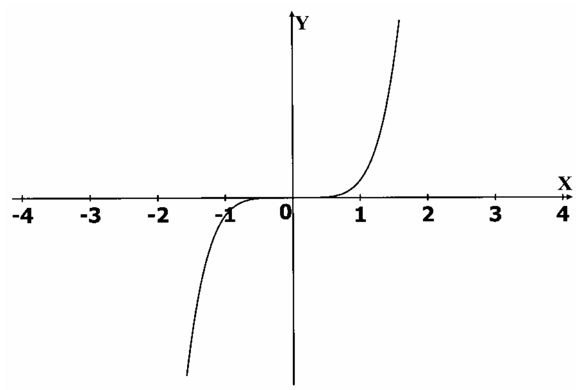
15. а) симметричен относительно оси ординат;

б) симметричен относительно начала координат.

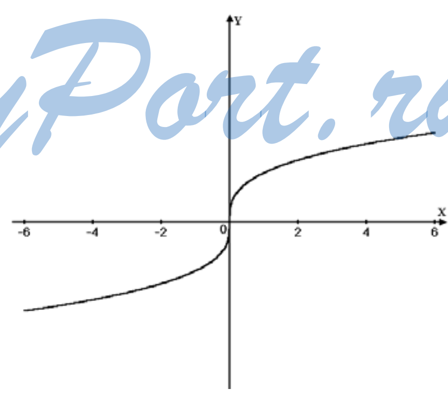
16. а) $y = x^6$;



б) $y = x^5$;

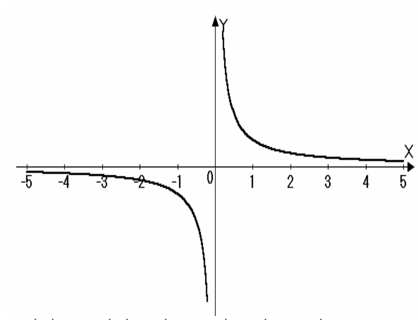


17. $y = \sqrt[3]{x}$;



$D(y) = E(y) = R; y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; $y = 0$ при $x = 0$; возрастает на R; нечетная.

18. $y = \dfrac{1}{x}$;



$D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; убывает на $D(y)$; нечетная.

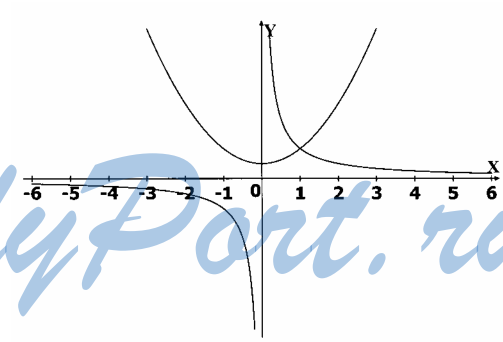
19. Гипербола.

20. а) Растяжением в 2 раза вдоль оси 0Y. б) График первой функции расположен в 1 и 3 четвертях, график второй — в 2 и 4 четвертях.

21. Обратная пропорциональность.

22. а) $x^3 > 27$; $x > \sqrt[3]{27}$; $x > 3$ б) $x^4 \le 625$; $-\sqrt[4]{625} \le x \le \sqrt[4]{625}$; $-5 \le x \le 5$.

23. $\dfrac{2}{x} = x^2 + 1$.



Ответ: 1.

24. а) $\sqrt{2+x} = 3$; $2 + x = 9$; $x = 7$; Ответ: 7. б) $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 - x$;
$2x^2 - 3x + 2 = 16 + x^2 - 8x$; $x^2 + 5x - 14 = 0$;
$D = 25 + 56 = 81; x_1 = \dfrac{-5+9}{2} = 2; x_2 = -7.$

Проверка: $x = 2; \sqrt{2 \cdot 4 + 6 + 2} = 4 - 2$ — верно
$x = -7; \sqrt{2 \cdot 49 + 21 + 2} = 4 + 7$ — верно. Ответ: -7, 2.

Элементы тригонометрии.

1. Угол в 1 рад – центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

2. $\left(\frac{180}{\pi}\right)°$; а) $\pi = 180°$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$;

в) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\cdot 180° = 120°$; г) $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\cdot 180° = 135°$.

3. $\frac{\pi}{180}$ рад. а) $180° = \pi$; б) $90° = 90\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$;

в) $20° = 20\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$; г) $150° = 150\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

4. а) $\pi \approx 3{,}14$; б) $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$; в) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; г) $2\pi \approx 6{,}28$.

5. а) $-\frac{\pi}{2} > -2$; б) $\pi < 3{,}2$; в) $2\pi < 6{,}72$.

6. Единичная окружность — окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

7. а) против часовой стрелки, б) по часовой стрелке.

8. а) $(0;1)$; б) $(0;1)$; в) $(-1;0)$; г) $(1;0)$; д) $(1;0)$; е) $(-1;0)$.

9. Каждой точке сопоставим угол α, а углу α — его тангенс, т.е. действительное число.

10. а) $A(-1;0)$ $\alpha = \pi + 2\pi n, n \in Z$; б) $B(0;1)$; $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

в) $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\gamma = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z$.

11. а) $(0;1)$; б) $(0;1)$; в) $(0;-1)$.

12. Синус угла α — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол α.

Косинус угла α — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол α.

Тангенс угла α — число, равное отношению синуса угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, к косинусу этого угла.

Котангенс угла α — число , равное отношению косинуса угла α такого , что $\alpha \neq \pi k, k \in Z$, к синусу этого угла.

13. а) $\sin x = 0$; $x = \pi n, n \in Z$; б) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

в) $sin\, x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; г) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n, n \in Z$.

14.

α	$0^0(0)$	$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

15. а) $4\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=1+\frac{3}{2}=2{,}5$;

б) $2\sin\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+1$.

16.

четверть	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	-	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

а) $\sin 275^0<0$; б) $\cos130^0<0$; в) $tg50^0>0$; г) $ctg105^0<0$;

д) $\sin\frac{2\pi}{3}>0$; е) $\cos\frac{\pi}{4}>0$; ж) $tg\frac{3\pi}{4}<0$; з) $ctg\frac{3\pi}{3}<0$.

17. а) $\sin1>0$; б) $\cos3<0$; в) $tg(-3{,}4)<0$; г) $ctg2<0$;

д) $\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}="+":"-"<0$; е) $\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}="-""+"<0$;

ж) $tg\frac{5\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}="+"\cdot"-"<0$.

18. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

19. а) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\frac{24}{25}$;

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{24}{7}$; $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{7}{24}$;

б) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha=0{,}28$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}28^2}=0{,}96$;

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}28}{0{,}96}=\frac{7}{24}$; $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{24}{7}$.

20. а) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; б) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

21. а) $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{1}{5,2} = \dfrac{5}{26}$; б) $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1-0,6^2}}{0,6} = \dfrac{4}{3}$;

в) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+2^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; г) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

д) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{15^2}{8^2}}} = \dfrac{8}{17}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{64}{289}} = \dfrac{15}{17}$.

22. а) $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

б) $(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$;

г) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha$;

д) $\sin\alpha\cos\alpha tg\alpha - 1 = \sin\alpha - \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1 = -\cos^2\alpha$;

е) $\dfrac{tg\alpha ctg\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - tg\alpha ctg\alpha} = \dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1} = -\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -ctg^2\alpha$.

23. а) $(1-\cos^2\alpha)(1+ctg^2\alpha) = \sin^2\alpha\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1$ ч.т.д.

б) $\cos^2\alpha(1+tg^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ ч.т.д.

24. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$;

а) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -tg\dfrac{\pi}{4} = -1$;

г) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + ctg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} - ctg\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{5}{4}$.

25. а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos(-\alpha)} - \dfrac{1+\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$= \dfrac{\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \dfrac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{1+tg^2(-\alpha)} + \dfrac{1}{1+ctg^2(-\alpha)} = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha} + \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

26. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

1) а) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta} = -ctg\alpha ctg\beta$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} =$
$= \dfrac{2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta} = ctg\alpha$.

2) а) $\cos 75^0 = \cos\left(45^0+30^0\right) = \cos 45^0\cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0 =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; б) $\sin 15^0 = \sin\left(90^0-75^0\right) = \cos 75^0 = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$;

в) $\cos 105^0 = \cos\left(90^0+15^0\right) = -\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$;

г) $\sin 105^0 = \sin\left(90^0+15^0\right) = \cos 15^0 = \cos\left(45^0-30^0\right) = \cos 45^0 \cos 30^0 +$
$+ \sin 45^0 \sin 30^0 = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$;

д) $\sin 74^0 \cos 16^0 + \cos 74^0 \sin 16^0 = \sin\left(74^0+16^0\right) = \sin 90^0 = 1$;

е) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$;

ж) $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{2}{9}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$;

$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{6}$.

27. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

1) а) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1-1+2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = tg\alpha$;

б) $(1-\cos 2\alpha)ctg\alpha = \left(1-1+2\sin^2\alpha\right)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$;

в) $\cos 2\alpha + 2\sin^2(-\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$;

г) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right) = \cos 2\alpha$;

2) а) $1-\left(\sin\dfrac{\pi}{8}-\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^2 = 1-\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{\pi}{8}-2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}\right) =$
$= 1-\left(1-\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}6^2}=0{,}8$;
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = -0{,}96$;

г) $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}6^2}=0{,}8$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}64-0{,}36=0{,}28$;

д) $tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot 2}{1-4}=-\frac{4}{3}$.

28. 1) а) $\sin\left(180^0-\alpha\right)=\sin\alpha$; б) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; в) $tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$;

г) $tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$; д) $\cos\left(90^0-\alpha\right)=\sin\alpha$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$;

2) а) $\cos 17\pi=\cos(16\pi+\pi)=\cos\pi=-1$; б) $\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin 420^0=\sin\left(360^0+60^0\right)=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $tg 135^0=tg\left(90^0+45^0\right)=-ctg 45^0=-1$;

д) $\cos 120^0=\cos\left(90^0+30^0\right)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$;

е) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

ж) $tg\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=-tg\frac{11\pi}{6}=-tg\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

з) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\sin\frac{7\pi}{3}=-\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прогрессии

1.
1) 1; 4; 9; 16; 25.
2) а) $a_n=\frac{1}{n}$, $a_1=1$; $a_2=\frac{1}{2}$; $a_3=\frac{1}{3}$; $a_4=\frac{1}{4}$; $a_5=\frac{1}{5}$;
б) $a_n=n(n+2)$, $a_1=1(1+2)=3$; $a_2=2(2+2)=8$; $a_3=3(3+2)=15$;
$a_4=4(4+2)=24$; $a_5=5(5+2)=35$;

в) $a_n=\frac{n}{n-1}$ $a_2=\frac{2}{2-1}=2$; $a_3=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$; $a_4=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$;

$a_5=\frac{5}{5-1}=\frac{5}{4}$; $a_6=\frac{6}{6-1}=\frac{6}{5}$;

г) $a_n=-n^2$ $a_1=-1$; $a_2=-4$; $a_3=-9$; $a_4=-16$; $a_5=-25$;
3) $b_1=2$ $b_{n+1}=2b_n+1$;
$b_2=2b_1+1=5$; $b_3=2b_2+1=11$; $b_4=2b_3+1=23$; $b_5=2b_4+1=47$.

