А.В. Тронин

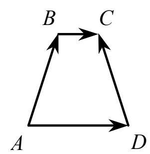
Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 9 класс

к пособию «Дидактические материалы по геометрии для 9 класса / Б.Г. Зив. — 7-е изд. — М.: Просвещение, 2003.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

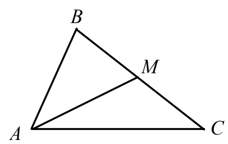
С-1



1.

1) $BC = 2$, $AD = 5 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} \Rightarrow k = \frac{2}{5}$.

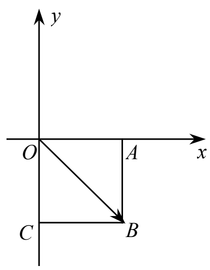
2) Не существует, т.к. иначе $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ были бы несимметричны, что противоречит условию.



2.

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\bar{a} + \bar{b}\right).$$

С-2.



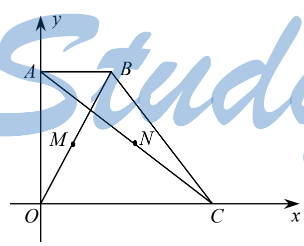
1. 1) $\bar{a} = 5\bar{i} - 4\bar{j} = \{5,-4\}$; 2) $\bar{b} = -3\bar{j} = \{0,-3\}$.

2. Т.к. $OABC$ — квадрат, по теореме Пифагора из ΔOAB: $OA^2 = OB^2 + AB^2$; $2OA^2 = OB^2 \Rightarrow OA = 2$;
то $OA = OC = 1$ и $AB \perp OX$ и $CB \perp OY \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2i - 2j$.

3. $\bar{a}\{-2;\ 3\}$, $b\{1;\ 1\}$, $c\{-2;\ 8\}$;

1) $\bar{a} + \bar{b} = \{-1;\ 4\}$; 2) будут, т.к. $\bar{c} = 2(\bar{a} + \bar{b})$.

С-3



1. 1) $O = (0, 0)$, $A = (0, 3)$, $C = (5, 0)$
Т.к. $AB \| OC$, то ордината точки B должна быть равна ординате точки A, т.е. 3, а т.к. $AB = 3$, то $B = (3, 3)$.

2) $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\{3;\ 3\} = \left\{\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$;

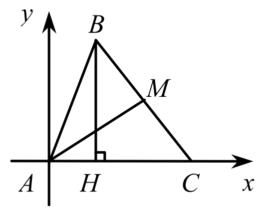
$$\overline{ON} = \overline{OA} + \overline{AN} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\left(\overline{AO} + \overline{OC}\right) = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OC} =$$

$$= \frac{1}{2}\{0;\ 3\} + \frac{1}{2}\{5;\ 0\} = \left\{\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right\} \Rightarrow N = \left(\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right).$$

3) Очевидно, $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$.

2. $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{i} + \bar{j} \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} = -\bar{i} - 4\bar{j} \Rightarrow \left|\bar{a} + \bar{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$.

С-4



По теореме Пифагора

$BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{100} = 10$;

$AH = 6 \cdot \text{tg}45° = 6 \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$.

Введем систему координат как показано на рис., тогда

$B = (6, 6)$ и $C = (14, 0) \Rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} = \{20, 6\}$, но

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right) \Rightarrow \overline{AM} = \{10, 3\} \Rightarrow M = (10, 3) \Rightarrow$

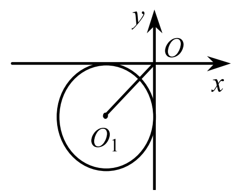
$\Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$.

С-5

1. 1) Очевидно, $(2, -4)$, $R = \sqrt{20}$.

2) Проходит, т.к. $(0-2)^2 + (0+4)^2 = 20$.

2.



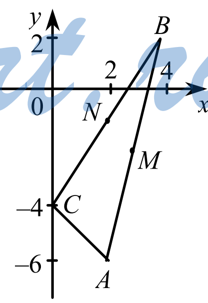
Пусть R — радиус окружности $\Rightarrow O_1 = (-R; -R) \Rightarrow$

$\Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = R^2 + R^2$ (по теореме Пифагора) $\Rightarrow$

$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow O_1 = (-2; -2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение окружности: $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

С-6



1. Т.к. прямая перпендикулярна OX, то ее уравнение имеет вид $x = \alpha$, т.к. прямая проходит через точку $A(9; 3)$, то $\alpha = 9 \Rightarrow x = 9$ — искомая прямая.

2. Очевидно, $N\left(\frac{4+0}{2}; \frac{2-4}{2}\right) = (2; -1)$, а

$M\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2-6}{2}\right) = (3; -2)$.

Пусть уравнение прямой MN: $y = kx + b$, тогда имеем систему:

$\begin{cases} -1 = 2k + b \\ -2 = 3k + b \end{cases}$; $\begin{cases} b = -1 - 2k \\ -2 = 3k - 1 - 2k \end{cases}$; $\begin{cases} k = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 1$.

С-7

1. (7; –6) — координаты центра окружности, 9 — радиус окружности $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ абсцисса крайней правой точки окружности равна 7 + 9 = 13 < 19 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ не пересекаются.

2. Радиус окружности равен 4 $\Rightarrow$ это 2 окружности с тем же центром и радиусами, равными 7 и 1. Ответ: $x^2 + y^2 = 49$ и $x^2 + y^2 = 1$.

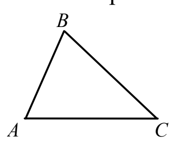
С-8

1. Т.к. угол при основании равен 15°, то угол против основания равен $180° - 15° - 15° = 150° \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 150° = 1$.

2. $8\sqrt{2} = a^2 \sin 45° \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}}} = 4$ см, где a — сторона ромба.

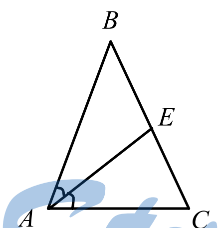
С-9

1. По теореме синусов имеем:



$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 120°} \Rightarrow AC = \frac{4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$

2. $\angle B = 180^0 - 2\alpha$.



$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)}; \quad AB = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} = b;$$

$$\angle AEB = 180^0 - (180^0 - 2\alpha) - \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2};$$

$$\angle B = 180 - 2\alpha \Rightarrow \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(180 - 2\alpha)} = \frac{b}{\sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{b \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{2\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC = \frac{b}{4\cos\alpha} \cdot \frac{AE}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{AB}{\sin\frac{3\alpha}{2}};$$

$$AE = AB \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}} = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

С-10

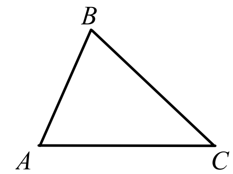
1. По теореме косинусов имеем: $c^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10\cos 120° =$ $= 136 + 120 \cdot \frac{1}{2} = 196 \Rightarrow c = 14$ (см), где c — 3-я сторона.

2. Т.к. против большей стороны лежит больший угол, то ищем угол против стороны, длина которой равна 7. По теореме косинусов:

$49 = 9 + 25 - 30 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ угол тупой $\Rightarrow$ треугольник тупоугольный.

С-11



1. По теореме синусов:

$\frac{BC}{\sin 32°} = \frac{0,3}{\sin 70°} \Rightarrow BC = \frac{0,3 \cdot \sin 32°}{\sin 70°} \approx 0,17;$

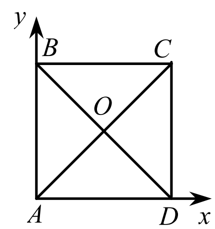
$\angle C = 180° - 70° - 32° = 78° \Rightarrow$ по теореме синусов: $AB = \frac{AC \cdot \sin 78°}{\sin 70°} = \frac{0,3 \sin 78°}{\sin 70°} \approx 0,31.$

2. BC — меньшая сторона $\Rightarrow$ по теореме косинусов:

$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2295}{2982} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2295}{2982} \approx 41°25'$.

С-12



1. $\overline{AO}\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, $\overline{CO}\left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$, $\overline{BD}\{1; -1\}$;

$\overline{CD}$ $\{0; -1\}$; $AB\{0; 1\}$; $\overline{DB}$ $\{-1; 1\}$.

1) $\overline{AO} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot (1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$;

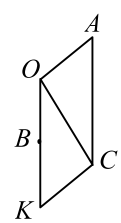
2) $\overline{CO} \cdot \overline{CD} = -\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$;

3) $\overline{AB} \cdot \overline{DB} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1.$

2. $\overline{a}$ $\{-1; 3\}$; $\overline{b}$ $\{2; 1\}$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = -2 + 3 = 1$; $|a| = \sqrt{1+3} = \sqrt{10}$; $|b| = \sqrt{5}$;

$\cos\angle(a, b) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 81°52'$.

С-13



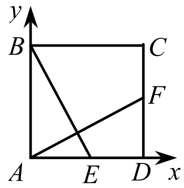
1. $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\overline{b}| = 4$; $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 135°$;

$OC = |\overline{a} + 2\overline{b}|$. найдем OC.

Т.к. $\angle AOB = 135°$, то $\angle OAC = \angle OKC = 45°$.

Т.к. $OACK$ — параллелограмм, то $AC = OK = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow OC^2 = 8 + 64 - 32\sqrt{2} \cos 45° = 72 - 32 = 40 \Rightarrow OC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.



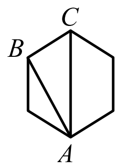
2. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной a.
Введем систему координат как показано на рисунке, тогда $\overline{AB}\ \{0;\ a\}$, $\overline{AD}\ \{a,\ 0\}$,

$$\overline{AE}\left\{\frac{a}{2};\ 0\right\}, \overline{DF}\left\{o;\ \frac{a}{2}\right\} \Rightarrow \overline{BE} = \left\{\frac{a}{2};-a\right\} \text{ и } \overline{AF}\left\{a,\ \frac{a}{2}\right\};$$

$$\overline{BE}\cdot\overline{AF} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \ \Rightarrow BE \perp AF.$$

С-14

1. Пусть O — центр 20-тиугольника. Соединим O со всеми его вершинами, получим 20 треугольников. Очевидно, что сумма их всех углов равна 180° · 20, если вычесть из нее все углы, противолежащие основанию, то останется только сумма углов при сторонах многоугольника и останется только разделить ее на 20, чтобы получить угол при вершине.



Итак, $\angle A = \dfrac{180°\cdot 20 - 360°}{20} = \dfrac{180°\cdot 18}{20} = 9° \cdot 18 = 162°$.

2. По предыдущей задаче угол при вершине 6-тиугольника равен $\dfrac{180°\cdot 4}{6} = 120°$. Пусть сторона его равна b, тогда по теореме косинусов

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos 120° \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2(1-cos120)°} = \frac{a^2}{2\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}a^2 \ \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Из ΔABC по теореме Пифагора имеем: $AC^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{4a^2}{3} \Rightarrow AC = 2\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

С-15

1. Пусть сторона треугольника равна a, тогда

$S = \dfrac{1}{2}a\cdot a\cdot sin\,60° = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$, а $P = \dfrac{3}{2}a \ \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{3}{2}a\cdot\sqrt{3}$, $a^2 = 6a \Rightarrow a = 6$.

Значит, S $= 9\sqrt{3}$ см^2; P = $3a$ = 18 см.

2. Пусть радиус окружности равен r, тогда по теореме Пифагора:

$$a^2 = 2r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{2} \ \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

3. Проведем какую-нибудь хорду и построим к ней серединный перпендикуляр. Затем проведем серединный перпендикуляр к нему. Соединим точки пересечения серединных перпендикуляров с окружностью — получим квадрат.

С-16

1. Радиус окружности равен 4 $\Rightarrow$ длина диагонали квадрата равна 8 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ периметр равен $16\sqrt{2}$.

2. $l = \frac{105° \cdot \pi}{180°} \cdot 22 = \frac{21 \cdot 22\pi}{36} = \frac{21 \cdot 11\pi}{18} = \frac{77\pi}{6} \approx 40{,}3$ (м)

С-17

1. Пусть r — радиус круга, тогда сторона 6-тиугольника тоже равна r, тогда $\pi r^2 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}r^2}{4} = 4\pi - 6\sqrt{3} \Rightarrow r^2 = \frac{4\pi - 6\sqrt{3}}{\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow r = 2.$

2. $S = \frac{1}{2} \cdot 115° \cdot \frac{\pi}{180°}(12{,}7)^2 \approx 161{,}9$ см^2.

3. Проведем какую-нибудь хорду. Построим к ней серединный перпендикуляр и найдем его середину — это будет центр круга. Найдем его радиус. Построим отрезок в 3 раза больший. Построим круг с таким радиусом.

С-18

1. Строим B' симметрично B, A' симметрично A и C' симметрично C. Строим $B'A'$ и $B'C'$.

2.. Пусть имеются две пересекающиеся прямые, тогда они образуют две пары вертикальных углов, т.к. при движении прямые переходят в прямые, то пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, следовательно, вертикальные углы отображаются на вертикальные.

С-19

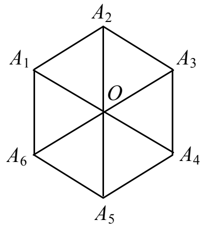
1. Отложим вектор $\overline{OO_1} = \overline{AA_1}$ от точки O. Через точку O_1 проведем луч, параллельный OM в том же направлении.

2. Перенесем параллельно одну прямую вдоль прямой, которой она перпендикулярна, в направлении к другой на расстояние, равное длине отрезка, соединяющего точки их пересечения с 3-й прямой. Очевидно, прямые полностью совместятся $\Rightarrow$ если одна из них перпендикулярна 3-й, то и другая тоже.

С-20

1. От OB в направлении против часовой стрелки отложим угол, равный 45°. Пусть другая его сторона пересекает окружность в точке B_1. Аналогично, строим точку A_1. Соединим точки A_1 и B_1.

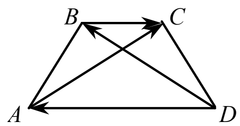
$A_1B_1 = AB$, т.к. поворот является движением, а оно сохраняет расстояния.



2. Т.к. $\angle A_2OA_6$ равен 120°, то при вращении вокруг точки O точка A_2 перейдет в точку A_6. Аналогичные утверждения имеют место и для других вершин 6-тиугольника $\Rightarrow$ при таком повороте он перейдет сам в себя.

Вариант 2

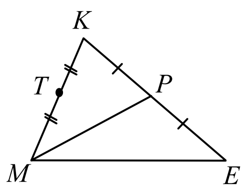
С-1



1. 1) Т.к. $BC \parallel AD$ и $BC = 7$, а $AD = 20$,

то $\overline{DA} = -\dfrac{20}{7}\overline{BC}$.

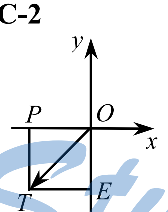
2) Т.к. $AC \nparallel DB$, то не существует.



2.

$$\overline{NP} = \frac{1}{2}\left(\overline{EM} + \overline{MK}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{EM} + 2\overline{MT}\right) = \frac{1}{2}\overline{m} + \overline{n}.$$

С-2



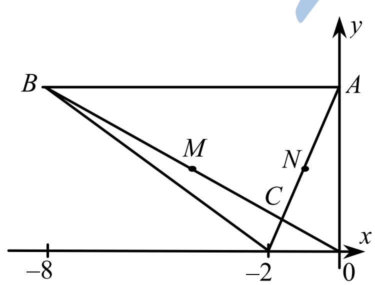
1. 1) $\overline{m} = -3\bar{i} + 7\bar{j} \Rightarrow m\{-3; 7\}$; 2) $\overline{p} = -4\bar{i} \Rightarrow p\{-4; 0\}$.

2. По теореме Пифагора $PO = OE = 5 \Rightarrow \overline{OT} = -5\bar{i} - 5\bar{j}$.

3. $\overline{p}\ \{-3; 4\}$, $\bar{l}\ \{1; 2\}$, $\bar{k}\ \{4; -2\}$;

1) $\overline{p} - \bar{l} = \{-4; 2\}$. 2) Будут, т.к. $\overline{p} - \bar{l} = -\bar{k}$.

С-3



1. 1) $A(0; 4)$; $O(0; 0)$; $C(-2; 0)$.
Т.к. $ABCO$ — трапеция,
то $AB \parallel OX \Rightarrow B(-8; 4)$.

2) $N\left(\dfrac{0-2}{2};\ \dfrac{4-0}{2}\right) = N(-1; 2)$;

$M\left(\dfrac{0-8}{2};\ \dfrac{0+4}{2}\right) = M(-4; 2)$.

3) Очевидно, трем.

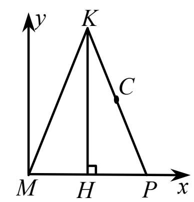
2. $\overline{m} = -2\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{n} = 3\overline{i} + 5\overline{j}$;

$\overline{m} - \overline{n} = -5i - 2j \Rightarrow \left|\overline{m} - \overline{n}\right| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.

С-4

Введем систему координат как показано на рисунке, тогда $M(0;\ 0)$, $K(4;\ 4)$, $P(10;\ 0) \Rightarrow C(7;\ 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow MC = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$.



С-5

1. 1) С(–1; 2) — центр, $\sqrt{40}$ — радиус.

2) $(5 + 1)^2 + (0 - 2)^2 = 36 + 4 = 40 \Rightarrow$ пересекает.

2. Из теоремы Пифагора находим $O_1(3;\ -3) \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

С-6

1. Т.к. прямая перпендикулярна OY, то ее уравнение имеет вид $y = \beta$, а т.к. она проходит через $B(-3;\ 10)$, то $\beta = 10 \Rightarrow y = 10$ — искомая прямая.

2. Т.к. P и K середины сторон, то $A(4;\ 6)$, а $B(-2;\ 4)$.

Пусть уравнение прямой $y = kx + b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = 4k + b \\ 4 = -2k + b \end{cases};\ \begin{cases} 2 = 6k \\ b = 4 + 2k \end{cases};\ \begin{cases} k = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{14}{3}.$$

С-7

1. (5; 10) — центр, 10 — радиус $\Rightarrow$ самая верхняя точка окружности имеет координаты (5; 20) $\Rightarrow$ касается.

2. $A(2;\ 0)$, $B(6;\ 0)$.

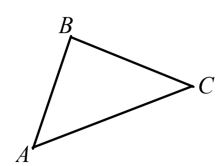
Очевидно, это серединный перпендикуляр к $AB \Rightarrow x = \dfrac{6+2}{2} = 4$.

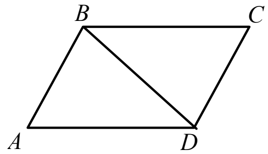
С-8

1.

$S = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \dfrac{2S}{AB \sin 120°} = \dfrac{12\sqrt{3}}{6\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 4.$

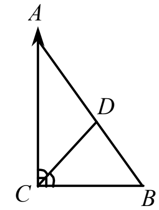




2. Т.к. ΔBCD — равнобедренный, то $\angle C = \angle BDC = \angle ABD = \angle BAD = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CBD = 120° \Rightarrow$

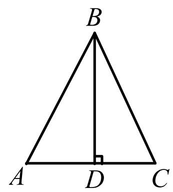
$$\Rightarrow S = 2S_{\Delta BCD} = BC \cdot BD \cdot \sin 120° = 27\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

С-9



1. По теореме синусов имеем:

$$\frac{AD}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 120°} \Rightarrow AD = \frac{AC \sin 45°}{\sin 120°} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}.$$



2. $AB = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \frac{AC}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{h \sin\beta}{\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)}.$$

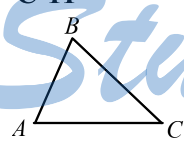
С-10

1. По теореме косинусов: $a^2 = 8 + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cos 135° = 17 + 12 = 29.$·
Значит, $a = \sqrt{29}$ см, где a — неизвестная сторона.

2. Найдем угол против большей стороны: $36 = 16 + 25 - 40\cos\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{41 - 36}{40} > 0 \Rightarrow \alpha \text{ — острый} \Rightarrow \text{остроугольный треугольник.}$$

С-11

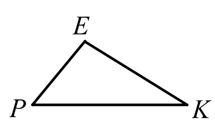


1. По теореме косинусов $BC^2 = 144 + 324 - 432\cos 50° \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = \sqrt{468 - 432\cos 50°}$.

По теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin 50°} = \dfrac{12}{\sin\angle C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle C = \text{acrsin}\frac{12\sin 50°}{\sqrt{468 - 432\cos 50°}} \approx 41°47' \Rightarrow$$

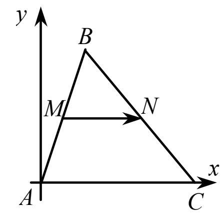
$$\Rightarrow \angle B = 130° - \arcsin\frac{12\sin 50°}{\sqrt{468 - 432\cos 50°}} \approx 88°13'.$$



2. $\angle E = 180° - 40° - 25° = 115° \Rightarrow$ по теореме синусов $\Rightarrow \dfrac{PK}{\sin 115°} = \dfrac{0,75}{\sin 25°} \Rightarrow PK = \dfrac{3\sin 65°}{4\sin 25°} \approx 1,6.$

С-12

1. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда $A(0;\ 0)$, $C(1;\ 0)$,



$B\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(\frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow$

1) $\overline{MN}\left\{\frac{1}{2};\ 0\right\}$, $\overline{CA}\{-1;\ 0\} \Rightarrow \overline{MN}\cdot\overline{CA} = -\frac{1}{2}$;

2) $\overline{CB}\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \Rightarrow \overline{NM}\cdot\overline{CB} = \frac{1}{4}$;

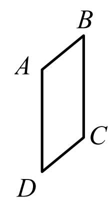
3) $\overline{AC}\{1;\ 0\}$, $\overline{CB}\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $\overline{AC}\cdot\overline{CB} = -\frac{1}{2}$.

2. $\overline{m}\ \{3; -1\}$, $\overline{n}\ \{2; 4\}$; $-\frac{1}{2}\overline{n}\ \{-1; -2\}$;

$$\angle\left(\overline{m};\overline{n}\right) = \arccos\frac{\left(\overline{m};\overline{n}\right)}{\left|\overline{m};\overline{n}\right|} = \frac{2}{\arccos\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{\arccos 10} \approx 98°8'.$$

С-13

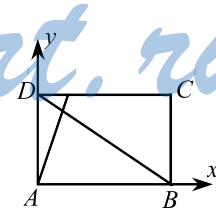
1. $\left|\overline{a}\right| = 2\sqrt{3}$, $\left|\overline{b}\right| = 2$, $\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right) = 150°$



Построим параллелограмм на векторах $\overline{b}$ и $2\overline{a}$, тогда $\left|2\overline{a}-\overline{b}\right| = BD$, но $BD = \sqrt{\left|2\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2 - 2\left|2\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos 150°} =$

$$= \sqrt{48 + 4 + 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{48+28} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

2. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда $A(0;\ 0)$, $B(2a;\ 0)$, $C(2a;\ a)$, $D(o;\ a)$,



$E\left(\frac{a}{2},\ a\right) \Rightarrow \overline{AE}\left\{\frac{a}{2};\ a\right\}$, $\overline{BD}\ \{-\,2a;\ +\,a\}$,

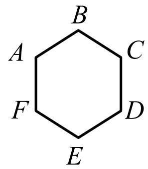
$\overline{AE}\cdot\overline{BD} = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AE \perp BD.$

С-14

1. Пусть n — число сторон многоугольника, тогда

$144° = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 144n = 180n - 360 \Rightarrow 36n = 360 \Rightarrow n = 10.$

Ответ: 10-тиугольник.

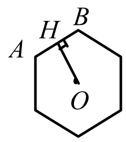


2.
Т.к. угол при вершине 6-тиугольника равен 120°, то

$BF=\sqrt{2b^2(1-\cos120°)}=\sqrt{2b^2\frac{3}{2}}=b\sqrt{3}$,

то по теореме Пифагора $FC=\sqrt{3b^2+b^2}=2b$.

С-15



1. $\angle HOB = 30° \Rightarrow HO = 40\text{tg}30° = 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \Rightarrow$

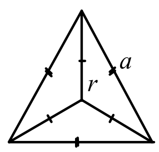
$\Rightarrow AB = 4 \Rightarrow P = 4 \cdot 6 = 24$ см;

$S = 3AB \cdot OH = 3 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ см^2.

2. По теореме косинусов $m^2 = 2r^2(1-\cos120°) = 2r^2 \cdot \frac{3}{2} = 3r^2 \Rightarrow r=\frac{m}{\sqrt{3}}$.

3. Построим угол в 60° с вершиной на окружности. Точки пересечения его сторон с окружностью соединим. Получим правильный треугольник.

С-16



1. $12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6$ см. Тогда по теореме косинусов

$a^2 = 2r^2(1-\cos120°) = 2r^2\frac{3}{2} = 3r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 6\sqrt{3} \Rightarrow P = 3a = 18\sqrt{3}$ см.

2. $l = r^2 \Rightarrow 15 = r \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 138° \Rightarrow r = \frac{15\cdot180°}{\pi\cdot138°} \approx 6{,}23$ (см).

С-17

1. Пусть ΔABC — данный равносторонний треугольник, со стороной a,

тогда $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, а $p=\frac{3a}{2} \Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}}a=\frac{\sqrt{3}\cdot2}{12}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{окр}=\pi r^2=\frac{\pi a^2}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\pi}{12}a^2=27\sqrt{3}-9\pi \Rightarrow \cancel{a}^2=12\cdot9 \Rightarrow a=6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot6\cdot\sqrt{3}=3$.

2. $S = r^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 162=\frac{1}{2}(9{,}7)^2\cdot\frac{\pi}{180°}\cdot\beta \Rightarrow \beta=\frac{162\cdot180°\cdot2}{(9\cdot7)^2\pi} \approx 197°18'$.

3. Найдите радиус данного круга, разделите его пополам, постройте круг с радиусом, равным половине радиуса данного круга.

С-18

1. Строим B' симметрично B отн-но O, A' симметрично A и C' симметрично C. Далее соединяем точки A' и B', точки B' и C'.

2. Пусть имеются две пересекающиеся прямые, тогда они образуют две пары смежных углов, т.к. при движении прямые переходят в прямые, то пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, следовательно, смежные углы отображаются на смежные.

С-19

1.Очевидно, вектор $\overline{OO_1} = \overline{MM_1}$, от точки O строим точку O_1, строим 2 луча, параллельных OF и OE.

2. Перенесем одну из боковых сторон трапеции в направлении другой вдоль основания на расстояние, равное длине меньшего из оснований, получим равнобедренный треугольник, у которого, как известно, углы при основании равны, значит, равны и углы при основаниях трапеции, по свойствам параллельного переноса.

С-20

1. На AO отложите угол $\angle A_1OA = 60^\circ$ в направлении по часовой стрелке, и от OB отложите угол $\angle B_1OA = 60^\circ$ в направлении по часовой стрелке так, чтобы точки лежали на данной окружности. Дуги A_1B_1 и AB равны, так как радиусы и градусные меры равны.

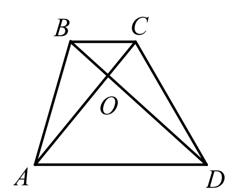
2.

Так как диагонали квадрата пересекаются под углом в 90° , то при вращении на 90° он переходит в себя, следовательно, и при вращении на $n \cdot 90^\circ (n \in N)$ он переходит в себя, и в частности при $n = 2$ ч.т.д.

Вариант 3

С-1

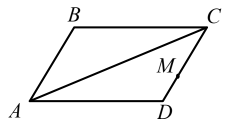
1.



1) $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (по двум углам:
$\angle OBC = \angle ODA$, $\angle OCB = \angle OAD$, как накрест-лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущеми AC и BD) $\Rightarrow$

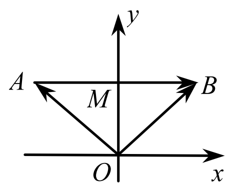
$\Rightarrow BC = \dfrac{1}{3} AD \Rightarrow k = 3$.

2) Очевидно, $k = -\dfrac{1}{3}$.



2.
$$\overline{DM}=\frac{2}{5}\overline{DC}=\frac{2}{5}\left(\overline{DA}+\overline{AC}\right)=\frac{2}{5}\bar{a}+\frac{2}{5}\bar{b}.$$

С-2



1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=1-1=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$.

2. $AB = 8$ (по теореме Пифагора) $\Rightarrow$ $\overline{AB}=8i$;
$\overline{OB}=4\bar{i}+3\bar{j}$; $\overline{OA}=-4\bar{i}+3\bar{j}$.

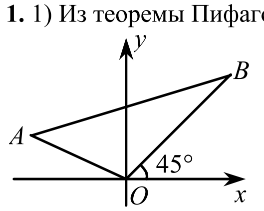
3. $\bar{a}\,\{-2;\,4\}$, $\bar{b}\,\{1;\,3\}$, $\bar{n}\,\{-14;\,-2\}$.

1) $\bar{m}=2\bar{a}-3\bar{b}=-4i-3i-8\bar{j}-2\bar{j}=-7\bar{i}-j\Rightarrow$
$\Rightarrow\bar{m}\{-7;-1\}$;

2) т.к. $k = 2 > 0$, то сонаправлены.

С-3

1. 1) Из теоремы Пифагора следует, что $A(-4;\,3)$, а $B(4;\,4)$.



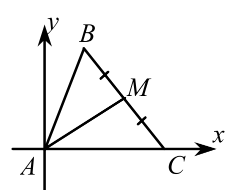
2) $AB=\sqrt{(4+4)^2+(4-3)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$.

3) Пусть M — середина AB, тогда
$M\left(\frac{4-4}{2};\,\frac{4+3}{2}\right)=M(0;\,3{,}5)\Rightarrow$
$\Rightarrow OM=\sqrt{3{,}5^2}=3{,}5$.

2. $A(-1;\,3)$, $B(1;\,1)$.

Пусть M — искомая точка, тогда $M(x,\,0)\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+9}=2\sqrt{(x-1)^2+1}$;
$(x+1)^2+9=4(x-1)^2+4$; $x^2+2x+10=4x^2-8x+8$; $3x^2-10x-2=0$;
$D_1=25+6=31$; $x=\frac{5\pm\sqrt{31}}{3}\Rightarrow M\left(\frac{5\pm\sqrt{31}}{3};\,0\right)$.