2. Арифм. прогрессия – числовая посл-ть, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. 2; 4; 6; 8;…

3. $a_n = 4 - 2n$; $a_{n-1} = 4 - 2(n-1)$; $a_{n+1} = 4 - 2(n+1)$;

$a_n = \dfrac{a_n - 1 + a_{n+1}}{2}$; $4 - 2n = \dfrac{4 - 2(n-1) + 4 - 2(n+1)}{2}$ — верно для любого $n \in N$, значит, (a_n) — арифм. прогрессия ч.т.д.

4. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_1 = -2,\ d = 4$; $a_n = -2 + 4 \cdot 99 = 394$.

5. а) 2; 5; 8; 11;…; $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$;

б) 1; -1; -3; -5;…; $a_n = 1 - 2(n-1) = 3 - 2n$.

6. 3; 5;…; $a_n = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n$; $101 = 1 + 2n;\ 2n = 100;\ n = 50$.

Ответ: 50.

7. $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $a_1 = 10$; d=2; n=91; $S = S_{91} = \dfrac{20 + 90}{2} \cdot 91 = 5005$.

8. 1; 3; 5;…;101; $a_1 = 1$; d=2; n=51; $S = S_{51} = \dfrac{2 + 2 \cdot 50}{2} \cdot 51 = 2601$.

9. Геом. прогрессия – числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. 2; 4; 8; 16;…

10. $b_n = 3^{2n}$, $b_{n-1} = 3^{2(n-1)}$, $b_{n+1} = 3^{2(n+1)}$;

$b^2{}_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\left(3^{2n}\right)^2 = 3^{2(n-1)} \cdot 3^{2(n+1)}$ — верно для любого $n \in N$, значит, (b_n) — геом. прогрессия ч.т.д

11. 2; 1; $\dfrac{1}{2}$; $b_1 = 2,\ q = \dfrac{1}{2}$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{4}{2^n}$.

12. $b_1 = -\dfrac{1}{12},\ q = -12$; $b_2 = -\dfrac{1}{12} \cdot (-12) = 1$; $b_3 = 1 \cdot (-12) = -12$; $b_4 = -12 \cdot (-12) = 144$; $b_5 = 144 \cdot (-12) = -1728$; $b_6 = -1728 \cdot (-12) = 20736$.

13. $b_n = b_1 q^{n-1}$; $b_1 = 80$; $q = \dfrac{1}{2}$; $b_7 = 80 \cdot \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{80}{64} = 1{,}25$.

14. 2; 8; 32; $b_1 = 2$; $q = 4$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1}$;

$512 = 2^{2n-1}$; $2^9 = 2^{2n-1}$; $2n - 1 = 9$; $2n = 10$; $n = 5$ значит, 512= b_5.

15. $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$, $q \ne 1$; $b_1 = 11;\ q = 2$; $S_5 = \dfrac{11\left(2^5 - 1\right)}{2 - 1} = 341$.

16. $q = 2$; $S_7 = 635$; $635 = \dfrac{b_1\left(2^7 - 1\right)}{2 - 1} = 126b_1$; $b_1 = 5$;

$b_7 = b_1 q^6 = 5 \cdot 2^6 = 320$.

17. Геом. прогрессия называется бесконечно убывающей, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше еденицы. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; …

18. $q=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2}=\frac{1}{3}$; $\left|\frac{1}{3}\right|<1$, значит, (b_n) — бесконечно убывающая, ч.т.д.

19. $S=\frac{b_1}{1-q}$; 30; 3; 0,3;…; $b_1=30;\ q=\frac{3}{30}=0{,}1$;

$S=\frac{30}{1-0{,}1}=\frac{300}{9}=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$.

20. $b_3=1;\ q=-\frac{1}{7}$; $b_3=b_1\cdot q^2$; $b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=49$;

$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{49}{1+\frac{1}{7}}=\frac{49\cdot 7}{8}=\frac{343}{8}$.

21. а) $0{,}(3)=0{,}333...=0{,}3+0{,}03+0{,}003+...=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{1}{3}$;

б) $0{,}(15)=0{,}1515...=0{,}15+0{,}0015+...=\frac{0{,}15}{1-0{,}01}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$;

в) $0{,}1(2)=0{,}122...=0{,}1+0{,}02+0{,}002+...=0{,}1+\frac{0{,}02}{1-0{,}1}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{11}{90}$.

ПОВТОРЕНИЕ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VII-IX КЛАССОВ

Вариант 1.

П-1

1. а). $4\cdot(1{,}22\div 0{,}4-3{,}7)+\frac{2}{3}=4(3{,}05-3{,}7)+\frac{2}{3}=-2{,}6+\frac{2}{3}=$

$=-\frac{13}{5}+\frac{2}{3}=-\frac{13}{5}+\frac{2}{3}=\frac{-39+10}{15}=-\frac{29}{15}=-1\frac{14}{15}$.

б). $1\frac{1}{2}+(0{,}4\cdot 3{,}25-3{,}15)\div 0{,}2=1{,}5-1{,}85\div 0{,}2=1{,}5-9{,}25=-7{,}75$;

в). $\dfrac{-30{,}4+15{,}2\cdot 2{,}5}{1\frac{5}{9}\cdot 3-4\frac{5}{9}}=\dfrac{7{,}6}{\frac{14}{9}\cdot 3-\frac{41}{9}}=7{,}6\cdot 9=68{,}4$.

2. 1). $\dfrac{a+b^2}{ab}$. а). $a=\dfrac{1}{3},\quad b=\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{a+b^2}{ab}=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{36}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\dfrac{13\cdot 6\cdot 3}{36}=\dfrac{13}{2}=6{,}5$;

б). $a=0{,}4,\quad b=-0{,}3$; $\dfrac{a+b^2}{ab}=-\dfrac{0{,}4+0{,}09}{0{,}4\cdot 0{,}3}=-\dfrac{0{,}49}{0{,}12}=-\dfrac{49}{12}=-4\dfrac{1}{12}$;

2). $\dfrac{a-b^2}{ab}$; а). $a=\dfrac{2}{3},\quad b=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{a-b^2}{ab}=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{5\cdot 3}{3\cdot 4}=1{,}25$;

б) $a=0{,}3,\quad b=-0{,}4$; $\dfrac{a-b^2}{ab}=-\dfrac{0{,}3-0{,}16}{0{,}12}=-\dfrac{14}{12}=-\dfrac{7}{6}=-1\dfrac{1}{6}$;

3). $\dfrac{x-y}{xy^2}$; а). $x=\dfrac{5}{6},\quad y=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{x-y}{xy^2}=\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{9}}=\dfrac{6\cdot 9}{6\cdot 5\cdot 4}=\dfrac{9}{20}$;

б). $x=0{,}5,\quad y=0{,}6$; $\dfrac{x-y}{xy^2}=\dfrac{0{,}5-0{,}6}{0{,}5\cdot 0{,}36}=-\dfrac{0{,}1}{0{,}18}=-\dfrac{10}{18}=-\dfrac{5}{9}$.

3. а). $2\cdot 4^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{0}=2\cdot\dfrac{1}{16}+\dfrac{27}{8}-1=\dfrac{20}{8}=2{,}5$;

б). $\dfrac{3}{4}\cdot 25^{\frac{1}{2}}+64^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}\cdot 5+\dfrac{1}{4}=\dfrac{16}{4}=4$;

в). $12\cdot 3^{-3}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}=\dfrac{12}{27}+\dfrac{25}{9}-1=\dfrac{4}{9}+\dfrac{25}{9}-\dfrac{9}{9}=2\dfrac{2}{9}$;

г) $\dfrac{2}{5}\cdot 8^{\frac{2}{3}}-25^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{5}=1{,}4$;

д). $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-8}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-6}-3^{-11}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-9}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{8}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-9}=$

$=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}=\dfrac{25-1}{9}=\dfrac{24}{9}=2\dfrac{2}{3}$; е). $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+32^{-0{,}2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$.

4. а). $\sqrt{4\cdot 25\cdot 4^3}=\sqrt{4^4\cdot 25}=4^2\cdot 5=80$;

б). $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3$; в). $7^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{4}{3}}\cdot 7^{\frac{2}{3}}=7^2=49$;

г). $\sqrt[3]{5^6\cdot 64\cdot 5^3}=\sqrt[3]{5^9\cdot 4^3}=5^3\cdot 4=500$;

д). $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=10$;

е). $3^{1\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}=3^2=9$;

ж). $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{9+5-6\sqrt{5}+9+5+6\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{28}{4}=7$;

з). $\sqrt{12\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3\sqrt{8}}=\sqrt{12\cdot\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8}}=\sqrt{36\cdot 4}=6\cdot 2=12$.

П-2

1. а). $2y(y+5)-3y(y-3)=2y^2+10y-3y^2+9y=19y-y^2$;

б). $(2a-b)^2-(2a+b)^2=4a^2-4ab+b^2-4a^2-4ab-b^2=-8ab$;

в). $5x\left(x^2+3\right)-3x\left(x^2-5\right)=5x^3+15x-3x^3+15x=2x^3+30x$;

г). $(a-3b)^2-(a+b)^2=a^2-6ab+9b^2-a^2-2ab-b^2=8b^2-8ab$;

д). $5x\left(x^2-3\right)-(5x+2)\cdot\left(x^2-3x-1\right)=5x^3-15x-\left(5x^3+2x^2-15x^2-6x-5x-2\right)=$
$=5x^3-15x-5x^3-2x^2+15x^2+6x+5x+2=13x^3-4x+2$;

е). $3b(2a-b)^2-(a+3b)\cdot\left(b^2-3a^2\right)=3b\left(4a^2-4ab+b^2\right)-\left(ab^2+3b^3-3a^3-9a^2b\right)=$
$=12a^2b-12ab^2+3b^3-ab^2-3b^33a^3+9a^2b=3a^3+21a^2b-13ab^2$.

2. 1). а). $2ab-2b^2=2b(a-b)$; б). $x^4+3x^6=x^4\left(1+3x^2\right)$;

в). $6mn-3m^2n+3mn^2=3mn(2-m+n)$; г). $0{,}25-m^2=(0{,}5-m)\cdot(0{,}5+m)$;

д). $y^3-4y=y\cdot\left(y^2-4\right)=y\cdot(y-2)\cdot(y+2)$; е). $a^4-9x^2=\left(a^2-3x\right)\left(a^2+3x\right)$;

2). а). $-15ax^2-15ay^2-30axy=-15a\left(x^2+y^2+2xy\right)=-15a(x+y)^2$;

б). $4a^2-6a-b^2+3b=\left(4a^2-b^2\right)-(6a-3b)=$
$=(2a-b)(2a+b)-3(2a-b)=(2a-b)(2a+b-3)$;

в) $81-(x+7)^2=(9-x-7)(9+x+7)=(2-x)(16+x)$;

3. а). $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

б). $\dfrac{4}{a-2}+\dfrac{8}{2a-a^2}=\dfrac{4}{a-2}-\dfrac{8}{a(a-2)}=\dfrac{4a-8}{a(a-2)}=\dfrac{4(a-2)}{a(a-2)}=\dfrac{4}{a}$.

в) $\dfrac{m^2}{m^2-25}\left(m^2+5m\right)=\dfrac{m^2\cdot m(m+5)}{(m+5)(m-5)}=\dfrac{m^3}{m-5}$;

г) $\dfrac{1}{a^2+ab}\div\dfrac{1}{a^2-ab}=\dfrac{a(a-b)}{a(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$.

4. $\frac{x+y}{2xy-y^2}\cdot\left(x+y-\frac{x^2}{x-y}\right)=\frac{x+y}{y(2x-y)}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2-x^2}{x+y}=$

$=\frac{y(2x+y)}{y(2x-y)}=\frac{2x+y}{2x-y}$.

5. а). $\frac{2}{a-b}-\frac{2}{a+b}-\frac{4a}{b^2-a^2}=\frac{2}{a-b}-\frac{2}{a+b}+\frac{4a}{(a-b)(a+b)}=$

$=\frac{2a+2b-2a+2b+4a}{(a-b)(a+b)}=\frac{4(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{4}{a-b}$;

б). $\frac{x^2-5x}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2+5xy}=\frac{x(x-5)}{y}\cdot\frac{y^2}{x(x+5y)}=\frac{y(x-5)}{x+5y}$;

в). $\frac{m^2-n^2}{m^2}\div\left(m^2+mn\right)=\frac{(m-n)(m+n)}{m^2}\cdot\frac{1}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m^3}$.

6. а). $\frac{2x^2-2y^2}{x}\cdot\frac{4x}{x-y}-\frac{16xy}{x+y}==\frac{2(x-y)(x+y)\cdot 4}{x-y}-\frac{16xy}{x+y}=$

$=8(x+y)-\frac{16xy}{x+y}=\frac{8x^2+8y^2+16xy-16xy}{x+y}=\frac{8\left(x^2+y^2\right)}{x+y}$.

б). $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}-\frac{2}{a-b}=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab^2}\cdot\frac{ab}{(b-a)(b+a)}+\frac{2}{b-a}=$

$=\frac{(b-a)^2}{b(b-a)(b+a)}+\frac{2}{b-a}=\frac{a^2-2ab+b^2+2b^2+2ab}{b\left(b^2-a^2\right)}=\frac{a^2+3b^2}{b\left(b^2-a^2\right)}$;

в). $\frac{x-3}{x^2+3x}-\frac{x}{9+3x}\div\left(\frac{9}{x^3-9x}+\frac{1}{x+3}\right)=$

$=\frac{x-3}{x(x+3)}-\frac{x}{3(x+3)}\div\left(\frac{9}{x(x-3)(x+3)}+\frac{1}{x+3}\right)=$

$=\frac{x-3}{x(x+3)}-\frac{x}{3(x+3)}\cdot\frac{x(x-3)(x+3)}{9+x^2-3x}=\frac{3(x-3)\left(9+x^2-3x\right)-x^3\left(x^2-9\right)}{3x(x+3)\left(9+x^2-3x\right)}=$

$=\frac{3\left(9x-27+x^3-3x^2-3x^2+9x\right)-x^5+9x^3}{3x(x+3)\left(9+x^2-3x\right)}=\frac{-x^5+12x^3-18x^2+54x-81}{3x(x+3)\left(9+x^2-3x\right)}$.

7. а) $\left(10^3\right)^2\cdot 10^{-8}=10^6\cdot 10^{-8}=10^{-2}=0{,}01$;

б) $\frac{25^{-3}\cdot 5^4}{5^{-2}}=\frac{5^{-6}\cdot 5^4}{5^{-2}}=\frac{5^{-2}}{5^{-2}}=1$;   в). $\frac{81^{-2}\cdot 3^5}{9^{-9}}=\frac{3^{-8}\cdot 3^5}{3^{-4}}=\frac{3^{-3}}{3^{-4}}=3$;

г) $\frac{0{,}125^2\cdot 32^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot 2^{10}\cdot 2^{-8}=\frac{2^2}{2^6}=\frac{1}{16}$.

8. а) $\left(\sqrt{18}-5\sqrt{2}+\sqrt{48}\right)\sqrt{3}=\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=$

$=\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}=12-2\sqrt{6}$;

б) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2=3+4-4\sqrt{3}=7-4\sqrt{3}$; в). $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-2\right)}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$;

г) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{18}+\sqrt{45}\right)\div\sqrt{5}=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)\div\sqrt{5}=$

$=\dfrac{5\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{25-3\sqrt{10}}{5}$; д). $\left(\sqrt{2}-3\right)^2=2+9-6\sqrt{2}=11-6\sqrt{2}$;

е) $\dfrac{\sqrt{14}-2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-2\right)}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$.

9. а) $\sin 300^0-\cos\left(-240^0\right)=\sin\left(360^0-60^0\right)-\cos\left(180^0+60^0\right)=$

$=-\sin 60^0+\cos 60^0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg\dfrac{5\pi}{4}\cdot ctg\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-tg\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot ctg\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=tg\dfrac{\pi}{4}\cdot ctg\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\cos 330^0-\sin\left(-135^0\right)=\cos\left(360^0-30^0\right)+\sin\left(90^0+45^0\right)=$

$=\cos 30^0+\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$;

г) $tg\dfrac{3\pi}{4}\cdot ctg\dfrac{7\pi}{6}=tg\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)ctg\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-tg\dfrac{\pi}{4}\cdot ctg\dfrac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$;

д). $\sin\dfrac{5\pi}{2}-\cos\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)=1-\cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$;

е). $tg\left(-540^0\right)ctg420^0=-tg180^0\cdot ctg420^0=0$.

10. а). $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\alpha}{\cos\beta}=2tg\alpha$.

б). $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$;

в). $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(-\alpha)}=\dfrac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=2ctg\alpha$;

г). $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$;

д). $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)+\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$

$=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos 2\alpha.$

11. а). $\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha=1,$

б). $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\left(2\cos^2\alpha-1\right)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,$

П-3

1. а). $3(x-1{,}5)+2x=5(2{,}5+2x)$; $3x-4{,}5+2x=12{,}5+10x$; $5x=-17$; $x=-3{,}4$; б). $3x^2-21=0$; $x^2-7=0$; $x^2=7$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$.

в). $8x^2+6x-2=0$; $4x^2+3x-1=0$; $D=9+4\cdot4=25$; $x_1=\frac{-3+5}{8}=\frac{1}{4}$; $x_2=-1$; г). $2-\frac{3}{x-2}=\frac{7}{x+2}$; $2-\frac{3}{x-2}-\frac{7}{x+2}=0$;

$\frac{2\left(x^2-4\right)-3(x+2)-7(x-2)}{x^2-4}=0$; $2x^2-8-3x-6-7x+14=0$; $2x^2-10x=0$;

$x(x-5)=0$; $x_1=0,\quad x_2=5$.

2. а). $x^3-25x=0$; $x\left(x^2-25\right)=0,\quad x(x-5)(x+5)=0$; $x_1=0\quad x_{2,3}=\pm5.$

б). $3(x+4)^2-9(x+4)=0$; $(x+4)(3(x+4)-9)=0$; $x+4=0,\quad x+4=3$;

$x_1=-4\quad x_2=-1$.

3. а). $5(x-2{,}5)-4x=3(2{,}5+3x)$; $5x-12{,}5-4x=7{,}5+9x$; $8x=-20$; $x=-2{,}5$; б). $75-3x^2=0$; $3x^2=75$; $x^2=25$; $x_{1,2}=\pm5.$

в). $-4x^2+10x+6=0$; $4x^2-10x+6=0$; $2x^2-5x-3=0$; $D=25+4\cdot3\cdot2=49$;

$x_1=\frac{5+7}{4}=3$; $x_2=-\frac{1}{2}$; г). $\frac{5}{x-1}+\frac{30}{x+1}=5$; $\frac{1}{x-1}+\frac{6}{x+1}-1=0$;

$\frac{x+1+6x-6-x^2+1}{x^2-1}=0$; $-x^2+7x-4=0$; $x^2-7x+4=0.$

$D=49-16=33$; $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}.$

4. а). $x^3-9x=0$; $x\left(x^2-9\right)=0$; $x(x-3)(x+3)=0$; $x_1=0,$; $x_{2,3}=\pm3$;

б) $(x+5)^2-4(x+5)=2(x+5)$; $x+5=0$; $x+5-4=2$; $x_1=-5$; $x_2=1$.

5. а) $\frac{x+1{,}5}{8}-\frac{3}{4}=\frac{3x-1}{24}$; $3x+4{,}5-18=3x-1$; $4{,}5-18=-1$ нет корней;

б) $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$; $x^2-2x-2=0$; D$=4+4\cdot2=13$; $x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$;

в) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$; $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{8}{(x+2)(x-2)}=0$;

$\frac{x^2-2x+x^2+4x+4-8}{x^2-4}=0$; $2x^2+2x-4=0$; $x^2+x-2=0$

D$=1+4\cdot 2=9$; $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$; $x_2=-2$. Ответ: (1;-2)

6. а) $2x^4-2x=0$; $x^4-x=0$; $x=0$; $x_1=0$; $x_2=1$. $x\left(x^3-1\right)=0$;
$x^3-1=0$;

б) $x^4-10x^2+9=0$; $x^2=y, y\geq 0$; $y^2-10y+9=0$; D$=100-36=64$;

$y_1=\frac{10+8}{2}=9$; $y_2=1$ $x^2=9$; $x^2=1$; $x_{1,2=}\pm 3$; $x_{3,4}=\pm 1$;

в) $2\left(x^2-1\right)^2+6\left(x^2-1\right)=0$; $x^2-1=0$; $2\left(x^2-1\right)+6=0$; $x_{1,2}=\pm 1$; $x^2-1=-3$
$x^2=-2$ нет корня. Ответ: ± 1.

7. а) $\begin{cases}3x+2y=7;\\ 9x-8y=35\end{cases}$ $2y=7-3x$; $9x-4\cdot(7-3x)=35$;

$9x-28+12x=35$; $21x=63$; $x=3$; $y=\frac{7-33}{2}=-1$. Ответ: $(3;-1)$.