С-4



Введем систему координат как показано на рисунке, тогда
В$(2;\,2\sqrt{3})\Rightarrow$М$\left(\frac{6+2}{2};\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)=$ М $(4;\,\sqrt{3})\Rightarrow$АМ$=\sqrt{4^2+3}=\sqrt{19}$.

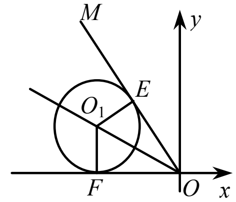
С-5

1. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow d = 8;$

$(-1 + 1)^2 + (6 - 2)^2 = 16 \Rightarrow A$ принадлежит окружности,

$AB = \sqrt{(-1+1)^2 + (-2-6)^2} = 8 \Rightarrow AB$ — диаметр.

2.



$\Delta FOO_1 = \Delta EO_1O \Rightarrow \angle FO_1O = \angle EO_1O = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow FO = OO_1\sin 60° = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$, а

$O_1F = O_1O\sin 30° = \sqrt{3} \Rightarrow$

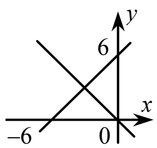
$\Rightarrow O_1(-3;\ \sqrt{3}) \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3.$

С-6

1. $AD \| BC$, $\overline{BC}\ \{-10; 2\}$. Пусть $y = kx + b$ — уравнение AD,

$k = \dfrac{2}{-10} = -\dfrac{1}{5}$, т.к. A принадлежит прямой, то

$2 = -\dfrac{2}{5} + 6 \Rightarrow в = 2 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{12}{5}.$



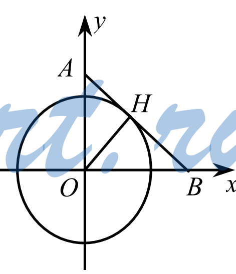
2.

$y = -x,\ y = x + 6;$

$-x = x + 6 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 9.$

С-7

1. $x^2 + y^2 = 4,\ y = 3 - x$



Найдем расстояние от начала координат до $y = 3 - x$;

$OH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{AH^2} = AH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{3}{2}\sqrt{2} > 2 = r,$

т.к. радиус окружности меньше расстояния до прямой, то они не пересекаются.

2. $A(0; 0)$; $B(0; 2)$.

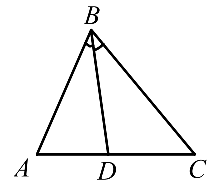
пусть $M(x; y)$ удовлетворяет $2MA = MB$, т.е.

$2\sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$; $4x^2 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4y;$

$3x^2 + 3y^2 + 4y - 4 = 0;\ \ x^2 + y^2 + \dfrac{4}{3}y - \dfrac{4}{3} = 0;\ \ x^2 + \left(y + \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ окружность с центром $\left(0;\ -\dfrac{2}{3}\right)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}.$

С-8



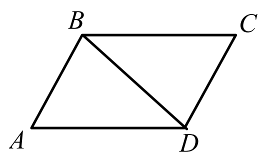
1. По теореме косинусов имеем:
$AC^2 = 25 - 24\cos 2\alpha = 49 - 48\cos^2\alpha = $
$= 1 + 48\sin^2\alpha \Rightarrow AC = \sqrt{1+48\sin^2\alpha}$, тогда по теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+48\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sin\angle A} \Rightarrow \sin\angle A = \frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{1+48\sin^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A = \frac{24\sin 2\alpha}{\sqrt{1+48\sin^2\alpha}}.$$

2. $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha = \frac{1}{2}8\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$.

С-9



1. По теореме синусов:

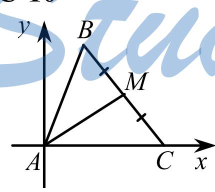
$$\frac{d}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AD}{\sin\alpha} \Rightarrow AD = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Аналогично, $DC = \dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = AD\cdot DC\cdot\sin(\alpha+\beta) = \frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

2. $2R = \dfrac{10}{\sin 150^\circ} \Rightarrow R = \dfrac{5}{\frac{1}{2}} = 10$ см.

С-10



1. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда $A(0;\,0)$, $C(2\sqrt{21},\,0)$,
$B(\sqrt{21},\,\sqrt{21}\,\text{tg}30^\circ) = B\left(\sqrt{21};\,\frac{\sqrt{63}}{3}\right) \Rightarrow$

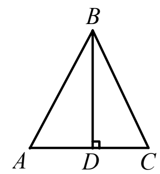
$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}\sqrt{21};\,\frac{\sqrt{63}}{6}\right) \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{9\cdot 21}{4}+\frac{63}{36}} = \sqrt{\frac{81\cdot 21}{36}+63} = \frac{42}{6} = 7.$$

2. По теореме косинусов:

$49 = 25 + 64 - 80\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

С-11

1. $AB = \dfrac{BE}{\sin 25°30'} = \dfrac{7{,}6}{\sin 25°30'}$.



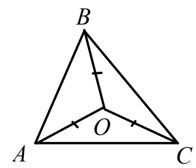
По теореме косинусов:

$$BC = \sqrt{(10{,}8)^2 + \frac{(7{,}6)^2}{\sin^2 25°30'} - 2\cdot 10{,}8\cdot \frac{7{,}6}{\sin 25°30'}\cos 25°30'} \approx 9{,}2.$$

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin 25°30'} = \frac{AC}{\sin\angle B} \Rightarrow \sin\angle B = \frac{10{,}8\cdot\sin 25°30'}{9{,}2} \approx 30°21' \Rightarrow \angle C \approx 124°9'.$$

2. Пусть $\angle OAC = \alpha$, тогда $\angle BAO = \angle ABO = 52° - \alpha$, а $\angle OCB = \angle OBC = 58° - \alpha \Rightarrow 70° = 52° - \alpha + 58° - \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 20° \Rightarrow AC = 2AO \cdot \cos 20° = 14 \cdot \cos 20°$.



По теореме синусов:

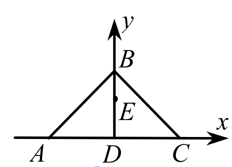
$$\frac{14\cos 20°}{\sin 70°} = \frac{AB}{\sin 58°} = \frac{BC}{\sin 52°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{14\cos 20°\sin 58°}{\sin 70°},\ BC = \frac{14\cos 20°\sin 52°}{\sin 70°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot \sin 70° = \frac{196\cdot\cos^2 20°\cdot\sin 58°\cdot\sin 52°}{2\sin 70°} \approx 61{,}5.$$

С-12

1. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда



$D(0;0)$, $A(-4;0)$, $C(4;0)$, $B(0;3)$, $E(0;\alpha) \Rightarrow$

1) $\overline{AB}\{4;3\}$, $AC\{8;0\} \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{AC} = 32$;

2) $\overline{BD}\{0;-3\} \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{BD} = -9$;

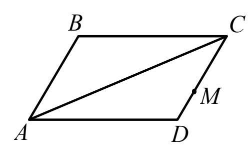
3) $CA\{-8;0\}$, $\overline{BE}\{0;3-\alpha\} \Rightarrow \overline{CA}\cdot\overline{BE} = 0$.

2. $A(4;-7)$, $B(-2;3)$, $\overline{AB}\{-6;10\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{-6}{\sqrt{136}\cdot\sqrt{1}} = \arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{136}}\right) \approx 120°58'.$$

С-13

1. Построим параллелограмм на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, тогда



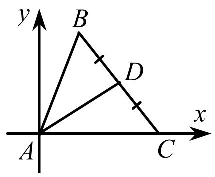
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$, т.к. $\angle BAD = 60°$, то $\angle ABC = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме косинусов:

$AC = \sqrt{5 - 4\cos 120°} = \sqrt{5+2} = \sqrt{7} \Rightarrow$

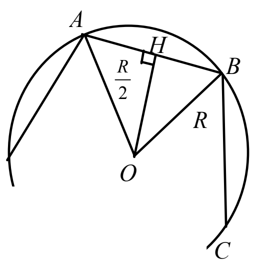
по теореме синусов:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sin\angle DAC} \Rightarrow \sin\angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \angle DAC = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$



2. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда $A(0;\ 0)$, $C(3\sqrt{2};\ 0)$, $B(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, тогда $D\left(2\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow AD = \sqrt{8+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

С-14



1.

Из $\Delta OHB \Rightarrow \angle HBO = 30° \Rightarrow \angle ABC = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow 60° = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 60n = 180n - 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow 120n = 360 \Rightarrow n = 3.$

Ответ: 3.

С-15

1. Т.к. площадь квадрата равна Q, то сторона равна $\sqrt{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ диагональ равна $\sqrt{2Q} \Rightarrow$ радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $2R = \frac{a}{\sin 60°} \Rightarrow a = 2R\sin 60° = \sqrt{2Q}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}Q} \Rightarrow P = 3\sqrt{\frac{3}{2}Q}$, а

$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{2}Q = \frac{3\sqrt{3}}{8}Q$.

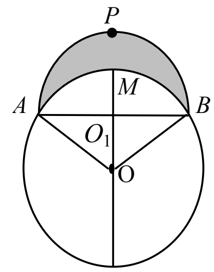
2. Пусть R — радиус окружности, тогда площадь вписанного 6-тиугольника равна $6\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 60° = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$,

а описанного — $6\cdot\frac{1}{2}R\cdot(2R\mathrm{tg}30°) = 6R^2\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}R^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_B}{S_0} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.\quad \text{Ответ: } \frac{3}{4}.$$

3. Находим центр окружности (см. Вар. 2. С-15.3). Затем проводим через него 2 взаимно перпендикулярных диаметра. В точках их пересечения с окружностью строим к ним перпендикулярные прямые.

С-16



1. ΔAOB равнобедренный, значит, OO_1 — биссектрисаб высота и медиана. $\angle BOM = \dfrac{\angle BOA}{2} = 60°$;

Из прямоугольного ΔOO_1B находим

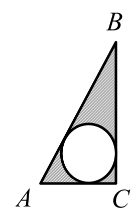
$O_1B = OB \cdot \sin\angle BOM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Длина дуги APB равна πO_1B $\dfrac{\pi R\sqrt{3}}{2}$, длина дуги AMB равна $\dfrac{2\pi R}{3}$,

следовательно искомый периметр $P = \dfrac{\pi R\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\pi R}{3} = \dfrac{\pi R}{6}(3\sqrt{3}+4)$.

2. Длина дуги $l = 2\pi R = 2a\pi \Rightarrow l = 135\dfrac{\pi}{180°}R_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 = \dfrac{180l}{135\pi} = \dfrac{4l}{3\pi} = 32$ (см).

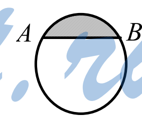
С-17



1.

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, $AB = 5 \Rightarrow P = \dfrac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = Pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{P} = 1 \Rightarrow S_0 = \pi \Rightarrow S' = 6 - \pi$ (см^2).



2. $S' = \dfrac{1}{2}120°\dfrac{\pi}{180°}R^2 - \dfrac{1}{2}R^2\sin 120° = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\pi R^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2 =$

$= \dfrac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

3. Площадь искомого круга по условию $S = \pi R^2 - \pi r^2$, значит, радиус искомого круга $R' = \sqrt{R^2 - r^2}$. Строим перпендикулярные прямые (серединный перпендикуляр к отрезку). От точки пересечения прямых, на одной из прямых, откладываем отрезок длиной r, из другого конца отрезка проводим окружность с радиусом R, она пересечет другую прямую в двух точках, отрезок, соединяющий одну из этих точек с точкой пересечения прямых, является радиусом искомого круга.

С-18

1. По т. косинусов $AB=\sqrt{2R^2(1-\cos 120^\circ)}=R\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{3}R\ \Rightarrow$

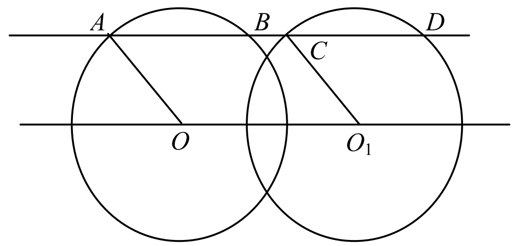
$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow P=\frac{1}{3}2\pi R+\frac{1}{2}\cdot 2\pi r=\frac{2\pi R}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi R}{2}=\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}R$.

2. См. Вар.-4. С-18.2.

С-19

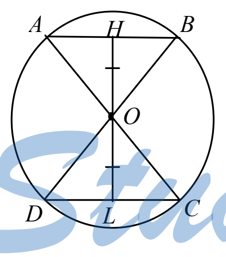
1. Строим векторы $\overline{BB'}=\overline{AA'}=\overline{CC'}=\overline{FE}$, $\Delta A'B'C'$ — искомый.

2.



Т.к. окружности равны, то их можно совместить параллельным переносом по $\overline{OO_1}$, а т.к. $AC \| OO_1$, то точки A и C совместятся $\Rightarrow AC=OO_1=15$ см.

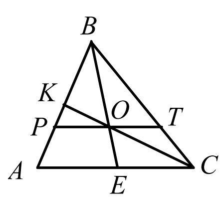
С-20



1. Откладываем $\angle ABF=60^\circ$ влево от BA, а $\angle CBE=60^\circ$, тоже влево от CB.
$\angle FBE$ — искомый.
2. По теореме Пифагора
$AH=HB=DL=LC\Rightarrow AB=DC$.

Вариант 4

С-1



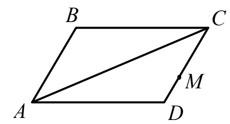
1.

1) $\Delta ABS \sim \Delta PBT$ и $k=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \overline{PT}=\frac{2}{3}\overline{AC}$.

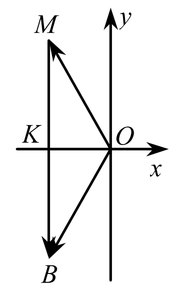
2) Т.к. медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 к 3 считая от вершины, то $\overline{BO}=2\overline{OE}$.

2.

$\overline{KB} = \frac{3}{7}\overline{AB} = \frac{3}{7}\overline{DC} = \frac{3}{7}\left(\overline{AC} - \overline{AD}\right) = \frac{3}{7}\left(\overline{n} - \overline{m}\right)$.



С-2



1. $\overline{m} = -\overline{i} + \overline{j}$; $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j} \Rightarrow (\overline{n}, \overline{n}) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{n}$.

2. По теореме Пифагора

$MK = \frac{1}{2}MP = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15 \Rightarrow MP = 30 \Rightarrow$

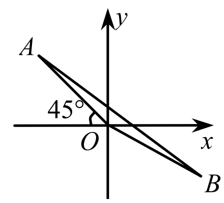
$\Rightarrow \overline{MP}\ \{0; -30\}$, $\overline{OM}\ \{-8; 15\}$, $\overline{OP}\ \{-8; -15\}$.

3. $\overline{l}\ \{3; -2\}$, $\overline{p}\ \{-4; 1\}$, $\overline{b}\ \{-34; 16\}$.

1) $\overline{a} = 3\overline{l} - 2\overline{p} \Rightarrow a\{9 + 8; -6 - 2\} = a\{17; -8\}$.

2) противоположно направлены, т.к. $\overline{b} = -2\overline{a}$, $-2 < 0$.

С-3



1. 1) $A(-OA\cos 45°; OA\cos 45°) =$

$= A\left(-8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2};\ 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = A(-8; 8)$.

$B(8;\ \sqrt{OB^2 - 8^2}\ ) = B(8;\ \sqrt{36}\ ) = B(8; -6)$.

2) $AB = \sqrt{(8+8)^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{256 + 196} = \sqrt{452} = 2\sqrt{113}$.

3) Пусть M — середина AB, тогда

$M\left(\frac{-8+8}{2}; \frac{-6+8}{2}\right) = M(0; 1) \Rightarrow OM = \sqrt{1} = 1$.

2. $M(3; -1)$, $P(-8; 2)$. Пусть $K(0; y)$ — искомая точка, тогда

$KM = 2KP \Rightarrow \sqrt{9 + (y+1)^2} = 2\sqrt{64 + (y-2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 + y^2 + 1 + 2y = 256 + 4y^2 + 16 - 16y \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y^2 - 18y + 26 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{30}}{3} \Rightarrow M_{1,2}\left(0;\ \frac{-6 \pm 2\sqrt{30}}{2}\right)$.

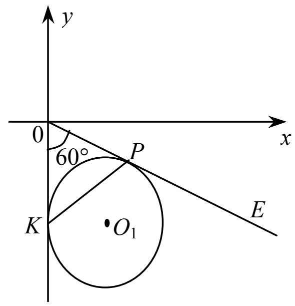
С-4

Выберем систему координат так чтобы K (0;0), H (-8;8), P (18;0), тогда если D – середина HP, то D (13; 4) $\Rightarrow KD = \sqrt{169 + 16} = \sqrt{185}$.

С-5

1. Радиус окружности равен 3, следовательно, диаметр равен 6.

$MH = \sqrt{(-5+1)^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{16 + 20} = 6 \Rightarrow$ является.



2. Т.к. $OK = OP$, то по теореме косинусов: $KP^2 = 2OK^2(1 - \cos 60°) \Rightarrow$
$\Rightarrow OK = KP = 2\sqrt{3}$, т.к.
$\angle KOO_1 = \frac{1}{2}\angle KOP = 30°$, то $KO_1 =$
$= OK \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \Rightarrow O_1(2;\ -2\sqrt{3}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = (2)^2 = 4.$

С-6

1. M (-1;2), P (3;1), K (1;-2). Пусть T (x;4), тогда $\overline{MP} = \overline{TK} \Rightarrow\ 1 - x = 4$ и $-2 - y = -1 \Rightarrow x = -3, y = -1$. Пусть $y = kx + b$ – уравнение PT, тогда

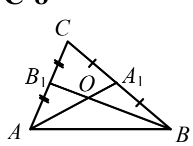
$$\begin{cases} -1 = -3k + b \\ 1 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3y - x = 0.$$

2. $y = x + 4$, $y = -x$ и $x = 0$. Первые две прямые пересекаются в точке (-2;2), следовательно, расстояние от нее до оси ординат равно 2. Первая прямая пересекает ось ординат в точке (0;4), следовательно, площадь треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$.

С-7

1. По теореме Пифагора расстояние до прямой $y = x + 4$ равно $2\sqrt{2}$. Радиус окружности тоже $2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ касается.
2. Пусть $M(x;\ y)$ — искомые, тогда
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \Rightarrow 2x + 1 - 4y + 4 = -4x + 4 + 4y + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x - 8y - 3 = 0$ — искомое множество точек.

С-8



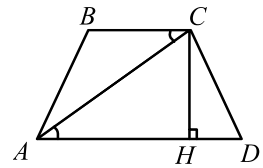
1. Т.к. BB_1 — медиана, то $S(ABB_1) = \frac{1}{2}S(ABC)$.

Т.к. $B_1O = \frac{1}{3}BB_1$, то $S(AOB_1) = \frac{1}{3}S(ABB_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(AOB_1) = \frac{1}{6}S(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot AC\cdot BC\cdot \sin\alpha = \frac{1}{12}\cdot 8\cdot 6\cdot \sin\alpha = 4\sin\alpha.$

2. $S = \frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$.

С-9



1. По теореме синусов:

$$\frac{CA}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin(\alpha+\beta)}\Rightarrow CA=\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

(т.к. $\angle CAD=\angle BCA$)

$\angle BAC=\alpha-\beta$, тогда по теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)}\Rightarrow BC=\frac{AC\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{m\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}(BC+AD)\,CH=\frac{1}{2}\,(BC+AD)\cdot m\cdot AC\sin\beta=$$

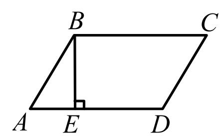
$$=\frac{1}{2}\frac{m\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)+m\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cdot\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{m^2\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta))}{2\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

2. $\angle B=180°-40°-80°=60°$, а т.к.

$\dfrac{AC}{\sin\angle B}=2R$, то $AC=2R\sin\angle B=2\cdot2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$.

С-10



1. $AB=\dfrac{BE}{\sin 60°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\Rightarrow$ по теореме косинусов:

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC}=\sqrt{16+4+2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{16+4+8}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}.$$

2. Наибольший угол лежит против большей стороны, значит по теореме косинусов $49=9+25-2\cdot3\cdot5\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{15}{30}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=120°$.

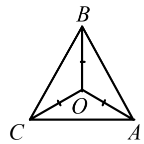
С-11

1. $a=3{,}9$; $b=4{,}1$; $c=2{,}8$. По теореме косинусов:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=64°44'$.

По теореме синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow\sin\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{a}\Rightarrow$

$\Rightarrow\beta=\arcsin\dfrac{b\sin\alpha}{a}\approx73°24'$, аналогично, $\gamma=\arcsin\dfrac{c\sin\alpha}{a}\approx41°52'$.



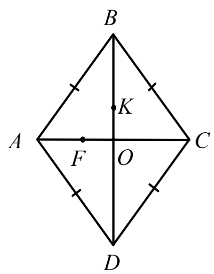
2. Пусть O — центр окружности, тогда по теореме косинусов:

$$\cos\angle AOC=\frac{2R^2-b^2}{2R^2},\ \text{а}\ \cos\angle BOC=\frac{2R^2-a^2}{2R^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle C=\frac{1}{2}\angle BOA=\frac{1}{2}\left(360°-\arccos\frac{2R^2-b^2}{2R^2}-\arccos\frac{2R^2-a^2}{2R^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle C\approx 475{,}8.$$

С-12



1.Введем систему координат как показано на рисунке, тогда по теореме Пифагора $AB = OD =$ $=\sqrt{100-64}=6\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\overline{AB}\ \{8;\,6\}$, $\overline{AC}\ \{16;\,0\}\Rightarrow\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=128$;

2) $\overline{BD}\ \{0;\,-12\}\Rightarrow\ \overline{AB}\cdot\overline{BD}=-6\cdot 12=-72$;

3) $\overline{KD}\ \{0;\,\alpha\}$, $\overline{FC}\ \{\beta;\,0\}\Rightarrow\ \overline{FC}\cdot\overline{KD}=0$.

2. $\overline{PT}\ \{6;-9\}\Rightarrow\angle\alpha=\arccos\dfrac{-9}{\sqrt{36+81}\cdot\sqrt{1}}\approx 148°19'$.

С-13

1. Построим на векторах $\overline{m}$ и $\overline{n}$ параллелограмм, так, чтобы $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$, тогда $\overline{DB}=\overline{m}-\overline{n}$. По теореме косинусов:

$BD=\sqrt{9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\cos120^\circ}=\sqrt{13-6}=\sqrt{7}$, тогда по теореме синусов

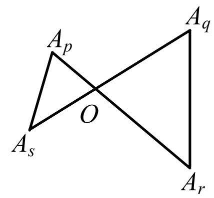
$$\frac{AB}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin120^\circ}\Rightarrow\sin\angle ABD=\frac{AD\cdot\sin120^\circ}{BD}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}\Rightarrow\ \angle ABD\approx 23^\circ 59'.$$

2. Выберем систему координат так, чтобы F (0;0), K (-3;3), E (2;0), тогда $M\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow FM=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

С-14

1. Рассмотрим треугольник, образованный радиусом, проведенным в вершину многоугольника, половиной его стороны, и отрезком, соединяющим эту середину с центром окружности, очевидно, что косинус угла с вершиной в центре окружности равен $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ этот угол равен 30° $\Rightarrow$ угол опирающийся на сторону многоугольника равен 60° $\Rightarrow$ многоугольник является 6 – угольником.

2.



Опишем вокруг него окружность. Пусть $A_pA_qA_vA_s$ — какие-то вершины многоугольника.

Имеем $\angle A_pA_sA_q = \angle A_pA_vA_q$, т.к. опираются на одну дугу.

Очевидно, $\angle A_sA_pA_v = \angle A_sA_qA_v \Rightarrow \Delta A_sOA_p \sim \Delta A_vOA_q \Rightarrow$ $\Rightarrow A_sO \cdot OA_q = A_pO \cdot OA_v$. Ч.т.д.

C-15

1. Пусть R — радиус окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q = 6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 60° = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$ $\Rightarrow R = \sqrt{\frac{2Q}{3\sqrt{3}}}$.

По теореме Пифагора сторона квадрата равна $\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{4Q}{3\sqrt{3}}} \Rightarrow S = \frac{4Q}{3\sqrt{3}}$.

2. Пусть радиус окружности равен R,

тогда $S_{вп} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 120^\circ = \frac{3}{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

Т. к. центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то половина стороны описанного треугольника равна $R\operatorname{ctg}30^\circ = \sqrt{3}R$, следовательно, сторона его равна

$2\sqrt{3}R \Rightarrow S_{оп} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot R^2 = 3\sqrt{3}R^2 \Rightarrow \Rightarrow \frac{S_{оп}}{S_{вп}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4}{3\sqrt{3}} = 4$.

3. Находим центр окружности (Вар. 2. С-15.3).

Строим угол в 60° с вершиной в центре. Откладываем от него еще такой же. Повторяем эту операцию 3 раза. Далее выбираем 3 точки пересечения сторон углов с окружностью, лежащие через одну, и проводим в них по касательной.

C-16

1. Рис. 21.

По т. Пифагора $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot 2\pi R + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r =$

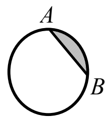
$= \frac{\pi R}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi R}{2} = \frac{\pi}{2}R(1+\sqrt{2})$.

2. $\breve{l}_{AB} = \frac{\pi}{180°} \cdot 120° \cdot 6 = 4\pi \Rightarrow r = \frac{\breve{l}_{AB}}{2\pi} = 2$ (см). Ответ: 2 см.

С-17

1. По формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9\cdot 4\cdot 4\cdot 1}=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow S_0=\pi r^2=\dfrac{16\pi}{9} \Rightarrow S'=S-S_0=12-\dfrac{16\pi}{9}$.



2. Рис. 23.

$$S'=S_{сект}-S_{тр}=\frac{1}{6}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2\sin 60^\circ=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

3. Пусть радиусы кругов равны r_1 и r_2. Строим прямоугольный треугольник с катетами r_1 и r_2, тогда его гипотенуза равна $\sqrt{r_1^2+r_2^2}=r$. Строим круг с радиусом r. Он искомый.

С-18

1. Строим все высоты треугольника. Далее см. Вар. 2. С-18.1.

2. Пусть $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ и при движении они отобразятся на $\Delta A'_1B'_1C'_1$ и $\Delta A'B'C'$. Т.к. движение сохраняет расстояние между точками и углами, то $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$, $\Delta A_1B_1C_1=\Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta A'_1B'_1C'_1$ и т.д.

С-19

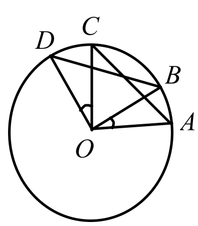
1. Пусть при параллельном переносе на вектор $\overline{PK}$, точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1, тогда $\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

2. Перенесем ΔABC на вектор $\overline{MM_1}$, тогда точки A, B, C, E, F и M совместятся соответственно с точками A_1, B_1, C_1, K, P и M_1, значит $FP=\left|\overline{MM_1}\right|=8$ см.

С-20

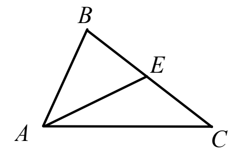
1. Пусть при повороте вокруг т. O на 120° против часовой стрелки точки M, H и P переходят соответственно в точки M_1, H_1, и P_1, тогда $\angle M_1H_1P_1$ - искомый.

2.



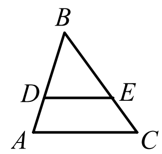
ΔAOC = ΔBOD *по 1-му признаку* $\Rightarrow$ AC = DB. *Вариант 5*

С-1



1. $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AC}+\frac{5}{8}\overline{CB}=\overline{AC}+\frac{5}{8}(\overline{CA}+\overline{AB})=$

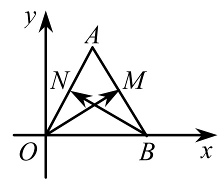
$=\bar{b}+\frac{5}{8}(-\bar{b}+\bar{a})=\frac{3}{8}\bar{b}+\frac{5}{8}\bar{a}$.



2.
$\overline{DE}=\overline{DB}+\overline{BE}$;
$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{5}{3}(\overline{DB}+\overline{BE})\ \Rightarrow\ \overline{DE}\uparrow\uparrow\overline{AC}\ \Rightarrow DE\|AC$.

С-2

1. $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}$, $\bar{b}=i+2\bar{j}\ \Rightarrow\ \bar{a}+\bar{b}=3\bar{i}-\bar{j}$.



2. $\overline{OA}\left\{\frac{a}{2};\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right\}$.

Аналогично, $\overline{BA}\left\{-\frac{a}{2};\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right\}$, $\overline{OB}\ \{a;\ 0\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\overline{OM}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+o\right)\right\}\Rightarrow\overline{OM}\left\{\frac{3a}{4};\ \frac{\sqrt{3}a}{4}\right\}\ \Rightarrow\ \overline{BN}\left\{-\frac{3a}{4};\ \frac{\sqrt{3}a}{4}\right\}$.

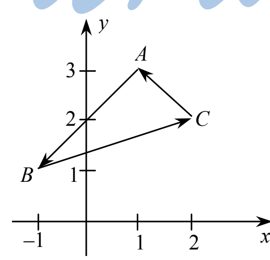
3. $\bar{a}\ \{-1;\ 5\}$, $\bar{b}\ \{m;\ 2\}$.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинарны, тогда $-k=m$ и $5k=2\Rightarrow k=\frac{2}{5}\Rightarrow m=-\frac{2}{5}$..

С-3

1. $\overline{AB}\ \{3;\ 2\}$, $\overline{CD}\ \{-3;\ -2\}\Rightarrow\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{CD}\right|$ и $\overline{AB}\downarrow\uparrow\overline{CD}\Rightarrow$

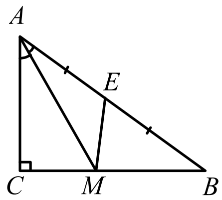
$\Rightarrow AB\ \|\ CD\Rightarrow ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow AC$ и BD — пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.