б) $\begin{cases}xy=-6\\ x-3y=11\end{cases}$; $x=11-3y$; $y(11+3y)+6=0$; $3y^2+11y+6=0$;

$D=121-12\cdot 6=49$; $y_1=\frac{-11+7}{6}=-\frac{2}{3}$; $y_2=-3$; $\begin{matrix}x_1=11-3\cdot\frac{2}{3}=9\\ x_2=11-3\cdot 3=2\end{matrix}$.

Ответ: $\left(9;-\frac{2}{3}\right),(2;-3)$.

в) $\begin{cases}x^2+y=26\\ x+y=6\end{cases}$; $y=6-x$; $x^2+6-x-26=0$; $x^2-x-20=0$;

$D=1+4\cdot 20=81$, $x_1=\frac{1+9}{2}=5$; $x_2=-4$; $y_1=6-5=1$; $y_2=6+4=10$.

Ответ. $(5;\ 1)$, $(-4;\ 10)$

8. а). $\begin{cases}4x-2y=2\\ 6x+4y=17\end{cases}$; $2x-y=1$; $y=2x-1$; $6x+4(2x-1)=17$;

$6x+8x-4=17$; $14x=21$; $x=\frac{21}{14}=1{,}5$; $y=2\cdot 1{,}5-1=2$.

Ответ. $(1{,}5;\ 2)$.

б). $\begin{cases} 2x+y=4; \\ 2xy=3 \end{cases}$; $y=4-2x$; $2x(4-2x)-3=0$; $8x-4x^2-3=0$;

$4x^2-8x+3=0$; $D=64-4\cdot4\cdot3=16$; $x_1=\dfrac{8+4}{8}=1{,}5;$ $x_2=0{,}5$;

$y_1=4-2\cdot1{,}5=1;$ $y_2=4-2\cdot0{,}5=3$. Ответ. $(1{,}5;\ 1),\ (0{,}5;\ 3)$.

в). $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ x+y=3; \end{cases}$ $y=3-x$; $x^2+(3-x)^2=9$; $x^2+9-6x+x^2=9$;

$2x^2-6x=0$; $x^2-3x=0$; $x_1=0,$ $x_2=3$; $y_1=3;$ $y_2=0.$

Ответ. $(0;\ 3),\ (3;\ 0)$.

9. а). $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{2}+3=\dfrac{2x+y}{5}; \\ \dfrac{2x+4y}{4}+2=3y; \end{cases}$; $\begin{matrix} 5x-15y+30=4x+2y; & x=17y-30 \\ 2x+4y+8=12y; \quad 2x=8y-8; & x=4y-4 \end{matrix}$;

$17y-30=4y-4$; $13y=26$; $y=2;$ $x=4\cdot2-4=4$. Ответ. $(4;\ 2)$.

б). $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x-2y=-5 \end{cases}$ $x=2y-5$; $4y^2+25-20y+2y^2-5y+y^2-13=0$;

$7y^2-25y+12=0$; $D=289;$ $y_1=\dfrac{25+17}{14}=3;$ $y_2=\dfrac{4}{7}$.

$x_1=2\cdot3-5=1;$ $x_2=2\cdot\dfrac{4}{7}-5=-\dfrac{27}{7}$. Ответ. $(1;\ 3),\ \left(-\dfrac{27}{7};\ \dfrac{4}{7}\right)$.

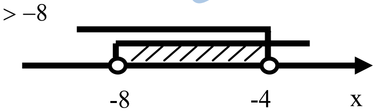
10. $y=9x^2-4x+5,$ $y=2x+4$

$9x^2-4x+5=2x+4$; $9x^2-6x+1=0$; $(3x-1)^2=0$; $3x=1$;

$x=\dfrac{1}{3},$ $y=2\cdot\dfrac{1}{3}+4=\dfrac{14}{3}$.

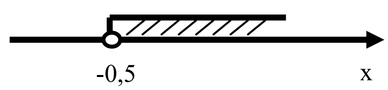
Ответ. $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{14}{3}\right)$.

11. а). $\begin{cases} 4x-15>8x+1; & 4x<-16, & x<-4 \\ 3x-2>x-18; & 2x>-16, & x>-8 \end{cases}$



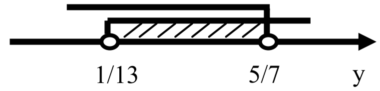
Ответ. $(-8;\ -4)$.

б). $\begin{cases} 3x+8<7x+10; \\ 2x-3(x-5)>10-3x; \end{cases}$; $\begin{matrix} 4x>-2; \quad x>-0{,}5 \\ 2x-3x+15>10-3x; \quad 2x>-5; \quad x>-2{,}5 \end{matrix}$.



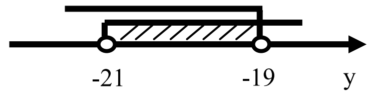
Ответ. $(-0{,}5;\ +\infty)$.

в). $\begin{cases} \dfrac{y+5}{4} - 2y > 0; \quad y+5-8y > 0; \quad 7y < 5; \quad y < \dfrac{5}{7} \\ y - \dfrac{2y-4}{5} > 1-2y; \quad 5y - 2y + 4 > 5 - 10y; \quad 13y > 1; \quad y > \dfrac{1}{13} \end{cases}$;



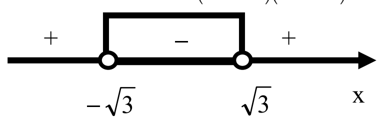
Ответ. $\left(\dfrac{1}{13}; \quad \dfrac{5}{7}\right)$.

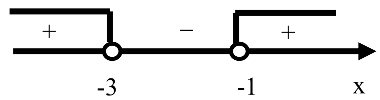
12. $\begin{cases} \dfrac{y+3}{2} < \dfrac{y-5}{3}; \; 3y+9 < 2y-10; \quad y < -19 \\ \dfrac{y+1}{4} > \dfrac{y-4}{5}; \; 5y+5 > 4y-16; \quad y > -21 \end{cases}$



Ответ.-20.

13. а). $x^2 - 3 < 0$; $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) < 0$; б). $x^2 + 4x + 6 > 3$; $x^2 + 4x + 3 > 0$.





$D = 16 - 12 = 4 \qquad x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$

$x_2 = -3$

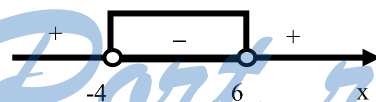
Ответ. $(-\sqrt{3}; \quad \sqrt{3})$. Ответ. $(-\infty; \quad -3) \cup (-1; \quad +\infty)$.

в). $2x^2 - 3x + 5 > 0$; $\qquad Д = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$;

т.к. $a = 2 > 0$, то любое x - решение.

Ответ. $(-\infty; \quad +\infty)$.

г). $(x-6)(x+4) < 0$



Ответ. $(-4; \quad 6)$.

П-4

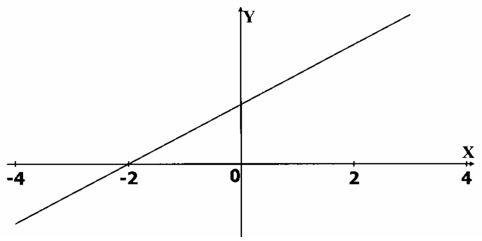
1. а) $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$; $x + 4 \neq 0$, так как знаменатель $x \neq -4$.

б) $y = \sqrt{3-2x}$ $3 - 2x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{\ }) = [0; +\infty]$; $2x \leq 3$; $x \leq 1{,}5$.

в) $y = \dfrac{2x+3}{x-4}$; $x - 4 \neq 0$; $x \neq 4$;

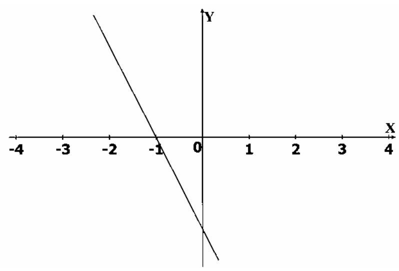
г) $y = \sqrt{2x-4}$; $2x - 4 \geq 0$; $2x \geq 4$; $x \geq 2$.

2. а) $y = 2x + 4$;



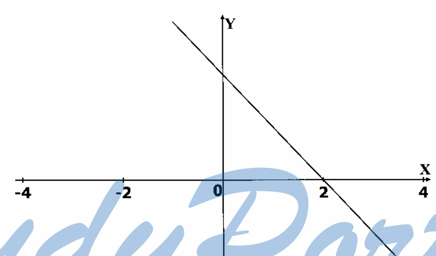
1) $y = 0$ при $x = -2$, $y \succ 0$ при $x > -2, y < 0$ при $x \prec -2$;

2) y – возрастающая; б) $y = -3x - 3$,



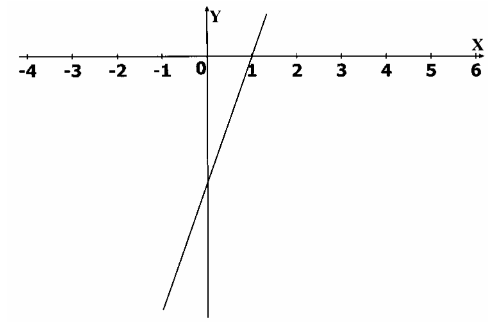
1) $y = 0$ при $x = -1$, $y > 0$ при $x \prec -1$; $y < 0$ при $x \succ -1$. 2) y – убывающая.

3. а) $y = -2x + 4$



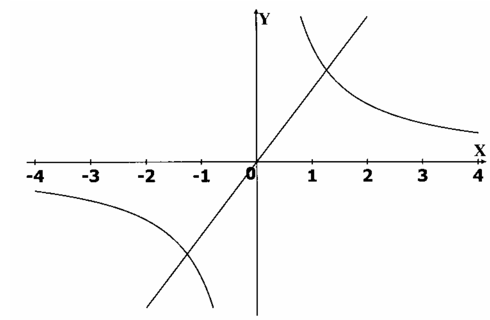
1) $y = 0$ при $x = 2, y > 0$ при $x < 2$; $y < 0$ при $x > 2$; 2) y -убывающая;

б) $y = 3x - 3$



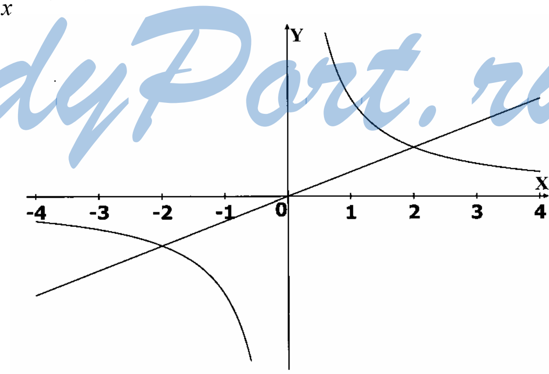
1) $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x < 1$; $y < 0$ при $x < 1$; 2) y -возрастающая.

4. $y = \frac{8}{x}, y = 5x$; $\frac{8}{x} = 5x$; $x^2 = \frac{8}{5}$; $x_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.