2. $\overline{AB}\ \{-2;\ -2\}$, $\overline{BC}\ \{3;\ 1\}$, $\overline{CA}\ \{-1;\ 1\}$;
$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=-2+2=0\Rightarrow AB\perp AC\Rightarrow$ треугольник прямоугольный $\Rightarrow$ центр описанной окружности — середина $BC\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, а $R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

С-4



По свойству биссектрисы:

$\frac{AC}{CM}=\frac{AB}{MB} \Rightarrow \frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$.

По теореме Пифагора CB=4$\Rightarrow$$MB$=2,5, а CM=1,5$\Rightarrow$

$\Rightarrow M(1,5;0)$, $E(2;\ 1,5)$$\Rightarrow$$ME=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

С-5

1. $x^2-8x+y^2+15=0$; $(x-4)^2+y^2=1 \Rightarrow$ это окружность с радиусом 1 и центром (4; 0). Точка (4; –1) удовлетворяет обоим уравнениям, очевидно, что в этой точке они не касаются $\Rightarrow$ они пересекаются.

2. Пусть M — середина AC, тогда очевидно, что $AC = 8$, $AM = MC = 4$, $MB = 3$ и по теореме Пифагора $AB = BC = 5$, тогда радиус вписанной окружности равен $r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{9\cdot 4\cdot 4\cdot 1}}{4+5}=\frac{3\cdot 4}{9}=\frac{4}{3}$.

Центр окружности O лежит на BM и удален от BC на расстояние, равное $\frac{4}{3} \Rightarrow O\left(0;\ \frac{4}{3}-1\right) \Rightarrow O\left(0;\ \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$.

С-6

1. Угловой коэффициент OC равен $\frac{4}{3} \Rightarrow$ угловой коэффициент искомой прямой равен $-\frac{3}{4} \Rightarrow$ она имеет вид: $y=-\frac{3}{4}x+b$. Т.к. C лежит на этой прямой, то $4=-\frac{3}{4}\cdot 3+b$, откуда $b=\frac{25}{4} \Rightarrow y=-\frac{3x}{4}+\frac{25}{4}$.

2. $y-x=0$, $y+x=0$, $y-2x+4=0$

Очевидно, что треугольник прямоугольный, с прямым углом в начале координат. $\begin{cases} y-x=0 \\ y=2x-4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x \\ y=2x-4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x \\ -x=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow$

одна из вершин имеет координаты (4; 4).

$\begin{cases} y=-x \\ y-2x+4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-x \\ -x-2x+4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-x \\ 3x=4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-x \\ x=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ другая — $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3}\right)$. Расстояние от этих вершин до начала координат равно соответственно $4\sqrt{2}$ и $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ $\Rightarrow$площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{16}{3}$.

С-7

1. $\begin{cases} 2y + x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ (4-2y)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$;

$4y^2 - 16y + 16 + y^2 = 5$; $5y^2 - 16y + 11 = 0$; $D_1 = 64 - 55 = 9$;

$y_1 = \frac{8-3}{5} = 1$, $y_2 = \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5} \Rightarrow x_1 = 2$, а $x_2 = \frac{20}{5} - \frac{22}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2; 1)$ и $\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right)$ — концы хорды $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\left(2-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{11}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{10}{5} \Rightarrow 2$ — ее длина.

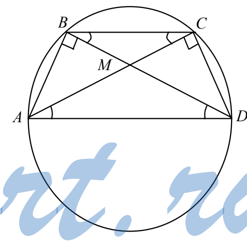
2. Выберем систему координат так, чтобы $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$.
Пусть $M(x; y)$ — искомая точка, тогда $(x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + y^2 = 10$;
$2x^2 + 8 + 2y^2 = 10$; $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ окружность с центром в середине орезка AB и радиусом равным 1.

С-8

1. Т. к. AA_1 и CC_1 – медианы, то $AO = 6$, $CO = 8$, тогда

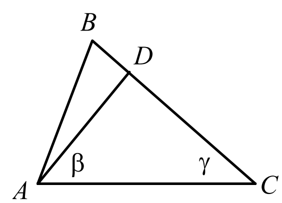
$S(AOC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$, т.к. $AO = \frac{2}{3} AA_1$,

то $S(AOC) = \frac{2}{3} S(AA_1C) \Rightarrow S(AA_1C) = \frac{3}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow S(ABC) = 36\sqrt{3}$.



2. Т.к. трапеция вписана, то она равнобокая $\Rightarrow$
$\Rightarrow S = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha$, откуда $\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AMD = 150^\circ$.
Пусть $\angle CAD = \angle BDA = \beta$, тогда из
ΔAMD $\beta = 15^\circ \Rightarrow$ т.к. ΔACD — прямоугольный, то $\angle CDA = \angle BAD = 75^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = \angle BCD = 105^\circ$. Ответ: 75° и 105°.

С-9



1. По теореме синусов:

$\frac{AD}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AB}{\sin(\beta+\gamma)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}$;

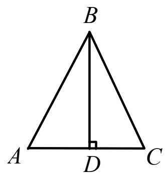
$\frac{S(ADC)}{S(ABC)} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin\beta}{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma) \cdot \sin\alpha}$.

2. По теореме Пифагора $AE = 4$, аналогично,
$CE = \sqrt{81-9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} + 4$,

$S(ABC) = (4 + 6\sqrt{2}) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow R =$

$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{45(4 + 6\sqrt{2})}{24 + 36\sqrt{2}} = \frac{180 + 270\sqrt{2}}{24 + 36\sqrt{2}} = \frac{30 + 45\sqrt{2}}{4 + 6\sqrt{2}} = 7{,}5$.

С-10



1. Т.к. $\cos\angle ABC < 0$, то $\angle B$ — тупой.

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin\angle B = 5\sqrt{3} \Rightarrow \sin\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle B = 120° \Rightarrow$

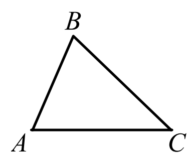
$\Rightarrow AC = \sqrt{16 + 25 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{16 + 25 + 20} = \sqrt{61} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD \cdot AC \Rightarrow BD = \frac{2S}{AC} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{61}}$.

2. $\frac{1}{R} = \frac{4S}{abc} = \frac{4\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2}}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 6}{13 \cdot 15} = \frac{8}{65}$. $R = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$.

С-11

1. $\angle C = 66°$. По теореме синусов:

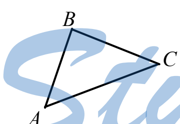


$\frac{c}{\sin 66°} = \frac{a}{\sin 64°} = \frac{b}{\sin 50°}$.

По свойству пропорции:

$\frac{c}{\sin 66°} = \frac{a + b}{\sin 64° + \sin 50°} = \frac{21}{\sin 64° + \sin 50°} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \frac{21 \sin 66°}{\sin 64° + \sin 50°} \Rightarrow a = \frac{21 \sin 66° \sin 64°}{\sin 64° + \sin 50°}$, а $b = \frac{21 \sin 50°}{\sin 64° + \sin 50°}$.

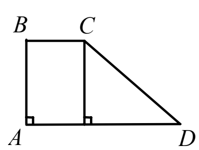


2. Т.к. $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 130°$, то

$AB = \frac{2S}{BC \sin 130°} = \frac{7{,}2}{3{,}4 \sin 130°}$, тогда

$AC = \sqrt{\frac{(7{,}2)^2}{(3{,}4)^2 \sin 130°} + (3{,}4)^2 - 2\frac{7{,}2 \cdot 3{,}4}{3{,}4 \sin 130°} \cos 130°} \approx 5{,}6.$

С-12



1. По теореме Пифагора $CD = 5$.

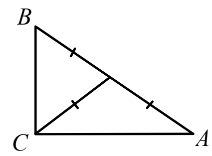
$A(0;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $C(2;\ 3)$, $D(6;\ 0)$;

1) $\overline{BA}\ \{0;\ -3\}$, $\overline{CD}\ \{4;\ -3\} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{CD} = 9$;

2) $\overline{AD}\ \{6;\ 0\} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{DC} = 6 \cdot (-4) = -24$;

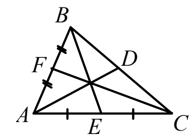
3) $\overline{BC}\ \{2;\ 0\}$, $\overline{DA}\ \{-6;\ 0\} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{DA} = -12$.

2. $\overline{BC}\{-3;3\}$, $\overline{CA}\{x+2;-1\}$, т.к. $BC\perp AC$, то $-3x-6-3=0 \Rightarrow -3x=9 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=3 \Rightarrow A(3;3) \Rightarrow E(2;2) \Rightarrow \overline{CE}\{4;-2\}$, а $\overline{AB}\{-2;-2\} \Rightarrow \cos\angle CEB =$



$$=\frac{(\overline{AB},\overline{CE})}{AB\cdot CE}=\frac{-2\cdot 4+(-2)\cdot(-2)}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{-4}{4\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle CEB \approx 143^\circ 8'.$$

С-13



1. $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}=$

$$=\frac{1}{2}(\overline{BC}(\overline{AB}+\overline{AC})+\overline{CA}(\overline{BA}+\overline{BC})+\overline{AD}(\overline{CA}+\overline{CB}))=$$

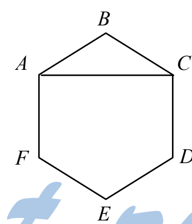
$$=\frac{1}{2}(\overline{BC}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{AC}+\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\overline{BC}\cdot\overline{AC}-\overline{AC}\cdot\overline{AB}-\overline{AB}\cdot\overline{BC})=0.$$

2. $\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})$, а $\overline{AB}=\overline{CB}-\overline{CA}$.

Из условия следует, что $\overline{CD^2}>\frac{1}{4}\overline{AB^2}$, тогда $\frac{1}{4}(\overline{CA}+\overline{CB})^2>\frac{1}{4}(\overline{CB}-\overline{CA})^2$,

$2\overline{CA}\cdot\overline{CB}>-2\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ и $\overline{CA}\cdot\overline{CB}>0 \Rightarrow \angle C$ — острый.

С-14



1. $S(ABC)=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12 \Rightarrow$

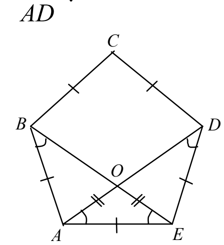
$\Rightarrow a^2=\frac{48}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{48}{\sqrt{3}}}=\sqrt{16\sqrt{3}}=4\sqrt{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(ABCDEF)=6S(AOB)=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=6\cdot\frac{48\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 4}=72.$

2. Т.к. $ABCDE$ — правильный, то его можно вписать в окружность $\Rightarrow$ $\angle ADE=\angle ABE$, а т.к. $AB=AE=DE$, то $\angle ABE=\angle ADE=\angle OAE=\angle OEA \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AOE \sim \Delta AED$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \frac{AO}{AE}=\frac{AE}{AD}$, $AO=\frac{AE^2}{AD}$.

По теореме косинусов:



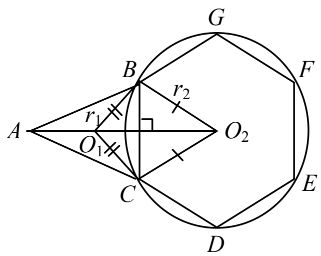
$AD=\sqrt{2AE^2\left(1-\cos\frac{180^\circ\cdot 3}{5}\right)}=2\sqrt{2(1-\cos 108^\circ)} \Rightarrow$

$\Rightarrow AO=\frac{4}{2\sqrt{2(1-\cos 108^\circ)}}=\frac{2}{\sqrt{2(1-\cos 108^\circ)}}.$

С-15

1. Угол, опирающийся на сторону, равен $\frac{360°}{20} = 18° \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 2R^2(1 - \cos 18°) \Rightarrow a = R\sqrt{2(1-\cos 18°)} \Rightarrow P = 6R\sqrt{2(1-\cos 18°)}$.



2. $a^2 = 2r_1{}^2(1 - \cos 120°) \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = \frac{a}{\sqrt{2(1-\cos 120°)}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

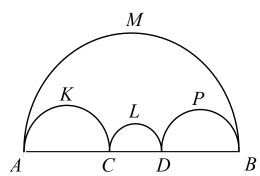
Аналогично, $r_2 = \frac{a}{\sqrt{2(1-\cos 60°)}} = a$;

$\rho(O_1,O_2) = r_1\cos 60° + r_2\cos 30° =$

$= \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

3. Откладываем от апофемы углы в 30° в обе стороны с вершинами в один из его концов. Через другой конец проведем серединный перпендикуляр. 5 раз подряд поворачиваем получившийся треугольник на 60°.

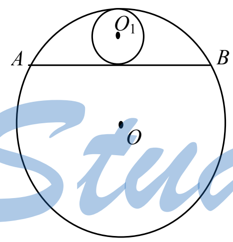
С-16



1. $\overset{\smile}{AMB} = r\pi$;

$\overset{\smile}{AKC} + \overset{\smile}{CLL} + \overset{\smile}{DPB} = \pi(r_1+r_2+r_3)$, а т.к.

$2r = 2(r_1+r_2+r_3)$, то $r = r_1 + r_2 + r_3$. Ч.т.д.



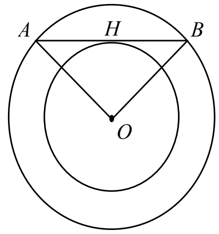
2. $l = \frac{\pi}{180°} \cdot 120° \cdot R \Rightarrow R = \frac{3l}{2\pi} \Rightarrow$

высота ΔAOB, проведенная к AB, равна

$R\cos 60° = \frac{3l}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3l}{4\pi} \Rightarrow d_1 = R - R\cos 60° =$

$= \frac{3l}{4\pi} \Rightarrow r_1 = \frac{3l}{8\pi} \Rightarrow l_1 = 2\pi r_1 = \frac{3l}{4}$.

С-17



1.

$2R^2(1 - \cos\alpha) = a^2 \Rightarrow R^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4}$; (1)

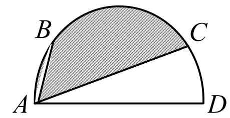
$r = R\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow r^2 = R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; (2)

$\frac{a}{2} = R\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. (3)

Из (1) и (2) $\Rightarrow r^2 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow r = \dfrac{a}{2}$.

Сложим (1) и (3): $r^2 + \dfrac{a^2}{4} = R^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_к = \pi(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi a^2}{2} - \dfrac{\pi a^2}{4} = \dfrac{\pi a^2}{4}$.



2. $Q = \dfrac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{2Q}{\pi}} \Rightarrow$ имеем $S(\overset{\smile}{ACD}) =$

$= S_\Delta(AOC) + S(OCD) = \dfrac{1}{2}R^2\sin 150° + \dfrac{\pi}{12}R^2 =$

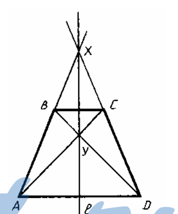
$= \dfrac{R^2}{2}\left(\sin 150° + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{Q}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$. $S(AOB) = S(COD) = \dfrac{\pi}{12}R^2 = \dfrac{Q}{6}$.

$S_1(AOB) = \dfrac{1}{2}R^2\sin 30° = \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{Q}{2\pi} \Rightarrow S' = Q - S_\Delta(AOC) - S(OCD) -$

$- (S(ACB) - S_\Delta(AOB)) = Q - \dfrac{Q}{2\pi} - \dfrac{Q}{6} - \left(\dfrac{Q}{6} - \dfrac{Q}{2\pi}\right) = \dfrac{2}{3}Q$.

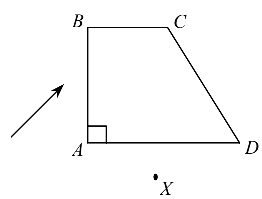
3. Пусть r_1 — искомый радиус, тогда
$\pi r_1^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r^2 \Rightarrow r = r_1 \Rightarrow r_1$ — катет равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $r \Rightarrow r_1$ — легко найти.

С-18



1. Продолжим боковые стороны до их пересечения. Соединим точку их пересечения и точку пересечения диагоналей. Получим ось симметрии.
2. Т.к. движение сохраняет расстояние, то равно либо 2 либо 10.

С-19



1. Первая часть задачи описана в Вар. 4. С-19.1. Проведем через точку X прямую, параллельную $\overline{a}$. Затем отложим на ней отрезок в направлении $\overline{a}$ длиной $|\overline{a}|$.
Строим прямоугольный ΔACD_1 по двум данным отрезкам ($\angle ACD_1 = 90°$), данные отрезки — катеты. Через точки A и C проведем прямые, перпендикулярные AD_1. Точка их пересечения — вершина B. После этого отрезок CD_1 параллельно переносим на , при этом $D_1 \to D$. Трапеция $ABCD$ — искомая.

2. Постройте прямоугольный треугольник ACD_1, по двум катетам, равным данным отрезкам. Затем через т. A проведите прямую перпендикулярную AD, а через т. C – параллельную AD_1. Точка их пересечения будет вершиной B. Затем отрезок CD_1 параллельно перенесите на вектор $\overline{CB}$, при этом т. D_1 перейдет в т. D. $ABCD$ – искомая трапеция.

С-20

1. Повернем окружность с центром в O_2 на 60° против часовой стрелки. Точки ее пересечения с окружностью с центром в O_1 будут искомыми для этой окружности, и те точки, которые в них перешли при повороте — искомыми для другой окружности.

2. При повороте вокруг точки O на 120° $AB \to AC$, $AC \to \overline{BC}$.
Очевидно, что $E \to P$, $F \to K$, тогда $EF \to KP \Rightarrow EF = KP$.

Вариант 6

С-1

1. $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + \frac{10}{7}\overline{PK} = \overline{OP} + \frac{10}{7}(\overline{OK} - \overline{OP}) = \frac{10}{7}\overline{OK} - \frac{3}{7}\overline{OP} = \; = \frac{10}{7}\overline{m} - \frac{3}{7}\overline{n}$.

2. $\overline{ME} = \overline{MA} + \overline{AE} = \frac{2}{7}(\overline{DA} + \overline{AB})$; $\overline{TP} = \overline{TC} + \overline{CP} = \frac{7}{10}(\overline{DC} + \overline{CB}) = \frac{7}{10}(\overline{AB} - \overline{DA})$,

значит, $ME \parallel PT$.

С-2

1. Постройте вектора $\overline{m}$ и $\overline{n}$. Проведите вектор из конца вектора $\overline{n}$ в конец вектора $\overline{m}$ - это вектор разности $\overline{m}$ и $\overline{n}$, его координаты: $\overline{m} - \overline{n} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{i} - 6\overline{j} = 8\overline{i} - 10\overline{j}$.

2. Рис. 31.

$O(0;0)$, $A\left(-\frac{m}{2}; \frac{\sqrt{3}m}{2}\right)$, $B\left(\frac{m}{2}; \frac{\sqrt{3}m}{2}\right) \Rightarrow F\left(-\frac{m}{4}; \frac{\sqrt{3}m}{4}\right)$, $E\left(\frac{m}{4}; \frac{\sqrt{3}m}{4}\right) \Rightarrow$

$\overline{AE}\left\{\frac{3m}{4}; -\frac{\sqrt{3}m}{4}\right\}$, $\overline{BF}\left\{-\frac{3m}{4}; -\frac{\sqrt{3}m}{4}\right\} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{3m}{4}\overline{i} - \frac{\sqrt{3}m}{4}\overline{j}$,

$\overline{BF} = -\frac{3m}{4}\overline{i} - \frac{\sqrt{3}m}{4}\overline{j}$.

3. Т. к. не существует такого m, что $\frac{4}{m} = \frac{-3}{0}$, то вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны только при $m = 0$, т.к. $\overline{O}$ коллинеарен любому вектору.

С-3

1. Найдем уравнение AC:

$$\begin{cases} -6=-4k+b \\ 14=16k+b \end{cases};\quad \begin{cases} b=-6+4k \\ 14=16k-6+4k \end{cases} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow y = x - 2.$$

Найдем уравнение BD:

$$\begin{cases} 8=2k+b \\ 0=10k+b \end{cases};\quad \begin{cases} b=-10k \\ 8=2k-10k \end{cases} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow y = -x + 10.$$

Найдем точку их пересечения

$$\begin{cases} y=-x+10 \\ y=x-2 \end{cases};\ \begin{cases} 2y=8 \\ x=y+2 \end{cases};\ \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}$$ — очевидно, точка принадлежит обоим отрезкам. Отрезки перпендикулярны, т.к. перпендикулярны прямые, их содержащие.

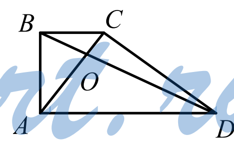
2. $\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

$$\overline{BC}=\sqrt{(2-\frac{3-\sqrt{3}}{2})^2+(1-\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2}=\sqrt{(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1-\sqrt{3}}{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{2}.$$

Аналогично доказывается, что и $CA = \sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ – равносторонний со стороной равной $\sqrt{2} \Rightarrow$ радиус описанной окружности равен $\frac{2}{3}$ его высоты, т.е. $R=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{3}$.

С-4



Т.к. $\Delta AOD \sim \Delta COB$, то $BC=\frac{4}{3} \Rightarrow$

$A(0;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $D(4;\ 0)$, $C\left(\frac{4}{3};\ 4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow E$ — середина $BD \Rightarrow E\ \{2;\ 2\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ CE=\sqrt{(\frac{8}{3}-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+4}=\sqrt{\frac{48}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{10}.$$

С-5

1. $x^2+y^2-6y+5=0$, $x^2+(y^2-6y+9)+5-9=0$, $x^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow$ это окружность с центром (0;3) и радиусом 2. Вторая окружность имеет центр (4;0) и радиус 3.

Т. к. расстояние между центрами равно сумме радиусов, то окружности касаются.

2. $AB = BC = \sqrt{(1+3)^2 + 3^2} = 5$. $AB = 6 \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{25 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{25}{8}$.

Найдем уравнение серединного перпендикуляра к AC:

Пусть AC задается уравнением $y = kx + b$, тогда $\begin{cases} 3 = k + b \\ 0 = -3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k = 3 \\ b = 3 - k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}$, пусть далее $y_1 = k_1 x + b_1$ - уравнение серединного перпендикуляра к AC, то $\frac{3}{2} = -1 \cdot (-\frac{4}{3}) + b_1$, $b_1 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$ - уравнение серединного перпендикуляра к AC, а $x = 0$ – к AB. Найдем точку их пересечения:

$y = \frac{1}{9}$, $x = 0 \Rightarrow$ уравнение описанной окружности $x^2 + (y - \frac{1}{9})^2 = \frac{625}{64}$.

С-6

1. $y = -2x + 1 \Rightarrow k = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, найдем b: $1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$.

2. Найдем точки пересечения прямых.

$\begin{cases} y = -x \\ y = -2x + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -x \\ -x = -2x + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}$; (4;-4).

$\begin{cases} y = -x \\ y = 3x + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -x \\ -x = 3x + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$; (1;-1).

$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 4 = -2x + 4 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$; (0;-4).

Найдем длины сторон: $\sqrt{(4-1)^2 + (-4+1)^2} = 3\sqrt{2}$;

$\sqrt{(1-0)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{26}$; $\sqrt{(4-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{80}$.

По теореме косинусов:

$80 = 18 + 26 - 2 \cdot 6\sqrt{13} \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{44-80}{12\sqrt{13}} = \frac{-36}{12\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}} =$

$= \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{18} = 6$.

С-7

1. Пусть A и B – точки пересечения прямой с окружностью, а т. O – начало координат. Найдем расстояние от т. O до прямой $y = \frac{-3}{4}x + 3 \Rightarrow k = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$ - перпендикулярна прямой.

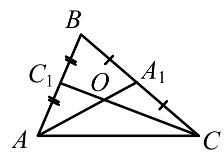
$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x + 3 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{12}x = 3 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{25} \\ y = \frac{48}{25} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = (\frac{36}{25})^2 + (\frac{48}{25})^2 = \frac{12^2 \cdot 3^2 + 12^2 \cdot 4^2}{25^2} = \frac{12^2 \cdot 5^2}{25^2} = \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow \; x^2 + y^2 = \frac{144}{25}.$$

2. Пусть $A(2; 0)$, $B(–2; 0)$. $M(x; y)$ — искомая точка, тогда

$(x – 2)^2 + y^2 – (x + 2)^2 – y^2 = 4$; $–8x = 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ — искомое мн-во точек.

C-8



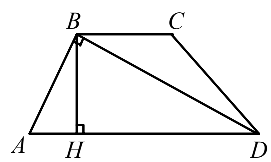
1. $S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC)$;

$S(AOC) = \frac{2}{3} S(AA_1C) \Rightarrow S(AOC) = \frac{1}{3} S(ABC) = 3.$

По свойствам медианы

$AO = 3$, $CO = 4 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin\angle AOC \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AOC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOC = 30°$ или $\angle AOC = 150°$.

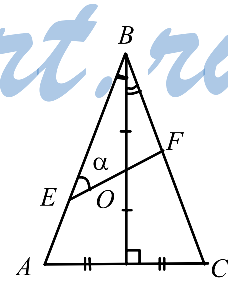


2. $AB = m\cos\alpha \Rightarrow BH = AB\sin\alpha = m\cos\alpha\sin\alpha$, а
$AH = m\cos^2\alpha \Rightarrow BC = m – 2m\cos^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(BC+AD)BH = m\cos\alpha\sin\alpha(m – m\cos^2\alpha) =$

$= m^2\cos\alpha\sin\alpha\sin^2\alpha = m^2\cos\alpha\sin^3\alpha.$

C-9

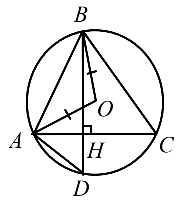


1. $\angle BFO = \pi – \beta – \alpha \Rightarrow$ по теореме синусов

$$\frac{\frac{h}{2}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{OF}{\sin\frac{\beta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OF = \frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin(\alpha+\beta)}, \text{ аналогично,}$$

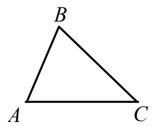
$$EO = \frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\alpha} \Rightarrow EF = h\sin\frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2\sin(\alpha+\beta)}\right).$$



2. Пусть O — центр окружности $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AOB$ — равносторонний $\Rightarrow \angle AOB = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BCA = 30° \Rightarrow \angle BDA = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow AH = \dfrac{3}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{25 - \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{91}}{2}$;
$\Delta AHD \sim \Delta BHC \Rightarrow \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{BH \cdot AD}{AH} = \frac{\sqrt{91} \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \sqrt{91}.$$

С-10



1. $S = \dfrac{1}{2} ab\sin\gamma \Rightarrow 3\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} 4\sqrt{3} \cdot 3\sin\angle B \Rightarrow \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

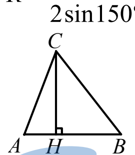
1) $\angle B = 30° \Rightarrow AC^2 = 48 + 9 - 24\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 9 - 36 = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{21}$, тогда $R = \dfrac{AC}{2\sin 30°} = \sqrt{21}$.

2) $\angle B = 150° \Rightarrow AC^2 = 48 + 9 + 36 = 93 \Rightarrow AC = \sqrt{93}$

$\sqrt{93} \vee 4\sqrt{3} + 3$, $93 \vee 48 + 9 + 24\sqrt{3}$, $36 \vee 24\sqrt{3}$, $3 \vee 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 < 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$R = \dfrac{\sqrt{93}}{2\sin 150°} = \dfrac{\sqrt{93}}{2}$.



2. Пусть $AB = 56$, $BC = 39$, $CA = 25$, тогда
$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{BA^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC}\right)^2} \Rightarrow CH = CB \cdot \sin\beta = 15.$$

С-11

1. По теореме косинусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow a - b = a - \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = 0{,}85 \Rightarrow a = \frac{0{,}85\sin\alpha}{1 - \sin\beta}$$

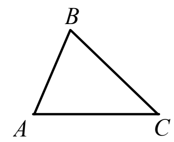
$$\Rightarrow b = \frac{0{,}85\sin\beta}{1 - \sin\beta} \Rightarrow a \approx 2{,}32; b \approx 1{,}47.$$

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 32°$.

2. По теореме косинусов имеем:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 53^\circ}$.

Из теоремы синусов следует: $R = \dfrac{AC}{2\sin 53^\circ} \approx 1{,}6.$



С-12

1. По т. Пифагора CE = 12, т.к. трапеция равнобедренна и следовательно $\frac{1}{2}AE = ED = BC = 5 \Rightarrow$

1) $\overline{DC}\{-5;12\}, \overline{DA}\{-15;0\} \Rightarrow \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 75$;

2) $\overline{CE}\{0;-12\}, \overline{AB}\{5;12\} \Rightarrow \overline{CE} \cdot \overline{AB} = -144$;

3) $\overline{BC}\{5;0\}, \overline{AD}\{15;0\} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{AD} = 75$;

2. $\overline{AC}\{1;4\}, \overline{BD}\{1-x;3\} \Rightarrow$ т.к. $AC \perp BD$:

1 – x + 12 = 0 ⇒ x = 13 ⇒ B (13;-1) ⇒ M (7;-2); $\overline{DM}\{6;-4\}, \overline{DA}\{0;5\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\angle(DM,DA) = \frac{\overline{DM} \cdot \overline{DA}}{|\overline{DM}| \cdot |\overline{DA}|} = \frac{-20}{10 \cdot 5} = \frac{-1}{5} \Rightarrow \angle(DM,DA) = \ = \arccos\frac{1}{5} = 56^\circ 19'.$$

С-13

1. Из условия следует:

$\overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \frac{1}{2}\overline{AB^2}$, $\overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \frac{1}{2}\left(\overline{AC} - \overline{BC}\right)^2$,

$\overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \frac{1}{2}\overline{AC^2} - \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{BC^2}$,

$\overline{2AC^2} + \overline{2BC^2} = \overline{AC^2} - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC^2}$, $\overline{AC^2} + 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC^2} = 0$.

Отсюда, $\left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)^2 = 0 \Rightarrow \overline{AC} + \overline{BC} = 0$. Ч.т.д.

2. $\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{CA}), \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}, \overline{CD} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2)$.

Т. к. $BC > AC$, то угол между $\overline{CD}$ и $\overline{AB}$ — острый ⇒ $\angle BDC$ — тупой, ч.т.д.

С-14

1. $S = 144 = 6 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 144 \Rightarrow R^2 = \frac{288}{3\sqrt{3}}$.

$S_\Delta = 3 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin 120^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{288}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$.

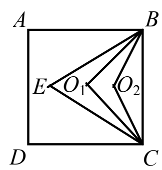
2. $\angle ABO = \angle BAO$, т.к. они опираются на хорды равной длинны, следовательно, AO = BO = 2. Внутренний угол 5 – угольника равен $\frac{188(5-2)}{5} = 108^\circ$, т.к. диагонали 5 – угольника проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на 3 равные части, то $\angle ABO = \angle BAO = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ \Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - 36^\circ \cdot 2 = 108^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2^2(1-\cos 108^\circ)} = 2\sqrt{1-\cos 108^\circ}$ по теореме косинусов.

С-15

1. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ - данный 8 – угольник, а т. O – его центр, тогда $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{2R^2(1-\cos 45^\circ)} =$

$R\sqrt{2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \Rightarrow S_8 = 8 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2$.



2. По теореме Пифагора $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

По теореме косинусов:

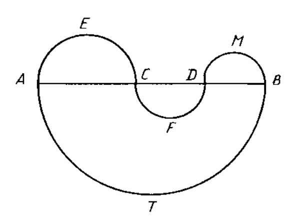
$a^2 = 2R_2^2(1 - \cos 120°) = 2R_2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3R_2^2 \Rightarrow R_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, а $O_1H = \sqrt{R_1^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(O_1,O_2) = O_1H - O_2H = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{a}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

3. Строим по этому отрезку равносторонний треугольник, затем поворачиваем его на 60°. Затем соединяем вершины треугольников.

С-16

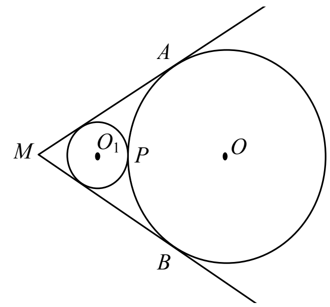


1. Длина угла ATB равна $\frac{AB}{2} \cdot \pi$, длина дуги AEC равна $\frac{AC}{2} \cdot \pi$, длина дуги CFD равна $\frac{CD}{2} \cdot \pi$, длина дуги DMB равна $\frac{DB}{2} \cdot \pi$.

Т.к. AB = AC + CD + DB, имеем, $\frac{Ab}{2}\pi = \frac{AC}{2}\pi + \frac{CD}{2}\pi + \frac{DB}{2}\pi$.

2. Т.к. $l = \frac{\pi}{180°} \cdot 120° \cdot R$, то $R = \frac{3l}{2\pi}$.

Т.к. $\angle AOB = 120°$, то $\angle AOM = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AMO = 30° \Rightarrow MO = \frac{R}{\sin 30°} = 2R \Rightarrow$ $\Rightarrow MP = R$, но $\angle AMB = 60° \Rightarrow$ если в точку P провести касательную, то окружность будет вписана в равносторонний треугольник с высотой $R \Rightarrow$ его сторона равна $R \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ радиус вписанной

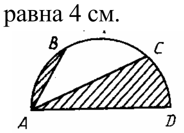


окружности равен $\frac{R}{3} \Rightarrow$ длина вписанной окружности $2\pi \frac{R}{3} = \frac{2\pi \cdot 3l}{3 \cdot 2\pi} = l$.

С-17

1. Пусть хорда AB большей окружности касается меньшей в т. C, а т. O – их общий центр, тогда $S = \pi(R^2 - r^2) = 4\pi$, где R и r – радиусы соответственно большей и меньшей окружностей, но $R^2 - r^2$ по теореме Пифагора равно четверти хорды, следовательно, длина хорды равна 4 см.

2. $S' = (\frac{\pi}{8}R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 45°) + \frac{\pi}{8}R^2 + \frac{1}{2}R^2 \sin 135° = Q$.



$S_{ABC} = (\frac{\pi}{8}R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 45°) + \frac{\pi}{8}R^2 + \frac{1}{2}R^2 \sin 135° \Rightarrow S = 2Q$.

3. Пусть радиус внешней окружности кольца равен R_1, а внутренней — R_2, тогда строим прямоугольный треугольник с гипотенузой R_1 и катетом R_2, пусть другой катет равен R_3. Окружность с радиусом R_3 — искомая.

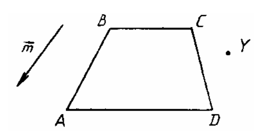
С-18

1. Пусть $AA_1 \cap BB_1 = 0$, тогда проведем OM. Отложим на OM от точки O $OM_1 = OM$, точка M_1 — искомая.

2. Т.к. неизвестно конкретно, куда отображаются концы отрезка MH, и известно, что движение сохраняет расстояние, а, следовательно, и отношения, то $ET{:}TP$ равно либо $\frac{2}{3}$ либо $\frac{3}{2}$.

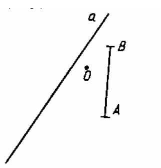
С-19

1. Перенесите точки A, B, C и D на вектор $\overline{m}$, пусть при этом они отобразятся соответственно на A_1, B_1, C_1, и D_1. Проведите окружности с центрами A_1 и D_1, и радиусами A_1Y и D_1Y, точка их пересечения, располагающаяся выше A_1D_1 будет искомой т. Y_1.



2. Строим ΔABC, у которого AB и BC равны соответственно диагоналям, $\angle ABC$ — углу между ними. Строим $\angle DAC$, равный углу между боковой стороной и основанием. Через точку B проводим прямую, параллельную AC. Пусть она пересекает $\angle DAC$ в точке F. Через F проводим прямую, параллельную BC. Пусть она пересекает AC в точке E. Трапеция $AFBE$ — искомая.

С-20

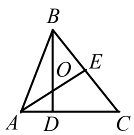


1. Проведите данную прямую вокруг т. O на 30° в одну и другую сторону, точки полученные при ее пересечении с отрезком и их прообразы на прямой a – искомые.

2. Пусть $MNPQ$ четырехугольник образованный точками пересечения данных прямых со сторонами квадрата. Проведем через центр квадрата т. O прямые перпендикулярные сторонам квадрата, тогда все из образовавшихся прямоугольных треугольников равны по катету и острому углу (углы из-за параллельности прямых, катеты по свойству квадрата), следовательно, равны и их гипотенузы, следовательно, $MP = NQ$ ч.т.д.

Вариант 7

С-1

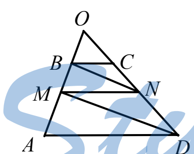


1. Пусть $BO:OD = m:n$, тогда

$$\overline{AO} = \frac{n}{m+n}\overline{AB} + \frac{m}{m+n}\overline{AD} = \frac{n}{m+n}\overline{AB} + \frac{2m}{5(m+n)}\overline{AC}. \ (1)$$

С другой стороны

$$\overline{AO} = k\overline{AE} = \frac{5k}{9}\overline{AB} + \frac{4k}{9}\overline{AC} \Rightarrow \frac{5k}{9} = \frac{n}{m+m} \text{ и } \frac{4k}{9} = \frac{2m}{5(m+n)} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{1}.$$



2. Пусть продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Тогда $\overline{OA} = k_1\overline{OB}$ и $\overline{OD} = k_1\overline{OC}$.

$\overline{OM} = k_2\overline{OB}$ и $\overline{OD} = k_2\overline{ON}$. Следовательно,

$\overline{OB} = \frac{1}{k_2}\overline{OM}$ и $\overline{ON} = \frac{1}{k_2}\overline{OD}$.

Тогда $\overline{OA} = \frac{k_1}{k_2}\overline{OM}$ и $\overline{ON} = \frac{k_1}{k_2}\overline{OC}$; $\overline{NA} = \overline{OA} - \overline{ON} = \frac{k_1}{k_2}(\overline{OM} - \overline{OC}) = \frac{k_1}{k_2}\overline{CM}$.

Итак, $\overline{NA} = \frac{k_1}{k_2}\overline{CM} \Rightarrow AN \| MC$.

С-2

1. $\overline{a}\ \{3; -1\}$, $\overline{b}\ \{1; -2\}$, $\overline{c}\ \{-1; 7\}$; $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \Rightarrow \overline{p}\ \{3; 4\}$.

Пусть $\overline{p} = k\overline{a} + m\overline{b} \Rightarrow \begin{cases} 3k + m = -3 \\ -k - 2m = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 2,\ m = -3 \Rightarrow \overline{p} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$.

2. Пусть $MH \perp AB$, тогда $AM^2 = AH \cdot HB \Rightarrow AH = \frac{AM^2}{AB} = \frac{25}{13}$.

Аналогично, $HB = \frac{MB^2}{AB} = \frac{144}{13} \Rightarrow MH = \sqrt{HB \cdot AH} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AM} = \frac{25}{13}\bar{i} + \frac{60}{13}\bar{j}$.

С-3

1. $A(1;\ 2)$, $B(7;\ 10)$. Очевидно, $C\left(\frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 7}{4};\ \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 10}{4}\right) \Rightarrow C(2{,}5;\ 4)$.

2. $\overline{AB}\,\{5;\ 0\}$, $\overline{AC}\,\{5;\ 12\}$. Т.к. $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ не коллинарны, то не лежит.

3. $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$. Разделим $\bar{a}$ на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, тогда

$\bar{l} = \frac{1}{5}\bar{a} = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$. $|l| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$.

С-4

Пусть $A(0;\ 0)$, $B(b;\ h)$, $C(a;\ 0)$. Пусть BE медиана и $M \in BE$:

$\frac{BM}{ME} = \frac{2}{1}$, но $B(b;\ h)$ и $E\left(\frac{a}{2};\ 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{a+b}{3};\ \frac{h}{3}\right)$.

Рассмотрим медиану AF и точку M_1 на ней такую, что

$\frac{AM}{M_1F} = \frac{2}{1}$, но $A(0;\ 0)$, $F\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{h}{2}\right) \Rightarrow M_1\left(\frac{a+b}{3};\ \frac{h}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ и M_1 совпадают. Аналогично и с медианой CG. Ч.т.д.

С-5

1. Пусть $A(-a;\ a)$, $B(-a;\ -a)$, $C(a;\ -a)$, $D(a;\ a)$, тогда уравнение окружности: $x^2 + y^2 = a^2$. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка окружности, тогда $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (x + a)^2 + (y - a)^2 + (x + a)^2 + (y + a)^2 + (x - a)^2 + (y + a)^2 + (x - a)^2 + (y - a)^2 = 12a^2$ (т.к. $x^2 + y^2 = a^2$). Ч.т.д.

2. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, $(x - 2)^2 + y^2 = 1$;

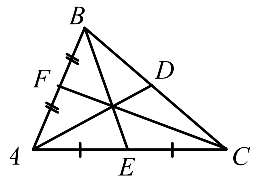
$OO_1 = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow R_1 = 4 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

С-6

1. Прямая $y = kx + 5$ перпендикулярна прямой $y = -(1/k)\,x$, проходящей через начало координат

$\begin{cases} y = kx + 5 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}$; $-\frac{1}{k}x = kx + 5$, $x = \frac{-5}{k + \frac{1}{k}} = \frac{-5k}{k^2 + 1} \Rightarrow y = \frac{5}{k^2 + 1}$, но по условию

$$\left(\frac{-5k}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{5}{k^2+1}\right)^2=9 \Rightarrow \frac{25}{(k^2+1)^2}(k^2+1)=9\,;\ \frac{25}{k^2+1}=9 \Rightarrow k=\pm\frac{4}{3}.$$



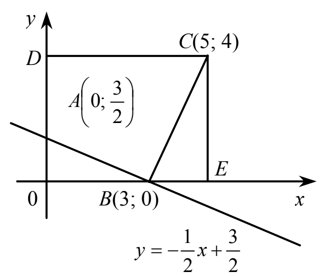
2. Пусть F — середина AB, тогда $F\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Т.к. $CM:MF = 2:1$, то $C(2;\ 1)$.

Пусть AC задается $y = kx + b$, тогда $\begin{cases}1=2k+b\\2=-k+b\end{cases}$;

$$\begin{cases}b=2+k\\1=2k+2+k\end{cases};\quad \begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\b=\frac{5}{3}\end{cases} \Rightarrow y=-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}.$$

С-7



1. На рисунке $BE = 2$, $CE = 4$, $OB = 3$,

$OA=\frac{3}{2} \Rightarrow \Delta CBE \sim \Delta AOB \Rightarrow CB\perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CB=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow R=\sqrt{20+16}=6 \Rightarrow (x-5)^2+(y-4)^2=36.$

2. Пусть $C(0;\ 0)$, $A(0;\ a)$, $B(b;\ 0)$. Пусть $M(x;\ y)$ — искомая точка, тогда имеем:
$x^2+(y-a)^2+(x-b)^2+y^2=2x^2+2y^2$
$2ay+2bx=a^2+b^2$ — прямая.

С-8

1. $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{AO}{OC}$; $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}}=\frac{AO}{OL} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{S_{AOD}}{S_{COD}}$; $\frac{S_{AOB}}{20}=\frac{60}{40} \Rightarrow S_{AOB}=30.$

С другой стороны: $S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot AB\cdot\sin\angle BAO \Rightarrow \sin\angle BAO=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAO = 150°$ или $\angle BAO = 30°$, но 1-й случай невозможен, т.к. $\angle AOB > 31° \Rightarrow \angle BAO = 30°$.

2. Пусть $BD = x$. Т.к. $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC}$, то

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{1}{2}xa\sin\beta+\frac{1}{2}xb\sin(\alpha-\beta) \Rightarrow x=\frac{ab\sin\alpha}{a\sin\beta+b\sin(\alpha-\beta)}.$$

С-9

1. Из ΔABM имеем по теореме синусов: $\frac{AM}{\sin\angle ABM}=\frac{AB}{\sin 20°}$, аналогично, $\frac{AM}{\sin\angle ACM}=\frac{AC}{\sin 30°}$, т.к. $AB = AC$, то получаем

$$\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle ABM}=\frac{\sin 30°}{\sin 20°}. \qquad (1)$$

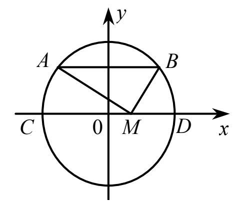
Пусть $\angle MAB = \alpha$, тогда $\angle ABM = 180° - (\alpha + 20°)$, $\angle CAM = 60° - \alpha$ и $\angle ACM = 90° + \alpha$. Из (1) $\Rightarrow \dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+20°)}=\dfrac{1}{2\sin 20°}$.

Далее $\sin(\alpha + 20°) = 2\sin20°\cos\alpha$; $\sin(\alpha - 20°) = 0$ и $\alpha = 20°$.

2. Пусть h — высота трапеции, тогда $n = m - h\text{ctg}\alpha - h\text{ctg}\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow h=\frac{m-n}{\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\beta} \Rightarrow S=\frac{1}{2}(m+m)\frac{(m-n)}{\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\beta}.$$

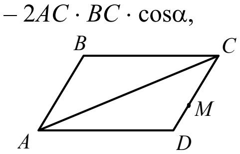
С-10



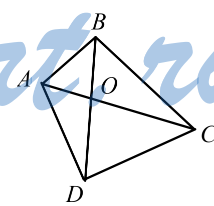
1. Пусть $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $M(x; 0)$, но $x_A = -x_B$ и $y_A = y_B$, тогда $MA^2+MB^2=(x_A-x)^2+y^2+(x_B-x)^2+y^2 =$
$= x_A^2 + y^2 - 2x_Ax + x_B^2 + y^2 - 2x_Bx =$
$= 2R^2 - 2x(x_A + x_B) = 2R^2$, т.к. $(x_A + x_B = 0)$.

2. По теореме косинусов имеем:
$c^2=a^2+b^2 - 2ab\cos\angle C$, но $a = 2R\sin\angle A$,
$b = 2R\sin\angle B$, $c = 2R\sin\angle C \Rightarrow \sin^2\angle C=\sin^2\angle A+\sin^2\angle B -$
$- 2\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\cos\angle C$, но $\sin^2\angle C = 1 - \cos^2\angle C$, а $\sin^2\angle A = 1 - \cos^2\angle A \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2\angle A = \cos^2\angle C + \sin^2\angle B - 2\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\cos\angle C$.

С-11



1. По теореме косинусов имеем: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\alpha$,
$BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\alpha + AC^2 - AB^2 = 0$.
$D_1 = AC^2\cos^2\alpha - AC^2 + AB^2 = AB^2 - AC^2\sin^2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = AC\cos\alpha \pm \sqrt{AB^2 - AC^2\sin^2\alpha} \Rightarrow$
$\Rightarrow P_1 \approx 145{,}6$ или $P_2 \approx 74{,}2$.



2. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = l$, тогда по теореме косинусов $b^2 = a^2 + l^2 -$
$- 2\,a\cdot l\cos\angle BAC \Rightarrow \angle BAC = \arccos\dfrac{a^2+l^2-b^2}{2al}$,

аналогично $\angle CAD = \arccos\dfrac{d^2+l^2-c^2}{2dl} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BD=\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\left(\arccos\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}+\arccos\frac{d^2+l^2-c^2}{2dl}\right)}.$$

Тогда по формуле Герона $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

С другой стороны $S=\dfrac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\angle AOB \Rightarrow \angle AOB=\arcsin\dfrac{2S}{BD\cdot AC} \approx 93°9'$.

С-12

1. Пусть $\angle CDA = \alpha$, тогда $\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}+\overline{CD}\cdot\overline{DA}+\overline{DA}\cdot\overline{AB}=$
$= 0 + 3CD\cos\alpha + 5CD(-\cos\alpha) + 0 = CD\cos\alpha(3-5) = -2CD\cos\alpha$,
но $CD\cos\alpha = AD - BC = 2 \Rightarrow$ Ответ: -4.

2. $AB\{1;\,3\}$, $BC\{3;\,5\}$, $\overline{CA}\ \{-4;\,-8\}$.

Пусть AH — искомая высота, тогда $\overline{AH}\cdot\overline{BC}=0 \Rightarrow \overline{AH}=k\{-5;\,3\} \Rightarrow$

$$\cos\angle BAH=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AH}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AH}\right|}=\frac{-5k+9k}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{34}\cdot k}=\frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{34}}\Rightarrow AH=\frac{AB}{\cos\angle BAH}=\frac{2\sqrt{34}}{17}.$$

С-13

1. Предположим, что $MA^2 + MC^2 = MD^2 + MB^2$, тогда
$\overline{MA}^2+\overline{MC}^2=\overline{MD}^2+\overline{MC}^2$.

Рассмотрим разность $\overline{MA}^2+\overline{MC}^2-\overline{MB}^2-\overline{MD}^2=$
$=(\overline{MA}+\overline{MD})(\overline{MA}-\overline{MD})+(\overline{MC}+\overline{MB})(\overline{MC}-\overline{MB})=$
$=(\overline{MA}+\overline{MD})\overline{DA}+(\overline{MC}+\overline{MB})\overline{BC}=$
$=\overline{DA}(\overline{MA}+\overline{MD}-\overline{MC}-\overline{MB})=\overline{DA}\cdot(\overline{BA}+\overline{CD})=2\overline{DA}\cdot\overline{BA}=\overline{0}$.

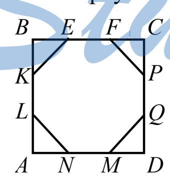
Все преобразования верны и в обратную сторону $\Rightarrow$ требуемое равенство доказано.

2. Т.к. $AC\perp BD$, то $(\overline{AB}+\overline{BC})(\overline{AD}-\overline{AB})=0$;

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}-\overline{AB}^2-\overline{BC}\cdot\overline{AB}=\overline{0}$, $\overline{0}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}-\overline{AB}_2-\overline{0}=\overline{0}\Rightarrow AB^2{=}BC{\cdot}AD$.

С-14

1. Пусть α — внутренний угол правильного многоугольника, тогда для того, чтобы покрыть плоскость без просветов, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное n, что $n\alpha = 360° \Rightarrow$ покрыть можно треугольниками, квадратами и шестиугольниками.



2. По теореме Пифагора

$$CQ{=}PD=DN=MA=AK=LB=BF=EC=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow CP{=}QD{=}MD{=}NA{=}AL{=}BK{=}BE=CF=a-\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow PQ = NM = KL = EF = a-2\left(a-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)=a\sqrt{2}-a$ и, кроме того, по теореме Пифагора $MQ = FP = EK = LN = \sqrt{2}\ CP = \sqrt{2}\ a - a \Rightarrow$ все стороны восьмиугольника равны и, кроме того, его углы, очевидно, равны $135° \Rightarrow$ он — правильный.

С-15

1. Пусть R — радиус описанной окружности, тогда, очевидно,

$A_1A_7 = 2R;$ $\angle A_2A_1A_{12} = \dfrac{180°\cdot 10}{12} = 150°$; $\angle A_4A_1A_{10} = 90°$, т.к. опирается на диаметр; $\angle A_4A_1A_2 = \angle A_{10}A_1A_{12} = 30° \Rightarrow \angle A_6A_1A_{14} = 30°$, т.к. опирается на равные дуги $\Rightarrow \angle A_6OA_8 = 60° \Rightarrow A_6A_8 = R \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\,2R\cdot R\cdot \sin 90° = R^2$.

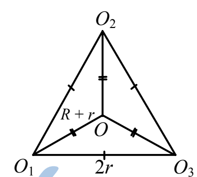
$$A_6A_8 = R = \sqrt{2a^2(2-\sqrt{3})(1-\cos 150°)} = a\sqrt{2(2-\sqrt{3})(1-\frac{\sqrt{3}}{2})} = a \Rightarrow S = a^2.$$

2. Опишем окружность около трапеции.
Углы при AD равны 75°. Т.к. $AC \perp BD$, то $\angle CAD = \angle BDA = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAC = 30°$ и $\cup BC = 60° \Rightarrow r = a$. С другой стороны, угол между диагоналями равен полусумме дуг BC и $AD \Rightarrow \cup AD = 120°$ и $AD = a\sqrt{3}$.
Пусть диагонали пересекаются в точке F, тогда по теореме Пифагора $AF = FD = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, а $BF = FC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow AC = BD = \dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2(1+\sqrt{3})^2}{2} = \frac{a^2(1+\sqrt{3})^2}{4}.$$

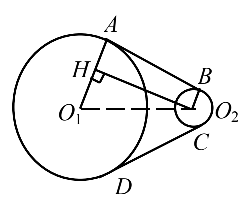
3. Т.к. $S \sim a^2$, то строим отрезок $\sqrt{2}a$, а затем строим шестиугольник с такой стороной.

С-16



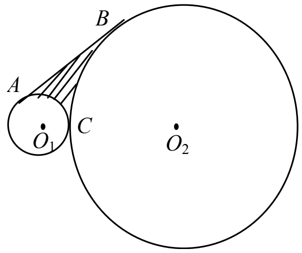
1. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей. $r = \dfrac{c}{2\pi}$ — их радиус. Очевидно, центр искомой окружности центр $\Delta\ O_1O_2O_3$, тогда $O_1O = \dfrac{2}{3}O_1H = \dfrac{2}{3}\cdot 2r\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{2r}{\sqrt{3}} - r.\quad l = 2\pi R = 2\pi r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{c(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$



2. Пусть $O_2H \perp O_1A \Rightarrow \cos\angle HO_1O_2 =$
$= \dfrac{O_1H}{O_1O_2} = \dfrac{AO_1 - BO_2}{O_1O_2} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow \angle HO_1O_2 = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BO_2O_1 = 120°$ (т.к. ABO_2O_1 — прямоугольная трапеция) и $\angle AO_1D = \angle BO_2C = 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow l = (2/3)\cdot 2\pi R_1 + 2AB + (1/3)2\pi R_2 =$
$= (2/3)\cdot 2\pi\cdot 8 + (1/3)\cdot 2\pi\cdot 2 + \sqrt[2]{144-36}$ $=$
$= (1/3)(32\pi + 4\pi) + 2\sqrt{108}$ $= (1/3)(36\pi) + 12\sqrt{3} = 12(\pi + \sqrt{3})$.

С-17

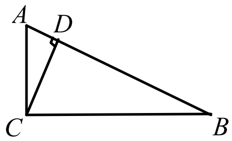


1. Аналогично предыдущей задаче $\angle AO_1C = 120°$, $\angle BO_2C = 60° \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(r + 3r) \cdot AB - \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{6}\pi(3r)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} - \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{6}\pi(3r)^2 =$$

$$4r^2\sqrt{3} - \pi r^2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) = 4r^2\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi r^2.$$



2. $\Delta ADC \sim \Delta CDB \Rightarrow \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow$

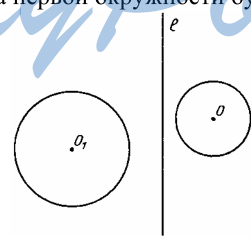
$$r_2 = \frac{r_1 a}{b} = \frac{\frac{c}{2\pi}a}{b} = \frac{ac}{2\pi b} \Rightarrow S = \pi r_2{}^2 = \frac{a^2c^2}{4\pi b^2}$$

3. Нужно построить окружности с радиусами $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ и $\dfrac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$.

Для этого строим прямоугольный треугольник с катетом R и противолежащим углом в 60°, тогда другой катет равен $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. Далее строим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$, тогда его гипотенуза равна $\dfrac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$.

С-18

1. Отобразите левую окружность на правую от прямой l. Точки пересечения и их прообразы на первой окружности будут искомыми.

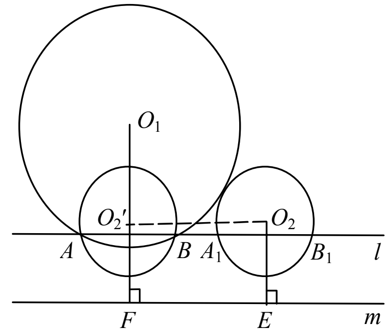


2. Т.к. трапеции равнобедренные, то $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1$ и $CB = C_1B_1$, тогда равны и проекции боковых сторон на AB (соответственно A_1B_1), тогда равны и отрезки C_1D_1 и $CD \Rightarrow$ трапеции равны, т.к. тогда их можно совместить некоторым движением.

С-19

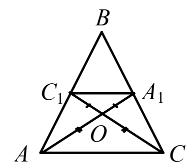
1.

Опустим перпендикуляры O_1F и O_2E на m. Параллельно перенесем окружность с центром O_2 на $\overrightarrow{EF}$. Через точку пересечения окружностей проведем искомую прямую l.



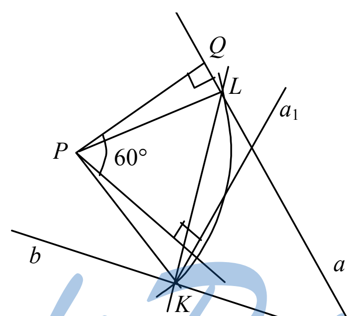
2.

Пусть O — точка пересечения медиан, тогда, т.к. медианы равны, то $C_1O = A_1O$ и $AO = OC \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AOC_1 = \Delta COA_1 \Rightarrow AC_1 = A_1C \Rightarrow AB = BC$. Ч.т.д.



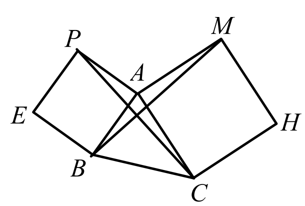
С-20

1.



Повернем прямую a относительно P на 60° по часовой стрелке — получим прямую a_1. $a_1 \cap b = K$. Проведем окружность с центром P и радиусом PK. Пусть она пересечет a в точке L. ΔPQL — искомый.

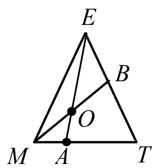
2.



При повороте на 90° вокруг точки A: $P \to B$, $C \to M \Rightarrow PC \to BM \Rightarrow$
$\Rightarrow PC = BM$ и $PC \perp BM$.

Вариант 8

С-1

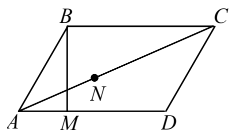


1. Пусть $\frac{EB}{BT} = \frac{m}{n}$, тогда $\overline{MB} = \frac{n}{m+n}\overline{ME} + \frac{m}{m+n}\overline{MT}$;

$\overline{MB} = k \cdot \overline{MO} = \frac{3}{7}k \cdot \overline{ME} + \frac{4}{7}k \cdot \overline{MA} =$

$= \frac{3}{7}k \cdot \overline{ME} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7}k \cdot \overline{MT}$, значит, $\frac{n}{m+n} = \frac{3}{7}k$;

$\frac{m}{m+n} = \frac{8k}{49}$, откуда находим $k = \frac{7n}{m+n}$; $\frac{EB}{BT} = \frac{m}{n} = \frac{8}{21}$.



2. $\overline{BM} = \frac{1}{5}\overline{AD} - \overline{AB}$;

$\overline{BN} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \overline{AB} = \frac{1}{6}(\overline{AD} + \overline{AB}) - AB = \frac{1}{6}\overline{AD} - \frac{5}{6}\overline{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{BN} = \frac{5}{6}\overline{BM} \Rightarrow \overline{BN} \uparrow\uparrow \overline{BM} \Rightarrow$ все три точки лежат на одной прямой.

С-2

1. $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{t} = \{3; -4\}$. Пусть $\bar{a} = \alpha\bar{m} + \beta\bar{p}$, тогда

$$\begin{cases} 3 = -\alpha + 4\beta \\ -4 = 2\alpha - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4\beta - 3 \\ -4 = 8\beta - 6 - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = -\frac{5}{3}\bar{m} + \frac{1}{3}\bar{p}.$$

2. $OC = \frac{6}{2} = 3$; по теореме Пифагора из ΔOBC находим

$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AF \cdot BC = \frac{1}{2}BO \cdot AC \Rightarrow AF = \frac{BO \cdot AC}{BC} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}$.