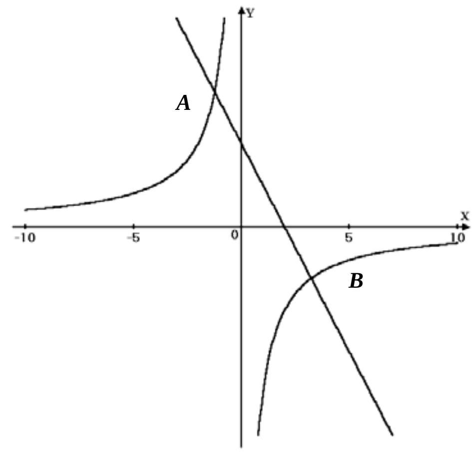
5. а) $y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0$; б) y убывает на $\mathrm{D}(y)$.

6. $y = \frac{6}{x}, y = 1{,}5x$; $\frac{6}{x} = 1{,}5x$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$.



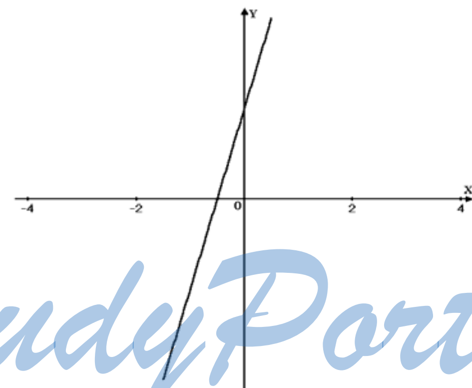
7. а) $y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0$; б) y убывает на $\mathrm{D}(y)$.

8. $y = -\dfrac{8}{x}, y = -2x + 4$; $A(-1,2;6,3); B(3,2;-2,5)$.



9. а) $y > 0$ при $x < 0, y < 0$ при $x > 0$; б) y возрастает на $D(y)$.

10. $y = 4x + b$; $6 = 4 + b; b = 2; y = 4x + 2$;



а) $x = -0,5; y > 0$ при $x > -0,5; y < 0$ при $x < -0,5$;

б) возрастающая.

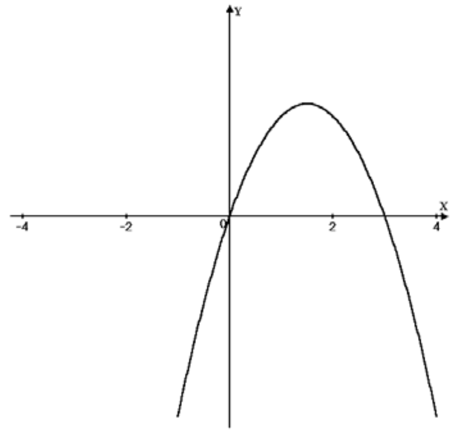
11. а) $y = \dfrac{1}{3}x - 5$, $y = \dfrac{1}{2}x - 5$; $\dfrac{1}{3}x - 5 = \dfrac{1}{2}x - 5$;

$x = 0$, т.е. пересекаются;

б) $y = 3x + 7, y = 3x - 4$; $3x + 7 = 3x - 4$;

$7 = -4$ -нет корней, т.е. не пересекаются.

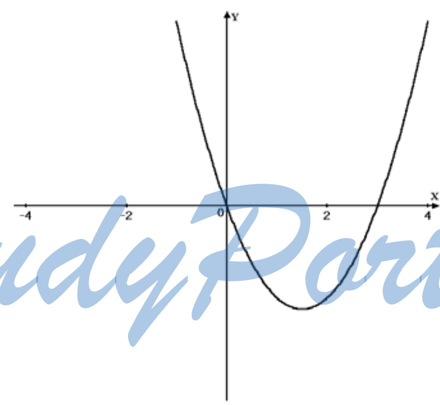
12. $y=-x^2+3x$; а) $x_1=0, x_2=3$; $y>0$ при $x\in(0;3)$; $y<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$; б) y возрастает при $x\le 1{,}5$; убывает при $x\ge 1{,}5$.



13. $y=2x^2+5x-3$; $y(0)=-3$ $(0;-3)$; $2x^2+5x-3=0$;

$D=25+83=49$; $x_1=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}; x_2=-3$; $\left(\dfrac{1}{2};0\right), (-3;0)$.

14. $y=x^2-3x$;

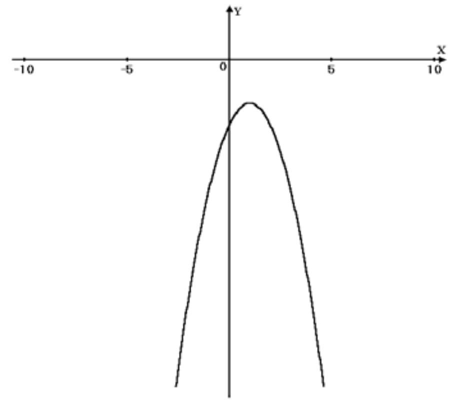


а) $x_1=0, x_2=3; y>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$;
$y<0$ при $x\in(0;3)$;
б) возрастает при $x\ge 1{,}5$; убывает при $x\le 1{,}5$.

15. $y=-2x^2-5x+3$; $y(0)=3$ $(0;3)$; $2x^2+5x-3=0$;

$D=25+8\cdot 3=49$; $x_1=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$; $x_2=-3$; $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ $(-3;0)$.

16. $y=-x^2+2x-3=-\left(x^2-2x+3\right)=-\left(x^2-2x+1+2\right)=\;-(x-1)^2-2.$



а) $y<0$ при любых x; б) y возрастает при $x\le 1$; y убывает при ;
в) $y_{max}=-2$.

Вариант II

П-1

1. а) $\frac{1}{3}+1{,}2\left(2{,}3-0{,}061\div 0{,}2\right)=\frac{1}{3}+1{,}2\cdot 1{,}995=\frac{1}{3}+2{,}394=$

$=\frac{1}{3}+\frac{2394}{1000}=\frac{1}{3}+\frac{1197}{500}=\frac{4091}{1500}=2\frac{1091}{1500}$

б) $5{,}07\div\left(0{,}6\cdot 3{,}25-2{,}25\right)-3\frac{1}{4}=-5{,}07\div 0{,}3-3{,}25=-20{,}15.$

в) $\dfrac{-12{,}4\cdot 1{,}5+24\frac{4}{5}}{2\frac{5}{6}\cdot 3-8\frac{5}{6}}=\dfrac{6{,}2}{\frac{51}{6}-\frac{53}{6}}=-6{,}2\cdot 3=-18{,}6$

2. 1) $\dfrac{xy^2}{x-y}$ а) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot 12=4$; б) $\dfrac{1{,}6\cdot 0{,}25}{1{,}6+0{,}5}=\dfrac{0{,}4}{2{,}1}=\dfrac{4}{21}.$

2) $\dfrac{xy}{x-y^2}$ а) $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4}{5}=0{,}8$;

б) $\dfrac{-1{,}2\cdot 0{,}6}{1{,}2-0{,}36}=-\dfrac{0{,}72}{0{,}84}=-\dfrac{72}{84}=-\dfrac{18}{21}=-\dfrac{6}{7}$.

3) $\dfrac{ab}{a+b^2}$ а) $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{36}}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{36}{25}=\dfrac{4}{25}$; б) $-\dfrac{0{,}5\cdot 0{,}4}{0{,}5+0{,}16}=-\dfrac{0{,}2}{0{,}66}=-\dfrac{20}{66}=-\dfrac{10}{33}$.

3. а) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^0+6\cdot 2^{-2}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}=1+\dfrac{6}{8}+\dfrac{25}{4}=1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{25}{4}=8.$

б) $\dfrac{1}{4}\cdot 16^{\frac{1}{2}}+32^{-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}\cdot 4+\dfrac{1}{2}=1{,}5$;

в) $4\dfrac{1}{2}\cdot 6^{-2}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{125}{8}-1=\dfrac{118}{8}=14{,}75$;

г) $\dfrac{2}{7}\cdot 27^{\frac{2}{3}}+49^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{7}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{18}{7}+\dfrac{1}{7}=2\dfrac{5}{7}$;

д) $2^{-12}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-10}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=2^{-12}\cdot 2^{10}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=$

$=2^{-2}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=2{,}5$;

е) $\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+(0{,}01)^{-0{,}5}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(10^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}+10=11{,}5$.

4. а) $\sqrt{3^3\cdot 16\cdot 3^5}=\sqrt{3^8\cdot 16}=3^4\cdot 4=324$;

б) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=7-3=4$; в) $6^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{6^3}=6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{3}{4}}=6$;

г) $3\sqrt{2^8\cdot 125\cdot 2}=\sqrt[3]{2^9\cdot 5^3}=2^3\cdot 5=40$;

д) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=15$;

е) $5^{1\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}=5^2=25$;

ж) $\dfrac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}+\dfrac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}=\dfrac{16+6-8\sqrt{6}+16+6+8\sqrt{6}}{\left(4+\sqrt{6}\right)\left(4-\sqrt{6}\right)}=\dfrac{44}{10}=4{,}4$;

з) $\sqrt{8\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{12}}=\sqrt{8\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{12}}=\sqrt{24\cdot 6}=12$.

П-2

1. а) $(a-3)(a+3)-2a(4-a)=a^2-9-8a+2a^2=3a^2-8a-9$;

б) $(3x+1)^2-(3x-1)^2=9x^2+6x+1-9x^2+6x-1=12x$;

в) $(x+5)(x-5)-3x(2-x)=x^2-25-6x+3x^2=4x^2-6x-25$;

г) $(2x-1)^2-(x+3)^2=4x^2-4x+1-x^2-6x-9=3x^2-10x-8$;

д) $3x^2(x+4)-(3x-1)\left(x^2-2x+3\right)=$

$= 3x^3 + 12x^2 - 3x^3 + x^2 + 6x^2 - 2x - 9x + 3 = 19x^2 - 11x + 3$

е) $2a(a+3b)^2 - (2a-b)(a^2+2b^2) = 2a(a^2+6ab+9b^2) - (2a^3 - a^2b + 4ab^2 - 2b^3) =$

$= 2a^3 + 12a^2b + 18ab^2 - 2a^3 + a^2b - 4ab^2 + 2b^3 = 2b^3 + 13a^2b + 14ab^2$.

2. 1) а) $5a^2 + 5ab = 5a(a+b)$; б) $x^8 - 2x^5 = x^5(x^3 - 2)$;

в) $4ac^2 - 8ac + 4a^2c = 4ac(c - 2 + a)$; г) $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y)$;

д) $9n - n^3 = n(9 - n^2) = n(3-n)(3+n)$; е) $49x^2 - y^4 = (7x - y^2)(7x + y^2)$;

2) а) $5ab - 25a^2 - 25b^2 = -(25a^2 - 5ab + 25b^2) = -5(5a^2 - ab + 5b^2)$;

б) $x^2 - 3x - y^2 - 3y = (x^2 - y^2) - (3x + 3y) = (x-y)(x+y) - 3(x+y) =$;

$= (x+y)(x-y-3)$; в) $(a-3)^2 - 25 = (a-3-5)(a-3+5) = (a-8)(a+2)$.