Из ΔABF по теореме Пифагора

$BF = \sqrt{BA^2 - FA^2} = \sqrt{25 - \frac{24^2}{25}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{BF}{BO} = \frac{FK}{OC} \Rightarrow FK = \frac{BF \cdot OC}{BO} = \frac{21}{20}$;

$\frac{FK}{AF} = \frac{21}{20} \cdot \frac{5}{24} = \frac{7}{32} \Rightarrow KA = (1 - \frac{7}{32})FA = \frac{25}{32}FA$. $\overline{FA} = \overline{FB} + \overline{BA}$;

$\overline{FB} = \frac{7}{25}\overline{CB}$; $\overline{CB} = \{-3; -4\} \Rightarrow \overline{FA} = \left\{-\frac{21}{25}; -\frac{28}{25}\right\}$;

$\overline{BA}=\{-3;-4\}\Rightarrow\overline{FA}=\left\{-\frac{96}{25};-\frac{72}{25}\right\}\Rightarrow\overline{KA}=\frac{25}{32}\overline{FA}=\left\{-3;-\frac{9}{4}\right\}=-3i-\frac{9}{4}$.

3. $\overline{BA}=-\overline{AB}=\{-2;1\}$; $\overline{DC}=-\overline{CD}=\{-3;-1\}$;

$2\overline{BA}=\{-4;-2\}\Rightarrow 2\overline{BA}+\overline{DC}=\{-7;1\}$.

С-3

1. $\frac{PM}{MK}=\frac{3}{1}$. M (2;-4), K (3;5). $\overline{MK}\{1;9\}\Rightarrow\overline{PK}=4\cdot\overline{MK}=\{4;36\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если P $\{x;y\}$ $\Rightarrow\overline{PK}=\{3\text{-}x;5\text{-}y\}=\{4;36\}\Rightarrow P$ $\{-1;-31\}$.

2. M (1;2), H (3;5), P (5;-8). $y=kx+b$;

1) $\begin{cases}-2=k+b\\-5=3k+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k=-3\\-2+\frac{3}{2}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-\frac{3}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y_1=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

2) $\begin{cases}-8=5k+b\\-5=3k+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k=-3\\-5+\frac{9}{2}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-\frac{3}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y_2=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

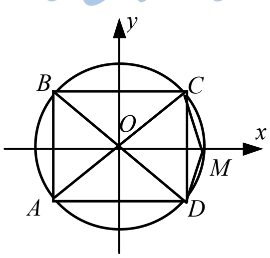
$\Rightarrow$ точки лежат на одной прямой.

3. $\bar m=5\bar i-12\bar j$, $|\bar m|=13\Rightarrow|\bar e|=\frac{|\bar m|}{13}$. $\bar e=-\frac{\bar m}{13}\Rightarrow\bar e\{-\frac{5}{13};\frac{12}{13}\}$.

С-4

Пусть $A(-b,-a)$, $B(-b,a)$, $C(b,a)$, $D(b,-a)$. $M(x,y)$, тогда имеем:
$(x+b)^2+(y-a)^2+(x-b)^2+(y+a)^2=(x+b)^2+(y+a)^2-(x-b)^2+(y-a)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow$ равенство является тождеством $\Rightarrow$ действительно не зависит от x и y.

С-5



1. Поместим квадрат $ABCD$ в прямоугольную систему координат так, чтобы центр квадрата совпадал с началом квадрата. Пусть A $(-a;-a)$, B $(-a;-a)$, C $(-a;-a)$ и D $(-a;-a)$. Уравнение окружности вписаной около квадрата имеет вид: $x^2+y^2=2a^2$. Выберем на окружности произвольную точку M с координатами x и y. Тогда $MA=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$,

$MB=\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}$, $MC=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$,

$MD=\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2}$. Учитывая, что $x^2 + y^2 = 2a^2$ имеем $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=16a^2$, где $16a^2$ — величина постоянная.

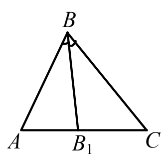
2. $x^2+y^2-4x-2y-11=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=16$.

M (3;1), K (2;1), тогда $MK=\sqrt{1+0}=1 \Rightarrow$ радиус искомой окружности $R = 4 - MK = 4 - 1 = 3 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=9$.

С-6

1. Прямая $y = 4 + mx$ пересекает оси координат в точках x (0,4) и $\left(-\frac{4}{m},\ 0\right) \Rightarrow E\left(-\frac{2}{m},\ 2\right) \Rightarrow OE^2=\frac{4}{m^2}+4=49 \Rightarrow \frac{4}{m^2}=45 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2=\frac{4}{45} \Rightarrow m=\pm\frac{2}{3\sqrt5}$.



2. $\overline{AB}\{-8;\ -6\}$ $\quad\overline{BC}\{+3;\ -4\}$

Пусть $\overline{BB_1}\{x;y\} \Rightarrow \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BB_1}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{BB_1}|}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BB_1}}{|\overline{BC}|\cdot|\overline{BB_1}|}$,

$\frac{+8x+6y}{10}=\frac{3x-4y}{5} \Rightarrow 8x + 6y = 6x - 8y,\ 14y + 2x = 0$, т.е.

$\overline{BB_1}\{1;\ 7\} \Rightarrow k=-\frac{1}{7} \Rightarrow 0 = +4\cdot\frac{1}{7}+b \Rightarrow b=-\frac{4}{7} \Rightarrow y=-\frac{x}{7}-\frac{4}{7}$

С-7

1. $y=4-2x;\ (x-4)^2+(y-2)^2-16=y+2x-4;\ (x-4)^2+(2-2x)^2=16;$

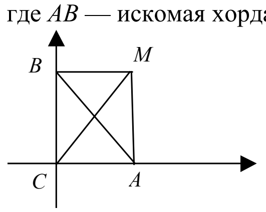
$x^2-8x+16+4-8x+4x^2-16=0;\ 5x^2-16x+4=0;$

$x=\frac{16\pm4\sqrt{11}}{10}=\frac{8\pm2\sqrt{11}}{5} \Rightarrow y_1=4-\frac{16+4\sqrt{11}}{5}=\frac{4-4\sqrt{11}}{5}$,

$y_2=4-\frac{16-4\sqrt{11}}{5}=\frac{4+4\sqrt{11}}{5} \Rightarrow AB=\sqrt{\left(\frac{8+2\sqrt{11}}{5}-\frac{8-2\sqrt{11}}{5}\right)^2+}$

$+\sqrt{\left(\frac{4-4\sqrt{11}}{5}-\frac{4+4\sqrt{11}}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{11}}{5}\right)^2}=\sqrt{5\cdot\left(\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{11}}{\sqrt5}=\frac{4\sqrt{55}}{5}$,

где AB — искомая хорда.



2. M $(x;y)$, A $(a;0)$, B $(0;b)$;

$\overline{MA}=\sqrt{(a-x)^2+y^2}$; $\overline{MB}=\sqrt{x^2+(b-y)^2}$;

$MC^2=x^2+y^2;\ MA^2-MB^2=2MC^2;$

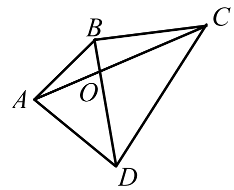
$(a-x)^2+y^2-x^2-(b-y)^2=2x^2+2y^2;$

$$a^2-2ax+x^2+y^2-x^2-b^2+2by-y^2=2x^2+2y^2;$$

$$2x^2+2ax-a^2+2y^2-2by+b^2=0;\ x^2+ax-\frac{a^2}{2}+y^2-by+\frac{b^2}{2}=0;$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b}{2})^2=\frac{-a^2}{4}+\frac{3b^2}{4}$$ — окружность.

С-8



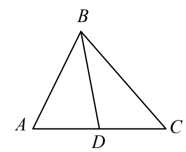
1. $S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot AD\cdot\sin\angle OAD=90$

$S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle OAD=90+60=150$,

значит, $\frac{S_{AOD}}{S_{ACD}}=\frac{AO}{AO+OC}=\frac{3}{5}\Rightarrow OC=\frac{2}{3}AO=\frac{20}{3}$.

Тогда $S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\angle BOC=30\Rightarrow\sin\angle BOC=\frac{30\cdot 2\cdot 3}{9\sqrt{2}\cdot 20}=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\angle AOB=180°-\angle BOC$, значит, $\angle AOB=45°$ или $\angle AOB=135°$, но первый случай невозможен, т.к. $\angle AOB>134°$, значит, $\angle AOB=135°$.



2. По теореме косинусов: $DC^2=m^2+n^2-2mn\cos\beta$.

По теореме синусов:

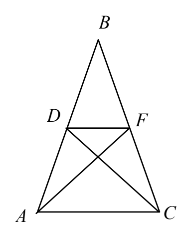
$$\frac{DC}{\sin\beta}=\frac{BD}{\sin(\angle BCA)}\Rightarrow\sin(\angle BCA)=\frac{m\sin\beta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\sin\beta}}.$$

Из ΔABC: $\angle BAC=180^\circ-2\beta-\arcsin(\frac{m\sin\beta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\sin\beta}})\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{n}{\sin(\angle BAC)}=\frac{AB}{\sin(\angle BCA)}\Rightarrow AB=\frac{n\cdot m\cdot\sin\beta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\sin\beta}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sin(\alpha+\beta+\arcsin(\frac{m\sin\beta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\sin\beta}}))}=\frac{mn\sin\beta}{n\sin(\alpha+\beta)-m(\sin\alpha)}.$$

С-9



1. $\angle BAC=\frac{180°-20°}{2}=60°$;

$\angle BAF=80^\circ-60^\circ=20^\circ\Rightarrow BF=AF=a$.

$\angle ADC=180^\circ-80^\circ-50^\circ=50^\circ\Rightarrow AD=AC=b$.

Пусть $\angle AFD=x$.

По теореме синусов из ΔADF:

$$\frac{AF}{\sin(20^\circ + x)} = \frac{b}{\sin x} \Rightarrow AF = \frac{b\sin(20^\circ + x)}{\sin x}.$$

Из ΔAFC: $\angle AFC = 180^\circ - \angle FAC - \angle ACF = 40^\circ$, тогда

$$\frac{AF}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AF = \frac{b\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \frac{\sin(20^\circ + x)}{\sin x} = 2\cos 40^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(x - 20^\circ) = 0 \Rightarrow x = 30^\circ.$$

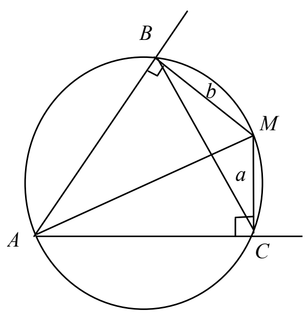
2. По теореме синусов:

$$\frac{AK}{\sin\angle ACK} = \frac{AC}{\sin\alpha};\ \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow \frac{AK}{\sin\angle ACK} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Пусть $\angle BCK = \gamma$, тогда $4\gamma + 2\alpha + 2\beta = 2\pi \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\angle ACK = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \Rightarrow AK = \frac{a\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

С-10



1. По теореме косинусов:
$BC^2 = b^2 + a^2 + 2ab\cos\alpha$.
Т.к. суммы противолежащих углов равны π, то можно описать окружность, тогда

$$AM = 2R = 2\cdot\frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

2. По теореме косинусов:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.
По теореме синусов:
$a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C \Rightarrow$

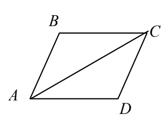
$$\Rightarrow \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin A\sin B\cos C = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C \Rightarrow$$

$$2\sin A\sin B\cos C = 1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B - 1 + \cos^2 C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin A\sin B\cos C - 1 = \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B,$$ ч.т.д.

С-11



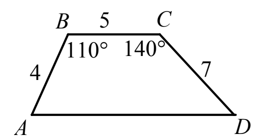
1. По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{CD}{\sin\angle CAD} \Rightarrow \sin\angle D = \frac{AC\cdot\sin\angle CAD}{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2CD = \arcsin\frac{AC\cdot\sin\angle BCA}{CD} \Rightarrow \angle ACD = 180^\circ - \angle BCA - \angle D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD.$$

После подстановки имеем: $S_1 = 627{,}4$, $S_2 = 119{,}9$ два ответа получаются из-за двух значений угла D.



2. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, тогда по теореме косинусов:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B \Rightarrow$ по теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle BCA} \Rightarrow \sin\angle BCA = \frac{AB\sin\angle B}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ACD = 140° - \arcsin\frac{AB\sin\angle B}{AC} \Rightarrow$$

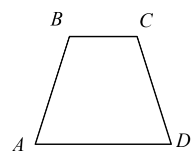
$$\Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC\cdot CD\cos\angle ACD} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B + c^2 - 2c\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\angle B}\cdot} $$

$$\overline{\cdot\cos\left(140° - \arcsin\frac{a\sin\angle B}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\angle B}}\right)} \approx 11{,}8.$$

С-12

1.



$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{BC}\cdot\overline{CD} + \overline{CD}\cdot\overline{DA} + \overline{DA}\cdot\overline{AB} =$$

$$= \overline{BC}(\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{DA}(\overline{CD} + \overline{AB}) =$$

$$= (\overline{AB} + \overline{CD})(\overline{BC} + \overline{DA}) = 0\cdot 0 + m\cdot(-m) = -m^2.$$

2. $\overline{AD}\{2;\ 4\}$, $\overline{BC}\{1;\ 2\} \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ — трапеция. $\overline{AB}\{2; -4\}$

$$\cos\angle BAD = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|} = \frac{4-16}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}} = \frac{-12}{20} = -\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\angle ABC = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{4}{5} \Rightarrow AH = AB\cdot\sin\angle ABC = \sqrt{20}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

С-13

1.

Предположим, что равенство верное, тогда рассмотрим разность:

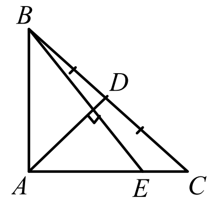
$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{DC} =$$

$$= (\overline{AC} - \overline{AD})(\overline{AC} + \overline{AD}) + (\overline{BD} - \overline{BC})(\overline{BD} + \overline{BC}) - 2\overline{AB}\cdot\overline{DC} =$$

$$= \overline{DC}(\overline{AC} + \overline{AD}) + \overline{CD}(\overline{BD} + \overline{BC}) - 2\overline{AB}\cdot\overline{DC} =$$

$$= \overline{DC}(\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{BD} - \overline{BC}) - 2\overline{AB}\cdot\overline{DC} = \overline{DC}(\overline{AB} + \overline{AB}) - 2\overline{AB}\cdot\overline{DC} = 0 \Rightarrow$$

отсюда обратными преобразованиями можно получить требуемые равенства.



2. $\overline{AD} = \overline{BD} - \overline{BA} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{BA}$;

$\overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{3}{4}\overline{BC}$; $\left(\frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{BA}\right)\left(\frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{3}{4}\overline{BC}\right) = 0$;

$\frac{1}{8}\overline{BC}\cdot\overline{BA} - \frac{1}{4}\overline{BA^2} + \frac{3}{8}\overline{BC^2} - \frac{3}{4}\overline{BC}\cdot\overline{BA} = 0$;

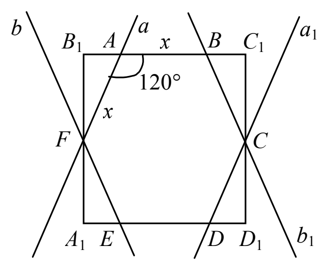
$\frac{3}{8}\overline{BC^2} - \frac{1}{4}\overline{BA^2} - \frac{5}{8}\overline{BC}\cdot\overline{BA} = 0$.

Пусть $BC = x$, тогда $\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{5}{8}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 0$; $3x^2 - 5x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$.

С-14

1. Очевидно, они должны быть равны.

2.

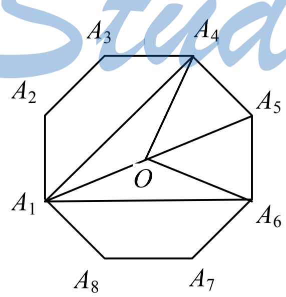


Пусть сторона шестиугольника равна x. $\angle B_1A = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1A = \frac{x}{2}$ и $B_1F = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow B_1C_1 = 2x$ и $A_1B_1 = x\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ стороны относятся как $\sqrt{3}:2$.

С-15



1. Пусть т. O – центр 8 – угольника, тогда:

$\angle A_4OA_5 = \angle A_5OA_6 = 45^\circ$.

$\angle A_1OA_4 = \angle A_1OA_6 = 135^\circ$.

Опишем вокруг 8 – угольника окружность и найдем ее радиус.

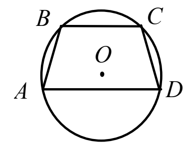
По теореме косинусов:

$(a\sqrt{2-\sqrt{2}})^2 = 2R^2(1-\cos 45^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2(2-\sqrt{2}) = R^2(2-\sqrt{2}) \Rightarrow R = a \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 4\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 45^\circ = 2a^2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a^2$.

2. Очевидно $\breve{AB} = \breve{CD} = 60°$, $\breve{BC} = 90°$ и $\breve{AD} = 150°$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow \angle BAD = \dfrac{1}{2}(90° + 60°) = 75°;$

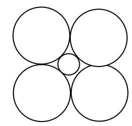
$AD = \sqrt{2R^2(1-\cos 150°)} = R\sqrt{3}$;

$BC = \sqrt{2}R \Rightarrow AB = \sqrt{2R^2(1-\cos 60°)} = R \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}R\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)R \cdot \sin 75°.$

С-16

1.



Радиусы окружностей равны $\dfrac{c}{2\pi} = R$.

Пусть искомый радиус равен r, тогда по теореме Пифагора:

$(2R+2r)^2 = R^2 \Rightarrow 2R+2r = 2\sqrt{2}R \Rightarrow r = R(\sqrt{2}-1) = \dfrac{c}{2\pi}(\sqrt{2}-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow l = c(\sqrt{2}-1)$.

2. См. задачник стр. 50.

Пусть $AB \cap CD \cap O_1O_2 = 0$, тогда $O_1O = OO_2 = 50$, а т.к.

$O_1A = O_2D = 25$, то $\angle O_1OA = \angle O_1OC = \angle O_2OD = \angle O_2OB = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AO_1C = \angle DO_2B = 120^\circ \Rightarrow l = 2\cdot\dfrac{1}{3}2\pi\cdot 25 + 2(2\cdot\sqrt{50^2-25^2}) = \dfrac{200\pi}{3} + 100\sqrt{3}$.

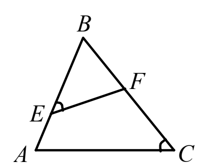
С-17

1. Т.к. $\angle COO_1 = 30°$, то $r = \dfrac{1}{2}(R-r) \Rightarrow 2r = R - r \Rightarrow r = \dfrac{R}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S' = \dfrac{1}{6}\pi R^2 - \pi r^2 - \dfrac{\sqrt{3}OC^2}{4} + \dfrac{\pi r^2}{6} - \dfrac{1}{2}r^2\sin 120° =$

$= \dfrac{1}{6}\pi R^2 - \dfrac{1}{9}\pi R^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(R-\dfrac{R}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{R}{3}\right)^2\right) + \dfrac{\pi}{54}R^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{9}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2}{54}\left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)$.

2. $r = \dfrac{c}{2\pi} = \dfrac{m}{2\sin\alpha}$ (где $\alpha = \angle BEF$) $\Rightarrow$



$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{m\pi}{c} \Rightarrow R = \dfrac{n}{2\sin\alpha} = \dfrac{nc}{2m\pi} \Rightarrow$

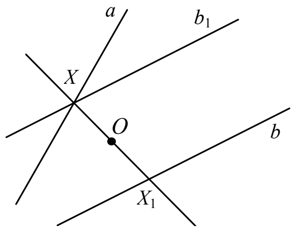
$\Rightarrow S = \pi R^2 = \dfrac{n^2c^2}{4m^2\pi}$.

3. Используя теорему Пифагора строим $r' = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Аналогично строим $r = \sqrt{r'^2 + r_3^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$.

Далее строим круг радиусом r.

С-18



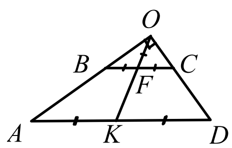
1.
Строим b_1 симметрично b относительно O. Пусть она пересекает a в точке x. Строим прямую, проходящую через точку x и O. Она пересекает b и точке x_1. Точки x и x_1 — искомые.

2. Это сразу следует из 1-го признака равенства треугольников.

С-19

1. рис. 48 стр. 52 задачника.

Рассмотрим перпендикуляры BF и B_1H на прямую C. перенесем $\Delta A_1B_1C_1$ на вектор $\overline{HF}$. Через точки пересечения сторон получившегося треугольника и ΔABC проведем прямую — она будет искомой.



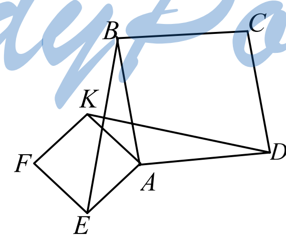
2.
Из свойств медианы прямоугольного треугольника следует, что

$OF = BF = \frac{1}{2}BC$ и $OK = \frac{1}{2}AD \Rightarrow FK = \frac{1}{2}(AD - BC)$

С-20

1. Необходимо осуществить поворот прямой O_1O_2 относительно центра A на 60°, далее, аналогично, соответствующей задаче из вар. 7.

2.

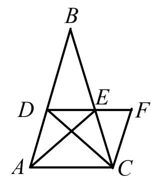


Треугольники BAE и DAK равны по первому признаку ($BA = AD$, $EA = AK$, как стороны квадратов; $\angle BAE = \angle KAD = \angle BAK + 90°$), в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, $EB = KD$. При повороте на $\angle KAD$ относительно центра A точка K окажется на AD, а точка E на BA, следовательно, $EB \perp KD$.

РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ

П-1

Вариант 1



1. 1) Т.к. $DE \parallel AC$, то $AD = EC$. Т.к. $AB = BC$, то $\angle ADE = \angle DEC \Rightarrow \Delta ADE = \Delta CED$ по 1-му признаку.
2) Т.к. $CF \parallel AB$, то $\angle ECF = \angle ABC$, т.к. $DE \parallel AC$, то $\angle FEC = \angle ECA \Rightarrow \Delta ECF \sim \Delta ABC$ по 2-му признаку.
3) $\Delta ABC \sim \Delta DBE$, причем $k = \frac{13}{7} \Rightarrow$

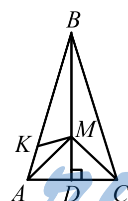
$$\Rightarrow DE = \frac{7}{13} AC = \frac{70}{13} \Rightarrow EF = AC - DE = 10 - \frac{70}{13} = \frac{60}{13}.$$

4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \Rightarrow h = CF = \frac{2S}{AB} = \frac{120}{13}$.

5) $\frac{S(ADE)}{S(DCF)} = \frac{S(CDE)}{S(DCF)} = \frac{DE}{DF} = \frac{\frac{70}{13}}{10} = \frac{7}{13}$.

2. Проведите высоты треугольника, точка их пересечения должна находиться вне его.

Вариант 2



1. 1) $DB \perp AC \Rightarrow BD$ — биссектриса $\Rightarrow \angle ABM = \angle CBM$, $AB = BC$, т.к. треугольник равнобедренный, BM — общая $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBM$ по 1-му признаку.
2) $\angle AKM = \angle BMA$ и $\angle BAM$ — общий $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AKM \sim \Delta AMB$ по 2-м углам, но $\Delta AMB = \Delta CMB \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BMC \sim \Delta AKM$.
3) $AM = \sqrt{64+36} = 10$ по теореме Пифагора $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{KM}{MB} = \frac{KM}{BD-6} = \frac{KM}{\sqrt{289-64}-6} \Rightarrow KM = \frac{AM \cdot MB}{AB} = \frac{10 \cdot (\sqrt{15}-6)}{17} = \frac{10 \cdot 9}{17}.$$

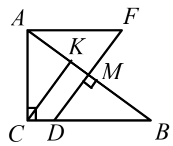
4) $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9}}{25} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 3}{25} = \frac{24}{5}$.

5) $S(AKM) = \left(\frac{10}{17}\right)^2 S(ABM) = \left(\frac{10}{17}\right)^2 \frac{19}{25} S(ABD) =$

$$= \left(\frac{10}{17}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{2} S(ABC) = \frac{3660}{289}.$$

2. Строим серединные перпендикуляры к 2-м сторонам. Затем проводим окружность с центром в точке пересечения и радиусом, равным расстоянию от нее до вершины.

Вариант 3



1. 1) $\angle FAM = \angle MBD$, т.к. $AF \parallel DB$,
$AM = MB$, т.к. M — середина $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AFM = \Delta DMB$ по катету и острому углу.
2) $\angle FAM = \angle MBD \Rightarrow \Delta AFM \sim \Delta ABC$ по острому углу ($\angle C = \angle M = 90°$).

3) $DB = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$; $\Delta ACB \sim \Delta AMP \Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta DMB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CB}{MB} = \frac{AB}{DB} = \frac{2MB}{DB} \Rightarrow CB = \frac{2MB^2}{DB} = \frac{2\cdot 225}{17} \text{ и}$$

$$\frac{AC}{DM} = \frac{2MB}{DB} \Rightarrow AC = \frac{2MB\cdot DM}{DB} = \frac{2\cdot 15\cdot 8}{17},\ AB = 2MB = 30.$$

4) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \dfrac{\sqrt{20\cdot 12\cdot 3\cdot 5}}{20} = \dfrac{10\cdot 6}{20} = 3;$

$CM = \dfrac{1}{2}AB = MB = 15.$

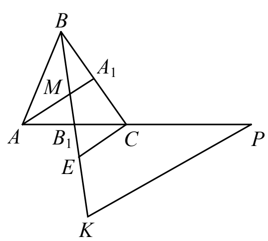
5) $CK = \dfrac{AC\cdot CB}{AB} = \dfrac{225\cdot 15\cdot 16}{30\cdot 289} = \dfrac{225\cdot 8}{289} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S(AKC)}{S(CKB)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{15\cdot 16}{17}\right)^2 - \left(\frac{1000}{289}\right)^2}{\left(\frac{350}{17}\right)^2 - \left(\frac{1000}{289}\right)^2}} = \frac{64}{225}.$$

2. См. П-1, Вариант-2.2.

Вариант 4

1. 1) Т.к. BB_1 и AA_1 — медианы и $BB_1 = 9$, то $MB_1 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta B_1CE = \Delta AMB_1$ по 1-му признаку.



2) $AC = 2AB_1 =$

$= 2\sqrt{AM^2 + MB_1^2 - 2BM\cdot MB_1\cos 60°} =$

$= 2\sqrt{64+9-2\cdot 8\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{64-24+9}\ \ 2\cdot 7 = 14;$

$\dfrac{AB_1}{B_1P} = \dfrac{MB_1}{B_1K} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \Delta B_1PK \sim \Delta AMB_1$ по 2-му признаку.

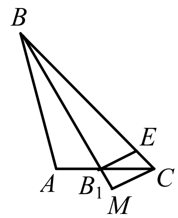
3) Из подобия следует, $KP = 3AM = 24$.

4) Из подобия следует, $\angle MAB_1 = \angle B_1PK \Rightarrow KP \parallel AA_1$.

5) $S(ABC) = 6S(AMB_1) = \dfrac{6}{9}S(B_1KP) = \dfrac{6}{9}\sqrt{27\cdot 6\cdot 3\cdot 18} = \dfrac{6}{9}\cdot 18\cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.

2. Постройте две биссектрисы треугольника, затем постройте окружность с центром в точке их пересечения и радиусом, равным длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на одну из сторон.

Вариант 5



1. 1) Очевидно, они равны по 2-му признаку.

2) $\angle BB_1A = \angle BB_1E = \angle BMC$, т.к. $MC \parallel B_1E \Rightarrow$
$\Rightarrow$ треугольники подобны по двум углам.

3) По свойству биссектрисы

$\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow 7x{+}8x{=}3{=}AC \Rightarrow x = \dfrac{1}{5} \Rightarrow AB_1{=}B_1E = \dfrac{7}{5}$;

$BE = BA = 7$. $\Delta B_1BE \sim \Delta MBC \Rightarrow \dfrac{MC}{B_1E} = \dfrac{BC}{BE} \Rightarrow$

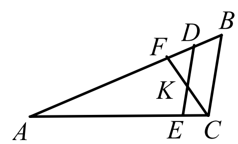
$$\Rightarrow MC = \frac{BC\cdot B_1E}{BE} = \frac{8\cdot\frac{7}{5}}{7} = \frac{8}{5}.$$

4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9\cdot 2\cdot 1\cdot 6} = 3\cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

5) $$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\frac{7}{5}\cdot 1\cdot\frac{8}{5}}{4\sqrt{2\cdot\frac{3}{5}\cdot 1\frac{2}{5}}} = \frac{\frac{7\cdot 8}{15}}{4\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{5}} = \frac{56}{30\sqrt{3}} = \frac{7}{5\sqrt{3}}.$$

2. Разделим одну из сторон на 4 части, затем отложим последовательно от нее эту часть 6 раз. Затем соединим конец новой стороны с вершиной, противолежащей исходной стороне.

Вариант 6



1. 1) $\Delta AED{=}\Delta AFC$ по 2-му признаку $\Rightarrow FD{=}EC \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta FKD = \Delta EKC$ по 2-му признаку.

2) Очевидно, по 2-м углам.

3) По теореме синусов имеем: $\dfrac{FC}{\sin 25^\circ} = \dfrac{AF}{\sin 55^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow FC = \dfrac{4\sin 25^\circ}{\sin 55^\circ}$. Аналогично $AC = \dfrac{AF\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ} = \dfrac{4\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ}$.

4) $\Delta AFC \sim \Delta ACB$, причем $k = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{\sin 55^\circ}{\sin 100^\circ} \Rightarrow P(AFC) = \dfrac{\sin 55^\circ}{\sin 100^\circ}P(ABC)$.

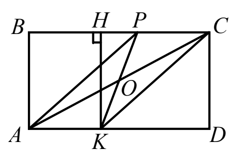
5) $S(ABC)=\left(\frac{\sin 100°}{\sin 55°}\right)^2 S(AFC)=$

$=\left(\frac{\sin 100°}{\sin 55°}\right)^2 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 25°\cdot 4\frac{\sin 100°}{\sin 55°}=8\left(\frac{\sin 100°}{\sin 55°}\right)^2\sin 25°.$

2. Начертите прямоугольный треугольник. Проведите его медианы (достаточно две). Точка их пересечения — искомая.

П-2

Вариант 1



1. 1) $AO = OC$, $\angle BCA = \angle CAD$, $\angle POC=\angle AOK \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta POC = \Delta KOA \Rightarrow PC = AK$, а т.к. $PC \parallel AK$, то $APCK$ — параллелограмм.

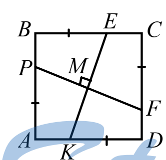
2) $CD=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow S = 4\cdot 5 = 20.$

3) $HK = 5$, $HP = 4 \Rightarrow KP=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ (по теореме Пифагора).

4) По теореме косинусов:

$$\cos\angle AOK=\frac{(6,5)^2+\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-16}{2\cdot 6,5\cdot\frac{\sqrt{41}}{2}};\ \angle AOK\approx 28°13'.$$

Вариант 2



1. 1) Из условия следует, что $EC = FD = AK = BP \Rightarrow$ по теореме Пифагора $PE=EC = FK = PK \Rightarrow \Delta PBE = \Delta ECP = \Delta FDK = \Delta KAP \Rightarrow$

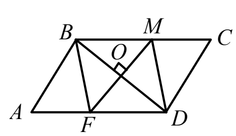
$\Rightarrow PEFK$ — квадрат$\Rightarrow EK\perp PF\Rightarrow PE=\frac{\sqrt{2}}{2}EK\Rightarrow S=PE^2= 50.$

2) Пусть $EC = x$, тогда по теореме Пифагора имеем: $100 = (1-x)^2 + (1 + x)^2$, $100 = 2 + 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = 49\Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 8.$

3) Т.к. $\angle A + \angle M = \pi$, то и $\angle P + \angle M = \pi$ (т.к. сумма всех углов равна 2π) $\Rightarrow$ можно описать окружность.

4) Очевидно, что PK — диаметр $\Rightarrow r=\frac{1}{2}PK=\frac{1}{2}\sqrt{1+49}=\frac{\sqrt{50}}{2}$.

Вариант 3



1) $\Delta BOM = \Delta DOF$ по катету и острому углу $\Rightarrow$ $MO = OF = 3 \Rightarrow \Delta BOF = \Delta DOM$ по 2-м катетам и $\Delta BOF = \Delta BOM$ тоже по 2-м катетам $\Rightarrow BM=MD =$ $= DF = FB \Rightarrow BMDF$ — ромб.

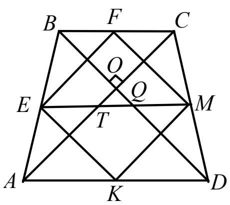
2) Очевидно, радиус равен высоте одного из треугольников, опущенной из прямого угла, тогда $r=\dfrac{BO\cdot OM}{BM}=\dfrac{4\cdot 3}{5}=\dfrac{12}{5}$.

3) $\angle CDF=\text{arctg}\,\dfrac{3}{4}\approx 36°52'$.

4) $AB=\sqrt{100+64-2\cdot 10\cdot 8\cdot\cos\angle CDF}=\sqrt{164-160\cdot\dfrac{4}{5}}=$

$=\sqrt{164-128}=\sqrt{36}=6\Rightarrow P=6+6+10+10=32$.

Вариант 4



1) $\Delta ABC\sim\Delta EBC$, $\Delta BCD\sim\Delta FCM$ по 2-му признаку $\Rightarrow EF\|AC$ и $FM\parallel BD\Rightarrow EF\perp FM$. Аналогично доказывается перпендикулярность других сторон $\Rightarrow EFMK$ — прямоугольник, но $\Delta AEK=\Delta DMK\Rightarrow$ $\Rightarrow EF=FM\Rightarrow EFMK$ — квадрат.

2) $S(EFMK)=100\Rightarrow EF=FM=10\Rightarrow$ из подобия треугольников следует, что $AC=BD=20\Rightarrow$

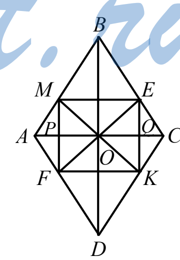
$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 20=200$.

3) Очевидно, $\angle OAD=\angle ODA=45°\Rightarrow CH=AC\cdot\sin 45°=20\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$.

4) $EM=\dfrac{S}{CH}=\dfrac{200}{10\sqrt{2}}=\dfrac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}\Rightarrow ET=QM=\dfrac{10\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow BC=8\sqrt{2}\Rightarrow AD=12\sqrt{2}$ (т.к. $\dfrac{1}{2}(AD+BC)=EM$).

Вариант 5



1) $\Delta MOF=\Delta EOK$ по 2-м сторонам и углу между ними $\Rightarrow MF=EK$, но $MF\parallel EK\Rightarrow MEKF$ — прямоугольник. $\Delta MOP=\Delta FOP=\Delta EOQ$ по гипотенузе и острому углу $\Rightarrow$ $\Rightarrow MP=PF=EQ=QK\Rightarrow PQ\parallel ME\Rightarrow ME\perp BO\Rightarrow ME\perp MF$ (т.к. $BO\parallel MF$) $\Rightarrow MEKF$ — параллелограмм.

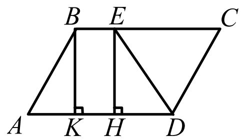
2) Из ΔABO: $MO=\dfrac{AO\cdot BO}{AB}=\dfrac{6\cdot 8}{\sqrt{64+36}}=4{,}8\Rightarrow$

$\Rightarrow MK=FE=9{,}6$.

3) $\angle ABC=2\text{arctg}(6/8)=2\text{arctg}(3/4)\approx 73°44'$.

4) $S(MEKF)=(1/2)\,MK\cdot FE\cdot\sin\angle MOF=(1/2)\,MK\cdot FE\cdot\sin\angle ABC=$ $=(1/2)\cdot 9{,}6\cdot 9{,}6\cdot\sin\angle ABC\approx 44{,}2$.

Вариант 6



1) Т.к. $ED = 5$, то $HD = \sqrt{25-16} = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow BE = AD - AK - HD = 8 - 3 - 3 = 2$.
2) Т.к. $BE + AD = AB + ED$, то в $ABED$ можно вписать окружность.

Т.к. $BK = 4$, то $r = \dfrac{BK}{2} = 2 \Rightarrow S = \pi r^2 = 4\pi$.

3) $\cos\angle BAK = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$ по теореме косинусов:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAK} = \sqrt{25+64-80\cdot\frac{3}{5}} = \sqrt{41}.$$

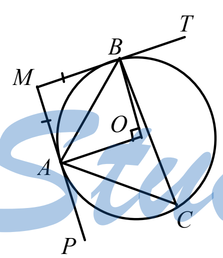
Т.к. $\angle ABC = \pi - \angle BAK$, то $\cos\angle ABC = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow AC = \sqrt{25+64+80\cdot\dfrac{3}{5}} = \sqrt{137}$.

4) $S = BK\cdot AD = 32$. С другой стороны, $S = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle BOC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOC = \arcsin\frac{2BK\cdot AD}{AC\cdot BD} = \arcsin\frac{69}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{137}} \approx 58°39'.$$

П-3

Вариант 1



1) $\angle BCA = 45° \Rightarrow \angle BOA = 90°$;
$\angle MBO = \angle MAO = 90°$, т.к. MT и MP — касательные $\Rightarrow$ $MBOA$ — прямоугольник, но $MB = MA$ (как отрезки касательных) $\Rightarrow$ $MBOA$ — квадрат.
2) Т.к. $MB + MA = 20$, то $MB = MA = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме Пифагора $AB = 10\sqrt{2}$.
3) Пусть $\angle OBC = x$, тогда $\angle OAC = 45° - x$, а $\angle CBT = \dfrac{\pi}{2} - x$,

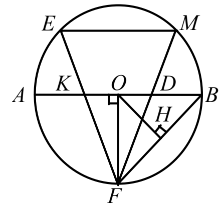
а $\angle BAC = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} - x = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow \angle CBT = \angle BAC$.

4) По теореме косинусов: $BC^2 = 2BO^2(1 - \cos\angle BOC) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\angle BOC = \frac{280^2 - BC^2}{2BO^2} = \frac{200-25}{200} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BOC = \arccos\frac{7}{8} \Rightarrow \angle AOC = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{7}{8} = \frac{3\pi}{2} - \arccos\frac{7}{8}.$$

Вариант 2



1) Пусть r — радиус окружности, тогда по свойству хорд имеем:

$6 \cdot 4 = (r-5)(r+5) \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7.$

2) Из ΔKOF по теореме косинусов имеем:

$KF^2 = KO^2 + OF^2 - 2KO \cdot OF \cdot \cos\angle AOF \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\angle AOF = \frac{KO^2 + OF^2 - KF^2}{2KO \cdot OF} = \frac{2+36}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{38}{70} = \frac{17}{35} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABF = \frac{1}{2}\angle AOF = \frac{1}{2}\arccos\frac{17}{35} \Rightarrow OH = 7 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{17}{35}\right);$$

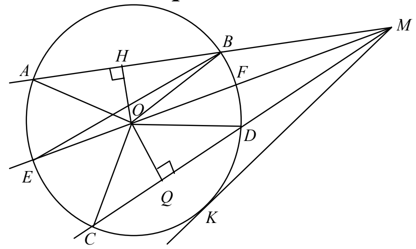
3) Аналогично п.2.

$$\angle FKO = \arccos\frac{KF^2 + KO^2 - OF^2}{2KF \cdot KO} = \arccos\frac{36+25-49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \arccos\frac{12}{60} = \arccos\frac{1}{5}.$$

4) $\Delta EFM \sim \Delta KFO$ по 1-му признаку $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2KO}{EM} = \frac{KF}{EF} = \frac{6}{10} \Rightarrow EM = \frac{2KO \cdot 10}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}.$$

Вариант 3



1) Т.к. $AB = CD$, то $\angle AOB = \angle COD \Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow$

$\Rightarrow OH = OQ \Rightarrow \Delta OHM = \Delta OQM$ по 2-м катетам $\Rightarrow \angle AME = \angle CME.$

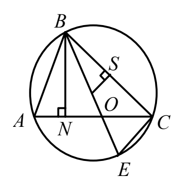
2) Пусть r — радиус окружности, тогда по свойству секущих

$5 \cdot 9 = 3 \cdot (2r + 3) \Rightarrow r = 6.$

3) По тому же свойству $MK^2 = 5 \cdot 9 \Rightarrow MK = 3\sqrt{5}$

4) $\angle AEB = (1/2)\ \angle AOB = \angle HOB = \arcsin(2/6) = \arcsin(1/3) \approx 19°28'.$

Вариант 4



1) $\angle BAC = \angle BEC$, т.к. они вписанные и опираются на одну дугу.

$\angle BNA = \angle BCE = 90° \Rightarrow \angle ABN = \angle EBC.$

2) По теореме Пифагора:

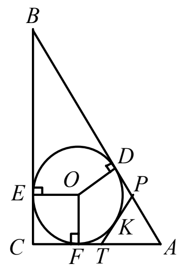
$$BO = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

3) $\Delta ABN \sim \Delta EBC$ по острому углу $\Rightarrow \dfrac{AB}{EB} = \dfrac{BN}{BC} \Rightarrow AB = \dfrac{BN \cdot EB}{BC} = \dfrac{5 \cdot 8}{4\sqrt{3}} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

4) Из теоремы косинусов следует:

$$\angle BOA = \arccos \frac{2BO^2 - AB^2}{2BO^2} = \arccos \frac{32 - \frac{100}{3}}{32} \approx 92°23'.$$

Вариант 5



1) Очевидно $\angle EOF = 90°$, $\angle A = 60° \Rightarrow \angle DOF = 120°$. Аналогично, $\angle B = 30°$, $\angle EOD = 150° \Rightarrow$ углы в отношении $90°:120°:150° = 3:4:5$.

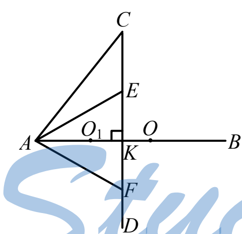
2) Из теоремы Пифагора следует, что $r = 4$.

3) $P(APT) = AP + AT + PT = AP + AT + PK + KT =$
$= AP + AT + P + FT = 2AF = 2(AC - CF) =$

$$= \left(2 \cdot \frac{CO}{\sin 30°} - CF\right) = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{1/2} - 4\right) = 8(2\sqrt{2} - 1).$$

4) $R = \dfrac{AC}{2\sin 30°} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}.$

Вариант 6



1) Очевидно $O_1K = 1$, а $r_1 = 2 \Rightarrow EK = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow AE = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

По свойству прямоугольного треугольника
$CK^2 = AK \cdot KB \Rightarrow CK = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} \Rightarrow$
$\Rightarrow CA = \sqrt{9+15} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

2) $AF = AE = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ по теореме косинусов:

$$\cos\angle AO_1F = \frac{2AO_1^2 - AK^2}{2AO_1^2} = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AO_1F = 120° \Rightarrow \overset{\smile}{AF} = \frac{1}{3} 2\pi AO_1 = \frac{2}{3}\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}.$$

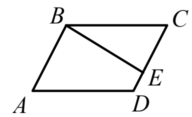
3) $S = \dfrac{\pi AO_1^2}{3} - \dfrac{1}{2} AO_1^2 \sin 120° = \dfrac{\pi}{3} \cdot 4 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

4) Из ΔACE: $\angle AEC = 120°; R = \dfrac{AC}{2\sin\angle AEC} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$.

П-4

Вариант 1

1) Пусть $D(x, y)$, тогда $\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-3 \\ y+2=1 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -1)$.



2) $\overline{EB} = \overline{EC} + \overline{CB} = \frac{2}{3}\overline{DC} + \overline{CB} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AD}$.

3) $\overline{AB}\{1;\ 6\}$, $\overline{AD}\{-3; -3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A = \arccos\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|} = \arccos\frac{-3-18}{3\sqrt{37}\cdot\sqrt{2}} = \arccos\frac{-7}{\sqrt{74}}$.

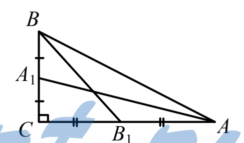
4) Пусть $y = kx + b$ — уравнение прямой AC, тогда

$\begin{cases} 5=-k+b \\ -2=k+b \end{cases}$; $\begin{cases} +3=2b \\ k=-2-b \end{cases}$; $\begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ k=-\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{7x}{2} + \frac{3}{2}$.

Пусть M — середина AC, тогда $M\left(0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Вариант 2



1) $AB\{14; -2\}$, $BC\{-6; 6\}$, $AC\{8; -8\}$;
$\overline{BC}\cdot\overline{AC} = 0 \Rightarrow$ треугольник — прямоугольный.

2) $\overline{AM} = \frac{2}{3}(AA_1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$.

3) $A_1(5; 5)$, $B_1(-2; 6) \Rightarrow \overline{AA_1}\ \{11; -5\}$ и $\overline{BB_1}\ \{-10; -2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle AMB = \frac{AA_1\cdot BB_1}{|AA_1|\cdot|BB_1|} = \frac{-110+10}{\sqrt{121+25}\sqrt{100+4}} = \frac{-100}{\sqrt{146}\sqrt{104}} < 0 \Rightarrow$

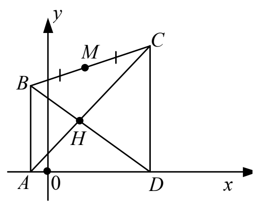
острый угол равен $\arccos\frac{100}{\sqrt{146}\sqrt{104}} \approx 35°45'$.

4) Пусть $y = kx + b$ — уравнение AA_1, тогда $\begin{cases} 5=5k+b \\ 10=-6k+b \end{cases}$; $\begin{cases} -5=11k \\ b=-5k+5 \end{cases}$;

$$\begin{cases} k = \dfrac{-5}{11} \\ b = +\dfrac{25}{11} + \dfrac{55}{11} = +\dfrac{80}{11} \end{cases} \Rightarrow \; y = -\frac{5}{11}x + \frac{80}{11}.$$ Т.к. $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0$, то AB — гипотенуза, тогда (1; 9) — ее центр, а $r = \sqrt{(1+6)^2 + (9-80)^2} = \sqrt{50} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-9)^2 = 50.$

Вариант 3



1) Т.к. M — середина BC, то $M\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{9}{2}\right)$; $AM\left\{\dfrac{5}{2};\ \dfrac{9}{2}\right\}$;

$\overline{AB}\{0;\ 3\}$, $\overline{AD}\{5;\ 0\}$; $\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{AD} + \dfrac{3}{2}\overline{AB}$.

2) Найдем уравнение AC:

$$\begin{cases} 6 = 4k + 6 \\ 0 = -k + b \end{cases};\quad \begin{cases} 6 = 5k \\ b = k \end{cases};\quad \begin{cases} k = \dfrac{6}{5} \\ b = \dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \; y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}.$$

Найдем уравнение BD: $\begin{cases} 3 = -k + 6 \\ 0 = 4k + b \end{cases};\ \begin{cases} 3 = -5k \\ b = 4k \end{cases};\ \begin{cases} k = -\dfrac{3}{5} \\ b = \dfrac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \; y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{12}{5}.$

Найдем точку их пересечения:

$$\begin{cases} 5y = 6x + 6 \\ 5y = -3x + 12 \end{cases};\quad \begin{cases} 9x - 6 = 0 \\ y = \dfrac{6}{5}x + \dfrac{6}{5} \end{cases};\quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{12}{15} + \dfrac{18}{15} \end{cases};\quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2}{3};\ 2\right).$$

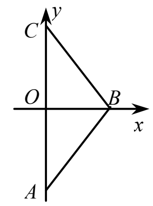
3) $\overline{AH}\left\{\dfrac{5}{3};\ 2\right\} \Rightarrow \overline{AH} = \dfrac{5}{3}\bar{i} + 2\bar{j}$.

4) $\overline{AM}\left\{\dfrac{1}{2};\ \dfrac{9}{2}\right\}$, $\overline{BD}\{5;\ -3\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\overline{AM} \cdot \overline{BD}}{\left|\overline{AM}\right| \cdot \left|\overline{BD}\right|} = \arccos\frac{\dfrac{5}{2} - \dfrac{27}{2}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}} = \arccos\frac{-22}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(ABMD) = \frac{1}{2}\,AM \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}\,\sin\left(\arccos\frac{-22}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}}\right).$$

Вариант 4



1) $M\left(\frac{9}{2};6\right) \Rightarrow CM = \sqrt{36+\frac{33^2}{4}} \approx 18{,}6.$

2) $AC = 24;\ AB = BC = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{27\cdot 12\cdot 12\cdot 3}}{27} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow O(4;\ 0)$ — центр окружности и $(x-4)^2 + y^2 = 16$ — ее уравнение.

3) $\overline{AO}\{4;-12\},\ \overline{BC}\{9;12\} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{AO}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \arccos\frac{36-144}{\sqrt{16+144}\cdot\sqrt{225}} =$

$= \arccos\frac{-108}{4\sqrt{10}\cdot 15} = \arccos\frac{-27}{15\sqrt{10}} = \arccos\frac{-9}{5\sqrt{10}}.$

4) $\overline{OB}\{5;\ 0\},\ \overline{OA}\{-4;\ 12\},\ \overline{OC}\{-4;\ -12\} \Rightarrow \overline{OB} = -\frac{5}{8}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right).$

Вариант 5

1) $AB^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58;\ BC^2 = 7^2 + 3^2 = 58;\ CD^2 = 3^2 + 7^2 = 58;$
$DA^2 = 7^2 + 3^2 = 58 \Rightarrow$ все стороны $\sqrt{58} \Rightarrow ABCD$ — ромб.

2) $\overline{AB}\cdot\overline{AC} + \overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{BC}\cdot\overline{AC} = \left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)\cdot\overline{AC} + \overline{AC}\cdot\overline{BD} =$

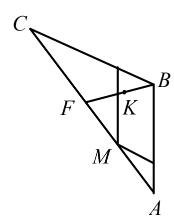
$= \overline{AC}\cdot\overline{AC} = AC^2$ (т.к. $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0$); $AC^2 = 10^2 + 10^2 = 200.$

3) $\angle A = \arccos\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{AB^2} = \arccos\frac{42}{58} = \arccos\frac{21}{29} \Rightarrow \arccos\frac{21}{29}$ и $\left(\pi - \arccos\frac{21}{29}\right).$

4) Т.к. O — середина AC, то $O(3;\ 2)$;

$OC = \frac{1}{2}AC = 5\sqrt{2}$; $BO = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{OC\cdot OB}{BC} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{158} = \frac{20}{\sqrt{58}} \Rightarrow$
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 200/29.$

Вариант 6



1) $\overline{BM} = (1/4)\overline{BC} + (3/4)\overline{BA}$.

2) Пусть F — середина AC, тогда $F\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$, тогда K делит BF в отношении 2:1 считая от точки $B \Rightarrow$
$K\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{2};\ \frac{2-2}{3} + 2\right) \Rightarrow K = \left(\frac{1}{3};\ 2\right).$

3) $\overline{AB}\,\{0;\,3\} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = 3.$ $\overline{AC}\,\{-5;\,6\} \Rightarrow \bar{a} = \alpha\overline{AC}$ и $|\bar{a}| = 3;$

$252^2 + 362^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 = \dfrac{9}{61} \Rightarrow \bar{a}\left\{-\dfrac{15}{\sqrt{61}};\dfrac{18}{\sqrt{61}}\right\}.$

4) $\alpha = \arccos\dfrac{\{1;\,3\}\cdot\overline{AC}}{1\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \arccos\dfrac{-5}{\sqrt{61}} \approx 129°48'.$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

МД-1

Вариант 1

1. Т.к. $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинарны, то $x = -3$, а $y = 0$.
2. $\bar{m}\,\{-3;\,2\}$.
3. $2\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинарны.
4. $(\bar{a}+\bar{b})\{1;\,1\} \Rightarrow (\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = 0$, то искомый угол 90°.
5. $|a - b|$.
6. $\overline{EF}\,\{3;\,-1\}.$ $\left|\overline{EF}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
7. $O(2;\,-2)$.
8. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
9. Высота равна 2, основание — 4 $\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$.
10. $|a| < 2$, т.к. 2 — радиус окружности.

Вариант 2

1. Т.к. $\bar{m}$ и $\bar{n}$ не коллинарны, то $x = 0$, а $y = 5$.
2. $k = 5\bar{i} - 2\bar{i}$.
3. $-2\bar{c} = \bar{m} \Rightarrow \bar{c}$ и $\bar{m}$ — коллинарны.
4. $(\bar{a}-\bar{b})\{1;\,-1\} \Rightarrow (\bar{a}-\bar{b})\cdot\bar{c} = 0$, то искомый угол равен 90°.
5. $|m - n|$.
6. $\overline{EF}\,\{2;\,5\}.$ $\left|\overline{EF}\right| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.
7. $(-1;\,4)$.
8. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$.
9. Высота равна 3, основание — 6 $\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = 9$.

10. **$|m| > 4$, т.к. 4 — радиус окружности. МД-2**

Вариант 1

1. $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 150° \Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2. Т.к. $S = a^2 \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{S}{a^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$.

3. По теореме синусов $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. $R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

5. Т.к. $4^2 + 7^2 < 8^2$, то треугольник — тупоугольный $\Rightarrow$ вне его.

6. Очевидно $180° - 70° = 110°$, т.к. вектор $\overline{b}$ поменял направление.

7.1) $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \frac{1+0}{1\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$ (т.к. $AC \perp BD$); 3) $\overline{AD} \cdot \overline{CB} = -1$

8. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow$ угол тупой

9. $(\overline{BC} - \overline{BA})(\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0$, т.к. $AC \perp BC$

10. Т.к. $\left|\overline{e}\right| = 1$, то $x = \cos\alpha$

Вариант 2

1. Внешний угол при вершине E равен $120^\circ \Rightarrow$ внутренний $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

2. $S = ab\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{S}{ab} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

3. По т. синусов $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

4. $R = \frac{EF}{2\sin\angle H} \Rightarrow EF = 2R\sin\angle H = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

5. $4^2 + 6^2 < 9 \Rightarrow$ треугольник тупоугольный $\Rightarrow$ центр описанной окружности вне его.

6. Очевидно, что $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, т.к. $\overline{m}$ поменял направление.
7. Вероятно, в условии опечатка и имеется ввиду не ромб, а квадрат, т.к. иначе можно вычислить только 2).
Если $ABCD$ – квадрат: 1) 0; 2) 0; 3) 1.
8. $\overline{m} \cdot \overline{n} = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ острый.
9. $(\overline{CD} - \overline{CA})(\overline{BD} - \overline{BC}) = \overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$. **10.** Т.к. $|\overline{e}|$, то $y = \cos\beta$.

МД-3

Вариант 1

1. Угол n-угольника равен $2\left(\frac{180° - \alpha}{2}\right) = 180° - \alpha \Rightarrow$ внешний угол равен α.

2. $160° = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 160n = 180n - 360 \Rightarrow 20n = 360; n = 18$.

3. Это прямоугольный треугольник с катетами R и $R\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

4. Здесь r — радиус окружности, тогда r — сторона 6-угольника, а $2r$ — сторона квадрата $\Rightarrow \frac{1}{2}$. **5.** $S = 12 \cdot \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\frac{360°}{12} = 6R^2\sin 30° = 3R^2$.

6. $l = l_2 - l_1 = 2\pi(R_2 - R_1) \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2\pi}$. **7.** $R = 3 \Rightarrow l = \frac{2\pi R}{3} = 2\pi \Rightarrow r = 1$.

8. Пусть сторона ромба равна a, тогда $S_p = a^2 \sin 30^\circ = \frac{a^2}{2}$, с другой стороны $S_p = 2ar \Rightarrow r = \frac{S}{2a} = \frac{a}{4} \Rightarrow S_k = \frac{\pi a^2}{16} \Rightarrow \frac{S_p}{S_k} = \frac{8}{\pi}$.

9. $\frac{S_к}{S} = \frac{\pi(9-1)}{\pi} = 8$. **10.** $3\pi = \pi R^2 \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow R = 6$.

Вариант 2

1. Внутренний угол равен $180^\circ - \beta \Rightarrow$ его половина
$\frac{180^\circ - \beta}{2} \Rightarrow 180^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - \beta}{2} = \beta$ — искомая дуга.

2. $140^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 148^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ \Rightarrow 360^\circ = 40^\circ n \Rightarrow n = 9$.

3. Если угол между этими сторонами тупой, то

$$S=\frac{1}{2}R^2\sin 90^\circ+\frac{1}{2}R^2\sin 60^\circ-\frac{1}{2}R^2\sin 150^\circ=\frac{1}{2}R^2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})=\frac{R^2}{4}\left(3+\sqrt{3}\right).$$

Если острый, то:

$$S=\frac{1}{2}R^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}R^2\sin 30^\circ-\frac{1}{2}R^2\sin 90^\circ=\frac{1}{2}R^2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-1)=\frac{R^2}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

4. Пусть $2R$ – сторона квадрата, тогда R – радиус окружности $\Rightarrow$ $\sqrt{2R^2(1-\cos 120^\circ)}=\sqrt{3}R$ - сторона треугольника $\Rightarrow$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $S=8\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{8}=4R^2\sin 45^\circ=2\sqrt{2}R^2$. **6.** $\Delta l=2\pi(R+1)-2\pi R=2\pi$.

7. Пусть боковая сторона трапеции равна a, тогда $P = 4a$, а $r=\frac{1}{2}a\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{4}\Rightarrow l=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a\Rightarrow\frac{P}{l}=\frac{8}{\sqrt{3}\pi}$.

9. $\dfrac{S_k}{S_v}=\dfrac{25-4}{25}=\dfrac{21}{25}$. **10.** $\dfrac{\pi r^2}{12}=2\pi\Rightarrow r^2=24\Rightarrow r=2\sqrt{6}$.

МД-4

Вариант 1

1. $a_1 \parallel b_1$, т.к. движение сохраняет углы. **2.** Равнобокая трапеция.
3. $k = 3$, $b = -4$.
4. Да, середина отрезка, соединяющего 2 параллельные прямые.
5. $B(4; 1)\to B_1(2; 1)$.
6. Да, нужно сдвинуть эту сторону вдоль смежной стороны на ее длину.
7. Параллельный перенос должен осуществляться вдоль одной из диагоналей.
8. Выберите две произвольные точки на прямой a и поверните их относительно точки O на 45° против часовой стрелки. Затем через получившиеся точки проведем прямую.
9. Пусть $\angle ACD=\alpha\Rightarrow\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\angle O_1C_1A_1=\alpha\Rightarrow\angle FAD=\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\angle DC_1F=\pi-\alpha\Rightarrow\angle F=10^\circ$, т.к. $\angle AD_1C=80^\circ$.
10. Очевидно при повороте относительно (1; 0) и (5; 0).

Вариант 2

1. Очевидно, он равен α, т.к. движение сохраняет угол.
2. Равносторонний треугольник. **3.** $k = 2$, $b = -1$. **4.** Все $2n$ – угольники.
5. (1;5). **6.** Нет, т.к. стороны треугольника не параллельны.
7. Это параллелограмм, т.к. его стороны попарно параллельны.

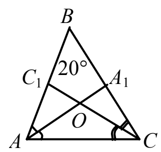
8. Выберите две произвольные точки на прямой b и поверните их вокруг т. O на 60° по часовой стрелке, через их образы проведите прямую – она будет искомой.

9. Т. к. осуществляется поворот на 180°, то острый угол равен 20°.

10. (0;-1) и (0;5).

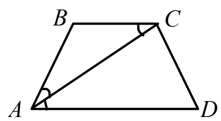
МД-5

Вариант 1



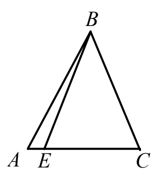
1.
Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, тогда $\alpha + \gamma = 160° \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 80° \Rightarrow \angle AOC = 100°$.