3. а) $\dfrac{a}{a-3} - \dfrac{3}{a+3} = \dfrac{a^2+3a-3a+9}{(a-3)(a+3)} = \dfrac{a^2+9}{a^2-9}$;

б) $\dfrac{2}{x-y} - \dfrac{2y}{xy-x^2} = \dfrac{2}{x-y} - \dfrac{2y}{x(y-x)} = \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{2y}{x(x-y)} = \dfrac{2x+2y}{x(x-y)}$;

в) $(n^2 - 6n) \cdot \dfrac{n^2}{n^2-36} = \dfrac{n(n-6)\cdot n^2}{(n-6)(n+6)} = \dfrac{n^3}{n+6}$;

г) $\dfrac{1}{2x^2-4x} \div \dfrac{1}{2x^2+4x} = \dfrac{2x(x+2)}{2x(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2}$.

4. а) $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{12}{4-x^2} = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{12}{(x-2)(x+2)} =$

$= \dfrac{3x-6+3x+6-12}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{6(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{6}{x+2}$;

б) $\dfrac{2ab+a^2}{2b} \cdot \dfrac{2b}{2a^2+a} = \dfrac{a(2b+a)}{a(2a+1)} = \dfrac{a+2b}{2a+1}$;

в) $(x^2 - y^2) \div \dfrac{(x+y)^2}{2x} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x(x-y)}{x+y}$.

5. а) $\dfrac{3m^2-18}{m} \cdot \dfrac{2m}{m+3} + \dfrac{36m}{m-3} =$

$= \dfrac{3(m-3)(m+3)\cdot 2}{m+3} + \dfrac{36m}{m-3} = \dfrac{6(m^2-6m+9)+36m}{m-3} = \dfrac{6m^2+54}{m-3}$

б) $\left(\dfrac{y}{x} - 2 + \dfrac{x}{y}\right) \cdot \dfrac{x^2}{x^2-y^2} = \dfrac{y^2-2xy+x^2}{xy} \cdot \dfrac{x^2}{x^2-y^2} = \dfrac{(x-y)^2 \cdot x}{y(x-y)(x+y)} = \dfrac{x(x-y)}{y(x+y)}$

в) $\left(\dfrac{25}{a^3-25a} + \dfrac{1}{a+5}\right) \div \left(\dfrac{a-5}{a^2+5a} - \dfrac{a}{25+5a}\right) = \left(\dfrac{25}{a(a-5)(a+5)} + \dfrac{1}{a+5}\right) \div$

$\div \left(\dfrac{a-5}{a(a+5)} - \dfrac{a}{5(a+5)}\right) = \dfrac{25+a^2-5a}{a(a-5)(a+5)} \cdot \dfrac{5a(a+5)}{5a-25-a^2} = \dfrac{5}{5-a}$.

7. а). $\left(2^{13}\cdot 2^{-11}\right)^{-1} = \left(2^{2}\right)^{-1} = \frac{1}{4}$; б). $\frac{0,001^{5}\cdot 10^{10}}{10^{-4}} = \frac{\left(10^{-3}\right)^{5}\cdot 10^{14}}{1} = 0,1$;

в). $\frac{27^{-2}\cdot 9^{2}}{3^{-4}} = \frac{\left(3^{3}\right)^{-2}\cdot\left(3^{2}\right)^{2}}{3^{-4}} = \frac{3^{-6}\cdot 3^{4}}{3^{-4}} = 9$;

г). $\frac{0,25^{3}\cdot 16^{2}}{2^{4}} = \frac{\left(2^{-2}\right)^{3}\cdot\left(2^{4}\right)^{2}}{2^{4}} = \frac{2^{-6}\cdot 2^{8}}{2^{4}} = \frac{1}{4}$.

8. а). $\left(\sqrt{8}-4\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)\sqrt{2} =$
$= \left(2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\sqrt{2} = 4-2\sqrt{6}$;

б). $\left(1-\sqrt{5}\right)^{2} = 1-2\sqrt{5}+5 = 6-2\sqrt{5}$; в). $\frac{\sqrt{12}+3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+3\right)}{3\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3}$;

г). $\left(\sqrt{32}-3\sqrt{2}+\sqrt{20}\right)\sqrt{2} = \left(4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\sqrt{2} = 2+2\sqrt{10}$;

д). $\left(\sqrt{7}-1\right)^{2} = 7+1-2\sqrt{7} = 8-2\sqrt{7}$; е). $\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-3\right)}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-3}{3}$.

9. а). $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

б). $tg(-210°)\cdot ctg135° = -tg(180°+30°)\cdot ctg(90°+45°) = tg30°\cdot tg45° = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в). $\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$;

г). $tg\left(-120^{0}\right)\cdot ctg315^{0} = -tg\left(90^{0}+30^{0}\right)\cdot ctg\left(360^{0}-45^{0}\right) = -ctg30^{0}\cdot ctg45^{0} = -\sqrt{3}$;

д). $\sin\left(-390^{0}\right)+\cos405^{0} = -\sin\left(360^{0}+30^{0}\right)+\cos\left(360^{0}+45^{0}\right) =$

$= -\sin30^{0}+\cos45^{0} = -0.5+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$;

е). $tg\frac{7\pi}{3}\cdot ctg\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -tg\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot ctg\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{4} = -\sqrt{3}$.

10. а). $\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = -\frac{ctg\alpha\cdot tg\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha}$.

б). $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$.

в). $\frac{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot tg(\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{tg\alpha\cdot tg\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^{2}\alpha}{\cos^{3}\alpha}$.

г). $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha.$

д). $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)-\cos\alpha\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha=1$.

11. а). $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg\alpha,$

б) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\sin 2\alpha=\cos^2 a+\sin^2 a+\sin 2a-\sin 2a=1$.

П-3

1. а). $4x-5(3x-0{,}5)=3(7-3x)$; $4x-15x+2.5=21-9x$
$2x=-18{,}5$; $x=-9{,}25.$

б). $18x-8x^2=0$; $6x^2-8x+2=0$; $9x-4x^2=0$; $3x^2-4x+1=0$;

$x(9-4x)=0$; $D=16-4\cdot 3=4$; $x_1=0$; $9-4x=0$; $x_1=\frac{4+2}{6}=1$;

$x_2=\frac{9}{4}$; $x_2=\frac{1}{3}$; г). $2x-\frac{4}{x-3}=4$; $2x^2-6x-4-4x+12=0$;

$2x^2-10x+8=0$; $x^2-5x+4=0,$ $D=9,$ $x_1=\frac{5+3}{2}=4;$ $x_2=1$.

2. а). $x^4-4x^2=0$; $x^2\left(x^2-4\right)=0$; $x^2(x-2)(x+2)=0$; $x_1=0,$; $x_{2,3}=\pm 2$;

б). $5(x-6)^2+11(x-6)^2=x-6$; $x-6=0$; $5(x-6)+11=1$; $x_1=6$;
$5(x-6)=-10$; $x_2=4$.

3. а). $7x-3(2x-1{,}5)=4(x+3)$; $7x-6x+4{,}5=4x+12$; $3x=-7{,}5$; $x=-2{,}5$;

б). $8x-2x^2=0$; $4x-x^2=0$; $x_1=0$, $x_2=4$;

в). $-3x^2-5x+2=0$; $3x^2+5x-2=0$; $D=25+4\cdot 3\cdot 2=49$;

г). $2+\frac{8}{x-3}=\frac{4}{x}$; $2x(x-3)+8x=4(x-3)$; $2x^2-6x+8x=4x-12$;
$x^2-x+6=0$; $D=1-4\cdot 6<0$; нет корней.

4. а) $x^4-x^2=0$; $x^2\left(x^2-1\right)=0$; $x^2(x-1)(x+1)=0$; $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 1$;

б) $2(x-1)^2+3(x-1)=x-1$; $x-1=0$ $2(x-1)+3=1$;
$x_1=1$; $2(x-1)=-2$; $x-1=-1$; $x_1=0$.

5. а) $\frac{4x-1}{9}-\frac{3x+1}{12}=\frac{2}{3}$; $16x-4-9x-3=24$; $7x=31$; $x=4\frac{3}{7}$.

б) $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0$; $x^2-2x-1=0$; $D=4+4=2\cdot 4$;

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

в) $\frac{x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} = \frac{50}{x^2-25}$; $\frac{x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{50}{(x-5)(x+5)} = 0$;

$x^2 - 5x + x^2 + 10x + 25 - 50 = 0$; $2x^2 + 5x - 25 = 0$;

$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 25 = 225$; $x_1 = \frac{-5+15}{4} = 2{,}5$;

$x_2 = -5$ -посторонний корень т.к. $x \neq \pm 5$.

6. а) $x^3 - 81x = 0$; $x(x^2 - 81) = 0$; $x(x-9)(x+9) = 0$; $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 9$;

б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^2 = y \geq 0$; $y^2 - 5y + 4 = 0$; $D = 25 - 16 = 9$;

$y_1 = \frac{5+3}{2} = 4$; $y_2 = 1$; $x^2 = 4$ $x^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{1,2} = \pm 1$.

в) $(x^2-4)^2 + 5(x^2-4) = 0$; $x^2 - 4 = 0$, $x^2 - 4 + 5 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$; $x^2 = -1$ - нет корней.

7. а) $\begin{cases} 2x + 4y = 16; x + 2y = 8; 2y = 8 - x \\ 3x - 2y = -16; 2y = 3x + 16 \end{cases}$; $3x + 16 = 8 - x$; $4x = -8$;

$x = -2$; $y = \frac{8+2}{2} = 5$. Ответ: $(-2;5)$.

б) $\begin{cases} 2x + y^2 = 11 \\ x - y = 4; x = 4 + y \end{cases}$; $8 + 2y + y^2 - 11 = 0$; $y^2 + 2y - 3 = 0$;

$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$; $y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$; $y_1 = -3$; $x_1 = 4 + 1 = 5; x_2 = 4 - 3 = 1$.

Ответ: $(5;1), (1;-3)$.

в) $\begin{cases} xy = -8 \\ x + 2y = 6; x = 6 - 2y \end{cases}$; $y(6 - 2y) + 8 = 0$; $2y^2 - 6y - 8 = 0$;

$y^2 - 3y - 4 = 0$; $D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$; $y_1 = \frac{3+5}{2} = 4$; $y_2 = -1$.

$x_1 = 6 - 2 \cdot 4 = -2$; $x_2 = 6 + 2 = 8$. Ответ: $(-2;4), (8;-1)$.

8. а) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 10; x - 2y = 5; x = 5 + 2y \end{cases}$; $3(5 + 2y) - 2y = 3$;

$15 + 6y - 2y = 3$; $4y = -12$; $y = -3; x = 5 - 2 \cdot 3 = -1$. Ответ: $(-1;-3)$.

б) $\begin{cases} x + 3y = 3; x = 3 - 3y \\ 3xy = 2 \end{cases}$; $3y(3 - 3y) = 2$; $9y - 9y^2 = 2$;

$9y^2 - 9y + 2 = 0$; $D = 81 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 9$; $y_1 = \frac{9+3}{18} = \frac{2}{3}$; $y_2 = \frac{1}{3}$;

$x_1 = 3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$; $x_2 = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$. Ответ: $\left(1; \frac{2}{3}\right), \left(2; \frac{1}{3}\right)$.

в) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=5; x=5+y \end{cases}$; $25+10y+y^2+y^2=25$; $2y^2+10y=0$;

$y_1=0, y_2=-5$; $x_1=5; x_2=0$. Ответ: $(5;0);(0;-5)$.

9. а) $\begin{cases} \frac{2x-5y}{3}+\frac{3x-2y}{4}=5; 8x-20y+9x-6y=60 \\ \frac{x-2y}{4}-2y=3; x-2y-8y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} 17x-26y=60 \\ x=10y+12 \end{cases}$;

$170y+84-26y=60$; $144y=-24$; $y=-\frac{1}{6}$; $x=-\frac{10}{6}+12=\frac{31}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{31}{3};-\frac{1}{6}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x-y=-1; y=x+1 \end{cases}$; $x^2-x|x+1|+|x+1|^2=7$;

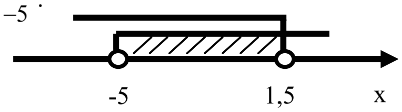
$x^2-x^2-x+x^2+2x+1-7=0$; $x^2+x-6=0$; $D=1+4\cdot 6=25$;

$x_1=\frac{-1+5}{2}=2; x_2-3$; $y_1=3; y_2=-2$. Ответ: $(2;3),(-3;-2)$.

10. $y=-2x^2-2x+4$; $y=9-5x$; $-2x^2-2x+4=9-5x$;

$2x^2-3x+5=0$; $D=9-4\cdot 2\cdot 5<0$ - нет корней. Ответ: нет.

11. а) $\begin{cases} 3x+7>5x+10; 2x<3; x<-1{,}5 \\ 4x-1>x-16; 3x>-15; x>-5 \end{cases}$.

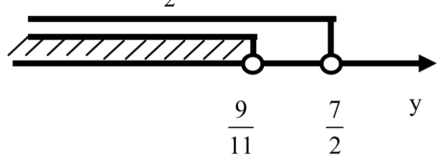


Ответ: $(-5;-1{,}5)$.

б) $\begin{cases} x-10>2x-4; x<-6 \\ 3x-4(x-7)<16-3x; 3x-4x+28+3x<16; 2x<-12; x<-6 \end{cases}$.

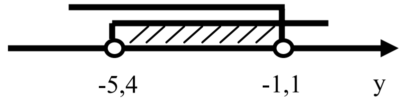
Ответ: $(-\infty;-6)$

в) $\begin{cases} \frac{y-5}{3}<2y>2y-8; y-5-6y>6y-24; 11y<19; y<\frac{19}{11} \\ 3y-\frac{2y+10}{2}<2; 6y-2y-10<4; 4y<14; y<\frac{7}{2} \end{cases}$;



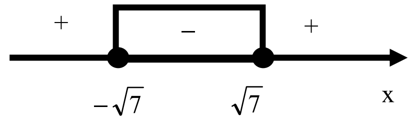
Ответ: $\left(-\infty;\frac{19}{11}\right)$.

12. $\begin{cases} \dfrac{y-5}{4} < \dfrac{2y+3}{3}; 3y-15 < 8y+12; 5y > -27; y > -\dfrac{27}{5} \\ \dfrac{4y+1}{2} < \dfrac{y-4}{3}; 12y+3 < 2y-8; 10y < -11; y < -1{,}1 \end{cases}$.



Ответ: -5; -4; -3; -2.

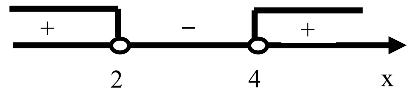
13. а) $x^2 - 7 \le 0$; $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \le 0$.



Ответ: $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$.

б) $x^2 - 6x + 10 > 2$; $x^2 - 6x + 8 > 0$; $D = 36 - 32 = 4$;

$x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4; x_1 = 2$.

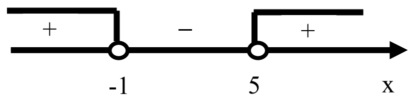


Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

в) $x^2 - 5x + 7 < 0$; $D = 25 - 47 < 0$; т.к. $a = 1 > 0$, то нет решений.

Ответ: нет решений.

г) $(x-5)(x+1) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

П-4

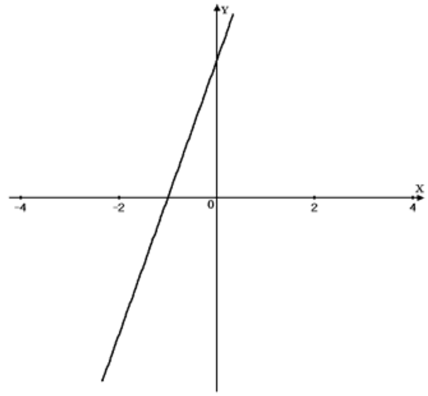
1. а). $y = \dfrac{x-1}{x+5}$; $x + 5 \ne 0$, т.к. знаменатель; $x \ne -5$, $x \le 4$;

б). $y = \sqrt{4-x}$; $4 - x \ge 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty]$; $x \ne -5$; Ответ: $x \le 4$.

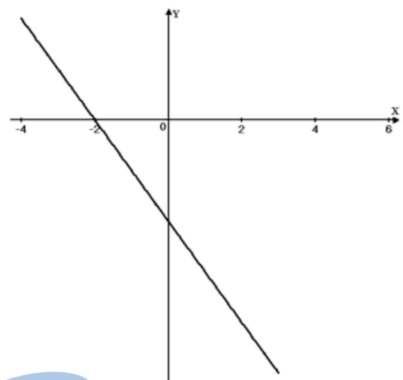
в). $y = \dfrac{5}{x-1}$; $x - 1 \ne 0$; $x \ne 1$; Ответ: $x \ne 1$. г). $y = \sqrt{3x+6}$; $3x + 6 \ge 0$;

$3x \ge -6; x \ge -2$; Ответ: $x \ge -2$.

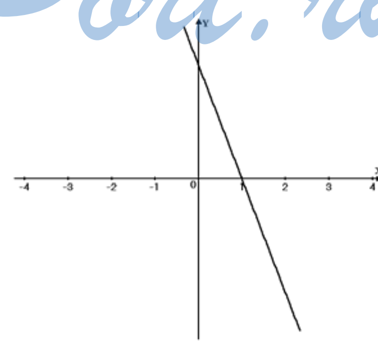
2. а). $3x + 3 = y$; 1) $y > 0$ при $x = -1$; $y > 0$ при $x > -1$; $y < 0$ при $x < -1$; 2) возраст.



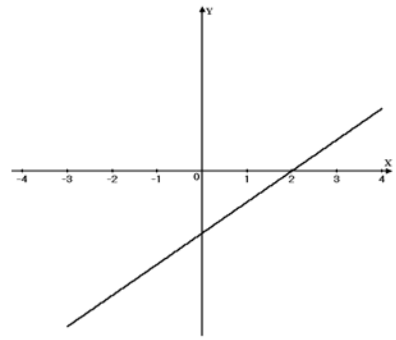
б). $y=-2x-4$. 1) $y=0$ при $x=-2$; $y>0$ при $x<-2$; $y<0$ при $x>-2$; 2) убывающая.



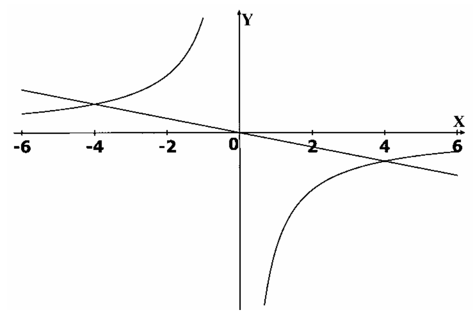
3. а). $y=-3x+3$; 1) $y=0$ при $x=1$; $y>0$ при $x<1$; $y<0$ при $x>1$; 2) убывающая.



б). $y = 2x - 4$; 1) $y = 0$ при $x = 2$; $y > 0$ при $x > 2$; $y < 0$ при $x < 2$;
2) возрастающая.

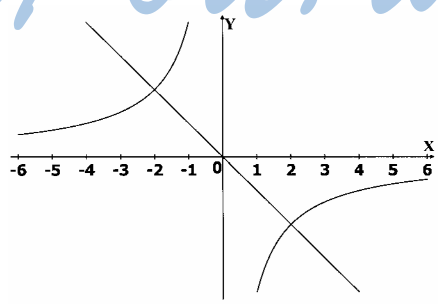


4. $y = -\frac{4}{x}, y = -\frac{1}{4}x$; $-\frac{4}{x} = -\frac{1}{4}x$; $x^2 = 16; x = \pm 4.$



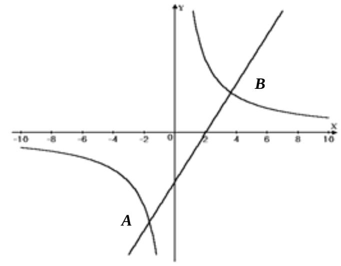
5. $y = -\frac{4}{x}$; а) $y > 0$ при $x < 0$; б) возрастает на D(y).
$y < 0$ при $x > 0$;

6. $y = -\frac{6}{x}, y = -1{,}5x$; $-\frac{6}{x} = -1{,}5x$; $x^2 = 4; x = \pm 2$.



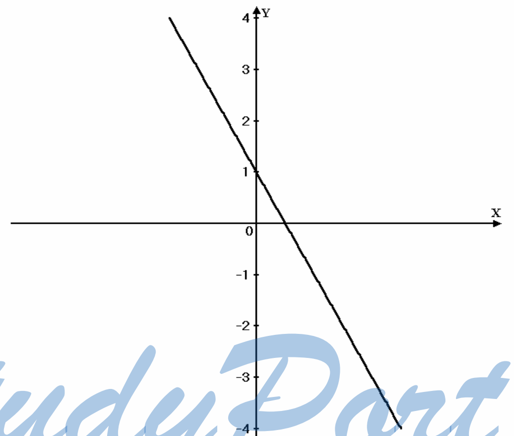
7. $y=-\dfrac{6}{x}$; а) $y>0$ при $x<0$; б) возрастает на $D(y)$.
$y<0$ при $x>0$.