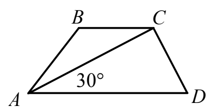


2.
$\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow AB = BC = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ средняя линия равна $\frac{1}{2}(6 + 10) = 8$.

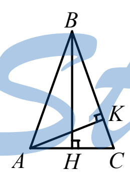


3. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BEC = \beta \Rightarrow$ из ΔEBA: $\alpha + (\beta - \alpha) + (\pi - \gamma) = \pi \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \angle C = \angle B = \angle BEC \Rightarrow BE = 3$, $AB = 5 \Rightarrow$
$\frac{S(ABC)}{S(BEC)} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9}$.

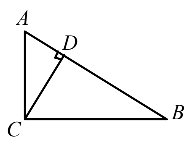


4.

$S(ABD) = S(ACD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 30° = 8$.

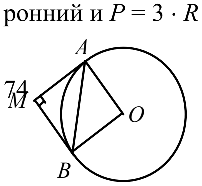


5.
По теореме Пифагора $AB = BC = 5$;
$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12 \Rightarrow AK = \frac{2S}{BC} = \frac{24}{5}$.



6.
$DB = AB - AD = 8 - 2 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot OB} = \sqrt{6 \cdot 2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$.

7. Т.к. центральный угол в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу, получаем, что $\angle AOB = 60° \Rightarrow \Delta AOB$ — равносторонний и $P = 3 \cdot R = 3 \cdot 5 = 15$/

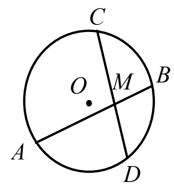


8.

$\angle AMB = 120^0 \Rightarrow \angle AMO = OMB = 60^0$, т.к. $OA \perp MA$ и $OM \perp MB$, то $\angle AOM = \angle MOB = 30^0 \Rightarrow$ т.к. $MO = 10$, то $AM = BM = 5 \Rightarrow MA + BM = 10$.

9. По т. Пифагора $BE = 4 \Rightarrow \sin\angle BAM = \frac{4}{5} \Rightarrow S(ABM) =$

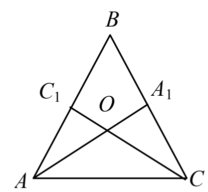
$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM \cdot \sin\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 10$.



10.
По свойству хорд: $AM \cdot MB = CM \cdot MD \Rightarrow MB = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 12$, а $AD = 9 \Rightarrow AB$ ближе к центру, т.к. она длиннее.

Вариант 2

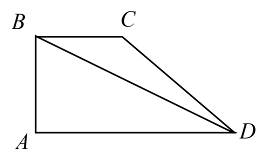
1.



Т.к. $\angle AOC = 140^\circ$, то

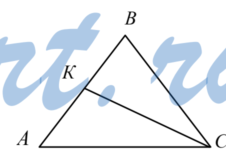
$\frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 40^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C = 80^\circ \Rightarrow \angle B = 100^\circ$.

2.



Т.к. $BC \parallel AD$, то
$\angle CBD = \angle BDA = \angle CDA \Rightarrow BC = CD = 5$.
$CH \perp AD$. По теореме Пифагора $HD = 3 \Rightarrow$
средняя линия равна
$\frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(5 + (5 + 3)) = \frac{13}{2}$.

3.



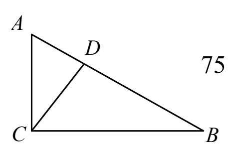
$\angle BAC = \angle BCK$, $\angle B$ - общий $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BAC \sim \Delta BCK \Rightarrow$
$\frac{P(BAC)}{P(BCK)} = \frac{BC}{BK} = \frac{7}{4}$.

4. $S = \frac{1}{2} BD \cdot AD \cdot \sin\angle BDA = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 15$.

5. $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

По т. Пифагора сторона ромба равна: $5 \Rightarrow S = 5 \cdot h \Rightarrow h = \frac{S}{5} = \frac{24}{5}$.

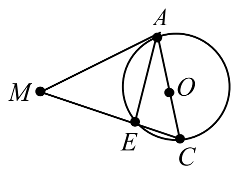
6.



$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 4$.

7. $\angle AMB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB = \dfrac{R}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2}$.

8. $MA = MB$, ΔAMB — прямоугольный, значит, $MA = AB \cdot \cos\angle MAB = 10 \cdot \cos 45^\circ = 5\sqrt{2}$. ΔMAO — прямоугольныйб т.к. OA — радиус, проведенный в точку касания. Получаем, что $MAOB$ — квадрат и $MO = MA \cdot \sqrt{2} = 10$.



9. $OA \perp MA$, как радиус проведенный в точук касания $\Rightarrow \Delta MAC$ — прямоугольник $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $MC = \sqrt{MA^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Вписанный треугольник, опирающийся на диаметр является прямоугольным, значит, ΔAEC — прямоугольный, AE — высота

$\Delta MAC \Rightarrow S = \dfrac{1}{2} MC \cdot AE = \dfrac{1}{2} MA \cdot AC \Rightarrow AE = \dfrac{MA \cdot AC}{MC} = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13}$.

10. $\Delta CMA \sim \Delta BMD \Rightarrow \dfrac{CM}{BM} = \dfrac{AM}{MD} \Rightarrow MD = \dfrac{AM \cdot BM}{CM} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = CM + MD = 14$; $AB = AM + MB = 13 \Rightarrow$ AB — расположена дальше от центра.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1

Вариант 1

1.1) $\overline{AB}\{1;\ 6\} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{i} + 6\overline{j}$.

2) $D\{2;\ 12\} \Rightarrow \overline{CD} = 2\overline{AB} \Rightarrow CD \parallel AB.$ 3) $x = 1$.

2.1) $\overline{AB}\{4;\ 0\}$, $\overline{CB}\{-2;\ 3\}$, $\overline{CA}\{-2;\ -3\} \Rightarrow$ при этом $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{13}$ и $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{13} \Rightarrow BC = CA \Rightarrow \angle A = \angle B.$

2) $\left|\overline{AB}\right| = 4$ $S(ABC) = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} =$

$= \sqrt{(2 + \sqrt{13})(\sqrt{13} - 2) \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{13 - 4} = 2 \cdot 3 = 6;$ $CD = \dfrac{2S}{AB} = \dfrac{2 \cdot 6}{4} = 3.$

3. Подставим $y = -2$ в уравнение окружности:

$(x-2)^2+1=1$, $(x-2)^2=0 \Rightarrow$ единственную.

4. Пусть $\bar{c}=k\bar{a}+m\bar{b}$, тогда $\begin{cases}6=-4k+m\\2=3k-4m\end{cases}$; $\begin{cases}m=6+4k\\2=3k-24-16k\end{cases}$;

$\begin{cases}k=-2\\m=-2\end{cases} \Rightarrow \bar{c}=-2(\bar{a}+\bar{b})$.

Вариант 2

1. $\overline{AB}=2\bar{i}-3\bar{j}$;

1) Пусть $A(x, y)$, тогда $\begin{cases}-1-x=2\\4-y=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-3\\y=7\end{cases} \Rightarrow A(-3;\ 7)$.

2) Пусть M — середина AB, тогда $M\left(-2;\ \frac{11}{2}\right)$.

3) Пусть $y=kx+b$ — уравнение AB, тогда

$\begin{cases}4=-n+b\\7=-3n+b\end{cases}$; $\begin{cases}b=4+k\\3=-2k\end{cases}$; $\begin{cases}k=-\frac{3}{2}\\b=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$.

2. $AB=\sqrt{(2+3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$;

$BC=\sqrt{(-1-2)^2+(a-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+10}=\sqrt{34} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3-2a+10=34 \Rightarrow 2a^2-2a-24=0 \Rightarrow D_1=1+24=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=1+5=6$, $a_2=1-5=-4$. Ответ: 6; –4.

3. Т.к. $6>5$, то $(x-11)^2+y^2=36$.

4. Т.к. $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$, то $\bar{a}\ \{-x;\ 2x\}$, тогда

$\sqrt{x^2+4x}=x\sqrt{5}=\sqrt{3^2+4^2}=5 \Rightarrow x=\sqrt{5} \Rightarrow \bar{a}\{-\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}\}$.

Вариант 3

1. E (-1;4), M (2;3), F (1;-3), K (4;4). 1) $\overline{EM}=3\bar{i}-7\bar{j}$.

2) $\overline{FK}=3\bar{i}+7\bar{j} \Rightarrow \overline{FK}$ не параллелен $\overline{EM} \Rightarrow$ пересекает.

3) $y=kx+b$, имеем: $\begin{cases}-3=2x+b\\-3=k+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=0\\b=-3\end{cases} \Rightarrow y=-3$.

2. 1) $D(3;\ -1)$, т.к. D — середина DC.

2) $\overline{AD}\ \{3;\ -2\}$, $\overline{BC}\ \{4;\ 6\} \Rightarrow \overline{AD}\cdot\overline{BC}=12-12=0 \Rightarrow AD\perp BC$.

3. Центр окружности – (-2;1). Радиус – 2 $\Rightarrow$ две точки.

4. $\bar{m}\{-4;5\}, \bar{n}\{-7;1\}, \bar{l}\{6;8\}$.

$\bar{l} = \alpha\bar{m} + \beta\bar{n}$; $\begin{cases} 6 = -4\alpha - 7\beta \\ 8 = 5\alpha + \beta \end{cases}$; $\begin{cases} \beta = 8 - 5\alpha \\ 6 = -4\alpha - 56 + 35\alpha \end{cases}$; $\begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{l} = 2\bar{m} - 2\bar{n}$.

Вариант 4

1. $\overline{EF} = 6\bar{i} - 6\bar{j}$. 1) E (-2;1) $\Rightarrow$ F (4;-5). 2) $\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1-5}{2}\right) = (1; -2)$.

3) $y = kx + b$; $\begin{cases} 1 = -2k + b \\ -5 = 4k + b \end{cases}$; $\begin{cases} b = 1 + 2k \\ -5 = 4k + 1 + 2k \end{cases}$; $\begin{cases} k = -1 \\ b - 1 \end{cases} \Rightarrow y = -x - 1$.

2. $(m-4)^2 + (3-1)^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2$.

$m^2 - 8m + 16 + 4 = 4 + 9$, $m^2 - 8m + 7 = 0, m = 7$ или $m = 1$.

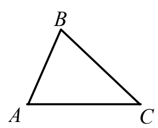
3. Т. к. центр имеет отрицательную ординату, то O (-6;0) $\Rightarrow x^2 + (y+6)^2 = 16$.

4. Т.к. $\bar{m} \downarrow\uparrow \bar{b}$, то $\bar{m}\{2x; -4x\} \Rightarrow \sqrt{4x^2 + 16x^2} = 2x\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

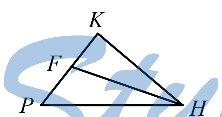
$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \bar{m}\left\{2\sqrt{\frac{2}{5}}; -4\sqrt{\frac{2}{5}}\right\}$.

К-2

Вариант 1



1. $\angle B = 180° - 75° - 40° = 65° \Rightarrow$ по теореме синусов $\frac{BC}{\sin 40°} = \frac{AB}{\sin 75°} = \frac{AC}{\sin 65°} \Rightarrow AB = \frac{BC \sin 75°}{\sin 40°} = \frac{17 \sin 75°}{\sin 40°}$ и $AC = \frac{17 \sin 65°}{\sin 40°}$; $R = \frac{BC}{2\sin 40°} = \frac{17}{2\sin 40°}$.



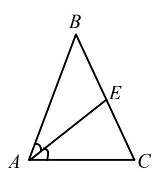
2. Наверное, имеется ввиду медиана HF, а не NF, потому что в ΔPKH нет медианы NF.

т.к. HF — медиана, то $FE = 3 \Rightarrow$ по теореме косинусов:

$HF = \sqrt{FK^2 + KH^2 - 2FK \cdot KH \cos 100°} = \sqrt{34 - 30\cos 100°}$.

Т.к. $PF = \frac{1}{2}PK$, то $S(PFH) = \frac{1}{2}S(PKH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 100° = \frac{15}{2}\sin 100°$.

3.



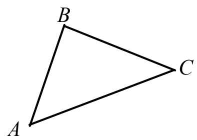
$\angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle AEC = \pi - 3\alpha \Rightarrow \angle BEA = 3\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме синусов: $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin 3\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB{=}BC{=}\dfrac{a\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow S=\dfrac{1}{2}AB^2\sin 4\alpha=\dfrac{a^2\sin 23\alpha\cdot\sin 4\alpha}{2\sin^2\alpha}$.

Вариант 2

1.



По теореме косинусов:

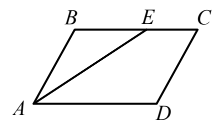
$AC=\sqrt{16+25-2\cos 110^\circ}=\sqrt{41-40\cos 110^\circ}$.

По теореме синусов: $\dfrac{5}{\sin\angle A}=\dfrac{AC}{\sin 110^\circ}\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A=\arcsin\dfrac{5\sin 110^\circ}{AC}=\arcsin\dfrac{5\sin 110^\circ}{\sqrt{41-40\cos 110^\circ}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C=70-\arcsin\dfrac{5\sin 110^\circ}{\sqrt{41-40\cos 110^\circ}}$.

2. $\angle BAD=180^\circ-110^\circ=70^\circ\Rightarrow\angle BAE=40^\circ\Rightarrow$

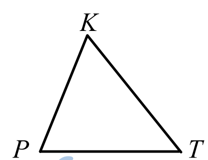


по теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin 30^\circ}=\dfrac{BE}{\sin 40^\circ}\Rightarrow$

$\Rightarrow BE=\dfrac{AB\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sin 40^\circ\Rightarrow BC=20\sin 40^\circ\Rightarrow$

$\Rightarrow S=5\cdot 20\sin 40^\circ\sin 110^\circ=100\sin 40^\circ\sin 110^\circ$. $R=\dfrac{AB}{\sin 30^\circ}=DB=5$.

3.



Имеем: $\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}PK\cdot PT\sin\alpha \\ S=\dfrac{1}{2}PK\cdot KT\cdot\sin(\alpha+\beta)\Rightarrow \\ KT\sin\beta=PK\sin\alpha \end{cases}$

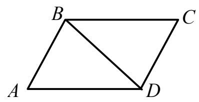
$S=\dfrac{1}{2}PK\cdot\dfrac{PK\sin\alpha}{\sin\beta}\sin(\alpha+\beta)\Rightarrow PK=\sqrt{\dfrac{2S\sin\beta}{\sin\alpha(\sin(\alpha+\beta))}}$.

Вариант 3

1. $\angle B=180^\circ-50^\circ-20^\circ=110^\circ$. $R=\dfrac{AC}{2\sin\angle B}=\dfrac{15}{2\sin 10^\circ}$.

$BC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle A}{\sin\angle B}=\dfrac{15\cdot\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ}$. $AB=\dfrac{AC\cdot\sin\angle C}{\sin\angle B}=\dfrac{15\cdot\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}$.

2.

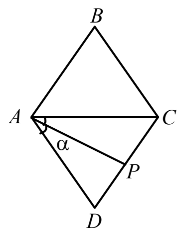


$\angle CBD = \angle BDC = \arcsin \dfrac{BD^2 + AD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \arccos \dfrac{36 + 25 - 16}{2 \cdot 65} =$

$= \arccos \dfrac{45}{60} = \arccos \dfrac{3}{4}$;

$S = 2S(ABD) = 2 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= 2\sqrt{\dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5} = \dfrac{15}{2}\sqrt{7}$.



3. $\angle ACD = \alpha \Rightarrow \angle ADC = \pi - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APD = \pi - \dfrac{\alpha}{2} - (\pi - 2\alpha) = \dfrac{3\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме синусов: $\dfrac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \dfrac{AD}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \dfrac{a \sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow S = AD^2 \sin 2\alpha = \dfrac{a^2 \sin^2 \frac{3\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin 2\alpha.$

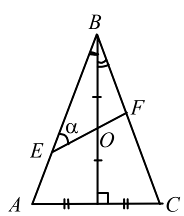
Вариант 4

1. По теореме косинусов: $MP = \sqrt{29 - 20\cos 40^\circ}$.
По теореме синусов:

$\dfrac{PK}{\sin \angle M} = \dfrac{MP}{\sin \angle K} \Rightarrow \sin \angle M = \dfrac{PK \sin \angle K}{MP} = \dfrac{2\sin 40^\circ}{\sqrt{29 - 20\cos 40^\circ}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle P = 160^\circ - \arcsin \dfrac{2\sin 40^\circ}{\sqrt{29 - 20\cos 40^\circ}}$.

2. $\angle BAC = \angle BCA = 65° \Rightarrow \angle B = 50° \Rightarrow \angle BEK = 110° \Rightarrow$



$\Rightarrow$ по теореме синусов

$EK = \dfrac{5\sin 50°}{\sin 20°}$, $BE = \dfrac{5\sin 110°}{\sin 20°} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \dfrac{10\sin 110°}{\sin 20°}$ и $R = \dfrac{AB}{2\sin 65°} = \dfrac{10\sin 110°}{2\sin 20° \sin 65°}$

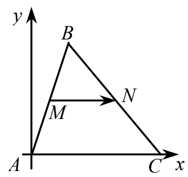
$S = \dfrac{1}{2} EB \cdot BK \cdot \sin 50° = \dfrac{25\sin 110°}{2 \cdot \sin 20°} \sin 50°.$

3. По теореме синусов: $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin(\alpha + \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{abc}{4R} = 2R\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) \Rightarrow\ R = \dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta}\sin\alpha+\beta$.

К-3

Вариант 1



1. По теореме косинусов:

$AC = \sqrt{2\cdot16(1-\cos120°)} = 4\sqrt{2(1+\cos60°)} =$

$= 4\sqrt{2\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)} = 4\sqrt{3}\ \Rightarrow BH\perp AC$, тогда

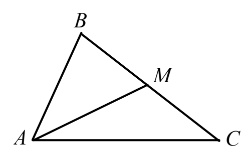
$BH = AB\cdot\cos30° = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ тогда выберем систему координат так, чтобы $A(0;0)$, $C(4\sqrt{3};0)$, $B(2\sqrt{3}\ ;2\sqrt{3}\ )$, тогда

1) $\overline{BA}\left\{-2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right\}$, $\overline{BC}\left\{2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right\}\ \Rightarrow\ \overline{BA}\cdot\overline{AC} = -8$;

2) $\overline{BA}\left\{-2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right\}$, $\overline{AC}\left\{4\sqrt{3};0\right\}\ \Rightarrow\ \overline{BA}\cdot\overline{BC} = -24$;

3) $\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{AC}\ \Rightarrow MN\left\{2\sqrt{3};0\right\}\ \Rightarrow\ \overline{MN}\cdot\overline{AC} = 24$.

2. 1) Т.к. M — середина BC, то $M(-2;\,4) \Rightarrow\ \overline{AM}\ \{-2;\,0\}$,



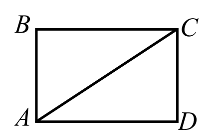
$\overline{AC}\ \{-1;\,-1\} \Rightarrow \angle MAC = \arccos\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{DC}\right|} =$

$= \arccos\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \arccos = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{AB}\cdot\overline{CA} = \overline{PB}(\overline{BC}\cdot\overline{CP}) = \overline{AB}\cdot\overline{BA} = -\overline{AB^2} = -(3^2 + (5-4)^2) = -10$.

3. Т.к. $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\ \{3x;\,x\} \Rightarrow 10 = 9x^2 + x^2 \Rightarrow x = \pm1 \Rightarrow a_1\{3;\,1\}$; $a_2\{-3;\,-1\}$, составляет с Ox тупой угол, а $\overline{a_1}$ — острый угол. Ответ: $\{3;\,1\}$.

Вариант 2



1. $AD = AC\cdot\sin60° = 3\sqrt{3}$, $CD = 6\sin60° = 3$,
тогда выберем систему координат так, чтобы $A(0;\,0)$, $B(0;\,3)$, $D(3\sqrt{3}\ ;\,0)$, $C(3\sqrt{3}\ ;\,3)$, тогда

1) $\overline{CA}\left\{-3\sqrt{3};-3\right\}$, $\overline{CP}\{0;-3\}\ \Rightarrow\ \overline{CA}\cdot\overline{CP} = 9$;

2) $\overline{AD}\left\{3\sqrt{3};0\right\}\ \Rightarrow\ \overline{AD}\cdot\overline{CA} = -27$; 3) $\overline{BC}\left\{3\sqrt{3};0\right\}$, $\overline{DA}\left\{-3\sqrt{3};0\right\} = -27$.

2. A (-1;4), B (1;-2), C (0;4), D (2;2).

1) E (0;1), F (1;-1) $\Rightarrow\ \overline{EF}\{1;-2\}, \overline{CD}\{2;6\}$.

$$\cos\angle(\overline{EF};\overline{CD})=\frac{\overline{EF}-\overline{CD}}{|\overline{EF}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{2-16}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}}=\frac{-14}{5\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=-\frac{14\sqrt{2}}{20}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\angle(\overline{EF},\overline{CD})=\arccos(-\frac{7\sqrt{2}}{10})\Rightarrow$ острый. Угол равен $\pi-\arccos(-\frac{7\sqrt{2}}{10})$.

2) $\overline{BC}\{-1;-2\},\overline{BD}\{0;4\}$.

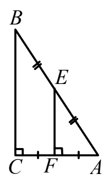
$\overline{CD}\cdot\overline{BC}-\overline{CD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}(\overline{BC}-\overline{BD})=\overline{CD}\cdot\overline{DC}=-\overline{CD}^2=-40$.

3. $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}=$

$=\frac{1}{2}\left(\overline{BC}(\overline{AB}+\overline{AC})+\overline{CA}(\overline{BA}+\overline{BC})+\overline{AB}(\overline{CA}+\overline{CB})\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\overline{BC}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{AC}+\overline{AC}\cdot\overline{AB}-\overline{AB}\cdot\overline{BC}-\overline{AC}\cdot\overline{AC}-\overline{AB}\cdot\overline{BC}\right)=0$.

Вариант 3



1. $AC = 4$, $BC = 4\cdot\cos 30° = 2\sqrt{3}$, тогда выберем систему координат так, чтобы: $C(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 2\sqrt{3})$, тогда $E(1;\ \sqrt{3})$, $F(1;\ 0)$.

1) $\overline{BA}\left\{2;-2\sqrt{3}\right\}$, $\overline{BC}\left\{0;-2\sqrt{3}\right\}\ \Rightarrow\ \overline{BA}\cdot\overline{BC}=12$;

2) $\overline{AC}\{-2;0\}\ \Rightarrow\ \overline{BA}\cdot\overline{AC}=-4$; 3) $\overline{EF}\left\{0;-\sqrt{3}\right\}\ \Rightarrow\ \overline{EF}\cdot\overline{BC}=6$.

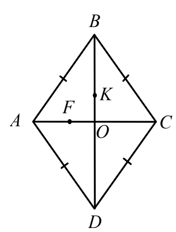
2. 1) $F\ (1;3)\Rightarrow\ \overline{CF}\{0;6\},\overline{AC}\{2;-7\}$.

$\cos\angle(\overline{AC};\overline{FC})=\frac{\overline{AC}-\overline{FC}}{|\overline{AC}|\cdot|\overline{FC}|}=\frac{-42}{6\cdot\sqrt{55}}<0\Rightarrow\ \angle(\overline{AC},\overline{FC})=\pi-\arccos(-\frac{7}{\sqrt{55}})$;

2) $\overline{CF}\cdot\overline{FA}-\overline{FC}\cdot\overline{AC}=\overline{CF}(\overline{FA}+\overline{AC})=\overline{CF}\cdot\overline{FC}=-\overline{CF}^2=-36$.

3. Т.к. $\overline{m}\perp\overline{k}$ и угол между $\overline{m}$ и Oy тупой, то $\overline{m}\{\alpha;2\alpha\}$, где $\alpha<0\Rightarrow 5\alpha^2=16\cdot 5\Rightarrow\alpha^2=16\Rightarrow\alpha=-4\Rightarrow\overline{m}\{-4;-8\}$.

Вариант 4



1. Из ΔAOB: $CB = 3$, $AO=3\sqrt{3}$, тогда выберем систему координат так, чтобы $A(0;\ 3\sqrt{3})$, $C(0;\ -3\sqrt{3})$, $B(3;\ 0)$, $D(-3;\ 0)$, тогда:

1) $\overline{AB}\left\{3;-3\sqrt{3}\right\}$, $\overline{PC}\left\{0;-6\sqrt{3}\right\}\ \Rightarrow\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=54$;

2) $\overline{AD}\left\{-3;-3\sqrt{3}\right\}$, $\overline{DB}\{6;0\}\ \Rightarrow\ \overline{AP}\cdot\overline{DB}=-18$;

3) $\left(\overline{PB}+\overline{AP}\right)\left(\overline{PB}-\overline{AD}\right)=\overline{PB^2}-\overline{AD^2}=36-36=0$.

2. $\overline{EK}\ \{4;\ 3\}$. $\overline{PM}\ \{-6;\ a-1\}$, т.к. $\overline{EK}\perp\overline{PM}$, то
$-24+3a-3=0 \Rightarrow a=9 \Rightarrow P(-4;\ 9)$. Далее см. Вариант 1.

3. Выберем систему координат так, чтобы $A(0;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ b)$, $D(a;\ 0)$, $M(x;\ y)$, тогда $\overline{MP}\ \{x;\ y\}$. $\overline{MC}\ \{x-a;\ y-b\}$. $\overline{MB}\ \{x;\ y-b\}$, $\overline{MD}\ \{x-a,\ y\}$, тогда $\overline{MP}\cdot\overline{MC}=x(x-a)+y(y-b)=x^2-ax+y^2-yb$;
$\overline{MB}\cdot\overline{MD}=x(x-a)+y(y-b) \Rightarrow \overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$.

К-4

Вариант 1

1. $R=\dfrac{4\pi}{2\pi}=2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow S_{ш}=6\cdot a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$;

$r=a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{к}=\pi(R^2-r^2)=\pi(4-3)=\pi$.

2. По теореме Пифагора $R=5 \Rightarrow \overset{\smile}{AB}=\dfrac{1}{4}2\pi R=\dfrac{5}{2}\pi$; $S=\dfrac{1}{4}\pi R^2=\dfrac{25\pi}{4}$.

3. По теореме косинусов: $AC=\sqrt{2R^2(1-\cos 120°)}=R\sqrt{2(1+\cos 60°)}=\sqrt{3}R$;

$AB=\sqrt{2R^2(1-\cos 60°)}=R \Rightarrow$

$\Rightarrow S=\pi R^2-\dfrac{1}{3}\pi R^2-\dfrac{1}{6}\pi R^2+R^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2}R^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=R^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Пусть l_1, l_2, ..., l_n — длины перпендикуляров, тогда
$S=\dfrac{1}{2}a(l_1+...+l_n)$, с другой стороны $S=\dfrac{1}{2}nar_n \Rightarrow l_1+...+l_n=nr$. Ч.т.д.

Вариант 2

1. . Радиус вписанной окружности равен 4 $\Rightarrow$ радиус описанной равен 8
$\Rightarrow S=\pi(8^2-4^2)=48\pi$. $S_{тр}=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\sin 120^\circ=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 64\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=48\sqrt{3}$.

2. Т.к. дуга равна 60°, то радиус равен 6 $\Rightarrow l=\dfrac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot 6=2\pi$,

а $S=\dfrac{1}{6}\pi 6^2=6\pi$.

3. $S=\pi R^2-\dfrac{1}{2}\pi R^2-2\cdot\dfrac{1}{2}R^2=\dfrac{1}{2}\pi R^2-R^2$.

4. Пусть сторона восьмиугольника равна a, тогда $DE=a$.

$\angle A_2A_3A_4 = \frac{180(8-2)}{8} = \frac{180\cdot 6}{8} = 45\cdot 3 = 135° \Rightarrow$

$\Rightarrow EF = \sqrt{2a^2(1-\cos(360°-90°-90°-135°))} = a\sqrt{2(1-\cos 45°)} =$

$= a\sqrt{2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = a\sqrt{2-\sqrt{2}} \neq DE \Rightarrow$ многоугольник неправильный.

Примечание: если бы квадраты были построены как шестиугольники, то неправильный 12-угольник был бы правильным.

Вариант 3

1. Радиус большей окружности равен 4 $\Rightarrow$ радиус меньшей равен $2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ длина стороны равна $4\sqrt{2} \Rightarrow S_{кв} = 32$, а $S = \pi(16-8) = 8\pi$.

2. По теореме косинусов: $144 = 2R^2(1-\cos 120^\circ)$;

$144 = 2R^2\frac{3}{2} \Rightarrow R^2 = 48 \Rightarrow R = 4\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{1}{3}2\pi 4\sqrt{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$, а $S = \frac{1}{3}\pi 48 = 16\pi$.

3. $S = \pi R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - 2\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

4. Рассмотрим ΔBCO, т.к. $AC \perp BO$, $S(ABCO) = BO\cdot AC = R\cdot a_n$,
но $S_{2n} = nS(ABCO) = (na_n/2)R$.

Вариант 4

1. По теореме синусов: $R = \frac{4}{2\sin 60^\circ} = \frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$;

$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}4^2}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = 20\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$, а

$S_{кольца} = \pi\left(\frac{48}{9} - \frac{12}{9}\right) = \pi\frac{36}{9} = 4\pi$.

2. $(1/6)2\pi r = 2\pi \Rightarrow r = 6 \Rightarrow$ длина хорды тоже равна 6. $S = (1/6)2\pi r^2 6\pi$.

3. $S = \pi R^2 - (1/2)\pi R^2 - R^2 = (1/2)\pi R^2 - R^2$.

4. $\angle A_1AB_1 = \angle B_1BC_1 = \angle C_1CD_1 = \angle D_1DE_1 = \angle E_1FF_1 = \angle F_1FD_1$, как внешние углы правильного шестиугольника. $A_1A = B_1B = C_1C = F_1F =$
$= D_1D = E_1E$ по условию $\Rightarrow \Delta A_1AB_1 = \Delta B_1BC_1 = \Delta C_1CD_1 = \Delta D_1DE_1 =$
$= \Delta E_1EF_1 = \Delta F_1FA_1$ по 1-му признаку $\Rightarrow A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 =$
$= E_1F_1 = F_1A_1 \Rightarrow A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник.

К-5

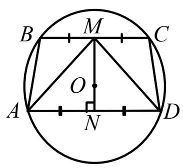
Вариант 1

1.

1) Перенесите точки B, C и D на вектор $\overrightarrow{AM}$. Пусть они переходят в точки B_1, C_1, D_1, тогда $B_1C_1D_1M$ — искомый квадрат.

2) Поверните точки A и B вокруг точки C на 10° по часовой стрелке. Пусть они переходят в точки A_1, B_1, тогда ΔA_1CB_1 — искомый.

2. Пусть это углы $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$, тогда необходимо и достаточно, чтобы $\overline{BA} \uparrow\uparrow \overline{B_1A_1}$ и $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{B_1C_1}$.



3. $ABCD$ — равнобокая трапеция $\Rightarrow \Delta ABM =$ $= \Delta DCM \Rightarrow AM = MD \Rightarrow \Delta AMN = \Delta DMN \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle MNA = \angle MND = 90° \Rightarrow BMN = 90° \Rightarrow MN$ — ось симметрии окружности $\Rightarrow$ проходит через центр.

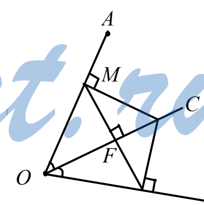
4. Пусть O — искомая точка. Тогда $AO = OC$, $OB = OD$, $\angle AOC = \angle BOD$. Пусть $OF \perp AB$ и $OF = OE$, тогда из $\Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow OE \perp CD$ и $OE = OF$. $\angle FOB = \angle COE \Rightarrow BF = CE$, но $AF = CE$ и $BF = ED \Rightarrow$ $\Rightarrow AF = FB = CE = ED \Rightarrow OF$ и OE — серединные перпендикуляры.

Вариант 2

1. 1) Перенесите точки B, C, и D на вектор $\overline{AM}$, пусть при этом они переходят в точки B_1, C_1, и D_1, тогда $MB_1C_1D_1$ – искомый.

2) Поверните точки B и A вокруг центра C на 60° против часовой стрелки, пусть при этом они переходят в точки A_1, и B_1, тогда ΔA_1B_1C - искомый, а угол между АВ и A_1B_1 равен, очевидно, 60°.

2. $\Delta OMF = \Delta ONF \Rightarrow MF = FN \Rightarrow M$ и N — симметричны относительно OC.



3. $\overline{OA}\ \{-5;\,3\}; \overline{OB}\ \{3;5\} \Rightarrow \left|\overline{AO}\right| = \left|\overline{BO}\right|$ и $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow AO \perp BO \Rightarrow B$ может быть получена из A поворотом вокруг точки O на 90°.

4. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$ с основанием $A_1C_1 \in a$, затем проведите $b_1 \| a$ так, чтобы $B \in b_1$. Пусть $b_1 \cap b = D$. Перенесите $\Delta P_1B_1C_1$ на вектор $\overline{B_1D}$.

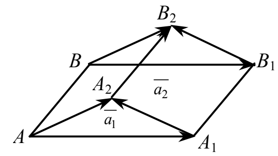
Вариант 3

1. 1)Перенесите точки A, B, C, и D на вектор $\overline{MD}$, пусть при этом они переходят в точки A_1, B_1, C_1, и D_1, тогда $A_1B_1C_1D$ – искомая.

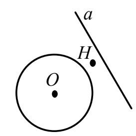
2) Поверните некоторую точку прямоугольника на 90° вокруг точки A по часовой стрелке и соедините полученные точки . Т.к. поворот осуществлялся на 90°, то $\angle(BD, B_1D_1) = 90°$.

2. Стороны должны быть противоположно направлены, а величины равны.

3. Пусть $AB \to A_1B_1$ параллельным переносом на вектор $\overline{a_1}$, а $\overline{A_1B_1} \to \overline{A_2B_2}$ параллельным переносом на $\overline{a_2}$, тогда $\overline{AB} \to \overline{A_2B_2}$ параллельным переносом на вектор $\overline{a_1} + \overline{a_2}$.



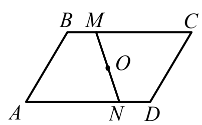
4. Поверните прямую a на 60°, тогда точки пересечения образа прямой с окружностью a их прообраза на прямой a являются искомыми.



Вариант 4

1. 1) Перенесите вершины трапеции на вектор $\overline{PA}$, затем их образы соедините.

2) Поверните вершины трапеции вокруг середины AC на 60° по часовой стрелке, а затем соедините их образы. Угол между AB и A_1B_1 равен, очевидно, 60° .



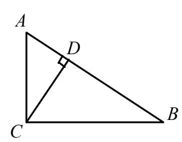
2. Очевидно, что $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $\angle BMN = \angle MND$, $\angle MNA = \angle NMC \Rightarrow$ фигуры как минимум подобны, но $AB = CD$ по свойствам параллелограмма $\Rightarrow$ фигуры равны.

3. В условии опечатка: либо в координатах точки, либо в угле поворота. Если угол равен 180° , то все очевидно.

4. Пусть $a \cap c = M$, $b \cap d = N \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ — искомый вектор.

К-6

Вариант 1



1. 1) $\angle A$ — общий, оба треугольника — прямоугольные $\Rightarrow$ они подобны.

По теореме Пифагора: $AD = \sqrt{(3-2{,}4)(3+2{,}4)} = \sqrt{0{,}6 \cdot 5{,}4} =$

$= \dfrac{1}{10}\sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = \dfrac{6 \cdot 3}{10} = 1{,}8$,

т.к. $CD^2 = AD \cdot DB$, то $DB = \dfrac{CD^2}{AD} = \dfrac{5{,}76}{1{,}8} = \dfrac{0{,}96}{0{,}3} = 3{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AD + DB = 5 \Rightarrow CB = 4 \Rightarrow S = (1/2) \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

2) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{6}{6} = 1 \Rightarrow S_к = \pi r^2 = \pi$.

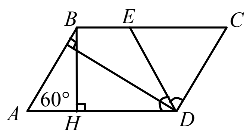
3) R_{ADC} =(3/2), R_{CDB} =(4/2) = 2 (т.к. треугольники прямоугольные) ⇒

$\Rightarrow \dfrac{R_{ADC}}{R_{CDB}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$.

4) $\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD} = \overline{CB} + \dfrac{3,2}{5}\overline{BA} = \overline{CB} + \dfrac{6,4}{10}(\overline{CA} - \overline{CB}) = 0,36\overline{CB} + 0,64\overline{CA}$

5) $(\overline{BC} - \overline{BA})(\overline{AC} + \overline{CB}) = \overline{AC}\cdot\overline{AB}$, где $\overline{CA}\{0;3\}$, $\overline{AB}\{4;-3\} \Rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{AB} = -9$.

Вариант 2



1) $BH = 6 \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}$; DF=12·sin60° $= 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = AB \cdot DF = 36\sqrt{3}$.

2) $\angle C = \angle A = 60° \Rightarrow \angle D = 180° - 60° = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EDC = 60° \Rightarrow \Delta ECD$ — равносторонний ⇒

$\Rightarrow S(ECD) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}CD^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 36 = 9\sqrt{3}$.

3) По теореме косинусов:

$AC = \sqrt{36 + 144 - 2\cdot 6\cdot 12\cdot \cos 120°} = \sqrt{180 + 144\cdot\dfrac{1}{2}} =$

$= \sqrt{180 + 72} = \sqrt{252} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7} = 6\sqrt{7}$.

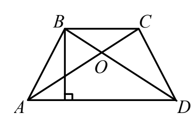
4) Т.к. CE=6, то BE=6 $\Rightarrow \overline{DE} = \dfrac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{DB}) = -\dfrac{1}{2}\overline{CD} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{DC}) =$

$= -(1/2)\overline{CD} - (1/4)\overline{CD} + (1/4)\overline{CB} = (1/4)\overline{CB} - (3/4)\overline{CD}$.

5) $(\overline{AB} + \overline{BE})(\overline{CE} - \overline{CD}) = \overline{AE}\cdot\overline{ED}$,

где $\overline{AE}$ {6+6cos60°; 6}⇒ $\overline{AE}$ {9; 6}⇒ $\overline{ED}$ {3; –6}⇒ $\overline{AE}\cdot\overline{DE}$ =–27+36 =9.

Вариант 3



1) Очевидно, что $2AE = AD - BC \Rightarrow AE = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = tg30° \cdot 2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}(10 + 6)\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

2) Т.к. $BC \parallel AD$, то $\angle CBO = \angle ODA$ и $\angle BCO = \angle OAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta DOA$ и $k = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{S(AOD)}{S(BOC)} = k^2 = \dfrac{25}{9}$.

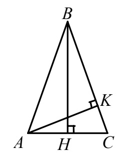
3) По теореме Пифагора:

$$BD=\sqrt{BE^2+ED^2}=\sqrt{\frac{4}{3}+64}=\frac{14\sqrt{3}}{3};\quad R=\frac{BD}{2\,sin\,30^0}=\frac{\frac{14\sqrt{3}}{3}}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

4) $\overline{BE}=\overline{BA}+\overline{AE}=\overline{BA}+\frac{1}{5}\overline{AD}=\overline{BA}+\frac{1}{5}(\overline{BD}+\overline{BA})=\frac{1}{5}\overline{BD}+\frac{4}{5}\overline{BA}$.

5) $\overline{BD}\left\{8;-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$, $\overline{BE}\left\{0;-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$ $\Rightarrow$ $(\overline{BC}+\overline{CD})(\overline{AE}-\overline{AB})=\overline{BD}\cdot\overline{BE}=\frac{4}{3}$.

Вариант 4



1) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8\cdot 3\cdot 3\cdot 2}=12\Rightarrow$

$\Rightarrow sin\angle ABC=\frac{2S}{AB\cdot BC}=\frac{24}{25}$.

2) $\angle C$ — общий и оба они прямоугольные $\Rightarrow$ и подобны.

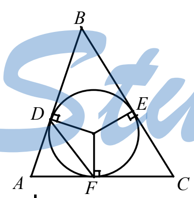
$AK=\frac{2S}{BC}=\frac{24}{5}\Rightarrow KC=\sqrt{\left(6-\frac{24}{5}\right)\left(6+\frac{24}{5}\right)}=\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{54}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{6\cdot 6\cdot 9}=\frac{6\cdot 3}{5}=\frac{18}{5}$.

3) $R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{6}{\frac{48}{25}}=\frac{150}{48}=\frac{50}{16}=\frac{25}{8}$; $l_{окр}=2\pi R=2\pi\cdot\frac{2\pi}{8}=6{,}25\pi$ см.

4) $\overline{AK}=\overline{AC}+\overline{CK}=\overline{AC}+\frac{\frac{18}{5}}{5}\overline{CB}=\overline{AC}+\frac{18}{25}\overline{CB}$.

5) $(\overline{BD}+\overline{BC})\cdot\overline{AC}=2\overline{BD}\cdot\overline{AC}=0$, т.е. $BD\perp AC$.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

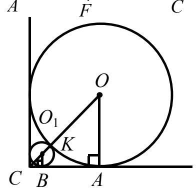


1. Пусть $CF=x=CE$, тогда $p=8+x$, тогда

$S=\sqrt{(p+x)\cdot 3\cdot 5\cdot x}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{(8+x)\cdot x\cdot 15}}{8+x}=\frac{5}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{15x}{8+x}=\frac{25}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow 45x=200+35x\Rightarrow 20x=200\Rightarrow x=10\Rightarrow BC=13$.

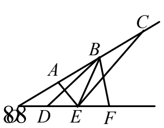


2.

Пусть r — радиус меньшей окружности, тогда

$OE=\sqrt{2}r$, $OC=\sqrt{2}\Rightarrow OC=CD+r+OE$,

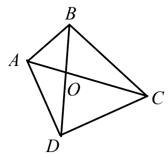
$\sqrt{2}=1+r+r\sqrt{2}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.



3.

$\Delta AEC=\Delta OEB$, т.к. $OB=AC$;

$\Delta DBE = \Delta OEB$, т.к. $OE = DF \Rightarrow \Delta AEC = \Delta DBF$.

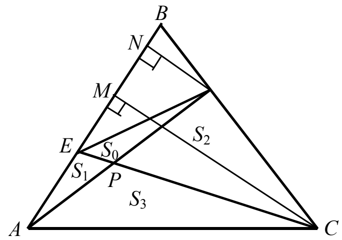


4. $S(ABC) = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B < \dfrac{1}{2}$;

$S(ADC) = \dfrac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin\angle D < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = S(ABC) + S(ADC) < (1/2) + (1/2) = 1$.

5. $S(AEC) > S(AEF)$, т.к. $FN < CM$, тогда



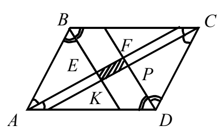
$S_1 + S_3 > S_0 + S_1$; $S_3 > S_0$;

$\dfrac{S_1}{S_0} = \dfrac{AP}{PF}$, $\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{AP}{PF} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_0} = \dfrac{S_3}{S_2}$, но $S_0 < S_3 \Rightarrow \dfrac{S_3}{S_2} > \dfrac{S_0}{S_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_0} > \dfrac{S_0}{S_2} \Rightarrow S_0 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

6. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$. Но $a = 2R\sin\angle A$, $b = 2R\sin\angle B$ и $c = 2R\sin\angle C$ по теореме синусов, тогда теорема косинусов примет вид: $4R^2\sin^2\angle A = 4R^2\sin^2\angle B + 4R^2\sin^2\angle C - 8R^2\sin\angle B \cdot$ $\cdot \sin\angle C \cdot \cos\angle A \Rightarrow \sin^2\angle A = \sin^2\angle B + \sin^2\angle C - 2\sin\angle B \cdot \sin\angle B \cdot \cos\angle A$. Ч.т.д.



7. Пусть $\angle BAD = \alpha, \angle ABC = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \pi$ и $\angle FAD = \dfrac{\alpha}{2}$, а

$\angle EDA = (1/2)\ \angle CDA = (1/2)\ \angle ABC = (\beta/2)$,

но $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AED = 90°$.

Аналогично можно показать, что и другие углы равны $90° \Rightarrow EDKF$ — прямоугольник.

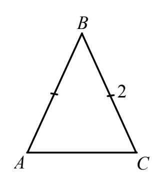
Пусть $AB = b$, $BC = a$. Тогда $BK = a\sin(\alpha/2)$, $BE = b\sin(\alpha/2) \Rightarrow$
$\Rightarrow EK = BK - BE = (a - b)\sin((\alpha/2)$. Аналогично,
$EF = (a - b)\cos(\alpha/2) \Rightarrow S(EFDK) = (a - b)^2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)$, а

$S(ABCD) = ab\sin\alpha \Rightarrow \dfrac{S(EKDF)}{S(ABCD)} = \dfrac{(a-b)^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{ab\sin\alpha} = \dfrac{(a-b)^2}{2ab}$,

но $a = 7$, $b = 5 \Rightarrow \dfrac{(a-b)^2}{2ab} = \dfrac{4}{70} = \dfrac{2}{35}$.

8. $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$, т.к. S — целое число, то

$\sin\angle B = \dfrac{1}{2}$ или $\sin\angle B = 1 \Rightarrow \angle B$ равен 30° или 90° или150°.

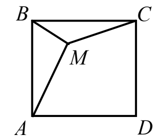


1) $\angle B = 30°$ по теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{2 \cdot 2^2 (1 - \cos 30°)} = 2\sqrt{2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\ .$$

2) $\angle B = 150°$, тогда $AC = \sqrt{2 \cdot 2^2 (1 + \cos 30°)} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

3) $\angle B = 90° \Rightarrow$ по теореме Пифагора: $AC = 2\sqrt{2}$.



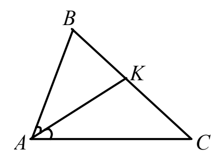
9. Пусть $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$, а сторона квадрата равна x. Тогда по теореме косинусов:

$$\begin{cases} 49 = 9 + x^2 - 6x\cos\alpha \\ 25 = 9 + x^2 - 6x\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x^2 - 40}{6x} \\ \cos\beta = \dfrac{x^2 - 16}{6x} \end{cases}.$$

Но $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 40}{6x} = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 16}{6x}\right)^2}\ ,\ \left(\frac{x^2 - 40}{6x}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x^2 - 16}{6x}\right)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^4 - 80x^2 + 1600 = 36x^2 - x^4 + 32x^2 - 256 \Rightarrow x^4 - 74x^2 + 928 = 0$, откуда $x_1 = \sqrt{58}$, $x_2 = 4$, т.е. $4 < \sqrt{40}$, то x_2 — посторонний $\Rightarrow x = \sqrt{58}$.



10. Пусть $AB = x$, $AK = y$; $S(BAK) + S(CAK) = S$;

$$S(BAK) = \frac{1}{2} xy \cdot \sin 30° = \frac{xy}{4}\ ;$$

$$S(CAK) = \frac{1}{2} (a - x)y \cdot \sin 30° = \frac{(a - x)y}{4}\ ;$$

$$S(ABC) = \frac{x(a - x)}{2} \sin 60° = \frac{x(a - x)\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sqrt{3}\, x(a - x) = xy + (a - x)4,$$

откуда, $y = \dfrac{\sqrt{3}x(a - x)}{a}$. По теореме косинусов:

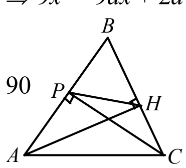
$BC^2 = x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x)(1/2) = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - ax + x^2 = 3x^2 - 3ax + a^2$, но

$$y = \frac{2}{3} BC \Rightarrow \frac{x(a - x)\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{3x(x - a) + a^2}\ .$$

Обозначим, $x(a - x) = t$, тогда: $\dfrac{t\sqrt{3}}{a} = \dfrac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3t}$; $3t\sqrt{3} = 2a\sqrt{a^2 - 3t}$,

$27t^2 = 4a^2(a^2 - 3t)$, $27t^2 + 12a^2t - 4a^4 = 0$, откуда $t = \dfrac{2a^2}{9} \Rightarrow x(a - x) = \dfrac{2a^2}{9} \Rightarrow$

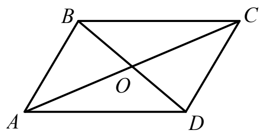
$\Rightarrow 9x^2 - 9ax + 2a^2 = 0$, откуда $x_1 = a/3$, $x_2 = 2a/3 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}/3$.



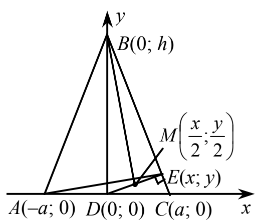
11. Пусть PC и AH пересекаются в точке O.

Т.к. $\angle APC = \angle AHC = 90°$, то вокруг $APHC$ можно описать окружность $\Rightarrow \Delta POH \sim \Delta AOC$ и $k = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAH = 30°$ (т.к. $(PO/AO) = 1/2$ и $\angle APO = 90°) \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 90° - \angle BAH = 60°$.

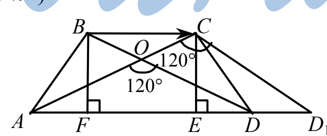
12. Пусть R — радиус окружности, тогда сумма квадратов сторон квадрата равна $4 \cdot 2R^2 = 8R^2$, а сумма квадратов сторон 16-угольника равна $16 \cdot 2R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right) = 32R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 8R^2 > 32R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$.



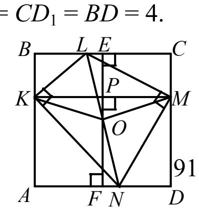
13. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, а $\angle BAD = \alpha$,
тогда $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ и
$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$, тогда
$AC \cdot BD = \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}$, а $BC^2 - AB^2 = b^2 - a^2$;
$\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha} \vee b^2 - a^2$, $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha \vee (b^2 - a^2)^2$,
$(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2 \vee 4a^2b^2\cos^2\alpha$, $(a^2+b^2-a^2+b^2)(a^2 + b^2 + a^2 - b^2) \vee 4a^2b^2\cos^2\alpha$,
$4a^2b^2 \vee 4a^2b^2\cos^2\alpha \Rightarrow \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha} > b^2 - a^2 \Rightarrow$ ч.т.д.



14. Выберем систему координат, как показано на рисунке, тогда
$x = \dfrac{ah^2}{a^2 + h^2}$, $y = \dfrac{a^2h}{a^2 + h^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AE}\left\{a + \dfrac{ah^2}{a^2 + h^2}; \dfrac{a^2h}{a^2 + h^2}\right\}$, и
$\overline{BM}\left\{\dfrac{ah^2}{2(a^2 + h^2)}; \dfrac{a^2h}{2(a^2 + h^2)} - h\right\} \Rightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BM} =$
$= \dfrac{a(2h^2 + a^2)}{a^2 + h^2} \cdot \dfrac{ah^2}{2(a^2 + h^2)} - \dfrac{a^2h}{a^2 + h^2} \cdot \dfrac{h(a^2 + 2h^2)}{2(a^2 + h^2)} = 0$. Ч.т.д.



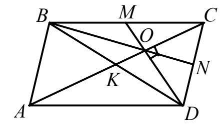
15. Пусть $AC = a$, тогда перенесем BD на $\overline{BC}$, получим, CD_1.
$\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{1}{2}$ и $\angle CEA = 90° \Rightarrow \angle CAD = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ODA = 30° \Rightarrow \angle CBO = 30° \Rightarrow \angle BCO = 30° \Rightarrow \angle ODD_1 = 150° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CD_1D = 30° \Rightarrow \Delta ACD_1$ — равнобедренный $\Rightarrow AC = CD_1 = BD = 4$.



16. Т.к. $\angle LKN = \angle LMN = 90°$, то вокруг $KLMN$ можно описать окружность с центром в точке O — середине LN. $KO = OM$ — радиусы $\Rightarrow KP = PM$. Продлим OP

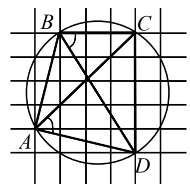
до пересечения с BC и AD в точках E и F, соответственно. Т.к. $KM \parallel AD$ и $KM \parallel BC$,

то $BE = EC = FA = FD$; $\Delta LOE = \Delta NOF$ по гипотенузе и острому углу $\Rightarrow$ $EO = OF \Rightarrow O$ — центр квадрата.



17. Пусть $DM \cap AC = 0$. BN—медиана $\Delta CBD \Rightarrow O \in BN$. Т.к. $\angle COD = 90°$, то $NO = (1/2)\ CD$, но $ON = (1/3)\ BN \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{BN}{CD} = \dfrac{3}{2}$.



18. Очевидно, что площадь любого треугольника с углами в узлах сетки есть число вида $\dfrac{n}{2}$ $(n \in \mathrm{N})$, так как основание и высота суть натуральные числа.

$S(ADC) = (1/2)\ AC \cdot AD \cdot \sin\angle DAC$,

$S(DBC) = (1/2)\ BD \cdot BC \cdot \sin\angle DBO$,

но $\angle DPC = \angle DBC = \alpha$ (т.к. $PBCD$ — вписанный) $\Rightarrow AC \cdot AD \cdot \sin\alpha = m_1$,

$BC \cdot BD \cdot \sin\alpha = m_2 \Rightarrow AC \cdot AD - BD \cdot BC = \dfrac{m_1 - m_2}{\sin\alpha} \geq 1$, т.к. $m_1 \neq m_2$,

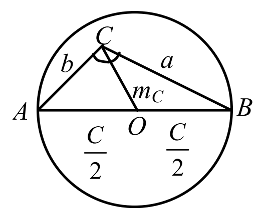
т.к. $PBCD$ — не трапеция.

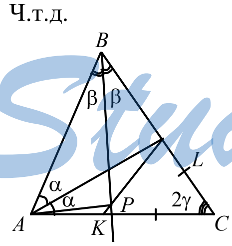
19. Построим круг с диаметром AD, т.к.

$\angle ABC > \dfrac{\pi}{2}$, то точка C находится в центре круга $\Rightarrow CO < \dfrac{c}{2} = \dfrac{c}{4} + \dfrac{c}{4}$, т.к.

$c < a + b$, то $\dfrac{c}{4} < \dfrac{a+b}{4} \Rightarrow CO < \dfrac{c}{4} + \dfrac{a+b}{4} = \dfrac{p}{4}$.

Ч.т.д.





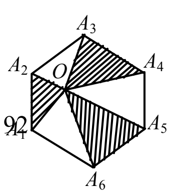
20. Т.к. $CL = CK$, то $\angle KLC = 90° - \gamma$

$\angle ALC = 180° - \alpha - 2\gamma$,

$\angle ALP = 180° - \alpha - 2\gamma - (90° - \gamma) = 90° - (\alpha + \gamma)$, но $\alpha + \beta + \gamma = 90° \Rightarrow \alpha + \gamma = 90° - \beta \Rightarrow \angle ALC = \beta$.

$\angle ADP = \angle ALC = \beta \Rightarrow$ вокруг $ABCP$ можно описать окружность $\Rightarrow$ т.к. $\angle ABP = \angle PBL$, то $AP = PL$ как хорда, стягивающая одинаковые дуги.

21. Пусть точки D и B находятся на расстоянии 1, тогда точка C может находиться лишь в пересечении окружностей единственного радиуса с центром A и $B \Rightarrow \Delta ABC$ — равносторонний $\Rightarrow R = \dfrac{1}{2\sin 60°} = \dfrac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

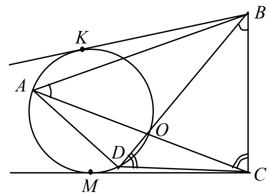


22. Очевидно, что либо

$S(A_1OA_2) + S(A_3OA_4) + S)A_5OA_6) + S(A_5OA_6) \geq \dfrac{S}{2}$ либо

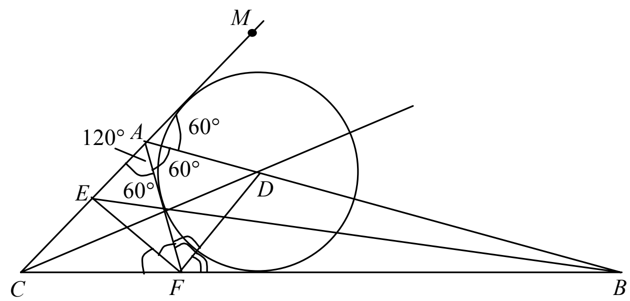
$S(A_2OA_5) + S)A_4OA_5) + S(A_6OA_1) \geq S/2$. Построим на сторонах равностороннего треугольника ABC
(со стороной, равной стороне шестиугольника) шестиугольники, равные тем 3-м, сумма площадей которых больше $S/2$.
Обозначим получившийся 6-угольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, тогда

$S(B_1B_2B_3B_4B_5B_6) > S(OBC) + \dfrac{S}{2} = \dfrac{1}{6}S + \dfrac{S}{2} = \dfrac{2}{3}S$. Ч.т.д.



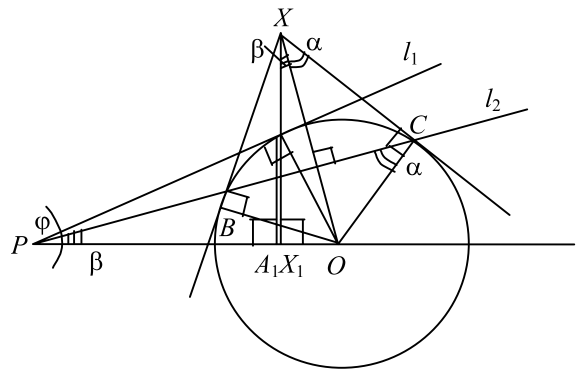
23. $\Delta ABC \sim \Delta BCO$, т.к. $\angle BAC = \angle OBC$ и $\angle BCA$—общий$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{CB} \Rightarrow BC^2 = AC \cdot CO$,
но $CM^2 = AC \cdot CO \Rightarrow BC = MC \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BDC \sim \Delta BCO \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{BC}{BO} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot BO$,
но $BD \cdot BO = BK^2 \Rightarrow BK = BC \Rightarrow MC = BK$. Ч.т.д.

24.



Строим вписанную окружность ΔACM, касающуюся AF; CD — биссектриса $\angle C$, AD — биссектриса $\angle MAF \Rightarrow$ точка D — центр окружности $\Rightarrow FD$ — биссектриса $\angle AFB$ и $\angle DFA$ =(1/2) $\angle BFA$. Аналогично, $\angle EFA$ =(1/2)$\angle CFA \Rightarrow \angle EFD = \angle EFA + \angle PFA =$
=(1/2) ($\angle CFA + \angle BFA$) = 90°. Ч.т.д.

25.



Строим $AA_1 \perp PO$ и $xx_2 \perp PO$. Пусть $\angle APO = \varphi$, $\angle PCO = \alpha$, $\angle CPO = \beta$.

По теореме синусов: $\frac{PO}{\sin\alpha} = \frac{CO}{\sin\beta}$, но

$CO = OP = PO\sin\varphi \Rightarrow \sin\beta = \sin\alpha\sin\varphi$ (1)

$PA_1 = PA\cos\varphi$, но $PA = PO\cos\varphi \Rightarrow PA_1 - 80\cos^2\varphi$ (2)

$PX_1 = PO - OX_1$, причем $\angle X_1XO = \angle CPO = \beta \Rightarrow PX_1 = PO - OX \cdot \sin\beta$. $\angle OXC =$ $= \angle PCO = \alpha$, $OX = \frac{CO}{\sin\alpha} \Rightarrow PX_1 = PO - \frac{CO}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta$.

Учитывая (1) имеем: $PX_1 = PO - \frac{CO}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi = PO - CO \cdot \sin\varphi$, но

$CO = PO \cdot \sin\varphi \Rightarrow PX_1 = PO - PO \cdot \sin^2\varphi = PO\cos^2\varphi$ (3)

Сравнивая (2) и (3), получим, что $PA_1 = PX_1$, т.е. A_1 и X_1 — совпадают $\Rightarrow$ $XA \perp OP$. Ч.т.д.