8. $y=\dfrac{12}{x}$, $y=2x-4$. $A(3{,}5;3{,}2)$, $B(-1{,}2;-5{,}8)$,



9. $y=\dfrac{12}{x}$; а) $y\succ 0$ при $x\succ 0$; б) убывает; $y<0$ при $x<0$.

10. $y=-2x+b$; $-1=-2+b; b=1$; $y=-2x+1$.

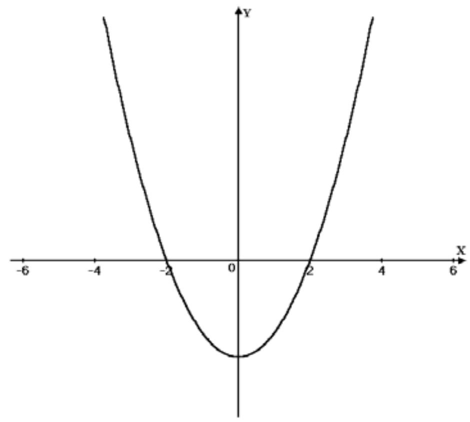


а) $y=0$ при $x=0{,}5$; $y>0$ при $x<0{,}5$; $y<0$ при $x>0{,}5$; б) убывающая.

11. а) $y=3x-5, y=2x-5$; $3x-5=2x-5$; $x=0$, т.е. пересекаются;

б) $y=-\dfrac{1}{2}x+3, y=-\dfrac{1}{2}x-7$. $-\dfrac{1}{2}x+3=-\dfrac{1}{2}x-7$ – нет корней, т.е. не пересекаются.

12. $y=x^2-4$



а) $x_{1,2} = \pm 2$; $y > 0$ при $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

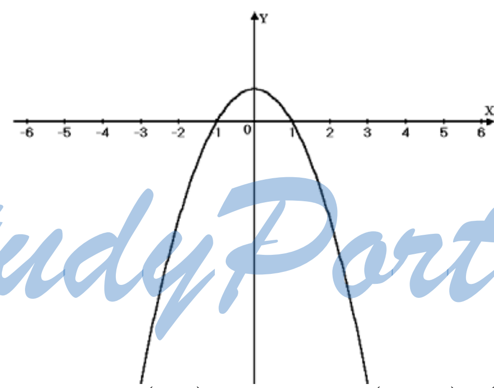
$y < 0$ при $x \in (-2;2)$

б) y возрастает при $x \geq 0$; убывает при $x \leq 0$.

13. $y = -2x^2 + x + 3$; $y(0) = 3$ $(0;3)$; $2x^2 - x - 3 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$; $x_1 = \dfrac{1+5}{4} = 1{,}5$; $x_2 = -1$; $(1{,}5;0), (-1;0)$.

14. $y = -x^2 + 1$



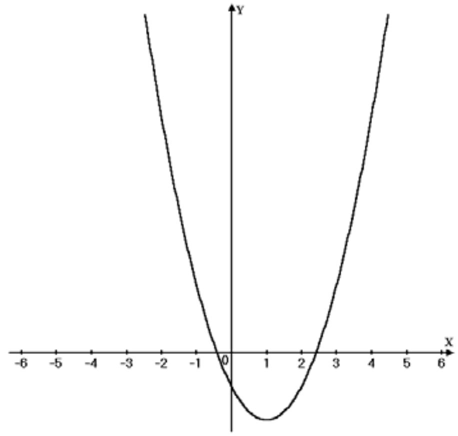
а) $x_{1,2} = \pm 1$; $y > 0$ при $x \in (-1;1)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

б) y возрастает при $x \leq 0$; y убывает при $x \geq 0$.

15. $y = 2x^2 - x - 3$; $y(0) = -3$; $(0;-3)$; $2x^2 - x - 3 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$; $x_1 = \dfrac{1+5}{4} = 1{,}5$; $x_2 = -1$; $(1{,}5;0)$, $(-1;0)$.

16. $y = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$



а) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.

б) y возрастает при $x \geq 1$, убывает при $x \leq 1$; в) $y_{min} = 2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Осенняя олимпиада.

1. Пусть x – цифра десятков, y – цифра единиц, тогда $10x+y$ – данное число.

Получаем уравнение: $10x+y=xy+12$

Перепишем его в виде: $(10-y)(x-1)=2$

В последнем уравнении слева стоит произведение двух натуральных чисел, значит, возможны два случая:

1) $\begin{cases} 10-y=2; \ y=8 \\ x-1=1; \ x=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 10-y=1; \ y=9 \\ x-1=2; \ x=3 \end{cases}$;

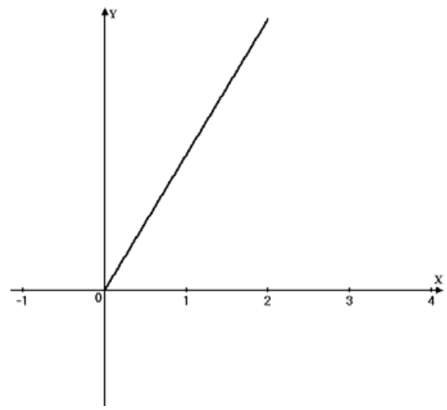
Ответ: 28 или 39.

2.

Предположим, что дробь $\dfrac{a}{b}$ сократима, т.е. $a = a_1k$; $b = b_1k$, где $k \neq 1$ - натуральное число. Тогда получаем:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a_1k - b_1k}{a_1k + b_1k} = \frac{k(a_1 - b_1)}{k(a_1 + b_1)} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_1}$, т.е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно. Значит, дробь $\frac{a}{b}$ несократима, ч.т.д.

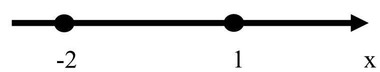
3. $y = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, & x \ge 0 \\ x - x = 0, & x < 0 \end{cases}$.



4. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, ч.т.д.

5. $(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$; пусть $x^2 = a > 0$, имеем: $x^2 = -1 - 4x$;
$(1 + a)^2 = 4x(1 - a)$; $a^2 + (2 + 4x)a + 1 - 4x = 0$; $D = 16x^2$;
$a_1 = \frac{-2 - 4x + 4x}{2} = -1 < 0$; $a_2 = \frac{-2 - 4x - 4x}{2} = -1 - 4x$;
$x^2 + 4x + 1 = 0$; $D = 16 - 4 = 4 \cdot 3$; $x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.
Ответ: $-2 \pm \sqrt{3}$

6. $|x - 1| + |x + 2| \le 3$. Нули модулей $x_1 = -2;\ x_2 = 1$.



а) $(-\infty; -2]$; $1 - x - x - 2 \le 3$;
$2x \ge -4$; $x \ge -2$; $x = -2$;
б) $[-2; 1]$; $1 - x + x + 2 \le 3$; $3 \le 3$; $x \in [-2; 1]$;
в) $[1; +\infty)$; $x - 1 + x + 2 \le 3$; $2x \le 2$; $x \le 1$; $x = 1$;
Итого, получаем $-2 \le x \le 1$.
Ответ: $-2 \le x \le 1$

7. Пусть $AB=a$ км.

x км/ч, y км/ч – скорости пешехода и велосипедиста соответственно.

Получаем: $\begin{cases} \dfrac{a-6}{y}=\dfrac{6}{x};\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{a-6} \\ \dfrac{a}{y}=\dfrac{a-16}{x};\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{a-16}{a} \end{cases}$; $\dfrac{6}{a-6}=\dfrac{a-16}{a}$;

$a^2-22a+96=6a$; $a^2-28a+96=0$; $D=400$;

$a_1=\dfrac{28+20}{2}=24$; $a_2=4$ - не подходит по условию AB=24 км.

Ответ: 24 км.

8. $x^2y^2-9x^2-4y^2+36=0$; $9x^2+4y^2+12xy=x^2y^2+12xy+36$;

$(3x+2y)^2=(xy+6)^2$

$3x+2y=xy+6$;	$3x+2y=-(xy+6)$;
$3x-xy=6-2y$;	$3x+xy=-6-2y$;
$x=\dfrac{6-2y}{3-y}=2$;	$x=\dfrac{-6-2y}{3+y}=-2$;
$y=3$.	$y=-3$.

Итак, графики уравнения - объединение четырех прямых:
$x=-2$, $x=2$, $y=-3$, $y=3$.

Весенняя олимпиада

1. $x^6-x^5+x^3-x+1=x^6-x^5+x^4-x^4+x^3-x^2+x^2-x+1=$
$=x^4(x^2-x+1)-x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

2. $2x^2+2xy+4y^2+2x+6y+5\geq 1$

$x^2+2xy+y^2+x^2+2x+1+3y^2+6y+3=(x+y)^2+(x+1)^2+3(y+1)^2\geq 0$
при любых x и y, значит, исходное неравенство также верно для любых x и y. ч.т.д.

3. $|x|+|y|=1$.

4. а) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$;

$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=\sqrt{x}$;

$2x-2\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x}$; $2x=2\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}$;

$4x^2=4x^2-4x+x+4\sqrt{x(x^2-x)}$; $3x=4\sqrt{x(x^2-x)}$;

$9x^2=16x(x^2-x)$

$x_1=0$, $\quad 9=16(x-1)$;

$$x_2=1\frac{9}{16}.$$

Ответ: $0; 1\frac{9}{16}$.

б) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)}=\sqrt[3]{1-x^2}$;

$\left(1+x^2\right)-3\sqrt[3]{(1+x)^4(1-x)^2}+3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4}-(1-x)^2=1-x^2$.

5. $\frac{a_1}{1-q}=56$

Квадраты образуют новую бесконечную геом. прогрессию

$cb_1=a_1^2$, $q_1=q^2$.

Имеем $\frac{a_1^2}{1-q^2}=448$; $\begin{cases}\frac{a_1}{1-q}=56; a_1=56(1-q)\\ \frac{a_1^2}{1-q^2}=448\end{cases}$; $\frac{56^2\left(1-q^2\right)}{(1-q)(1+q)}=448$;

$\frac{56(1-q)}{1+q}=8$; $7(1-q)=1+q$; $7-7q=1+q$; $8q=6$; $q=\frac{3}{4}$;

$a_1=56\cdot\frac{1}{4}=14$

Ответ: $a_1=14; q=\frac{3}{4}$.

6. $\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}+$

$+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}=$

$=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, ч.т.д.

7. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=$

$=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$.

8. $x^2-y^2=21$; $(x-y)(x+y)=21$; $x>y$;

$(x-y)$, $(x+y)$-натуральные; 21=3·7 или 21=1·21;

Получаем: $\begin{cases}x-y=3; x=3+y\\ x+y=7\end{cases}$; $3+2y=7$; $2y=4$; $y=2$ $x=5$;

или

$$\begin{cases} x - y = 1; \ x = y + 1 \\ x + y = 21 \end{cases}; \ 2y = 20; \ y = 10 \quad x = 11.$$

Ответ: (5;2) или (11; 10).